Podučavanje matematičkog mišljenja

Petričević, Katarina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Katarina Petričević

Podučavanje matematičkog mišljenja

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Katarina Petričević

Podučavanje matematičkog mišljenja

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Matematičko mišljenje ne može se poistovjetiti sa rješavanjem zadataka iz matematike. Matematički razmišljati pri rješavanju problema, ne samo onih u matematici nego u životu, jedan je od osnovnih ciljeva u podučavanju matematike, no često se čini i kao nedostižan cilj. Glavni cilj podučavanja je taj da učenici samostalno rješavaju probleme matematičkim istraživanjem i da mogu utvrditi gdje se matematika koju su naučili može primjeniti u stvarnom životu. Međutim, dok učitelji širom svijeta imaju prilično uspjeha u postizanju ovog cilja, posebno kod sposobnijih učenika, uvijek postoji potreba za poboljšanjem, kako bi više učenika dublje shvatilo što to znači razmišljati matematički i koristiti matematiku da im pomogne u svakodnevnom životu.
U svrhu razvitka kompetencija potrebnih u 21. stoljeću u Hrvatske škole 2019. uvodi se kurikularna reforma pod nazivom *Škola za život*. Želi se staviti naglasak na rješavanje problema i kritičko mišljenje te poticanje kreativnosti i inovativnosti. Postoje mnogi obrazovni sustavi iz kojih je Hrvatska sakupljala iskustva dobre prakse ovakvog načina podučavanja. Jedna od njih je zasigurno Amerika.
U ovom diplomskom radu osvrnut ću se na osam matematičkih standarda donesenih u Americi 2010. godine. Matematički standardi opisuju koje vještine učenici trebaju razviti kako bi matematiku primjenjivali u svakodnevnom životu. Učenike treba neprestano poticati na rješavanje problema kako bi se ove vještine svakodnevno usavršavale. Sadržaj ovdje nije superioran, nego način na koji učenici uče matematičke sadržaje.
U svakom poglavlju ovog diplomskog rada obrađen je jedan matematički standard. Na početku svakog poglavlja opisan je matematički standard, pobliže su objašnjeni elementi ključni za bolje razumjevanje svakog standarda. Zatim su dani primjeri zadataka u kojima se može primijeniti svaki standard. Primjeri su uglavnom povezani sa poglavljem, odnosno standardom koji je opisan, no nerijetko se u jednom zadatku može primjeniti više standarda kako bi učenik uspješno riješio zadatak. Na kraju svakog poglavlja nalaze se pitanja koja učitelji trebaju odgovoriti kako bi procjenili je li učenik usvojio određeni standard.

1 Razumijevanje problema i ustrajanje u njihovom rješavanju

Kako bi usmjerili učitelje ovaj standard je pojašnjen na sljedeći način.
Vješti matematičari započinju s rješavanjem problema tako što si objasne značenje problema. Analiziraju zadane podatke, ograničenja, poveznice i ciljeve. Radije tvore pretpostavku o tome kojeg je oblika rješenje i što to rješenje znači te planiraju korake rješavanja problema, umjesto da započnu rješavanje pukim nagađanjem. Kako bi dobili uvid u rješenje nekog problema, razmatraju analogne probleme, isprobavaju specijalne slučajeve, jednostavnije oblike originalnog problema. Prate i procjenjuju svoj napredak i ukoliko je potrebno mijenjaju smjer rješavanja. Stariji učenici, ovisno o kontekstu problema, mogli bi transformirati algebarski zapis ili promijeniti raspon koordinatne mreže na grafičkom kalkulatoru kako bi dobili potrebnu informaciju (grafički kalkulator ima opciju crtanja grafa funkcije gdje se proizvoljno unosi raspon brojeva na koordinatnim osima). Vješti matematičari objašnjavaju povezanost jednadžbi, verbalnih opisa, tablica i grafova ili crtaju dijagrame koji prikazuju važne značajke i podatke, gdje traže određene pravilnosti. Mlađi učenici se oslanjaju na konkretne objekte ili slike kako bi riješili dani problem. Vješti matematičari provjeravaju svoja rješenja koristeći različite metode i neprestano si postavljaju pitanje „Je li ovo smisleno?“. Mogu razumijeti pristupe koje su koristili drugi za rješavanje složenih problema te pronaći povezanosti među različitim pristupima.

Problemi s kojima se susrećemo u stvarnom životu ne pitaju nas koje gradivo smo upravo naučili, niti nam govore koje nastavne cjeline trebamo koristiti za njihovo rješavanje. Zapravo, rijetko kada znamo na koje točno pitanje trebamo odgovoriti i gotovo nikada nam nije rečeno gdje trebamo započeti. Kako bismo uspjeli riješiti problem, trebamo shvatiti koja pitanja si trebamo postaviti, na koja prijašnja iskustava se možemo osloniti, trebamo li nekakve dodatne informacije i gdje ćemo započeti. Primjenjujući ovaj standard učenici mogu biti poučeni metodologijama rješavanja problema. Učitelji im trebaju dati dovoljno prilika da ih svjesno koriste u rješavanju zadataka. Tako će primjenjivanje ovih metodologija učenicima postati prirodno.

1.1 Problemi s kojima se susrećemo

Problemski zadatak u matematici je zagonetka. Ne možemo sa sigurnošću pretpostaviti kako ćemo započeti njegovo rješavanje, iako je očito da je ono povezano s matematikom. Primjenjujući ovaj standard vrlo je važno da učitelji kada primjerice poučavaju učenike množenju prirodnih brojeva, učenicima ne postavljaju samo problemske zadatke koji su povezani s množenjem prirodnih brojeva. Kada bi im postavljali samo problemske zadatke takvog tipa, tada bi njihovo rješavanje bilo puno očitije pa takve zadatke zapravo ne možemo nazvati problemskim. Postoje različite vrste problemskih zadataka. Nisu svi zadaci riječima problemski, niti su svi problemski zadaci zadani riječima. Postoje problemski zadaci koji imaju više mogućih odgovora i oni koji se mogu riješiti na više načina, ali postoji samo jedno njegovo rješenje. Primjeri takvih zadataka bit će opisani u ovom diplomskom radu.

1.2 Interpretacija problemskih zadataka

Postupak kojim učenici interpretiraju problemski zadatak je vrlo složen. Za početak učenici moraju vrlo dobro razumjeti što se u zadatku pita, kako bi ga učinkovito riješili.
Učenik treba:

- odrediti što je u zadatku poznato,
- prepoznati i razmotriti ograničenja rješenja zadatka ukoliko postoje,
- razmotriti odnose između poznatih podataka,
- postati svjestan pitanja na koji se traži odgovor.

1.3 Razrada plana za rješavanje problemskog zadatka

Pri rješavanju matematikog problema svaki učenik treba razraditi plan rješavanja. Učitelji trebaju naučiti učenike kako isplanirati rješavanje zadatka što je ključno u nastavi matematike. George Polya u svojoj knjizi „How to solve it“(1966.) predstavio je četiri osnovna principa u rješavanju problemskih zadataka:

1. Razumijevanje zadatka
2. Stvaranje plana

3. Izvršavanje plana

4. Osvrt

„Osvrtom na gotovo rješenje, ponovnim razmatranjem i preispitivanjem rezultata i puta koji je do njega doveo, oni bi mogli učvrstiti svoje znanje i povećati svoje sposobnosti u rješavanju zadataka.“ (Polya, 1966, str. 12)
Nakon objavljene knjige Georga Polya pojavile su se mnoge varijacije njegovih principa.
Alan Zollman objavljuje ideju rješavanja koristeći pristup grafičkog organizatora. U središtu organizatora učenik treba odgovoriti na pitanje „Što trebam pronaći?“. Okružen sa četiri kvadranta: što je već poznato, oluja ideja metoda za rješavanje, pokušaji rješavanja, objašnjenja koja treba uključiti u rješavanje.[1]

Slika 1: Zollmanov grafički organizator

[1] A. Zollman, *Students Use Graphic Organizers to Improve Mathematical Problem-Solving Communications*, Middle School Journal,Vol. 41, No. 2 (Studeni 2009), 4-12.

1.4 Kako razviti ustrajnost pri rješavanju problemskih zadataka?

Učenici često odustaju od rješavanja problemskih zadataka ukoliko ne mogu brzo doći do rješenja. Ustrajnost nije nešto što dolazi automatski, već se treba njegovati. Učenicima treba često davati izazove za rješavanje pravih problemskih zadataka, ne zadataka koje smo im upravo pokazali kako se rješavaju. Uz navedeno, problemski zadaci koje im zadajemo trebaju biti primjereni. Presudno je da učenici, uzimajući u obzir njihovo trenutno znanje iz matematike, mogu riješiti zadani zadatak, ako su ustrajni u njegovu rješavanju. Ukoliko često pri rješavanju, unatoč njegovoj želji i ustrajnosti da ga riješi, učenik ne riješi uspješno zadatak, velika je mogućnost da će u budućnosti vrlo brzo odustati.

Postoji još jedna navika koja se treba razvijati kod učenika, a to je pronalaženje više rješenja zadatka, čak i kada pronađu jedno točno rješenje. Nerijetko učenici očekuju da postoji samo jedno rješenje postavljenog problema, a kada ga pronađu, zadatak smatraju riješenim. Ukoliko učitelji učenike često podsjećaju da trebaju potražiti postoji li više rješenja i zadaju zadatke u kojima zaista postoji više rješenja, učenici će vrlo brzo usvojiti naviku pronalaženja više rješenja.

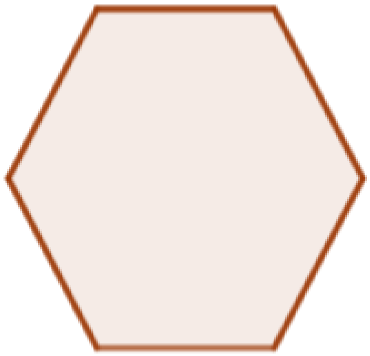
1.5 Primjer problemskog zadataka koji će kod učenika izazvati ovaj standard

Primjer 1. *Pretpostavimo da površina šesterokuta sa Slike 2) iznosi* $\frac{1}{2}$*. Koje likove možemo načiniti, a da je njihova površina* $\frac{5}{3}$*?*

Učenikov plan rješavanja zadatka:

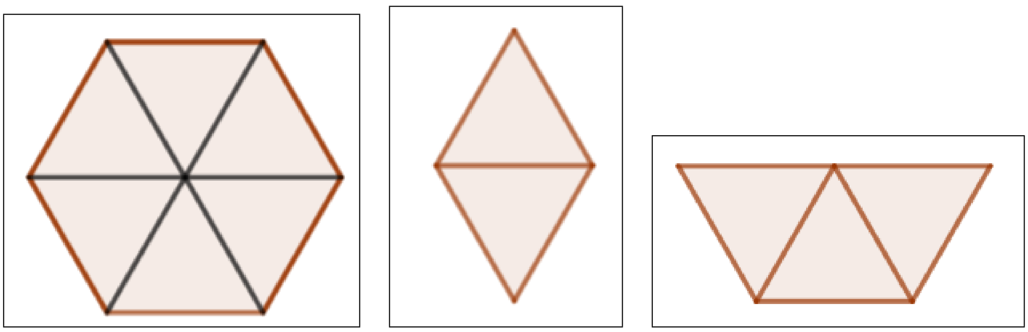
- Bilo bi korisno izdvojiti neke druge likove unutar šesterokuta i izračunati njihovu površinu.
- $\frac{5}{3}$ je veće od $\frac{1}{2}$, stoga će konačno riješenje biti veće od danog šesterokuta.
- Bilo bi korisno saznati od koliko polovina se sastoji $\frac{5}{3}$.

Cilj je načiniti lik čija površina iznosi $\frac{5}{3}$ i obrazložiti rješenje. Nekim učenicima se čini obeshrabrujuće pronaći rezultat u trećinama, dok je zadana početna vrijednost $\frac{1}{2}$. Nastavnik im može predložiti da $\frac{5}{3}$ zamjene sa $\frac{3}{4}$ ili $\frac{6}{4}$ te pomoću te vrijednosti



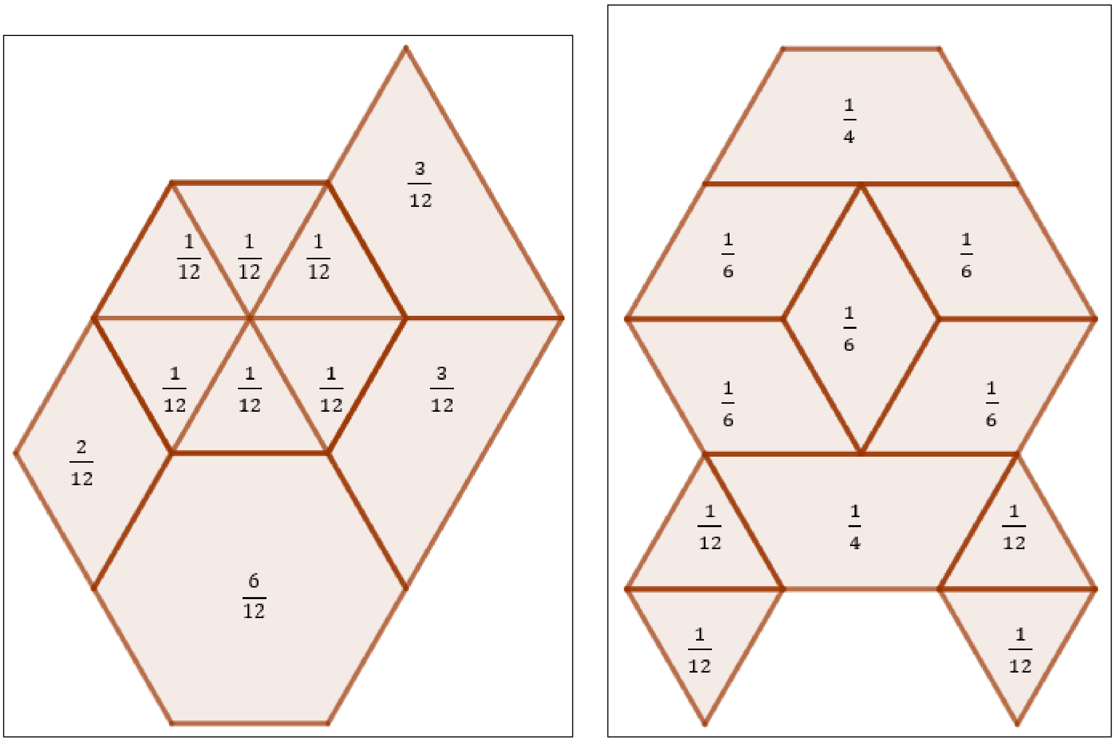
Slika 2: Zadani šesterokut

osmisle plan rješavanja. To će ih ohrabriti u rješavanju orginalnog zadatka. Ova metoda naziva se Metoda rješavanja jednostavnijeg problema.
Nadalje, učenik može razmišljati ovako: Podijelim li šesterokut na šest sukladnih trokuta, površina svakog trokuta će biti $\frac{1}{6}$ od $\frac{1}{2}$. Dakle, površina trokuta je $\frac{1}{12}$. Budući da 2 trokuta čine romb, njegova površina je $\frac{2}{12}$. Pomoću 3 trokuta možemo načiniti trapez površine $\frac{3}{12}$.



Slika 3: Izdvojeni oblici

Učenik može zaključiti da su površine likova koje je izdvojio izražene u dvanaestinama. $\frac{1}{2}$ pretvorit će u $\frac{6}{12}$, a $\frac{5}{3}$ u $\frac{20}{12}$. Sada od kombinacija brojeva 1,2,3 i 6 treba dobiti 20. Tada će znati koje oblike treba koristiti kako bi došao do rješenja. Neka od rješenja uključuju: 20 trokutova, 10 rombova, 3 šesterokuta i romb, ili rješenja koja se nalaze na Slici 4.



Slika 4: Moguća rješenja

Kako nastavnik treba navoditi učenika?

Što ako učenik ne osmisli nikakav plan za rješavanje ili ne zna gdje započeti s rješavanjem? Učitelj može postaviti pitanja:

- Može li rješenje sadržavati 4 šesterokuta? Zašto ne može?
- Je li jedan šesterokut dovoljan?
- Što misliš kolika je površina trapeza?

Učenik dolazi do jednoga ili dva rješenja, ali ne može ih pronaći više. Učitelj može postaviti pitanja:

- Misliš li da su to sva rješenja? Zašto nisu?
- Kako bi mogao dobiti još jedno rješenje?
- Primjećujem da imaš dva rješenja. Možeš li iskombinirati oblike iz oba rješenja kako bi dobio novo?

- Primjećujem da si rješenje dobio zbrajanjem i to je očito dobar način. Bi li mogao iskoristiti dijeljenje? (**Napomena:** Izračuna li učenik $\frac{5}{3}$:$\frac{1}{2}$=$\frac{10}{3}$=3$\frac{1}{3}$ dobit će vrijednost 3 šesterokuta i romba.)

Ovaj problemski zadatak je koristan jer razjašnjava značenje dijeljenja razlomaka te također učenik uvježbava računske operacije s razlomcima.Također je koristan gledamo li ga kao primjer skupine problemskih zadataka zadanih na sličan način. Dani lik i njegova površina može se mijenjati, kao i površina likova koji će biti rješenje. Površina može biti cijeli broj, razlomak ili decimalni broj.

Kako ovaj zadatak razvija ustrajnost?
Kao što je već spomenuto, zadatak koji ima više točnih rješenja, kao što je ovaj, razvija ustrajnost kod učenika.Kako bi učenik došao do rješenja, stvara grafičke uzorke što može biti zanimljivo i opuštajuće.

1.6 Procjena usvojenosti standarda

Kada učitelj želi kod učenika procijeniti vještinu primjenjivanja standarda "Razumijevanje problema u ustrajanje u njihovom rješavanju", postoje mnoga pitanja na koja treba odgovoriti:

- Razumije li učenik što je u zadatku zadano, bez obzira je li zadano implicitno ili eksplicitno?
- Primjećuje li učenik ukoliko su podaci zadani u zadatku kontradiktorni ili nedostaje podataka?
- Je li učenik svjestan koje je točno pretpostavke postavio u zadatku?
- Je li plan koji je učenik razradio smislen?
- Koristi li učenik različite pristupe rješavanju ili uvijek koristi metodu "Pogodi pa provjeri"?
- Je li učenik samostalan pri rješavanju?
- Odustaje li brzo ili ustraje u rješavanju zadatka?
- Provjerava li redovito je li rješenje koje je dobio smisleno?

2 Apstraktno i kvantitativno rasuđivanje

Drugi standard za nastavu matematematike objašnjen je na sljedeći način.
Vješti matematičari smisleno povezuju odnos među brojevima u problemskom zadatku. Povezuju dvije komplementarne aktivnosti kako bi riješili zadatak: Izdvajanje iz konteksta kako bi sažeti situaciju zadanu u zadatku koriste se simbolima i upravljaju simbolima na način da je svaki simbol individua sam za sebe. Stavljanje u kontekst: ponekad u procesu manipulacije brojevima treba zastati kako bi ispitali simbole koje smo pridružili brojevima. Kvantitivno rasuđivanje podrazumijeva naviku oblikovanja dosljednog prikaza problemskog zadatka. Treba pridati važnost značenju brojeva zadanih u zadatku, ne samo računati. Bitno je znati i prilagoditi rješavanje svojstvima računskih operacija i zadanim varijablama.

Iako neki smatraju da matematika u školama prvenstveno služi za rješavanje problemskih zadataka, drugi smatraju da je ispravno rasuđivanje srce matematike. Ovaj standard se bavi upravo rasuđivanjem, što je neupitno važna komponenta matematike. Također, fokusira se na povezanost između matematike i pravih životnih problema izdvajanjem i ponovnim stavljanjem u kontekst.

2.1 Situacije u kojima možemo primijeniti ovaj standard

Ovaj matematički standard možemo primijeniti u situacijama različitog tipa. Ponekad se učenici suočavaju s problemskim zadatkom koji je zadan u nekom kontekstu koji se obično može riješiti nekom apstraktnom matematičkom strategijom. No, nije nužno da je svaki problemski zadatak zadan u kontekstu, često učenik samostalno mora otkriti na koji način su povezani zadani brojevi.

2.2 Situacije s kontekstom

U situacijama s kontekstom, učenici su upoznati s informacijama povezanim sa stvarnim situacijama. Koristeći svoje znanje iz matematike trebaju riješiti zadani problem. U nižim razredima osnovne škole takve situacije najčešće uključuju prebrojavanje, zbrajanje ili oduzimanje. Što su učenici stariji dane situacije postaju kompleksnije, uključuju druge računske operacije i algebarske izraze.
U osnovnoškolskom obrazovanju, često je učitelj taj koji učenicima riješava problemski zadatak određenog tipa. Postoji velika korist u tome da učenici sami pokušaju

doći do rješenja. Učenicima možemo zadati zadatak u kojem imamo tri zdjele i u svakoj po pet jabuka. Matematički i izvan konteksta dani zadatak može se zapisati kao $3 \cdot 5$. Primjenjujući matematičke strategije učenik će doći do zaključka $3 \cdot 5 = 15$. Dobiveni rezultat učenik ponovno stavlja u kontekst i zaključuje da se u košarama nalazi 15 jabuka.

2.3 Apstraktno rasuđivanje

Apstrakcija znači izdvojiti bitna svojstva koja su zajednička skupu objekata, problema ili procesa skrivajući nebitne razlike i svojstva koja su jedinstvena za svaki. Mogućnost apstrakcije učeniku daje snagu da se nosi s nizom problema koji su raznoliki i složeni. Primjerice, djeca se susreću s određenim likovima, figurama i dijagramima u geometriji u različitim kontekstima. U isto vrijeme, svi geometrijski likovi su apstrakcije, odnosno prikazi konkretnih objekata iz više konteksta, primjerice, krug nacrtan na papiru predstavlja familiju kružnih objekata. Slično se učenici susreću s različitim vrstama brojeva i raznolikim odnosima među njima. S druge strane, definicije, teoremi i standardni postupci su apstrakcije. To su opći slučajevi izvedeni iz specifičnih konteksta i odnosa - svojstava kao što su: asocijativno i komutativno svojstvo zbrajanja, distributivno svojstvo množenja prema zbrajanju / oduzimanju, postupak dijeljenja, faktorizacija, rješavanje jednadžbi. Apstraktno mišljenje omogućava učeniku da računanje prilagodi potrebama problema.

2.4 Sveobuhvatno rasuđivanje

Kako bi učenik razmišljao apstraktno i kvantitativno odvojeno, a zatim zajedno, učitelji trebaju postaviti niz pitanja kako bi učenicima pomogli usredotočiti na razumijevanje količina (npr. vrsta i priroda brojeva), jezika (vokabular, sintaksa, struktura rečenica i prijevod), te operacije povezane s problemom. Učitelji trebaju pomoći učenicima da se usredotoče na specifično kao i opće i apstraktno, posebno i univerzalno. To znači:

1. Utvrđivanje količina u problemskom zadatku (jedinice, veličine, značenje i kontekst) i odnosa među njima:
    - Što predstavljaju brojevi/ količine u zadatku?
    - Kakav je odnos između tih količina?
    - Koji je značaj jedinica koje su povezane s tim količinama?

- Jesu li sve mjerne jedinice ujednačene?

2. Stvaranje višestrukih prikaza količina i odnosa u zadatku (slikovni prikazi, jednadžbe, nejednakosti, dijagrami itd.).

   Ovi prikazi trebaju biti primjereni dobi učenika (na primjer, razmišljanje o dijeljenju kao "skupina od" i računanje uzastopnim brojenjem prikladno je na razini trećeg razreda, ali nije primjereno na razini šestog ili sedmog razreda). Učitelj treba pružiti niz prikaza matematičkih ideja i problemskih situacija i potaknuti raznolike načine rješavanja.

   - Koji su neki od načina za predstavljanje količina i njihovih odnosa?
   - Postoji li drugi način s kojim se brojevi mogu predstaviti (tablica, grafikon)?
   - Koje jednadžbe ili izrazi odgovaraju dijagramu, grafikonu, tablici...?
   - Koja se formula može primijeniti u ovom zadatku? Zašto?

3. Oblikovanje i manipuliranje jednadžbama (pri tome paziti na značenje količina, a ne samo na njihovo računanje):

   - Predstavlja li jednadžba najbolje odnose među zadanim količinama?
   - Kojim svojstvom ili pravilom jednadžba može biti jednostavnija?
   - Koja svojstva si primjenio tijekom rješavanja jednadžbe?
   - Možeš li koristiti neku drugu operaciju ili svojstvo za rješavanje ovog zadatka? Zašto da ili zašto ne?

4. Razumijevanje problemskog zadatka i provjera smislenosti rješenja

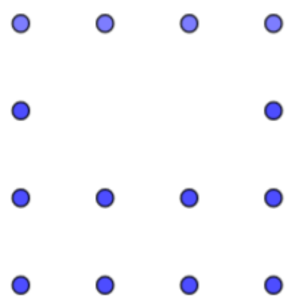
   - Kako se ovo rješenje može povezati s problemom?
   - Može li se rješenje problema povezati sa stvarnom životnom situacijom?
   - Što ovaj odgovor znači? Na primjer, što nagib ove crte znači u kontekstu problema? Može li se ovaj pristup generalizirati na druge brojevne sustave, operacije?

2.5 Primjeri koji će kod učenika izazvati ovaj standard

Primjer 2. *Mato je kupio majicu na rasprodaji i uštedio 12 kuna. Cijena majice prije sniženja bila je između 20 i 100 kuna. Kolika je originalna cijena majice i koliko posto je bila snižena?*

Dobra strana ovog zadatka je to što ima više rješenja. Neka rješenja su jednostavna za pronaći, a druga zahtjevaju malo više truda i mogu predstavljati izazov za učenike.
Učenik može odabrati 50% uštede na majici. Izračunat će od kojeg iznosa je 12 kuna 50% koristeći jednadžbu $\frac{x}{2}$=12 ili $0.5x = 12$. Dobiveno rješenje je $x = 24$. Sada učenik svoj odgovor mora dovesti u kontekst. Broj 24 je cijena majice prije sniženja, a snižena je 50%.
Drugi učenik može odabrati početnu cijenu koja iznosi 100 kuna. Još mu je poznato da je Mato uštedio 12 kuna. Jednadžba može izgledati ovako $100x = 12$. U ovom slučaju nepoznanica predstavlja postotak uštede, ne cijenu kao u prethodnom slučaju. Rješenje $x=\frac{12}{100}$ predstavlja uštedu od 12%. Vrlo je bitno kako učenik započinje s rješavanjem zadatka, o tome ovisi što će predstavljati nepoznata varijabla u jednadžbi. **Varijacije**: Nastavnik može prilagoditi zadatak tako da promijeni ušteđeni iznos i opseg originalne cijene.

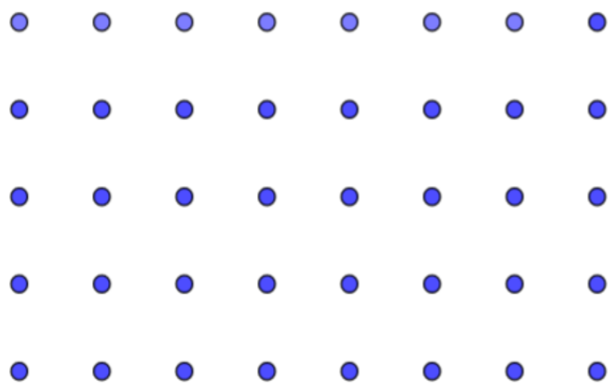
Primjer 3. *Pronađi način kako prebrojati točke na Slici 5) bez da brojiš jednu po jednu.*



Slika 5:Zadani niz točaka

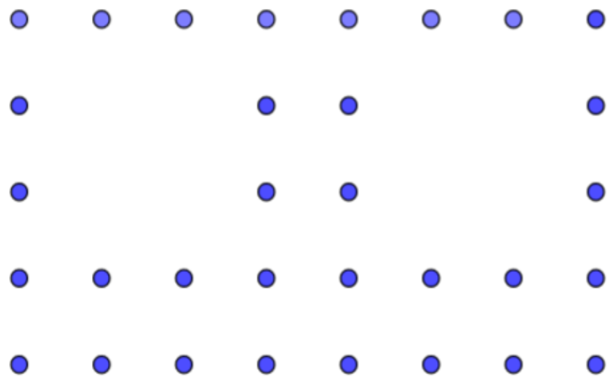
Dani zadatak je specifičan primjer problema s točkama. Ovaj tip problemskog zadatka može se redovito koristiti u nastavi matematike. Pomaže učenicima uvidjeti

brojeve sastavljene od drugih brojeva na različite načine. Primjerice, u ovom slučaju učenik može primijetiti 8 točki na dnu, dodati po 2 sa svake strane i 2 na vrhu. Računski će to prikazati kao $8 + 2 + 2 + 2 = 14$ što je ukupan proj točki na slici. S druge strane, učenik može primijetiti 4 točke u prvom stupcu, 3 u drugom stupcu, 3 u trećem stupcu i 4 u četvrtom stupcu. Računski je to $4 + 3 + 3 + 4 = 14$, što je naravno isti rezultat. Isto tako učenik može vidjeti tri reda po 4 točke i jedan red od dvije točke, što je ukupno 4+4+4+2=14. Stariji učenici svoj račun mogu prikazati kao $4 \cdot 4 - 2 = 14$.
Varijacije: Moguće je zadati mnoštvo zadataka ovakvog tipa. Zadavanje zadatka započinje odabirom polja proizvoljne veličine i strateškim uklanjanjem točki. Primjerice nastavnik može započeti sa sljedećim:

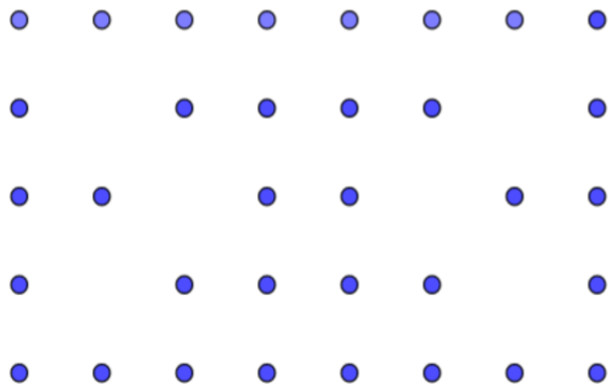


Slika 6: Početni niz točaka

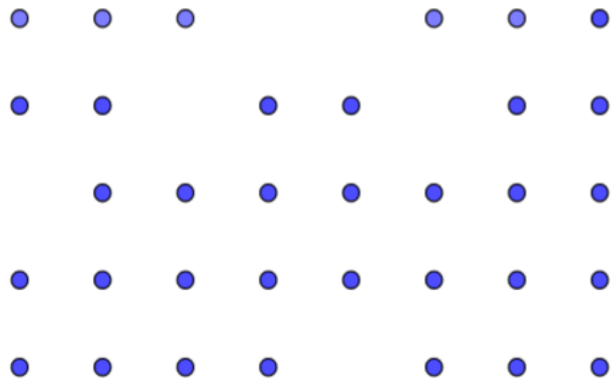
Uklanjanjem točaka možemo dobiti bilo kojih od nizova sa slike i mnoge druge.



Slika 7: Mogući niz točaka



Slika 8: Mogući niz točaka



Slika 9: Mogući niz točaka

2.6 Procjena usvojenosti standarda

Kako bi procijenili koliko je učenik usvojio drugi standard za podučavanje matematike "Apstraktno i kvantitivno rasuđivanje" potrebno je istražiti sljedeće:

- Ukoliko je zadatak zadan unutar nekog konteksta, je li učenikova reprezentacija primjerena zadanom zadatku?
- Ukoliko je zadatak zadan unutar nekog konteksta, interpretira li učenik dobivene rezultate na pravilan način?
- Zadani zadatak generalizacija je jednostavnijeg problema koja uključuje veze između brojeva. Koristi li učenik primjerena svojstva i značenja računskih operacija? Izabire li dobre primjere koji će mu dati dovoljno široku sliku kako bi došao do rješenja?

3 Kritičko argumentiranje

Naslov trećeg poglavlja ovog diplomskog rada odnosi se na treći standard za nastavu matematike koji kaže:
Vješti matematičari razumiju i koriste utvrđene pretpostavke, definicije i ranije dokazane rezultate kako bi konstruirali svoje argumente. Tvore poveznice između zadanih varijabli, ispituju logične izjave kako bi provjerili ispravnost poveznica koje su pretpostavili. Sposobni su analizirati zadane situacije tako što ih podjele po slučajevima, prepoznaju i koriste kontraprimjere. Opravdavaju svaki zaključak koji su donijeli, sigurno ih iznose drugim učenicima i odgovaraju na argumente drugih učenika. Induktivno donose zaključke o zadanim podacima, iznoseći opravdane argumente uzimajući u obzir kontekst iz kojega su potekli podaci. Također, vješti matematičari mogu usporediti učinkovitost između dva opravdana argumenta, razlikuju dobru i lošu logiku rješavanja zadatka i ukoliko postoji mana u argumentu objašnjavaju što je mana i zašto. Učenici nižih razreda osnovne škole konstruiraju argumente koristeći konkretne reference kao što su objekti, crteži, dijagrami i radnje. Takvi argumenti mogu biti smisleni i točni, iako ih još uvijek neće odmah generalizirati i formalno zapisati. Kasnije, učenici nauče odrediti domene na koje se argument odnosi. Učenici svih razreda trebaju poslušati argumente svojih razrednih kolega, raspraviti o smislenosti argumenata i postaviti korisna pitanja kako bi razjasnili ili poboljšali argumente.

Jedan tip argumenata koji je najčešći kod učenika je taj da učenik riješi specifičan problemski zadatak te objasni način na koji je dobio rješenje. Ono što se želi postići kod učenika je da se njihov argument odnosi na klasu problemskih zadataka. Primjeri takvih argumenata biti će navedeni u ovom poglavlju.

3.1 Kvaliteta argumenata

Postoji niz problema s kojima treba upoznati učenike kako bi njihovi argumenti bili kvalitetni:

- Argument ne može biti temeljen na nekoliko nepovezanih primjera.
- Argument ne može biti cirkularan. Drugim riječima, učenik ne može reći primjerice, da se mogu zbrojiti dva broja u bilo kojem redoslijedu, kada redoslijed u zbrajanju nije bitan.
- Argument je često popraćen vizualnim prikazom.
- Argument govori o osnovnom značenju elemenata u problemskom zadatku. Primjerice, dobar argument zašto je suma dva parna broja paran broj, nisu samo brojni primjeri koji pokazuju da je to svojstvo istinito, već se treba više fokusirati što pojam "paran" znači.

Sposobnost učenika da konstruira dobar argument je nešto što se s vremenom nauči. Učitelj treba s učenicima raspravljati koje su karakteristike dobrog argumenta. Mnogim učenicima, argumenti u kojima se koriste elegantniji matematički termini i simboli mogu se učiniti najboljima, no to nije uvijek slučaj. Ponekad se jako dobar argument temelji na slikovnom prikazu popraćenom sa nekoliko riječi. Kako učenici postaju stariji, to i njihovi argumenti moraju biti organiziraniji u smislu da se učenici s lakoćom mogu izraziti svoje misli.

3.2 Kritičko argumentiranje

Kao što učenici nauče kako konstruirati dobre argumente, tako trebaju priliku da nauče kako preispitati argumente koje su ponudili njihove razredne kolege. Učenici trebaju naučiti kako postaviti prava pitanja. Neke standardne fraze mogu pomoći učenicima kako bi započeli oblikovati svoje kritike. Kasnije će učenici samostalno kritički argumentirati. Primjerice, dobri počeci za kritičko argumentiranje mogu izgledati ovako:

- Slažem se s _____ zato što _____ .
- Nisam razumio zašto _____ .
- Ne slažem se s _____ zato što _____ .
- Pitam se zašto si koristio _____ .
- Što kada bi imao _____ ?

3.3 Primjeri koji će kod učenika izazvati ovaj standard

Jedno sporno pitanje prikazano je u primjeru. Ono o čemu se ovdje najviše raspravlja je pojam "najvjerojatnije". Što točno učenik mora argumentirati kako bi njegov argument bio uvjerljiviji? Treba li zaista kombinirati parove svih mogućih brojeva, ili je dovoljno provjeriti što se događa kod prvih 100 brojeva? Što još mogu napraviti?

Primjer 4. *Vanja tvrdi da ukoliko pomnožimo dva broja,vjerojatnije je da će rezultat biti neparan broj.Slažeš li se sa tvrdnjom? Zašto?*

Ovu pretpostavku vrijedi istražiti zbog brojnih razloga. Prvenstveno, ujedinjuje brojne različite koncepte, povezujući vjerojatnost i umnožak. Također, osnova je za druge pretpostavke o faktorima i višekratnicima koje učenici mogu kasnije istraživati, kao što su:

- Postoji li više višekratnika broja 3, nego višekratnika broja 2 ili 5?
- Pomnožimo li višekratnik broja 3 višekratnikom broja 5, što zasigurno možeš tvrditi o rezultatu?

Dok učenici pripremaju argument za gore navedeni primjer, neki od njih će jednostavno riješiti nekoliko primjera iz kojih će donijeti zaključak, dok će drugi upustiti u dublju analizu.
Učenik može predložiti sljedeći argument: "Ne slažem se s tvrdnjom, jer imamo jednak broj parnih i neparnih brojeva. To znači da je vjerojatnost da je rezultat neparan 50%."
Ovaj argument nije točan, no mnogi učenici to neće shvatiti, jer zvuči razumno.
Dobar, ali ne tako uvjerljiv argument može biti sljedeći: "Pomnožio sam sljedeće brojeve $3 \cdot 5$, $4 \cdot 6$, $5 \cdot 9$, $4 \cdot 10$ i $6 \cdot 8$. Većina rezultata su parni pa očekujem da će i odgovor biti da je vjerojatniji paran rezultat. "

Ostale učenike možemo potaknuti da preispitaju ovaj argument. Neki od njih mogu postaviti pitanje:

- U argumentu je tvrdnja provjerena samo za pet parova brojeva. Što bi se dogodilo da si kombinirao drugačije brojeve?
- Iz kojeg razloga si odabrao baš te brojeve? Misliš li da je to utjecalo na zaključak?
- Što bi zaključio da si množio veće brojeve?

Još jedan argument može biti sljedeći: ”Pogledao sam u tablicu množenja. U svakom drugom retku svi rezultati su parni brojevi, a u ostalim retcima polovica brojeva su parni. To znači da je većina umnožaka paran broj pa je vjerojatnije da će rezultat umnoška dva broja biti paran nego neparan.”
Ponovno moguće je postaviti pitanja:

- Kako možeš sa sigurnošću tvrditi da je većina umnožaka paran broj?
- Što ako su faktori veći brojevi?

Možda najuvjeljiviji argument za rješavanje ovog primjera, gdje učenici mogu raspraviti o tome zašto je $\frac{3}{4}$ rezultata paran broj, a $\frac{1}{4}$ neparan:

- paran broj $\cdot$ paran broj $=$ paran broj
- paran broj $\cdot$ neparan broj $=$ paran broj
- neparan broj $\cdot$ neparan broj $=$ neparan broj
- neparan broj $\cdot$ paran broj $=$ paran broj

Primjer 5. *Provjerite sljedeću pretpostavku: Kako bi dobili razlomak koji se nalazi između dva razlomka, jednostavno za brojnik možemo odabrati broj između dva zadana brojnika, a za nazivnik odaberemo broj između dva zadana nazivnika.*
Primjerice, između $\frac{2}{3}$ *i* $\frac{8}{5}$ *je* $\frac{5}{4}$ *jer se broj 5 nalazi između 2 i 8, a broj 4 između 3 i 5.* $\frac{5}{4}$ *je malo veći od 1,* $\frac{8}{5}$ *je puno veći od 1 dok je* $\frac{2}{3}$ *manji od 1. Dakle,* $\frac{5}{4}$ *se nalazi između dva zadana razlomka.*

Ova pretpostavka može biti zanimljiva učenicima jer bi htjeli provjeriti vrijedi li ona uistinu. Ukoliko pretpostavka vrijedi, mogla bi se generalizirati i koristiti u budućim matematičkim zadacima.
Učenici bi mogli iznijeti argumente slične nabrojanima:
Argument A: Isprobao sam ovu pretpostavku na tri para razlomaka i pokazala se kao istinita.
Argument B: Isprobao sam dva para razlomaka koji su manji od 1, dva para razlomaka većih od 1 i dva para razlomaka gdje je jedan veći, a jedan manji od 1. U svakom od ovih slučajeva pretpostavka je bila istinita.
Argument C: Prvo sam isprobao ovu pretpostavku s parom razlomaka s istim nazivnicima, primjerice $\frac{4}{10}$ i $\frac{6}{10}$, za njih je pretpostavka očito bila istinita. Onda sam isprobao razlomke s različitim nazivnicima, u tom slučaju sam dobio da je pretpostavka također istinita.
Argument D: Mislim da ova pretpostavka nije istinita. Za primjer sam uzeo razlomke $\frac{8}{15}$ i $\frac{2}{3}$. Znam da je $\frac{8}{15}$ manji obzirom da je $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$. Između 2 i 8 nalazi se broj 7, a između 15 i 3 nalazi se 8. Dakle, između ova dva razlomka trebao bi se nalaziti broj $\frac{7}{8}$. $\frac{7}{8}$ je veći od $\frac{8}{15}$ i $\frac{2}{3}$ što znači da ova pretpostavka nije istinita.
Većinu učenika bi argumenti A, B ili C uvjerili da je tvrdnja istinita, sve dok ne čuju argument D. Iz tog razloga vrlo je bitno da više učenika iznese svoje argumente. Također, ovaj primjer naglašava važnost kontraprimjera kao metode za rješavanje zadataka.

3.4 Procjena usvojenosti standarda

Pri procjeni jesu li učenici usvojili standard "Kritičko argumentiranje" postoji nekoliko pitanja koje si učitelj može postaviti:

- Je li učenik svjestan pretpostavki koje je iznio i bira li precizno svoje pretpostavke?
- Jesu li svi termini dobro definirani?
- Je li učenik samopouzdan odabirući pretpostavke?
- Je li učenik svjestan da je dovoljan jedan kontraprimjer kako bi dokazao da nešto nije pravilo, a 10 primjera koji će zadovoljiti danu pretpostavku ne dokazuju da je ona točna?

- Razmišlja li učenik i induktivno i deduktivno?
- Primjećuje li učenik nepravilnosti u argumentima?

Kako učitelj može potaknuti učenike da koriste ovaj standard?

- Učitelj treba u redovnoj nastavi donositi pretpostavke koje učenici mogu ispitati.
- Treba redovito poticati učenike da izraze svoja objašnjenja i razmišljanja.
- Učenik treba naučiti preispitati svoje rješenje i rješenja drugih.
- Učitelj treba kreirati situaciju gdje dva učenika, stvarna ili izmišljena, zauzimaju dva različita mišljenja, a učenici se trebaju odlučiti s čijim mišljenjem se slažu.
- Učenik treba naučiti preispitati svoje pretpostavke.

4 Modeliranje u matematici

Ovaj standard kaže sljedeće:
Vješti matematičari matematiku koju su do sada naučili mogu primjenjivati pri rješavanju problema koji se javljaju u svakodnevnom životu, društvu i radnom mjestu. U nižim razredima to može biti nešto jednostavno poput zapisivanja računa zbrajanjem kako bi opisali danu situaciju. U višim razredima osnovne škole učenik može primijeniti svoje znanje kako bi isplanirao nekakav događaj ili analizirao neki društveni problem. Do srednje škole učenik može koristiti geometriju kako bi riješio konsturukcijski problem ili funkciju kako bi opisao ovisnost dvije varijable. Matematičari koji znaju primijeniti svoje znanje iz matematike tvore pretpostavke i aproksimacije kako bi pojednostavili složene situacije, a kasnije ispravljaju pogreške koje su se dogodile pri aproksimaciji. Uočavaju bitne veličine u realnim situacijama i raspoređuju njihov odnos koristeći dijagrame, tablice, grafove, dijagrame tijeka i formule. Matematički analiziraju odnose kako bi donijeli zaključak. Radovito interpretiraju svoje rezultate u kontekstu situacije i osvrću se na njihovu smislenost, po potrebi ispravljaju model rješavanja.

Iako je ovaj standard povezan sa standardom "Apstraktno i kvantitativno rasuđivanje", naglasak u ovom standardu je na primjenu u realnim životnim situacijama. Učenici ovdje istražuju korisnost matematike kao alata za rješavanje životnih problema. Matematički model treba biti egzaktniji, primjerice jednadžba oblika 3+2=? prikazuje rezultat zbrajanja nečega, ali može biti i aproksimacija primjerice opsega nekog lika koji izgleda gotovo kao pravokutnik.

4.1 Pretpostavke

Jedno od najvećih pitanja o ovom standardu je činjenica da kada se pomoću matematike prikazuju stvarne životne situacije često moramo pretpostaviti da nešto vrijedi. Učenika nižih razreda učitelj može pitati da odredi broj jabuka ukoliko ima 2 jabuke i dobije još 3. Vrlo je jasno da će učenik modelirati zadatak kao 2+3, ali zapravo, prije nego je učenik modelirao zadatak morao odlučiti da veličina jabuke ovdje nije bitna. Odrasli mogu pomisliti da je pitanje vrlo jasno obzirom da se pita "Koliko?", ali može predstavljati problem učenicima.
Učenike viših razreda učitelj može tražiti da matematički modeliraju problem koji zahtjeva elegantnije pretpostavke. Primjerice, ako je jedno dijete pročitalo $3\frac{1}{2}$ puta više stranica nego drugo, koliko stranica je pročitalo jedno, a koliko drugo dijete? Učenik mora odlučiti mogu li rješenja biti samo prirodni brojevi ili mogu biti i racionalni brojevi? Često u zadatku ovo nije određeno. Ili, ukoliko učitelj upita učenika da procijeni broj učenika u školi, učenik mora odlučiti je li njegov razred reprezentant i može li iskoristiti broj učenika u svojem razredu pomnožiti s brojem razreda u školi.
Postoji puno životnih problema temeljenih na stvaranju pretpostavki. Primjerice, kako bi učenik procijenio masu 1000 jabuka, prvo treba procijeniti masu prosječne jabuke. Učenici koji su vrlo precizni pri rješavanju zadataka mogu osjećati nelagodu pri rješavanju zadataka ovog tipa. Pri procjeni mase prosječne jabuke i množenjem s 1000 rezultat naravno ne može biti u potpunosti točan. Učenike treba osvijestiti da za primjerene pretpostavke treba truda i vremena.

4.2 Razumnost odgovora

Uzimajući u obzir standard "Apstraktno i kvantitativno rasuđivanje", vrlo je jasno da rezultat rješavanja problemskog zadatka temeljenog na matematičkom modeliranju situacije mora biti mora imati smisla u zadanom kontekstu. To može značiti da će se dobiveni rezultat malo promijeniti kako bi odgovarao kontekstu. Primjerice, ukoliko je dobiveni rezultat razlomak, a u kontekstu je smisleni odgovor jedino prirodni broj, tada će se i rezultat prilagoditi. Osim toga, ponekad treba ponovno preispitati pretpostavke kako bi i one odgovarale kontekstu.

4.3 Primjeri koji će kod učenika izazvati ovaj standard

Primjer 6. *Šest učenika treba podijeliti pet jednakih sendviča. Koliki dio sendviča treba dobiti svaki učenik?*

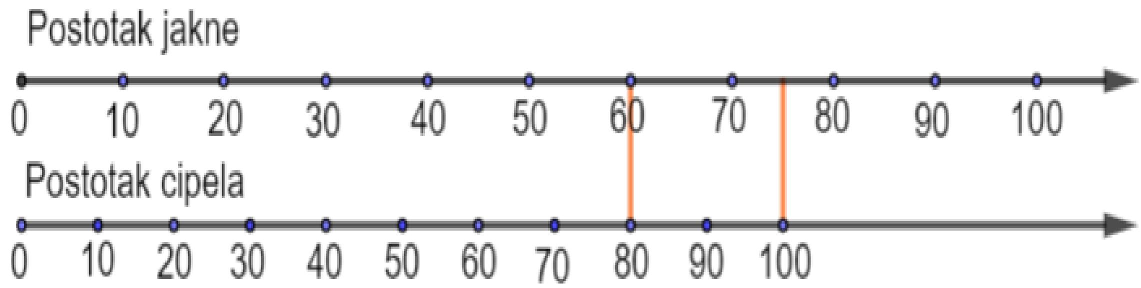
Rješavajući ovaj zadatak učenici će morati stvoriti pretpostavke. Primjerice:

- Treba li učenik dobiti samo jedan komadić ili može dobiti više komadića?
- Jesu li sendviči već bili prerezani na pola? Je li to bitno?
- Treba li svaki učenik dobiti jednak broj komadića?

Obzirom da u primjeru ova pitanja nisu odgovorena, učenik ima slobodu odabrati ono što smatra ispravnim. Učenici nižih razreda će ponekad tražiti odobrenje učitelja za stvaranje pretpostavki. Ovo je slučaj u kojem nerazumijevanje cjelokupne namjere standarda da potaknu učenike da se oslanjaju samo na svoje vlastito mišljenje može dovesti učitelja da kaže: "To trebaš sam zaključiti". Zapravo, tako učenici postaju svjesni da imaju dopuštenje sami donositi odluke koje im se čine smislene, što će ih dovesti do samostalnog rješavanja zadatka. Bitno je da učenici s vremenom nauče i opravdati svoje pretpostavke.
Rješavajući zadani primjer, neki učenici će podijeliti svaki sendvič na 6 jednakih dijelova, tako će svaki učenik dobiti po jedan takav dio svakog sendviča, što je matematički $5 \cdot \frac{1}{6} = 5 \div 6$. Drugi učenici bi htjeli veće komade sendviča pa će ih drugačije izrezati. Tako pet učenika može dobiti po $\frac{5}{6}$ jednog sendviča, od svakog će ostati $\frac{1}{6}$ što znači da će samo jedan učenik dobiti male komadiće. Matematički je to $5 \div 6 = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6}$. Neki učenik će možda pomisliti da je će učenici biti zadovoljniji ako dobiju jedan veći i nekoliko manjih komadića. Svaki učenik će dobiti pola sendviča i komadiće koji su preostali od četiri polovice sendviča. Ovo može biti i primjer zadatka u kojem više odgovora može biti točno.

Primjer 7. *Jakna je bila 40% snižena, a cipele 20%. U kojem su odnosu cijene prije sniženja ako je poznato da su nakon sniženja cijene jakne i cipela jednake.*

Ovo je jako dobar primjer iz brojnih razloga. Prvenstveno, može se riješiti numerički, algebarski ili grafički što učenicima daje slobodu izbora. Isto tako, ovaj primjer naglašava da je veza između postotaka multiplikativne, a ne aditivne naravi, što znači da i veza između cijena mora biti multiplikativna. Uz to, primjer također naglašava cijenu zadanu implicitno, a ne eksplicitno.
Najbrži način rješavanja je vjerojatno algebarski. Ukoliko originalnu cijenu jakne označimo sa x, a originalnu cijenu cipela sa y, onda vrijedi $0.6x{=}0.8y$. Odnosno, $6x{=}8y$, što znači da je $y{=}\frac{3}{4}x$. Dakle, originalna cijena cipela je $\frac{3}{4}$ originalne cijene jakne.
Zadatak je moguće riješiti i grafički. Na slici je prikazan postotak cijene jakne na prvoj crti, a na drugoj postotak cipela.



Slika 10: Grafičko rješenje zadatka

Kako bi se cijene nakon sniženja poklapale, postotak na brojevnim crtama je prikazan na način da je 60% originalne cijene jakne u istoj ravnini kao i 80% originalne cijene cipela. Nakon toga lako je uvidjeti da se 100% originalne cijene cipela podudara sa 75% originalne cijene jakne.
Učenik zadatak može riješiti i numerički tako da isproba različite mogućnosti za cijenu jakne i time određuje cijenu cipela te otkriva u kojem su odnosu cijene. Traženje u kojem odnosu su cijene je ovim načinom rješavanja pomalo težak jer učenik mora uzeti u obzir brojne odnose.
Primjerice, pretpostavimo li da je originalna cijena jakne 100 kuna, onda je cijena nakon sniženja 60 kuna, što je također cijena cipela nakon sniženja. Kako bi dobili originalnu cijenu cipela, učenik mora zaključiti da je 60 kuna 80% ili $\frac{4}{5}$ od 75 kuna. Dakle, cijena od 75 kuna za cipele, odgovara cijeni od 100 kuna za jaknu. U ovom trenutku mnogi učenici bi zaključili da su cipele 25 kuna jeftinije od jakne. Tada bi mogao usporediti cijene od 100 i 125 kuna i shvatio bi da nije u pravu. Očito odnos

koji traži između 100 i 75 ne može biti njihova razlika. Na kraju ključan odnos između ove dvije cijene je taj da je 75 $\frac{3}{4}$ od 100.

4.4 Procjena usvojenosti standarda

Kako bi učitelj zaključio koliko je učenik ovladao ovim standardom treba se zapitati:

- Koristi li učenik prikladan model rješavanja za danu situaciju?
- Je li učenik dovoljno sposoban za modeliranje u matematici da ga učinkovito koristi?
- Uspjeva li učenik popraviti model rješavanja ukoliko se rezutat ne podudara s kontekstom?
- Prepoznaje li učenik kada je poželjno stvoriti pretpostavke?
- Jesu li njegove pretpostavke primjerene?

Kako učitelj može potaknuti učenike da koriste ovaj standard?

- Učitelj treba učenicima zadavati kontekstualne problemske zadatke koji se mogu matematički modelirati, idealno izdašne zadatke ili barem one koji se mogu riješiti na nekoliko načina.
- Učenici moraju obraćati pažnju na ono što pretpostavljaju i trebaju znati opravdati svoje pretpostavke.
- Učenik zadatke mora riješiti tako da rješenje odgovara kontekstu te odlučiti ukoliko rješenje ili pretpostavke treba prepraviti.
- Učitelj treba redovito od učenika tražiti da opravdaju izbor matematičkog modela za rješavanje zadatka.

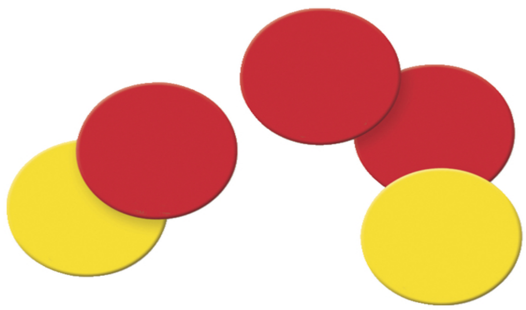
5 Strateško korištenje alata

Vješti matematičari razmatraju dostupne alate kada rješavaju problemske zadatke. Ovi alati mogu biti papir i olovka, konkretni modeli, ravnalo, kutomjer, kalkulator, tablice, računalni programi poput geogebre, statistike. Vješti učenici su prilično upoznati s alatima primjerenim za njihovu dob kako bi donijeli ispravnu odluku o

tome kada im koji alat može biti koristan. Prepoznaju kako će im alat koristiti i koja su njegova ograničenja. Primjerice, vješti matematičari u srednjoj školi analiziraju grafove funkcija i rješavaju zadatak pomoću grafičkog kalkulatora. Otkrivaju moguće pogreške koristeći procjenu i ostalo znanje iz matematike. Kreirajući matematičke modele svjesni su da im tehnologija omogućava vizualizaciju pretpostavki koje su stvorili, njome istražuju posljedice i uspoređuju pretpostavke s danim podacima. Vješti matematičari različitih uzrasta mogu prepoznati korisne izvore alata kao što su digitalni sadržaj na nekoj web stranici i koriste ih kako bi postavili ili riješili problemski zadatak. Mogu koristiti tehnološke alate kako bi istražili i produbili razumijevanje pojmova.
Ovaj standard u prvi plan stavlja pitanje jesu li alati koje koristimo vjerni prikaz zadane matematičke situacije. Nije uvijek pitanje je li određeni alat općenito dobar, nego je li koristan u određenoj situaciji.
Važno je da se učitelj suzdrži od govorenja učeniku koji alat treba koristiti za određeni problem kako bi mu omogućio iskustvo odlučivanja, po učenikovu vlastito mišljenju, koji alat preferiraju koristiti u određenim situacijama. Često ne postoji samo jedan alat koji će biti najbolji za rješavanje problemskog zadatka. Odabir ovisi o učenikovom poznavanju alata, a ovisi i o učenikovom tumačenju matematičke situacije.
Primjerice, mnogi bi učenici radije koristili virtualne alate, ali drugi preferiraju konkretne alate. Većina učenika radije koristi brojevnu crtu za rad sa cijelim brojevima, dok drugi preferiraju rad sa karticama u dvije boje koje prikazuju pozitivne i negativne brojeve.

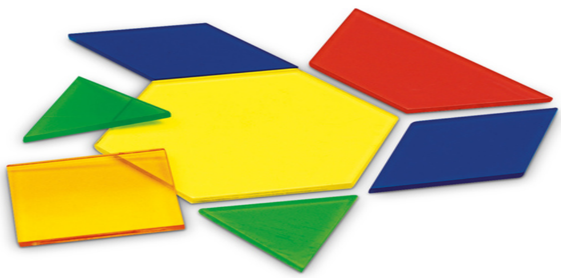
5.1 Konkreti

Postoji mnogo konkreta, stoga je teško znati odakle početi. Žetoni za prebrojavanje, tangrami, blokovi s bazom deset, kvadratne pločice.
Žetoni za prebrojavanje korisni su jer je puno matematičkih koncepata temeljeno na prebrojavanju.



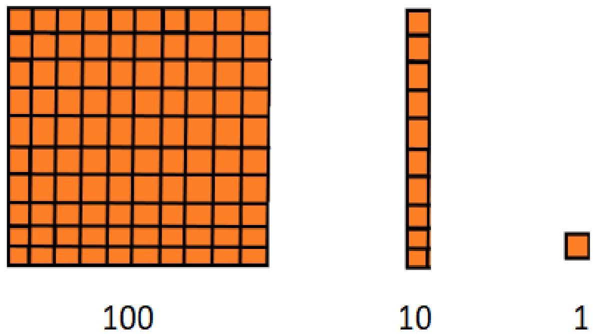
Slika 11: Žetoni za prebrojavanje

Žetoni poredani u redove mogu biti korisni kako bi učenici uvidjeli svojstva množenja i dijeljenja.
Tangrami mogu biti korisni i za numeričke i geometrijske zadatke.



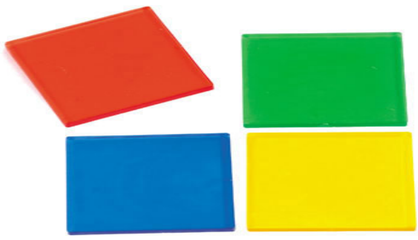
Slika 12:Pločice za tangrame

Primjerice, moguće ih je koristiti za istraživanje simetrije, translacije, sastavljanje i rastavljanje oblika, veličinu kuteva. Ponekad se mogu koristiti i za rad sa razlomcima.
Blokovi s bazom deset su korisni za prikazivanje cijelih, ali i decimalnih brojeva. Mogu pomoći pri rješavanju nekih algoritama i pri računanju sa cijelim i decimalnim brojevima.



Slika 13: Blokovi s bazom deset

Kvadratne pločice mogu biti vrlo korisne. Karakteristika kvadratnih pločica je ta da se njima mogu izrašavati mjere, također se koriste kao alat za prebrojavanje, ali i za sklapanje raznih oblika kao što je primjerice pravokutnik.



Slika 14: Kvadratne pločice

Učenici svakodnevno koriste ravnalo i kutomjer najčešće kod zadataka u kojim moraju nešto mjeriti. Iako učenici najčešće koriste polukružne kutomjere, ponekada bi im dobro došli i kružni kutomjeri.

Slika 15: Kružni kutomjer

5.2 Slikovni alati

Jako bitan slikovni alat kojeg učenici jako često koriste za rješavanje zadataka je brojevna crta. U Primjeru 6. prehodnog poglavlja prikazano je kako učenik može iskoristiti brojevnu crtu za rješavanje zadatka iako to nije bio jedini način rješavanja. Brojevna crta se u matematici koristi od samog početka pa sve do kraja školovanja. To može biti i razlog zašto učenici često koriste brojevnu crtu za rješavanje zadataka.

5.3 Tehnologija

Svijet tehnologije neprestano napreduje, tako se i alati koji se koriste u nastavi mjenjaju. Ono što se nekada koristilo danas je zamijenjenom boljom i naprednijom tehnologijom. Učenici se trebaju odvažiti i svakodnevno koristiti tehnoglogiju koja im je dostupna, ali i prilagoditi se novim alatima koji se tek razvijaju. Trenutna tehnologija koja može pomoći učenicima pri rješavanju zadataka uključuje sljedeće:

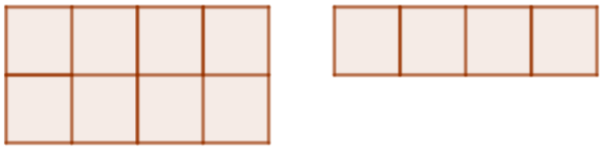
- Kalkulatori
- Softveri koji obrađuju riječi, crtaju funkcije
- Softveri koji sadrže proračunske tablice
- Grafički softveri
- Geometrijski softveri koji konstruiraju i mjere razne oblike
- Virtualne manipulacije

- Internet, kao izvor informacija koje su potrebne za rješavanje zadatka

5.4 Primjeri koji će kod učenika izazvati ovaj standard

Primjer 8. *Zadaj pravokutnik čije su duljine stranica prirodni brojevi. Prereži površinu pravokutnika na pola. Može li novi opseg novog pravokutnika biti jednak polovini opsega starog pravokutnika? Koji udio opsega starog pravokutnika je u novom pravokutiku?*

U ovom slučaju učenik može koristiti ravnalo ili kvadratne pločice. Također, u nekom od računalnih alata (word,excel) može kreirati tablicu s vrijednostima koje su mu potrebne. Koristi li kvadratne pločice , može zaključiti zašto je novi opseg najvjerojatnije veći nego polovica staroga.



Slika 16: Kvadratne pločice kao pomoć za rješavanje zadatka

Iako je površina desnog pravokutnika jednaka polovini povšine lijevog pravokutnika, opseg novog pravokutnika je jednak $\frac{10}{12}$, odnosno $\frac{5}{6}$ opsega starog pravokutnika. Razlog tome je što se ni gornji ni donji dio pravokutnika nije suzio, samo su bočne stranice prerezane na pola. Obzirom da su bočne stranice puno manje od gornje i donje opseg se nije puno smanjio.

Primjer 9. *Stopa rasta Kanadskog stanovništva jednaka je onoj u Kini. Procijeni Kanadsko stanovništvo 2050. godine.*

Ovaj problemski zadatak ilustrira slučaj gdje je internet vrijedan izvor za prikupljanje ključnih informacija kako bi učenik isplanirao pristup za rješavanje problemskog zadatka. U ovom zadatku učenik će primjeniti i standard opisan u prethodnom poglavlju "Modeliranje u matematici".

5.5 Procjena usvojenosti standarda

Kako bi učitelj analizirao je li učenik usvojio ovaj standard može si postaviti sljedeća pitanja:

- Razmatra li učenik alate koje može koristiti?
- Bira li učenik prikladan alat za rješavanje danog problemskog zadatka?
- Koristi li učenik alat na ispravan način?
- Pretražuje li učenik informacije koje mu mogu pomoći pri rješavanju problemskog zadatka?

Kako učitelj može potaknuti učenike da koriste ovaj standard?

- Učitelj treba pružiti što više alata kako bi učenik imao mogućnost izbora.
- Učitelj treba upoznati učenike s operacijama koje nude alati.
- Učitelj treba redovite pitati učenike da opravdaju zašto koriste neki alat.

6 Briga za preciznost

Vješti matematičari se trude iznijeti svoje misli drugima vrlo precizno. Trude se koristiti jasne definicije i obrazloženja u raspravi s drugima. Navode značenje simbola koje su odabrali te dosljedno koriste znak jednakosti i na odgovarajući način. Oprezno određuju mjere i označavaju koordinatne osi kako bi razjasnili odnos među varijablama zadanim u zadatku. Izračunavaju točno i učinkovito, iznose numeričke odgovore uzimajući u obzir kontekst u kojem se nalaze. U osnovnoj školi učenici daju precizno formulirana objašnjenja jedni drugima. Do srednje škole nauče ispitivati tvrdnje i jasno koriste definicije.
Ovaj standard potiče preciznost u vokabularu, opreznu upotrebu konvencija, jasna objašnjenja, kao i odgovarajuću preciznost u proračunima, ali i stupanj preciznosti koji odgovara dobi učenika. Općenito govoreći, preciznost od učenika modelirana je po preciznosti od strane nastavnika. Kada učitelji paze na preciznost, tako će to činiti i učenici.

6.1 Približni i točni odgovori

Učitelji često kažu učenicima ukoliko žele da učenici pronađu točno ili približno rješenje, no bitno je i da učenici samostalno znaju procijeniti je li za rješenje bitan točan rezultat ili ga je dovoljno približno odrediti. Učitelj može pitati učenike trebaju li im u sljedećim pitanjima točni ili približni odgovori:

- Koliko treba vremena da se autom dođe do trgovačkog centra?
- Koliko trebaju biti udaljena kuća i ograda?
- Kolika je udaljenost od Zagreba do Osijeka?
- Kolika je površina dnevnog boravka u kući?
- Koliko je razuman odgovor 4127 pri računu $22 \cdot 58$?

Ukoliko je potreban točan odgovor, učenici trebaju biti što precizniji u postizanju te vrijednosti.

6.2 Učinkovitost izračuna

Očekivanje efikasnosti izračuna je prikladno, ali tek kada se razumiju izračuni. Sasvim je razumno da bi mlađi učenici u početku koristili neefikasne strategije koje su za njih značajne, dok im efikasnije strategije još nemaju smisla.
Također je bitno da učenici shvate da jedan način rješavanja može biti efikasan za jedan zadatak, ali neefikasan za drugi. Primjerice, standardni algoritam za oduzimanje brojeva može biti koristan za oduzimanje broja 312 od 589, ali manje je koristan za oduzimanje broja 1 od broja 300.

6.3 Ispravno korištenje relacijskih znakova i simbola za varijable

Učenici trebaju naučiti kako prikladno koristiti znakove $>, <$ i $=$. Znak $=$ je najčešće problem. Znak jednakosti se koristi da bi pokazao da vrijednost slijeva ima istu vrijednost kao i vrijednost zdesna. Ima smisla napisati $4 + 3 = 6 + 1$ s obzirom da $4+3$ i $6+1$ su jednaki 7. Ima smisla napisati $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ jer se radi o drugačijem zapisu razlomka. Također, bitno je da učenici znaju da je zapis $4 + 3 = 7$ isti kao zapis $7 = 4 + 3$, kasnije kada se u zadacima pojave nepoznanice učenicima ovo može biti zbunjujuće. Izraz $7 < 8$ je jednak izrazu $8 > 7$, kao što je $2x > x$ isto što i $x < 2x$. Reverzibilnost je od velike važnosti u matematici.

Učenici moraju vrlo pažljivo odabrati simbole koje će koristiti za označavanje varijabli. Jednadžba $x + x = 20$ je potpuno drugačija nego jednadžba $x + y = 20$. U prvom slučaju vrijednosti za x su identične, dok u drugom slučaju to može a i ne mora biti. Ponekad učenici radije koriste simbole, primjerice trokut, krug, kvadrat, a ne slova za nepoznanice, no ponovno moraju biti oprezni da za različite varijable odaberu različite simbole. Kada učenici koriste varijable, od velike važnosti je da uvijek napišu što im nepoznanica predstavlja. Iz tog razloga učitelj bi trebao redovito tražiti tu informaciju od učenika. Ako je učeniku rješava zadatak: *Suma tri uzastopna broja jednaka je 51. Koji su to brojevi?* postavljajući jednadžbu $x + (x + 1) + (x + 2) = 51$, učitelj mu može postaviti sljedeća pitanja:

- Predstavlja li x sumu ili nešto drugo?
- Što predstavlja $x + 2$?
- Koji izraz predstavlja sumu sva tri broja?

6.4 Ispravno korištenje terminologije

Postoji nešto vrijedno u tome kada učenici koriste jednostavan i prirodan jezik kako bi opisali neke stvari, objekte. Kako učenici postaju stariji ti opisi bi ipak trebali biti što točniji. Primjerice, izjava da je trokut lik s tri vrha nije točna jer nije dovoljno precizna. Četverokuti imaju tri vrha i više. Lik s tri vrha čije stanice nisu ravne crte nije trokut. Tri kolinearne točke također ne čine trokut. Postoje strategije kako poboljšati vokabular učenika. Jedna od strategija je Frayerov model gdje učenik za traženi pojam mora napisati definiciju, primjere pojma, primjere koji ne ogovaraju danom pojmu i njegove karakteristike. Još jedna od strategija je da učitelj zada ključne riječi od kojih učenik mora složiti rečenicu. Primjerice, od ključnih riječi "romb", "kvadrat", "kutovi" može se sastaviti rečenica: *Kvadrat je vrsta romba kojemu su svi kutovi jednake veličine.*
O učitelju ovisi koliko će učenici inzistirati na preciznosti svojih izjava. U razredu se često može pokrenuti i rasprava čija izjava je preciznija ili kako poboljšati nečiju izjavu da bi bila preciznija.

6.5 Procjena usvojenosti standarda

Kako bi učitelj procjenio jesu li učenici usvojili ovaj standard nameću se pitanja:

- Je li učenik točno definirao i interpretirao matematičke pojmove?
- Prepoznaje li učenik da znak jednakosti označava ravnotežu između lijeve i desne strane?

- Označava li učenik prikladno dijagrame i grafove?
- Računa li učenik dovoljno učinkovito za svoju dob?
- Zadovoljava li učenikova preciznost problemsku situaciju kojoj traži rješenje?

Kako učitelj može potaknuti učenike da koriste ovaj standard?

- Učitelj treba često poticati učenika rasprave o tome jesu li rješenja dovoljno precizna, ponajviše u zadacima povezanim s mjerenjem.
- Učitelj treba poticati učenike da koriste znakove$>$,$<$ i $=$ na ispravan način.
- Učitelj treba modelirati primjerenu razinu preciznosti koristeći vokabuar, simbole, mjerne jedinice, grafove ili tablice.

7 Prepoznavanje i korištenje strukture

Vješti matematičari trude se pažljivo razumijeti strukturu ili uzorak. Mlađi učenici, primjerice, mogu primijetiti da je tri i još sedam isto što i sedam i još tri, ili mogu rasporediti likove obzirom na broj stranica. Kasnije, učenik može primijetiti da je $7 \cdot 8$ isto što i $7 \cdot 5 + 7 \cdot 3$, što je temelj za svojstvo distributivnosti. U izrazu $x^2+9x+14$ stariji učenici mogu broj 14 zapisati kao $2 \cdot 7$ i 9 kao $2 + 7$. Pri rješavanju geometrijskih zadataka koriste se metodom crtanja pomoćnih likova. Neke složene izraze mogu gledati kao jedan izraz ili kao izraz složen od više jednostavnijih izraza. Primjerice izraz $5-3(x-y)^2$ mogu gledati kao 5 minus pozitivan broj puta kvadrat. Iz toga zaključuju da zadani izraz ne može biti veći od 5 za bilo koje realne brojeve x i y.

7.1 Gdje pronalazimo strukturu u osnovnoškolskoj matematici?

Strukturu u matematici možemo vidjeti na mnogim mjestima. Općenito, struktura se usredotočava na generalizaciju i veze. Primjer strukture koji se javlja u ranom osnovnoškolskom obrazovanju:

$$
\begin{aligned}
2+4&=6\\
4+2&=6
\end{aligned}
$$

$$6 - 4 = 2$$
$$6 - 2 = 4$$

Postoji struktura povezana sa svojstvima brojeva, kao što je komutativnost zbrajanja i množenja, asocijativnost zbrajanja i množenja, distributivnost množenja prema zbrajanju. Ova svojsta vode do strategija računanja kao što su:

$$a \cdot b{=}2a\cdot\ \frac{b}{2} \to 5 \cdot 14{=}10 \cdot 7$$

Ova struktura je zasnovana na svojstvu asocijativnosti jer $a \cdot 2 \cdot\ \frac{b}{2}$ je ili $a \cdot b$ ili $(2 \cdot a) \cdot \frac{b}{2}$.

$$a + b{=}(a - c) + (b + c) \to 13 + 28 = 11 + 30$$

Struktura je također zasnovana na svojstvu asocijativnosti jer je $[(a - c) + c] + b$ je ili $(a - c) + (b + c)$ ili $a + b$.

$$a - b = (a + c) - (b + c) \to 31 - 18 = 33 - 20$$

Ova struktura se temelji na svojstvu asocijativnosti jer je $(a + c) + (-c) + (-b)$ je ili $(a + c - c) + (-b)$, što je $a - b$, ili $(a + c) - (b + c)$, gdje smo koristili još i svojstvo komutativnosti i suprotni element.
Svojstvo distributivnosti može učenicima pomoći da shvate da je npr. $30 + 40{=}$ $(3 + 4)$ desetice, jer je $3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 7 \cdot 10$.
Postoji struktura i u tablicama kojima se učenici služe. Primjerice, u tablici brojeva do 100 učenici mogu vidjeti da je zbroj brojeva u bilo kojem 2×2 kvadratu jednak.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Slika 17: Struktura u tablici brojeva do 100

To je tako iz razloga što tablica ima sljedeću strukturu:

$$\begin{array}{cc} \text{A} & \text{A+1} \\ \text{A+10} & \text{A+11} \end{array}$$

Kada dodamo vrijednosti na dijagonalama, rezultat je $2A + 11$.

7.2 Kako pomoći učeniku da primijeti strukturu

Jedan od načina kako pomoći učeniku da primijeti strukturu je korištenje uzoraka ili nizova. Primjerice, učitelj može pitati da nastave uzorak:

$$\begin{gathered} 4 \cdot 100 \\ 4 \cdot 10 \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0.1 \end{gathered}$$

Ovaj primjer im može pomoći pri množenju cijelih brojeva decimalnim. Kako bi pojasnio oduzimanje pozitivnog od negativnog broja učitelj može zadati sljedeći uzorak:

$$\begin{gathered} 7 - 2 \\ 7 - 1 \\ 7 - 0 \\ 7 - (-1) \end{gathered}$$

7.3 Primjeri koji će kod učenika izazvati ovaj standard

Primjer 10. *Često kada izlaziš na večeru, dok plaćaš račun dodaš 15% napojnice. Koji postotak ukupnog iznosa koji platiš je napojnica?*

Mnogi učenici će pretpostaviti da je odgovor očit, 15% od ukupnog iznosa je napojnica, ali to nije točno. Pretpostavimo da je B cijena večere bez napojnice i neka je A cijena večere sa napojnicom. Onda je $A = 115\%$ od B.
Ako je A 115% broja B onda je $\frac{A}{B} = \frac{115}{100}$. To znači da je $\frac{B}{A}$ tj odnos cijene bez napojnice i cijene sa napojnicom $\frac{100}{115}$ što je približno 0.86956 ili 87%. Dakle, od ukupnog plaćenog iznosa preostaje napojnica od 13%.
Ovdje se javlja pitanje "Zašto 15% napojnice ne ostaje 15% od cjelokupno plaćenog iznosa?". Vrlo je važno odgovoriti na ovo pitanje. To se događa iz razloga što je 15% napojnice dodano na manji iznos, pa obzirom da je ukupni iznos veći, onda je i krajnji postotak manji od 15%.

Primjer 11. *U grupi od 100 ljudi, svaki par osoba će se međusobno jednom rukovati. Koliko će ukupno biti rukovanja?*

Ovaj problem također je izgrađen na strukturi. Učenici će pri rješavanju ovog zadatka možda primijeniti i standard "Modeliranje u matematici". Učenik može zamisliti krug sa 100 točaka, gdje jedna točka predstavlja jednu osobu. Svaka osoba u krugu se rukuje s 99 osoba. Obzirom da se ovo dogodi 100 puta imamo 9900 rukovanja. Ali, u tom slučaju svako rukovanje je prebrojano dva puta, dakle rukovanja je bilo upola manje $9900 \div 2 = 4950$. Ovaj problem je strukturiran jer je način rješavanja isti, bez obzira o koliko se ljudi radi.

7.4 Procjena usvojenosti standarda

Neka od pitanja kojima učitelj može procjeniti usvojenost standarda:

- Promatra li učenik generalizacije koje su primjerene njegovoj dobi (npr. paran+paran=paran ili zbrajanjem brojnika ekvivalentnih razlomaka rezultat je ponovno ekvivalentan razlomak ili ako uštediš $x\%$ na rasprodaji plaćaš $(100 - x)\%$?

- Promatra li učenik samo uzorke, ili traži odgovor na pitanje "Zašto nešto vrijedi?"?

Kako učitelj može potaknuti učenike da koriste ovaj standard?

- Učitelj treba učenicima postavljati problemske zadatke čiji rezultat vodi ka generalizaciji.
- Učitelj treba često postaviti pitanje: "Hoće li ovo uvijek vrijediti ili samo s ovim brojevima?".

8 Izražavanje pravilnosti u opetovanom rasuđivanju

Vješti matematičari primjećuju ukoliko se račun ponavlja, nakon toga traži generalne metode rješavanje ili prečac kako bi olakšao rješavanje zadatka. Učenici viših razreda osnovne škole mogu primjetiti da pri djeljenju broja 25 brojem 11 dolazi do ponavljanja istih brojeva nakon decimalne točke. Obraćajući pažnju na vrijednost nagiba kad opetovano provjeravaju jesu li točke na pravcu kroz (1,2) s nagibom 3 srednjoškolci bi mogli dobiti jednadžbu 3, srednjoškolci mogu apstrahirati jednadžbu $\frac{y-2}{x-1}=3$. Primjećujući pravilnost kako se izrazi poništavaju kada se broj izraza povećava $(x-1)(x+1)$,$(x-1)(x^2+x+1)$,$(x-1)(x^3+x^2+x+1)$, učenik bi mogao doći do formule za sumu geometrijskog niza. Dok rješavaju problemski zadatak, vješti matematičari neprestano nadziru proces rješavanja i posvećuju se detaljima. Neprestano provjeravaju smislenost svojeg računa.

8.1 Situacije u kojima se javlja opetovano rasuđivanje

Opetovano rasuđivanje može se nalaziti u matematičkim situacijama zadanih učenicima svih uzrasta. Primjerice, mlađi učenici mogu primijetiti da svaki puta kada ponovno dodamo broj 1 rezultat je sljedeći broj. Malo stariji učenici mogu zaključiti da pri zbrajanju dvoznamenkastog broja i njemu obrnutog broja, primjerice 32 + 23 ili 92 + 29, rezultat je obično palindrom (broj koji se jednako čita slijeva na desno i obrnuto), no to nije uvijek slučaj jer je 91 + 19 = 110.
Mlađi učenici mogu primjetiti uzorke u načinu na koji izgovaramo brojeve, što im može pomoći kada se suoče s brojem za kojeg nisu ranije čuli. Primjerice, znaju da nakon broja 239 dolazi broj 240 s obzirom da je to uzorak kojeg su ranije naučili.
Stariji učenici mogu primjetiti da svi ekvivalenti razlomka $\frac{1}{2}$ imaju brojnik upola manji nego nazivnik.
Učenici jednog trećeg razreda su primjetili sljedeće kod oduzimanja:

$$
\begin{array}{lr}
 & 41 \\
- & 28 \\
\hline
 & 20\text{-}7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
 & 52 \\
- & 17 \\
\hline
 & 40\text{-}5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
 & 85 \\
- & 28 \\
\hline
 & 60\text{-}3
\end{array}
$$

Ukoliko se desetice oduzmu na normalan način, jedinice se mogu oduzimati od dolje prema gore i na kraju treba desetice oduzeti od jedinica. Rezultat je u ovim slučajevima bio točan. Je li to pravilo koje će vrijediti i općenito?
Ovo je primjer u kojem su učenici primijenili ovaj standard. Njihov zaključak je bio točan.
Stariji učenici mogu primjetiti da je svaki treći višekratnik broja 4, također i višekratnik broja 3 (4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**,...) ili da svaki izraz u nizu 8, 11, 14, 17, 20,... je točno za 2 veći od višekratnika broja 3. Mogu zapaziti da kad god varijablu x u izrazu $3x - 9x^2$ zamijene cijelim brojem, rezultat je višekratnik broja 3.

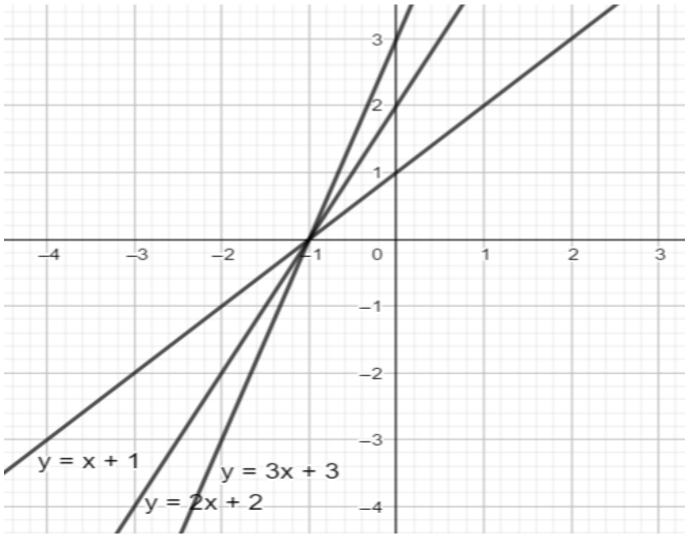
8.2 Primjeri koji će kod učenika izazvati ovaj standard

Primjer 12. *Brojnik i nazivnik razlomka ekvivalentnog razlomku $\frac{2}{5}$ udaljeni su jedan od drugog za 42. Koji je to razlomak?*

Učenici mogu započeti sa ispisivanjem prvih nekoliko ekvivalentnih razlomaka, a to su: $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{8}{20}$ i tako dalje. Ono što trebaju promatrati je razlika brojnika i nazivnika. Razlika kod $\frac{2}{5}$ je 3, nakon toga razlike su 6, 9, 12,... Učenik bi mogao primjetiti da se razlika između brojnika i nazivnika povećava za 3, ali i same razlike su višekratnici broja 3. Obzirom da je 42 četrnaesti višekratnik broja 3 traženi razlomak je: $\frac{14\cdot 2}{14\cdot 5}=\frac{28}{70}$.
Ovaj primjer može se koristiti i za primjenu standarda opisanom u prethodnom poglavlju "Prepoznavanje i korištenje strukture", obzirom da je ovo primjer distributivnosti množenja prema zbrajanju. Jer razlomak $\frac{n\cdot a}{n\cdot b}$ razlika između brojnika i nazivnika je $n \cdot b - n \cdot a = n(b - a)$

Primjer 13. *U koordinatnom sustavu nacrtaj pravce oblika $y = mx + m$ za različite vrijednosti broja m. Što možeš zaključiti o pravcima?*

Kada učenik nacrta nekoliko grafova, primjerice $y = x + 1$, $y = 2x + 2$, $y = 3x + 3$, može primjetiti da svi pravci prolaze kroz točku $(-1, 0)$.



Slika 18: Grafovi pravaca

Koristeći standard iz prvog poglavlja učenici mogu pretpostaviti da će svaki pravac ovoga oblika prolaziti točkom (-1,0). Uvrste li umjesto $x = -1$ tada je $y = -m + m = 0$. Dakle, ova tvrdnja je istinita.

8.3 Procjena usvojenosti standarda

Pri procjeni usvojenosti ovog standarda, učitelj treba potražiti odgovore na sljedeća pitanja:

- Ukoliko učenik primjeti slične zadatke, traži li brži način rješavanja?
- Je li učenik dovoljno sistematičan da primjećuje uzorke ili pravilnosti koje se ponavljaju?
- Primjećuje li učenik sličnosti u zadacima, tvori pretpostavke i provjerava njihovu istinitost?

Kako učitelj može potaknuti učenike da koriste ovaj standard?

- Učitelj treba zadavati zadatke koji vode ka generalizaciji.
- Učitelj treba često postavljati pitanja kao što su *Što se događa iznova u zadatku? Što je zajedničko tim vrijednostima?*

9 Zaključak

Matematika proizilazi iz doprinosa mislioca kroz stoljeća i širom svijeta. Daje nam način da razumijemo obrasce, odredimo odnose i predvidimo budućnost. Matematika nam pomaže da razumijemo svijet, a mi koristimo svijet da bismo razumjeli matematiku. Da je svijet međusobno povezan pokazuje nam svakodnevna matematika. Što prije mladi učenici primijene ove vještine u praksi, to je vjerojatnije da ćemo ostati društvo inovacija i gospodarstva. Algebra može objasniti koliko brzo voda postaje zaražena i koliko se ljudi godišnje u zemljama trećeg svijeta koji piju tu vodu razbolijeva. Geometrija može objasniti znanost koja stoji iza arhitekture u cijelom svijetu. Statistički podaci i vjerojatnost mogu procijeniti broj smrtnih slučajeva uslijed zemljotresa, sukoba i drugih katastrofa širom svijeta. Matematika je moćan alat za globalno razumijevanje i komunikaciju. Pomoću njega učenici mogu razumjeti svijet i riješiti složene i stvarne probleme. Preispitivanje matematike u globalnom kontekstu nudi učenicima preokret u tipičnom sadržaju koji samu matematiku čini primjenjivom i značajnijom za učenike.

Standardi opisani u ovom diplomskom radu definiraju ono što bi učenici trebali razumjeti i kakve zadatke su sposobni rješavati. Pitati učenika razumije li nešto je kao zamoliti učitelja da procijeni je li učenik to razumio na temelju njegovog odgovora. Kako izgleda matematičko razumijevanje? Jedan od načina na koji učitelji to mogu učiniti je zamoliti učenika da, na način koji odgovara matematičkoj zrelosti učenika, obrazloži zašto je određena matematička izjava istinita ili odakle dolazi neko matematičko pravilo. Matematičko razumijevanje i njegova primjena su podjednako važni, a oboje se može ocijeniti zadavanjem odgovarajućih zadataka.

Usaditi učenicima sposobnost matematičkog razmišljanja nije ni malo jednostavno. Standardi opisani u ovom diplomskog radu, kao i drugi svjetski matematički standardi učiteljima mogu biti zvijezda vodilja u tom putu. Nije bitno koliko standarda će učitelj na današnjem satu primjeniti u svojem poučavanju, bitno je da problemi koji potiču ove standarde postanu ustaljeni problemi koje učenici rješavaju na satu matematike. Što su ti problemi primjenjiviji u stvarnom životu, to su učenici zainteresiraniji i ustrajniji u rješavanju istih.

Literatura

[1] Common core state standards initiative, *Standards for mathematical practice*,

http://www.corestandards.org/Math/Practice/

[2] D. Court, *What is mathematical thinking?*,

https://drvcourt.wordpress.com/2016/07/08/what-is-mathematical-thinking/

[3] V. Kadum, *Neke paradigme za uspješnu nastavu i usmjeravanje učenja u matematici*, Metodički ogledi, 11 2 (2004), 95-110.

[4] M. Sharma, *Reason quantitatively and abstractly: specific vs. general*, Mathematics for all, 2016,

https://mathlanguage.wordpress.com/2016/03/29/reason-quantitatively-and-abstractly-specific-vs-general/

[5] M. Small, *Teaching mathematical thinking*, Teachers College Press, New York, 2017.

[6] K. Stacey *What is mathematical thinking and why is it important*,

http://e-archives.criced.tsukuba.ac.jp/data/doc/pdf/2009/02/Kaye_Stacey.pdf

[7] A. Zollman, *Students Use Graphic Organizers to Improve Mathematical Problem-Solving Communications*, Middle School Journal,Vol. 41, No. 2 (Studeni 2009), 4-12.

[8] *Using mathematics*,

https://www.ox.ac.uk/admissions/undergraduate/courses/using-mathematics

Sažetak

Kada se nekom spomene riječ *matematika* ljudi često pomisle na opširni sadržaj koji ona donosi i složene algoritme za rješavanje matematičkih zadataka. Kroz godine podučavanje matematike se mijenja. Danas u podučavanju matematike sve više je naglasak na razvoju matematičkog mišljenja kod učenika kako bi što samostalnije rješavali matematičke probleme što na kraju dovodi do rješavanja svakodnevnih životnih problema. U ovom radu iznijet ćemo osam matematičkih standarda donesenih u Americi kako bi usmjerili učitelje na način podučavanja matematike. U svakom standardu detaljno su opisane kompetencije kojima učenik treba što bolje ovladati. Naglasak se nalazi na razumijevanju načina rješavanja zadataka kako bi ga učenik mogao primijeniti u bilo kojem sličnom zadatku. Njeguje se argumentiranje riješenih zadataka i razmjenjivanje mišljenja među učenicima. Smatra se vrlo bitnim rješavanje problemskih zadataka jer oni potiču kognitivne procese kojima će učenici znati riješiti i svakodnevne životne probleme. Ponekad nije dovoljno samo objasniti svaki standard kako bi učitelji shvatili što se od njih očekuje. Iz tog razloga u svakom poglavlju napisani su primjeri koji kod učenika mogu izazvati primjenu određenog standarda i načini na koji bi učenici mogli razmišljati rješavajući neki primjer. Često odgovori učenika mogu biti nepredvidivi pa jedan primjer može učenike potaknuti na primjenu više od jednog standarda. Na kraju svakog poglavlja učitelji mogu otkriti na koji način će znati jesu li učenici usvojili ove standarde.
Ključne riječi: Standardi, matematika, problemski zadaci

Summary

When you mention to someone word *mathematics* people often think of its wide content and complex algorithms for solving mathematical problems. Over the years the teaching of mathematics has changed. Today, in teaching mathematics, there is an increasing emphasis on the development of mathematical thinking so students could solve mathematical problems as independently as possible, which ultimately leads to solving everyday life problems. In this paper we will present eight mathematical standards adopted in America to guide teachers in teaching mathematics. Each standard describes in detail the competencies that the student needs to master as well as possible. The emphasis is on understanding how to solve tasks so that the student can apply it in any similar task. Arguing of solved tasks and exchange of opinions among students is nurtured. It is considered very important to solve problem tasks because they stimulate cognitive processes by which students will be able to solve everyday life problems. Sometimes it is not enough to just explain each standard for teachers to understand what is expected of them. For this reason, in each chapter, there are examples that arose students to apply a certain standard and ways in which students could think by solving an example. Often students' responses can be unpredictable, so one example may encourage students to apply more than one standard. At the end of each chapter, teachers can find out how they will know if students have adopted these standards.

Key words: Standards, mathematics, problem tasks

Životopis

Rođena sam 14. veljače 1995. godine u Slavonskom Brodu u Hrvatskoj. U razdoblju od 2001. do 2009. pohađala sam Osnovnu školu „Mijat Stojanović". Srednju školu „Gimnazija Županja" upisujem 2009. godine, smjer opća gimnazija. Nakon završene srednje škole i položene državne mature, 2013. upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Na Integrirani nastavnički studij matematike i informatike također na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku prebacujem se 2015. godine. U školskoj godini 2019./2020. radila sam u Osnovnoj školi "Mijat Stojanović" u Babinoj Gredi kao učiteljica matematike, kasnije kao edukacijski rehabilitator te u Osnovnoj školi Josipa Lovretića u Otoku kao učiteljica matematike i informatike. U slobodno vrijeme volim trčati i voziti bicikl.