

# Istraživačka nastava matematike

---

Solar, Vedrana

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:418669>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-02**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Vedrana Solar

**Istraživačka nastava matematike**

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Vedrana Solar

**Istraživačka nastava matematike**

Diplomski rad

Mentor: doc.dr.sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2020.

## Posveta

*Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima, koji su me napustili na putu ka ostvarenju moje, ali i njihove želje, kao znak zahvale za sve što su mi pružili u životu i što su uvijek bili tu uz mene čak i kada više nisu bili fizički sa mnom. Zahvalna sam im jer su mi dali širom otvorene ruke i da bez ikakvog pritiska odaberem ono što želim jer su vjerovali da ću odabrati ono što je najbolje za mene.*

# Sadržaj

Uvod	3
1 Što znači istraživati?	4
2 Problem - osnova istraživačke nastave	4
3 Istraživačka nastava matematike	6
3.1 Zadatci koji potiču istraživačku nastavu . . . . .	7
3.1.1 Od zatvorenog zadatka do otvorenog zadatka . . . . .	8
3.1.2 Nestrukturirani zadatci . . . . .	11
4 Učitelj - vođa, organizator i moderator	11
4.1 Važnost pitanja . . . . .	14
4.2 Pitanja koja potiču raspravu . . . . .	15
4.3 Vrste učeničkih istraživanja . . . . .	16
4.4 PRIMAS moduli za promicanje istraživanja . . . . .	17
5 Faze učenja u istraživačkoj nastavi	18
5.1 Učenje u istraživačkoj nastavi kroz četiri faze . . . . .	19
5.2 Model 5E . . . . .	20
6 Pozitivne strane istraživačke nastave	21
7 Tradicionalna nastava vs. istraživačka nastava	22
8 Problemi prilikom provedbe istraživačke nastave	25
9 Primjeri istraživačke nastave	27
Zaključak	33
Sažetak	34
Summary	35
Životopis	37

## Uvod

Društvo 21. stoljeća traži od učenika da samostalnim radom i razmišljanjem usvajaju nova znanja stoga nije dovoljno da im nastavnici iznose samo činjenice i traže od njih usvajanje osnovnih vještina. Učenici trebaju usvajati vještine kao što su samostalno rješavanje problema i dolaženje do zaključaka, kreativno i kritičko razmišljanje, surađivanje te komunikacija s drugim osobama.

Uz navedene vještine učenik bi tijekom školovanja trebao razviti i osam ključnih kompetencija koje su navedene u Nacionalnom okvirnom kurikulumu. Osam ključnih kompetencija je donijela Europska unija, a obrazovna politika Republike Hrvatske ih je prihvatila, a one su: komunikacija na materinskomu jeziku, komunikacija na stranim jezicima, matematička kompetencija i osnovne kompetencije u prirodoslovlju i tehnologiji, digitalna kompetencija, učiti kako učiti, socijalna i građanska kompetencija, inicijativnost i poduzetnost te kulturna svijest i izražavanje. Matematička se kompetencija odnosi na osposobljenost učenika za razvijanje i primjenu matematičkoga mišljenja u rješavanju problema u nizu različitih svakodnevnih situacija. Iz čega vidimo da matematičko obrazovanje ima odgovornost za razvoj vještina 21. stoljeća što također možemo vidjeti i u definiciji matematičke pismenosti od strane PISA-e. PISA (Programme for International Student Assessment) je prema definiciji Nacionalnog centra za vanjsko vrednovanje (NCVVO) trenutno najveće obrazovno istraživanje na svijetu koje je krajem 1990-ih godina Organizacija za ekonomsku suradnju i razvoj (OECD) pokrenula s ciljem prikupljanja međunarodno usporedivih podataka o znanju i vještinama petnaestogodišnjih učenika u kojima se nastoji ispitati koliko su mladi pripremljeni za potpuno i aktivno sudjelovanje u današnjem društvu. PISA definira matematičku pismenost kao sposobnost formuliranja, primjenjivanja i tumačenja matematike u različitim kontekstima. Ona obuhvaća matematičko zaključivanje i primjenu matematičkih koncepata, postupaka, činjenica i alata potrebnih za opisivanje, objašnjavanje i predviđanje pojava. Ona pomaže pojedincu da prepozna ulogu koju matematika ima u svijetu i da donosi dobro utemeljene odluke i prosudbe koje su mu potrebne kao konstruktivnom, zainteresiranom i promišljajućem građaninu.

Iz svega navedenog jasno vidimo koje kompetencije učenik treba razviti

tijekom svog školovanja kako bi mogao sudjelovati u današnjem dinamičnom društvu znanja i odgovoriti izazovima koje to društvo stavlja pred njega. Postavlja se pitanje kako učenike potaknuti da razvijaju tražene vještine unutar nastave matematike. Jedan od načina za razvijanje traženih vještina jest upravo istraživački usmjerena nastava koju promiču i EU projekti FIBONACCI, MERIA, MASCIL i PRIMAS.

## 1 Što znači istraživati?

Kako bismo bolje razumijeli što smatramo kada kažemo istraživačka nastava matematike objasniti ćemo ključnu riječ tog naziva, a to je istraživati. Na Hrvatskom jezičnom portalu pojam istraživati je definiran kao tragati za novim činjenicama i metodama rada i proučavati radi stjecanja novih znanja i spoznaja. Definicija govori da je taj proces relativno samostalan, njime upravlja samo osoba koja istražuje i ne koristi se već viđenim metodama. Stoga se istraživačka nastava matematike odnosi na pristup nastavi matematike u kojem učenici koriste svoja usvojena znanja iz matematike i stječu nova kroz razne aktivnosti. Takve aktivnosti bi trebale potaknuti učenike da razumiju ono što istražuju, a razumijevanje značenja je uspješnije ako učenik do njih dolazi vlastitim trudom.

## 2 Problem - osnova istraživačke nastave

Istraživati je ključna riječ samog naziva istraživačke nastave, a pojam na kojem se temelji takav princip nastave jest problem. Problem možemo definirati kao situaciju za koju trebamo pronaći rješenje, ali na putu do rješenja možemo naići na poteškoće. Stoga je rješavanje problema postupak pokušaja pronalazjenja jednog ili više rješenja za izazovne situacije ili poteškoće koje susrećemo. Problemi se nalaze svuda oko nas kako u obrazovanju tako i u poslu, ali i u životu općenito. Svaki problem sadrži određene zadane vrijednosti, tj. poznate činjenice i krajnji(e) cilj(eve), tj. rješenja. Postupak rješavanja problema, tj. pronalazjenje puta od zadanih vrijednosti do krajnjeg cilja, nije pravocrtan. Postoje brojne prepreke koje taj put čine krivudavim, a koje je potrebno savladati kako bi došli do krajnjeg cilja. Prepreke su promjenjive vrste i one se razlikuju od problema do problema, ali ovisе i o

kontekstu. No, ako postanemo svjesni mogućih prepreka, tada ćemo ih lakše savladati. Prepreke mogu biti intelektualne koje su uzrokovane nedostatkom znanja za rješavanje problema. Najčešća zabluda je ta da je rješavanje problema usmjereno na vještine učenika, a manje na znanje. Ključna stvar za rješavanje problema jest upravo znanje koje ima pet različitih dimenzija, a one su sljedeće:

- ČINJENIČNO ZNANJE - znanje o temeljnim pojmovima koje učenici moraju poznavati kako bi riješili problem.
- KONCEPTUALNO ZNANJE - znanje o konceptima, načelima, teorijama, modelima i klasifikacijama.
- PROCEDURALNO ZNANJE - znanje kako nešto naučiti, poznavanje specifičnih vještina, tehnika i algoritama te kriterija za odabir i korištenje odgovarajućih procedura, vještina, tehnika i metoda.
- STRATEŠKO ZNANJE- znanje o strategijama koje mogu koristiti za rješavanje problema.
- METAKOGNITIVNO ZNANJE -znanje o tome kako procijeniti i prilagoditi vlastito razmišljanje, uključujući stavove i uvjerenje s ciljem rješavanja problema.

Za uspješno rješavanje problema učenik mora steći svih pet gore navedenih dimenzija znanja. Ako mu bilo koji od ovih aspekata nedostaje, problem će riješiti pogrešno ili će imati problema na putu do rješenja.

Osim prepreka koje se odnose na znanje postoje i druge prepreke pri rješavanju problema kao što su: različite perspektive, osjećaji, izričaj, okružje te kultura.

- PERSPEKTIVA - razlog zbog kojega svaka osoba gleda svijet drugačijim očima. Kada bi postojala samo jedna perspektiva, pojedina bi rješenja ne bi mogli prepoznati ili bi ih zanemarili. Stoga razmatranje različitih perspektiva ima pozitivan učinak i može pomoći pri savladavanju ove prepreke.



- OSJEĆAJI - to je ono zašto osjećamo da bi moglo imati negativan utjecaj na rješavanje problema. Npr. ako učenik ne želi iznijeti svoju ideju jer smatra da će zvučati glupo. Stvaranjem zajednice u kojoj je okružje takvo da se sigurno i otvoreno može voditi rasprava s jasnim pravilima možemo riješiti i ovu prepreku.
- IZRIČAJ - način na koji se izražavamo. Nepotpunim objašnjenjem problema ili rješenja može doći do krive interpretacije i komunikacije što sami postupak čini manje učinkovitim. Određivanjem definicije problema i uporabom vizualnih tehnika i prikaza možemo savladati ovakve prepreke.
- OKRUŽJE - ova prepreka je izazvana društvenim ili fizičkim okruženjem. One utječu na našu sposobnost jasnog razmišljanja i učinkovitog rješavanja problema. Npr. ako je u učionici buka, ona može ometati koncentraciju učenika na zadatku ili npr. ograničen pristup računalu ograničava mogućnost istraživanja.
- KULTURA - uključuje nekoliko razina, od kulture škole do kulture pojedinca i na svim tim razinama uvjetuje naše očekivano ponašanje. Npr. ako kultura škole ne potiče suradnju, moguće je da ne ćemo zatražiti doprinos druge osobe.

### 3 Istraživačka nastava matematike

Temelj istraživačke nastave je konstruktivistički pristup učenju i poučavanju u kojem učenici postaju graditelji i stvaratelji novih znanja tijekom raznih aktivnosti i procesa intelektualnog razvoja. Aktivnost koja potiče znatiželju učenika i zahtijeva njihovo sudjelovanje jest upravo rješavanje problema, a kako bi došli do rješenja problema učenici postaju mali istražitelji. Kako nam ranije navedena definicija istraživanja govori, učenici tragaju za novim činjenicama i metodama rada i proučavaju kako bi stekli nova znanja i spoznaje. Učenje ne bi trebalo biti proces u kojem učitelj samo prenosi znanje učenicima već bi učenici trebali izgraditi svoje znanje tijekom aktivnosti, tj. istraživanja. Učenik lakše stvara nove ideje ako je aktivno uključen u rad unutar kojeg promišlja o tijeku promjena i samom uratku koji je stvoren

radom te razmjenjuje iskustva s drugim učenicima. Takvim pristupom učenju stvara se trajnije znanje pohranjeno u dugoročnom pamćenju i dublje razumijevanje onoga što se uči.

### **3.1 Zadatci koji potiču istraživačku nastavu**

Zadatke koji učenicima tijekom rješavanja istih omogućuju stvaranje trajnijeg znanja i dubljeg razumijevanja opisao je i dr. Zdravko Kurnik. Dr. Zdravko Kurnik je naš poznati matematičar i metodičar koji je u svome djelu, Posebne metode rješavanja matematičkih problema, opisao matematički zadatak kao složeni matematički objekt kojeg karakteriziraju uvjeti, cilj, teorijska osnova, rješavanje te osvrt. Matematički zadaci se najčešće dijele prema složenosti iako je procjena složenosti svakog zadatka vrlo individualna, povezana je s predznanjem koje osoba ima, pripremljenošću, a i samom voljom za radom. Kurnik je u svom već spomenutom djelu podijelio zadatke prema složenosti na dvije skupine, standardne i nestandardne zadatke. Pod standardne zadatke smatra zadatke za koje postoje ustaljene metode rješavanja, kao što je na primjer deriviranje. Standardni zadatci, koji se još uvijek u velikoj većini nalaze u našim udžbenicima, će teško postići razvoj istraživačke nastave jer su osmišljeni tako da učenici ne trebaju previše razmišljati o postupku rješavanja. Dok nestandardne zadatke opisuje kao zadatke u kojima je barem jedna sastavnica nepoznata što učenicima daje mogućnost istraživanja i pronalaženja sastavnice koja nedostaje. Jedan od najbitnijih elemenata istraživačke nastave je da se u učionici stvore satovi koji su pogodni za primjenu istraživačko usmjerenih procesa. Treba se bazirati na nestandardnim zadacima jer oni učenicima daju priliku da istražuju, surađuju, razmišljaju, komuniciraju međusobno te uspoređuju rezultate. Nestandardni zadaci pružaju nastavnicima mogućnost da matematiku povežu s drugim prirodnim predmetima čime učenici mogu vidjeti da je matematika zapravo primjenjiva. Postoji još nekoliko kategorizacija zadataka. Zadatke možemo promatrati i kao zatvorene i otvorene. Otvoreni tip zadatka može imati više rješenja i/ili više načina rješavanja. Matematika ima tu mogućnost da se zadatci mogu preformulirati iz standardnih u nestandardne zadatke, iz zatvorenih u otvorene te rješavanje pretvoriti u istraživanje. Takvi zadaci koji dovode do više rješenja ili imaju više načina rješavanja ne potiču samo učenje novih znanja

nego i razvoj logičkog mišljenja, kreativnost, stjecanje vještina koncentracije, ustrajnosti i dosjetljivosti, integriranje matematičkih sadržaja te razvoj kognitivnih znanja analize, sinteze i vrednovanja. Uloga nastavnika u ovom procesu je da učenicima postavlja pametno odabrana pitanja, ohrabruju one kojima dobar ide i potiče one kojima teže ide kako bi zadržali učenikovu znatiželju i koncentraciju tijekom istraživanja te kako bi učenici što bolje razvili navedene vještine. Trebaju cijeliti učenikov rad, ispravljati greške, podupirati učenje u kojemu učenici koriste svoja mišljenja i iskustva. Kada sve sagledamo, vidimo da takav princip nastave zahtijeva i od nastavnika i od učenika postojanje nekog zajedničkog cilja, tj. zajedničko kreiranje matematičkog sadržaja. Znamo da se ne može sve iz svakodnevice preoblikovati tako da se provodi istraživačka nastava, ali nastavnici trebaju nastojati uključiti što više tema koje potiču upravo takvu nastavu kako bi se razvili resursi za takav pristup, poticao timski rad i osvijestili načini učenja koncepata kroz istraživačku nastavu.

### **3.1.1 Od zatvorenog zadatka do otvorenog zadatka**

Glavna odrednica nastavnog sata i onoga što se događa unutar učionice jest udžbenik. Begle(1973) je rekao da je udžbenik stvar s kojom možemo manipulirati, ali s druge strane ima i utjecaj na učenje učenika. Kako bi provođenje istraživačke nastave bilo što uspješnije, učitelj se ne bi trebao oslanjati samo na udžbenik jer su današnji udžbenici još uvijek u velikom dijelu ispunjeni strukturiranim zadacima. Učitelj bi trebao u udžbeniku pronaći zadatke koje od učenika zahtijevaju raspravu i međusobnu komunikaciju, ali ako takvi zadaci ne postoji tada bi trebao preoblikovati zadatke tako da omogućiti učenicima raspravu i međusobnu komunikaciju. Zadaci ne moraju biti nužno složeni, potrebno je samo da su dovoljno otvoreni da učenici mogu razmišljati o njima i obrazlagati svoja rješenja. Kako preoblikovati zadatke vidjet ćemo kroz nekoliko jednostavnijih primjera.

**Primjer 1.**

*Zatvoreni zadatak:*  $12 + 8 =$        $12 \cdot 8 =$

*Otvoreni zadatak:* Pronađi dva prirodna broja čija je suma 20, a produkt 96. Objasni zašto su tvoji brojevi koje si odabrao upravo ti koje tražimo. Kako si započeo svoje razmišljanje o problemu?

**Primjer 2.**

*Zatvoreni zadatak:* Pomnoži 6.5 s 5.

*Otvoreni zadatak:* Pomnoži 6.5 s prirodnim brojem čiji je produkt između 110 i 140. Zapišite svoje pokušaje. Kako si se odlučio koje ćeš brojeve isprobati?

**Primjer 3.**

*Zatvoreni zadatak:* Zapiši izraz  $4(5 - x)$  koristeći svojstvo distributivnosti.

*Otvoreni zadatak:* Neka su 5,  $x$  i  $y$  realni brojevi. Je li tvrdnja  $5(x - y) = 5x - y$  istinita? Objasni svoj odgovor.

ili

*Otvoreni zadatak:* Neka su 5,  $x$  i  $y$  realni brojevi. Je li tvrdnja  $5(x - y) = 5x - y$  uvijek istinita, ponekad istinita ili nikada? Obrazloži svoj odgovor.

**Primjer 4.**

*Zatvoreni zadatak:* Jesu li trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle DEF$  slični ako su duljine njihovih stranica jednake: 12cm, 16cm, 20cm, odnosno 15cm, 20cm i 25cm?

*Otvoreni zadatak:* Nacrtaј dva proizvoljna slična trokuta i objasni kako zaključuješ da su oni slični.

**Primjer 5.**

*Zatvoreni zadatak:* Izračunaj udaljenost točkaka  $A$  i  $B$  ako je  $A(-3, 0)$  i  $B(5, 0)$ .

*Otvoreni zadatak:* Osmisli zadatak riječima u kojem ćeš imati dvije točke u koordinatnom sustavu te izračunati njihovu međusobnu udaljenost.

**Primjer 6.**

*Zatvoreni zadatak:* Nacrtaј dužinu  $\overline{PQ}$  duljine  $8\text{cm}$  i bez mjerenja je podijeli na 6 jednakih dijelova.

*Otvoreni zadatak:* Nacrtaј duljinu  $\overline{PQ}$  proizvoljne duljine i bez mjerenja ju podijeli na proizvoljan broj jednakih dijelova. Objasni svoj postupak.

**Primjer 7.**

*Zatvoreni zadatak:* Četverokut ima tri kuta s mjerama  $100^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $130^\circ$ . Koliko iznosi mjera četvrtog kuta?

*Zatvoreni zadatak:* Pokažite da četverokut ne može imati četiri tupa kuta.

*Otvoreni zadatak:* Je li moguće da četverokut ima četiri tupa kuta? Objasni svoj odgovor.

- Može li trokut imati više od jednog tupog kuta? Objasni odgovor.
- Može li četverokut imati dva tupa kuta? Ako da, skiciraj. Ako ne, objasni zašto ne.
- Može li četverokut imati tri tupa kuta? Ako da, skiciraj. Ako ne, objasni zašto ne.

### 3.1.2 Nestrukturirani zadatci

U većini učionica, učenici rješavaju strukturirane zadatke i rečeno im je koje tehnike trebaju primijeniti. No problemi i situacije koje nastaju u svijetu obično nisu takve. Problemi iz stvarnog svijeta zahtijevaju od učenika pojednostavljenja, modeliranje situacija, odabir odgovarajućeg znanja i procesa iz njihovog "alata" i testiranje je li njihovo rješenje "dovoljno dobro". Posebna vrsta zadataka otvorenog tipa su nestrukturirani zadatci. To su najčešće zadatci koji se bave problemima iz stvarnog svijeta, a učenicima nisu dane sve upute.

**Primjer:** *Radite za dizajnersku tvrtku i od vas su tražili da dizajnirate kutiju u kojoj će biti 18 bombona. Svaki bombon je promjera 2 cm i debljine 1 cm. Kutija mora biti izrađena od jednog kartončića dimenzije A4 sa što manje rezanja.*

- *Usporedite dva moguća dizajna kutije i recite koji je najbolji i zašto.*
- *Napravite svoju kutiju.*

## 4 Učitelj - vođa, organizator i moderator

Da bi proces učenja novih znanja bio što uspješniji trebao bi se temeljiti na interakciji učenika s problemom. Najpoželjnije bi bilo da se interakcija vodi na način da učenici sudjeluju u aktivnostima koje ih navode na prilagodbu postojećeg i stjecanja novog znanja. Učenici izgrađuju znanje pomoću metoda koje se temelje na istraživanju, otkriću, a zatim pronalaženju novih informacija. Učenici imaju kontrolu nad procesom učenja i kontinuirano prate vlastito znanje. Učenici razvijaju vlastito znanje na temelju iskustva kojeg su dobili tijekom procesa. Učiteljeva uloga u tom cijelom procesu je puno veća od odabira prihvatljivih zadataka za istraživanje i preoblikovanja strukturiranih zadatak u nestrukturirane. Učitelj je najvažniji kotač cijelog procesa kao osoba koja sve to planira i vodi. Stoga vidimo, da bi nastava bila kvalitetno isplanirana, nastavnik bi trebao najprije izraditi scenarije koji su mogući tijekom procesa kako bi što bolje razumio u kojim će dijelovima proučavanja problema učenici koristiti prethodno stečeno znanje, kada će formulirati hipo-

tezu, kada će ju testirati te kada mogu izgraditi novo znanje na temelju svojih postupaka. Uloga učitelja pri rješavanju problema jest ta da bude moderator i organizator kada govorimo o osmišljavanju i vođenju učenika. Učitelj bi treba biti otvoren za dodatna pitanja, savjetovati te odgajati učenike. Učitelj bi trebao biti suistraživač koji pomaže svojim učenicima postavljajući im dodatna pitanja, a ne osoba koja će im servirati sve odgovore. Formulacija problema bi trebala učenike potaknuti da rade na problemu. Ona im osigurava da kreiraju mnoštvo metoda ovisno o znanjima koja već imaju, potiče ih da eksperimentiraju s problemom i istražuju što ih dovodi do novih znanja.

Uz navedene uloge nastavnika istaknut ćemo još nekoliko važnih uloga kako bi istraživačka nastava bila što uspješnija. Učitelj bi trebao:

- osigurati više od jednog izvora informacija kako bi ih učenici mogli uspoređivati.
- učenicima omogućiti da svojim reakcijama i odgovorima usmjeravaju tijek sata te traži od njih da objasne svoje odgovore što također traži dovoljno vremena za razmišljanje nakon postavljenog pitanja.
- poticati radoznalost i propitivanja učenika.
- služiti se glagolima kao što su npr. klasificirati, analizirati i oblikovati pri oblikovanju zadataka.
- poticati i uvažavati slobodu i inicijativu učenika.
- zahtijevati od učenika da se jasno izražavaju jer kada su učenici sposobni jasno izražavati ono što razumiju tada su to stvarno usvojili.
- zahtijevati i upotrebljavati učenička pitanja i ideje tijekom vođenja sata.
- promicati učeničko vodstvo i suradnju.
- koristiti učenikovo mišljenje, interese i iskustva tijekom sata.
- podržavati alternativne izvore koji će pomoću u stjecanju novih znanja.
- tražiti da učenici iznesu svoje ideje prije obrade gradiva.

- poštivati i upotrebljavati sve učeničke ideje.
- tražiti od učenika da pronalazi informacije koje mogu primijeniti i u rješavanju nekih stvarnih životnih problema.
- proširivati učenje izvan nastavnog sata, razreda i škole.
- promijeniti učenikovo uvjerenje da je usvajanje nastavnih sadržaja potrebno samo radi postizanja školskog uspjeha.

Učitelji kao suistraživači dolaze do raznih izazova i dvojbi tijekom istraživačke nastave. Neke od dvojbi i izazova su: kada bi se trebali uključiti u aktivnost, suzdržavanje od davanja potpunih odgovora ili kada bi učenicima trebalo ponuditi optimalne strategije. Ako učitelj predloži da promotre poseban slučaj ili da skiciraju graf ili geometrijski oblik oni će to protumačiti kao jedini mogući put do rješenja. To će napraviti jedino iz razloga jer je tako rekao učitelj, a ne zato što smatraju da će tom strategijom riješiti problem. Učitelji bi trebali nastojati učenicima pokazati što više različitih metoda rješavanja, gdje god je to moguće, kako bi učenici shvatili da nije jedini način rješavanja onaj koji učitelj koristi. U ovakvom obliku nastave izrazito je teško usmjeravati učenike i primjenjivati strategije učenja otkrivanjem, a da im se ne daju odgovori. Kako bi sat prošao što uspješnije, učenicima treba ograničiti područje koje istražuju. Ako je vođenje previše usmjereno ili ako im se da premalo ograničenja tada se nastava neće održati prema planiranom. Izazov prilikom vođenja učenika tijekom procesa istraživanja jest taj da nema pravog istraživanja ako se učenicima da previše uputa jer to poništava mogućnost učenja novih spoznaja, s druge strane ako se učenicima ne da dovoljno uputa zapet će pri istraživanju, a zatim odustati od rješavanja. Prava količina uputa je stvar osjetljive ravnoteže. U tom slučaju učenici ne mogu graditi nova znanja na temelju naučenog. Učitelj ne može izravno reći učenicima što trebaju raditi, ali paralelno ih treba poticati da postupaju na ispravan način kako bi došli do željenog cilja. Stoga se na poticanje treba gledati na nešto više od postavljanja preizravnih i zatvorenih pitanja, davanja primjera i metoda. No, najbitniji poticaj od strane učitelja se nalazi u orijentacijskom pitanju. To je pitanje kojim započinje istraživački proces. Učitelj orijentacijskim pitanjem postavlja "scenu", a učenici se pri-



sjećaju prethodno stečenih znanja i vještina te koncepte kojim će pristupiti rješavanju problema. Pitanja su jako korisna u istraživačkoj nastavi, ali ako nisu preizravna i ako su otvorena na način da učenici mogu razmišljati o postavljenom pitanju.

## 4.1 Važnost pitanja

*"Kada bih imao jedan sat za riješiti problem o čijem rješenju ovisi moj život, prvih 55 minuta potrošio bih određujući pravo pitanje zato što s pravim pitanjem problem mogu riješiti u 5 minuta", Albert Einstein*

Možemo reći da je vještina postavljanja pitanja, kako od strane učitelja tako i od strane učenika, jedna od temeljnih stavki istraživačke nastave. Ranije navedena misao velikog znanstvenika Alberta Einsteina zapravo otkriva pravi smisao istraživanja. Znanost se temelji na pitanjima, a učenik je pri istraživačkom procesu uključen u načine učenja koje prikazuju razvoj znanstvenog mišljenja koje uključuje kreativno rješavanje problema i inovacije. Stoga je važno i učitelju i učenicima razviti vještine učinkovitog i preciznog postavljanja pitanja. Postavljanje istraživačkog pitanja bi trebalo potaknuti orijentacijsko pitanje, tj. početna situacija istraživanja. Pitanja mogu postavljati i oblikovati učitelji, ali i učenici jer su potaknuti uvodnom situacijom na razmišljanje. Postavljanje istraživačkog pitanja kod učenika je rezultat kognitivnog sukoba, tj. učenici se nađu u situaciji u kojoj im nije više dovoljno samo prethodno stečeno znanje za rješavanje problema, ali im se otvaraju nove ideje i pitanja. Učenike treba što više poticati da sami postavljaju pitanja. Nakon što se postavi istraživačko pitanje i postave hipoteze, učitelj pitanjima treba učenike usmjeravati na pravi put stjecanja novih znanja. Učitelj je taj koji organizira i predlaže aktivnosti učenja, iskustva učenja i okruženje u kojem se odvija učenje. Tijekom eksperimentiranja, pretraživanja i uspoređivanja različitih izvora učenici mogu sami postavljati pitanja o prikupljenim podacima. Tada je uloga učitelja da svojim pitanjima pomogne učenicima oblikovati njihove odgovore. Kao najvažnija pitanja ističu se ona koja omogućuju međusobnu suradnju učenika, regulaciju i samoregulaciju učenja. Ta pitanja trebaju biti izazovna tako da učenike zainteresiraju za problem, da od njih traže da eksperimentiraju i raspravljaju o mogućim rje-

šenjima, iznose hipoteze i moguće strategije rješavanja te da postavljaju i dodatna pitanja tijekom procesa. Na kraju procesa, kada učenici dođu do odgovora na postavljeni problem ili pitanje, učenike treba poticati na samo-refleksiju o samom procesu i strategijama koje su koristili kako bi postali što samostalniji u sljedećem istraživačkom zadatku.

## 4.2 Pitanja koja potiču raspravu

Osoba koja ima ulogu da podupire učenike tijekom istraživanja je upravo učitelj. Učitelj sam procjenjuje količinu podrške i prilagođava ju učenicima. Kada se tek započne s istraživačom nastavom potrebna je veća podrška, ali s vremenom ta se podrška smanjuje jer se povećava iskustvo i vještine učenika. Na početku je potrebno učenike potaknuti na kreativnost i prikupljanje ideja što nastavnik može potaknuti postavljanjem nekih od sljedećih pitanja:

- Što znate već od prije, a moglo bi nam biti korisno?
- Koje su moguće pretpostavke?
- Možemo li problem zapisati jednostavnije?
- Je li vam situacija od prije poznata, ako je opišite ju?
- Koji dio vam je poznat, a koji nepoznat?

Nakon što je učitelj potaknuo kreativnost i ideje učenika potrebno je te ideje razmotriti, isplanirati i istražiti što učitelj može potaknuti sljedećim pitanjima:

- Kako možemo najbolje zabilježiti vaše podatke?
- Što možemo zaključiti iz ovih podataka?
- Kamo nas vodi ovaj pristup?
- Možete li smisliti protuprimjer?
- Ima li neki drugačiji način da ovo napravimo?

Učenika je zatim potrebno potaknuti na interpretaciju i vrednovanje rezultata što potiču sljedeća pitanja:

- Kako možete jasno i sažeto objasniti to što ste dobili?
- Koji je najbolji način prikaza vaših podataka?
- Jeste li primijetili nekakve pravilnosti, ako jeste objasnite zašto nastaju?
- Smatrate li da je odgovor logiča i ako je zašto?
- Imate li uvjerljiv argument za tu tvrdnju?

I na kraju istraživanja je potrebno sve sažeti tako što učenici iznesu svoje zaključke i refleksiju što učitelj može potaknuti sljedećim nizom pitanjima:

- U kojoj mjeri je bitan zaključak koji ste donijeli? Ima li u drugim izvorima sličnih zaključaka?
- Koju ste metodu koristili?
- Koje metode ste još razmatrali?
- Koju metodu smatrate najboljom i zašto?
- Koje ste korisne strategije naučili za sljedeći put?

### 4.3 Vrste učeničkih istraživanja

Obzirom da su učitelji ti koji daju podršku učenicima prilikom njihovog istraživanja, količina podrške se može razlikovati. Stoga istraživanje učenika možemo podijeliti na tri vrste obzirom na količinu podrške koju dobivaju od učitelja.

- **STRUKTURIRANO I KONTROLIRANO UČENJE** - učitelj daje učenicima praktičan problem za istraživanje i vodi učenike u istraživanje korak po korak. Ova vrsta istraživanja je dobra za učenike i učitelje koji tek započinju s takvim oblikom nastava.
- **VOĐENO UČENJE** - Učitelj daje učenicima problem, učenici samostalno odabiru metode i u kojem smjeru će istraživanje ići, a učitelj im daje potporu i usmjerava ih pitanjima.

- OTVORENO UČENJE - učenici su ti koji postavljaju problem, a zatim ga samostalno istražuju. Učitelj je u ovoj vrsti istraživanja samo podrška. Učitelj ne smije niti previše usmjeravati, ali niti premalo ograničiti istraživanje.

#### 4.4 PRIMAS moduli za promicanje istraživanja

Kao podrška učiteljima, EU projekt PRIMAS je razvio nekoliko modula koji promiču istraživanja u svakodnevnom radu u nastavi. Cilj projekta je bio da učitelje potaknu da zajednički istražuju pedagošku osnovu istraživačke nastave putem osimljavanja i provedbe modula za profesionalni razvoj. Aktivnosti koje su obuhvaćali ti moduli su povezivale istraživačku nastavu i postojeće prakse te inovativne nastavne aktivnosti. Od modula se očekivalo da će učitelje navesti na razmišljanje i na novi način rada. Stoga ćemo ukratko objasniti svaki od modula.

1. ORGANIZIRANJE ISTRAŽIVANJA POD VODSTVOM UČENIKA - U ovom modulu učitelji su potaknuti da iskuse kako je to razmišljati kao matematičar ili znanstvenik i razmišljaju o ulogama za učenike koje su potrebne kako bi se to iskustvo moglo prenijeti u razred. Učiteljima su predstavljene moguće pojave i situacije te se od njih traži da postave i istraže vlastita pitanja. To iskustvo zatim prenose u razred.
2. POMAGANJE UČENICIMA PRI RJEŠAVANJU NESTRUKTURIRANIH ZADATAKA - Ovaj modul od učitelja traži da uspoređuje strukturirane i nestrukturirane probleme te proučava zahtjeve i izazove prilikom rješavanja nestrukturiranih zadataka, a zatim to sve prezentira učenicima i učiteljima.
3. PROMICANJE RAZVOJA KONCEPATA KROZ ISTRAŽIVANJE - Ovaj modul od učitelja zahtijeva da proučavaju kako učenje temeljeno na istraživanju može biti integrirano u nastavu matematike i znanosti.
4. POSTAVLJANJE PITANJA KOJA PROMIČU ISTRAŽIVAČKU NASTAVU - Ovaj modul sadrži popis profesionalnih aktivnosti koje potiču učitelje da razmisle o:

- karakteristika ispitivanja koje potiču učenike na promišljanje, razmišljanje i objašnjavanje.
- načinima na koje mogu potaknuti učenike da prošire svoje znanje, traže odgovore, a da se pri tome ne boje pogriješiti
- kako će učenicima pokazati važnost značenja izraza "razmišljati na glas"

5. **PODUPIRANJE SURADNIČKOG UČENJA** - Ovaj modul je osmišljen da pruža potporu profesionalnom razvoju kroz nekoliko savjeta koji će pomoći učitelju da:

- razmotri karakteristike rasprave između učenika koje poboljšavaju učenje
- prepozna i da se suoči s mogućim preprekama pri uvođenju suradnje
- istraži načine na koje će predstaviti pozitivne strane rasprave među učenicima
- razmisli o vlastitoj ulozi prilikom suradničkog učenja
- osmisli sat koji je baziran na suradnji

Osim projekta PRIMAS postoji još nekoliko projekata koji se bave idejom istraživačke nastave, a to su: MASCIL, MERIA te FIBONACCI.

## 5 Faze učenja u istraživačkoj nastavi

Istraživačka nastava matematike ima nekoliko modela pomoću kojih možemo opisati faze istraživačkog učenja. Učitelji su ti koji odabiru po kojem će modelu raditi. Kada se jednom model odabere trebalo bi ga slijediti korak po korak. No svaki model ima mogućnost i povratka na prethodni korak jer u svakom koraku postoji mogućnost da učenici svojim pitanjima otvore novi korak ili zahtijeva povratak na prethodni. Istaknut ćemo dva modela istraživačkog učenja, a to su učenje u istraživačkoj nastavi u četiri faze gdje ćemo također istaknuti neka od pitanja koja se pojavljuju i model 5E.

## 5.1 Učenje u istraživačkoj nastavi kroz četiri faze

Model učenja kroz četiri faze započinje postavljanjem pitanja ili problema, a zatim prelazimo na faze učenja.

1. POSTAVLJANJE VAŽNIH I UČINKOVITIH PITANJA - u ovoj fazi se učenicima daje određeno vrijeme kako bi razmislili o samoj temi, pitanju ili problemu, a zatim postojećem znanju pridružuju neka od sljedećih pitanja:
  - Što znam o ovoj temi?
  - Što želim znati o ovoj temi?
  - Što znam o pitanju koje želim postaviti?
  - Otkud potječe znanje koje imam?
  - Što još trebam znati?
  - Je li moje pitanje jasno?
2. PRONALAZENJE IZVORA - u ovoj fazi učenici promišljaju koji su im izvori sve dostupni te jesu li ti izvori ispravni, a tu si postavljaju neka od sljedećih pitanja:
  - Gdje ću pronaći odgovor na svoje pitanje?
  - Gdje mogu pronaći izvore?
  - Je li izvor toač?
  - Kako ću provjeriti valjanost izvora?
  - Jesam li odgovorio na postavljeno pitanje?
  - Jesam li što propustio?
  - Gdje još mogu potražiti?
3. INTERPRETACIJA - treća faza učenja služi učenicima da obrade podatke koje su prikupili te procijene važnost podataka za zadani problem ili pitanje, a nameću im se neka od sljedećih pitanja:
  - Je li ovaj podatak važan?
  - Imamo li dovoljno dokaza?

- Koji dokazi potvrđuju moj odgovor?
  - Je li ovo povezano s onim što već znam?
  - Imam li još neko pitanje sada?
4. IZVJEŠĆIVANJE - ovo je završna faza u kojoj učenici izlažu svoje uratke te sami odabiru način na koji će predstaviti, a prije nego što izlože postavljaju im se sljedeća pitanja:
- Koja je glavna poruka koju želim prenijeti?
  - Je li moj odgovor jasan?
  - Kome izlažem svoj rad?
  - Jesam li sve povezao u smislenu cjelinu?
  - Kako ću izložiti svoj rad?

## 5.2 Model 5E

Model 5E odnosi se na faze istraživačke nastave prirodnih predmeta u kojima je uloga učenika da se uključe, istraže, objasne, razrade te procijene znanja i ideje do kojih dođu tijekom istraživanja. Ime model 5E predstavlja početna slova uloga učenika na engleskom jeziku, engage in, explore, to explain, elaborate te evaluate.

1. UKLJUČITI(engaged) - u ovoj fazi učenja učitelj treba potaknuti i motivirati učenike, ali prethodno bi trebao vidjeti kakvo je njihovo razumijevanje teme. Važno je uspostaviti vezu između prethodnih i sadašnjih iskustava učenja jer se u ovoj fazi učenici prvi put susreću sa zadatkom. Tako se postavlja temelji za nadolazeće iskustvo učenika. Glavni cilj ove faze je probuditi interes kod učenika te ga zainteresirati za problem ili zadatak.
2. ISTRAŽIVATI(explore) - u ovoj fazi se izravno učenici uključuju u proces. Izgrađuju zajednička iskustva suradničkim učenjem što uključuje komunikaciju među učenicima te dijeljenje informacija. Učiteljeva uloga je usmjeravati učenike te im olakša put rješavanja problema. U ovoj fazi stavljamo naglasak na istraživanje, analizi podataka te kritičkom razmišljanju. Tijekom istraživanja učenici postavljaju hipoteze,

provjeravaju svoje ideje te donose zaključke, osim toga učitelj treba učenicima pružiti priliku da stvaraju svoja vlastita znanja.

3. OBAJSNITI(explain) - u ovoj fazi učenici razmjenjuju svoja dosadašnja iskustva prilikom istraživanja te shvaćaju značenje toga.
4. RAZRADITI(elaborate) - u ovoj fazi se proširuje konceptualno znanje učenika te uvježbavaju svoje vještine. Uspostavljaju se poveznice s drugim sličnim pojmovima te novi načini primjene razumijevanja na svijet oko sebe. Učenicima treba osigurati da koriste svoja nova stečena znanja da bi nastavili istraživati.
5. PROCIJENITI(evaluate) - u ovoj fazi učenik samostalno procjenjuje svoje razumijevanje i sposobnosti, a nakon toga i učitelj procjenjuje razumijevanje koncepata i razvoj vještina kod učenika.

## 6 Pozitivne strane istraživačke nastave

Učenici neće razviti potrebno razumijevanje, neće zaključivati niti imati sposobnost primjenjivanja znanja i vještina što je propisano odgojno-obrazovnim ishodima ako su na nastavi uglavnom pasivni i nemotivirani. Stoga je izrazito važno u nastavu metode i načine poučavanja koji će potaknuti aktivnost kod učenja, da učenici budu što više uključeni i aktivno sudjeluju u radu. To su metode koje omogućuju međudjelovanje učenika i učitelja te učenika i učenika. Samim time dolazi i do snažnije intelektualne aktivnosti koja vodi do formiranja novih znanja, ali i do razvoja drugih brojnih učenikovih sposobnosti.

Jedan o boljih načina poticanja aktivnosti učenika je upravo istraživačka nastava. U istraživačkoj nastavi učenici samostalno istražuju te stvaraju nova znanja i izgrađuju koncepte čime se postiže da se znanja koja nauče spremaju u trajnije pamćenje. Učenici lakše povezuju sadržaj s drugim područjima i bolje prenose znanja, a osjećaji povezani s procesom otkrivanja povećavaju znatiželju i unutarnju motivaciju. Uz povećanu znatiželju i unutarnju motivaciju istraživanje kod učenika također potiče i kreativnost koja se razvija pri osmišljavanju metoda i načina rješavanja te pitanja tijekom procesa, kritičko



razmišljanje koje se može uočiti pri vrednovanju metoda i samog rezultata, razvijanje apstraktnog mišljenja, rad s nedostatkom informacija, potiče samoregulaciju te komunikaciju i preuzimanje odgovornosti prilikom suradnje s drugim učenicima tijekom istraživanja. Kao posljedica svih navedenih osobina i vještina koje učenici dobiju tijekom istraživačke nastave, stvorit će jasniju sliku o znanosti i matematici, ali postoji i mogućnost da će takav princip nastave potaknuti učenike da upisuju prirodoslovne i matematičke programe srednje škole ili fakultete. No sve navedene osobine i vještine učenika su izrazito bitne kako bi se učenik što bolje uklopio u ono što današnje društvo traži od nas kao osoba.

## **7 Tradicionalna nastava vs. istraživačka nastava**

Princip nastave u kojem se više pozornosti pridaje obrazovanju, a jako malo odgoju učenika je tradicionalna nastava. Takvu nastavu karakterizira pasivno učenje koje se odvija kroz pasivno slušanje predavanja, mehaničko prepisivanje s ploče, odgovaranja na postavljena pitanja, davanja gotovih informacija te frontalno predavanje učitelja. Aktivnosti koje su učenicima dopušteni u takvom obliku nastave su sjedenje, slušanje te gledanje. Glavnu ulogu ima učitelj, važno je što i kako radi učitelj, a učenici su tu samo da promatraju i slušaju te odgovaraju na postavljena pitanja. Sva pažnja je usmjerena na učitelja, a uspješnim učenikom se smatra onaj učenik koji je najviše zapamtio i najbolje reproducirao naučeno kada je učitelj to zahtijevao. Cilj ovakvog tipa nastave je stjecanje velike količine znanja bez obzira što se takvo znanje kod učenika zadržava na razini reprodukcije, a ne na razini rješavanja novih problema te istraživanja novih informacija. Sva odgovornost i sve uloge su na učitelju, od samostalnog planiranja sata do realizacije sata, vrednovanja učenika te pokazivanja načina rješavanja zadataka jer u velikoj većini učenici koriste baš te metode koje je učitelj pokazao zato što nisu dovoljno osposobljeni da pronalaze svoje vlastite načine rješavanja. Svaki učitelj predaje na svoj način, a učenici pasivno slušaju. Nastava se prilagođava prosječnom učeniku i usmjerena je na realizaciju programskih sadržaja. Ovdje je kreativnost učenika svedena na minimum, a njihov intelektualni napor je

izostavljen kao jedna od važnijih sastavnica njihovog učenja novih znanja. Zapostavljen je samostalni rad učenika, istraživanje te problemskog učenje. Nije postignuto razumijevanje nastavnih sadržaja, raznovrsnost aktivnosti te ugodna emocionalna klima u razredu. Ovim principom nastave se učenicima uskraćuje mogućnost pretpostavljanja, dokazivanja, eksperimentiranja te rješavanje složenih problema što su izrazito važni elementi matematike. Kako se učenicima ne bi bili uskraćeni za važne elemente za učenje matematike pojavio se novi princip nastave, a to je istraživačka nastava.

Prve pisane ideje da poučavanje treba biti okrenuto prema iskustvu učenika i usmjereno na njihovu aktivnost pojavile su se prije nešto više od jednog stoljeća. John Dewey, istraživač obrazovanja kojeg se povezuje s izrazom "učiti radeći", smatrao je da nastavu treba usmjeriti na aktivnost učenika i načine na koje učenici stječu znanja. Isticao je važnost i ulogu istraživanja u nastavi i učenju. Matematiku je doživljavao kao alat ili jezik za organizaciju složenih informacija. Dewey je bio protiv tradicionalnog prenošenja znanja koje se temelji na tome da nastavnik pokaže i objašnjava kako se rješava matematički zadatak, a učenici oponašaju viđeno. Takav princip nastave možemo i danas vidjeti u nekim školama, tehnike rješavanja zadataka se ponavljaju i usavršavaju kroz rješavanje sličnih zadataka. Jedan od školskih primjera je rješavanje kvadratne jednadžbe:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Gdje se njezina rješenja vrlo lako dobiju koristeći poznatu formulu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Učitelj na početku ukratko objasni kvadratnu jednadžbu, a zatim učenicima da gornju formulu za traženje rješenja. Nakon toga, učitelj na jednom primjeru pokaže, koristeći danu formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe, kako dobiti rješenje. Ako vidi da učenici nisu najbolje shvatili, pokaže im još nekoliko primjera prije nego što krenu na uvježbavanje korištenja dane formule na puno sličnih zadataka. Takvim načinom rješavanja zadataka učenici zanemaruju značaj određivanja rješenja jednadžbe i razloge ove metode. Na ovaj način učenici shematski rješavaju zadatke oponašajući učitelja bez ikakvog razmišljanja što se nalazi u pozadini zadatka i razumijevanja značenja

pojmovima koji se koriste pri rješavanju. U ovakvim tipovima zadataka uvjeti su jasni i precizni, cilj je očigledan, a teorijska osnova lako uočljiva i bez dublje analize što učenicima ne pruža priliku za istraživanjem. Stoga učenici s vremenom matematiku mogu vidjeti kao besmislen skup tehnika koje moraju naučiti tako što riješe hrpu zadataka oponašajući načine kojima je učitelj rješavao zadatke.

Razvoj istraživačkog pristupa matematičkom obrazovanju započeo je tako što su određeni učitelji razmjenjivali mišljenja o nastavi i razvili nastavne tehnike koje se temelje na njihovim vlastitim iskustvima što je detaljno objasnio Kilpatrick. Današnje vrijeme od učenika traži da matematiku ne uče samo površinski, kako se učilo ranije, nego da ju dublje razumiju. Prije je bilo normalno da učenici napuštaju školovanje nakon osnovne škole jer su tada već mogli biti aktivni na tržištu rada, dok je danas to skoro pa nemoguće. To od njih nije zahtijevalo dublje razumijevanje matematike nego samo da nauče osnovne metode računanja i ponavljanje određenih postupaka. Kao glavni problem današnjih generacija ističe se vrlo niska motivacija za učenjem matematike što predstavlja veliki izazov u poučavanju matematike. Jedan od razloga niske motivacije je da su učenici u današnje vrijeme izloženi prevelikoj količini novih informacija svakog dana. Uz to matematika je etiketirana kao težak predmet što učenicima dodatno stvara odbojnost prema matematičarima. Stoga je danas razumnije okrenuti se istraživački usmjerenoj nastavi jer će učenici biti više zainteresirani za nove informacije ako do njih dolaze samostalno. Razumijevanje načina na koji učenici razvijaju matematičko znanje je stalan istraživački interes u matematičkom obrazovanju. Bilo je različitih pristupa ovom interesu tijekom 20. stoljeća, ali naj snažniji je onaj prema kojem nastava treba crpiti iz načina na koji profesionalni matematičari razmišljaju, uče i razvijaju matematiku.

## 8 Problemi prilikom provedbe istraživačke nastave

Vidjeli smo puno prednosti i mogućnosti istraživačke nastave, ali kao i sve oko nas ni ovaj pristup nastavi nisu zaobišle kritike, prepreke i problemi. Problemi koji se mogu pojaviti su tehničke, političke ili kulturološki vrste. Neki od tehničkih problema mogu biti udžbenici matematike koje treba obraditi, a koji nisu kvalitetna osnova za istraživačku nastavu, izazovi prilikom ocjenjivanja, poteškoće s provođenjem grupnog rada, novim ulogama učitelja i učenika te stručno obrazovanje učitelja koji nisu pripremljeni za ovakav oblik rada. Kao političke prepreke možemo navesti roditeljski otpor učenika, otpor ravnatelja i drugih autoriteta unutar obrazovanja, neriješeni sukobi između učitelja, nedostatak sredstava te različiti stavovi i pogledi na obrazovanje. Što se tiče kulturoloških prepreka možemo istaknuti različiti pogledi na ocjenjivanje te uvjerenja učitelja. Osim tehničkih, političkih i kulturoloških prepreka učitelji nailaze na veliki broj ostalih prepreka, a to su:

- **ISTRAŽIVAČKA NASTAVA ZAHTIJEVA VIŠE VREMENA** - to je problem koji je teško riješiv. U tradicionalnoj nastavi, učitelj kontrolira vrijeme. Čak i kada se provode istraživanja, brže je ako učitelj prvo objasni kako to riješiti i koji rezultat očekujemo. U istraživačkoj nastavi, učenicima učitelj ne govori što trebaju raditi. Učenici trebaju samostalno objasniti situacije, formulirati vlastita pitanja, osmisliti i pokušati riješiti problem te na kraju izraditi model kojim su rješavali što zahtijeva jako puno vremena u odnosu kada učitelj sve sam provodi.
- **UČITELJI GUBE KONTROLU** - iako to ovisi o stupnju slobode koji je učitelj dao učenicima, jasno je da u istraživačkoj nastavi učenici preuzimaju kontrolu nad satom što može izazvati napetost kod nastavnika jer smatra da bi on trebao kontrolirati sat.
- **ISTRAŽIVAČKA NASTAVA MOŽDA NEĆE USPJETI** - uvijek postoji rizik da će učenici prikupiti krive podatke i da će doći do krive ideje, ali to učiteljima može poslužiti kao pravi primjer da je u istraživačkoj nastavi važniji način na koji će učiti nego sami problem.
- **NEDOSTATAK SREDSTAVA** - uvijek postoji mogućnost da nemamo

dovoljno sredstava, ali važno je snaći se. U današnje vrijeme internet nam pruža razne mogućnosti. Možemo pronaći razne primjere zadataka, ali i učitelj bi trebao moći preoblikovati tradicionalne zadatke u zadatke koji će se riješiti istraživanjem.

- **ISTRAŽIVANJE JE ZNAČAJNO SAMO ZA IZVRSNE UČENIKE** - ovaj problem brine većinu učitelja. Ako prvi put predstave razredu nestrukturirani problem koji je vezan za novi sadržaj jedino će izvrsni učenici pronaći pravi put rješavanja. No ako se istraživačka nastava uvodi postepeno u nju će se uključiti i prosječni i ispod prosječni učenici.
- **OTPORNOST UČENIKA PREMA ISTRAŽIVANJU** - kada se tek uvede istraživačka nastava, učenici će biti suočeni s novim načinom rada koji do sada nisu vidjeli. Njihovi stavovi o njihovoj ulozi u školi će se promijeniti. Većina učenika će se osjećati kao da napušta svoju sigurnu zonu. U istraživačkoj nastavi, učenici moraju napustiti svoju pasivnu ulogu i naviknuti se na novu aktivnu ulogu. To je učenicima naporno i čini im se kao da se to mijenja protiv njihove volje. Ali jednom kada to prevladaju, matematika će im postati zanimljivija i uživati će u učenju. Kao drugi problem unutar ove prepreke javlja se to da neki učenici ne razumiju kako provoditi istraživanje, ali kako smo već rekli, ako se istraživačka nastava uvodi postepeno to će smanjiti ovaj problem. Kada se sposobnosti učenika povećaju, većina složenih i nestrukturiranih situacija će postati korisne.
- **NEDOSTATAK PRAKSE I POTPORE** - većina učitelja se slaže da ne dobivaju dovoljno potpore i prakse kako bi uspješno porveli istraživačku nastavu. Čak i kada se odluče uvesti takav pristup nastavi, ne dobiju dovoljnu potporu svojih kolega, ali i ravnatelja.
- **PROBLEMI S OCJENJIVANJEM** - ocjenjivanje je još uvijek bazirano na činjeničnom znanju stoga ako se uvede istraživačka nastava tradicionalan način ocjenjivanja je potrebno promijeniti kako bi se moglo ocijeniti ne samo činjenično znanje i ishodi nego i proces kojim se dolazi do novih znanja.

Izrazito je važno da je učitelj svjestan navedenih problema. To su problemi koji se u većini slučajeva pojavljuju prilikom uvođenja takvog tipa nastave.

Stoga je važno u suradnji s drugim kolegama, ali i učenicima pronaći zajednički put kako bi provođenje istraživačke nastave bilo što uspješnije. Nakon nekog vremena kada se sve posloži, kada se i učitelj i učenici priviknu na takav princip rada i kada se budu vidjeli pozitivni rezultati učenika učitelj će biti potaknut da sve više provodi takav oblik nastave.

Iako i ograničenja unutar sustava obrazovanja kao što su na primjer kurikulumi koji su više orijentirani na sadržaj, a manje na proces učenja ili ograničen broj sati tjedno, i ograničenja izvan škole kao što su na primjer prigovori roditelja, imaju važnu ulogu u ograničavanju provođenja istraživačke nastave u većini zemalja, učitelji su ti koji bi trebali imati glavnu riječ prilikom uvođenja istraživačke nastave. Znajući sve prepreke i probleme na koje učitelji nailaze prilikom provedbe istraživačke nastave izrazito je važno za njihov program profesionalnog razvoja uključiti ih u osmišljavanje i provedbu takve nastave.

## 9 Primjeri istraživačke nastave

Svaki matematički sadržaj u sebi sadrži nekakvu vrstu problematike. Stoga je moguće pri obradi novog gradiva stvoriti najprije prikladnu problemsku situaciju i pred učenike staviti taj problem koji bi oni zatim riješili istraživanjem. U ovom poglavlju ćemo navesti nekoliko primjera zadataka za istraživački oblik nastave.

### **Primjer 1.** (*Tvornica bicikala*)

*Ti si konzultant koji savjetuje tvrtku gdje je najbolje izgraditi tvornicu koja proizvodi bicikle (ili neke druge proizvode). Tvoja se ekspertiza temelji na tablici u kojoj su prikazani troškovi na pojedinim lokacijama. Koja je tvoja preporuka o lokaciji? Obrazloži svoju preporuku gdje treba izgraditi tvornicu.*

Lokacija	Troškovi izgradnje tvornice u tom području u €	Troškovi proizvodnje jednog bicikla u tvornici u €
A	300 000	120
B	450 000	110
C	660 000	60
D	680 000	80

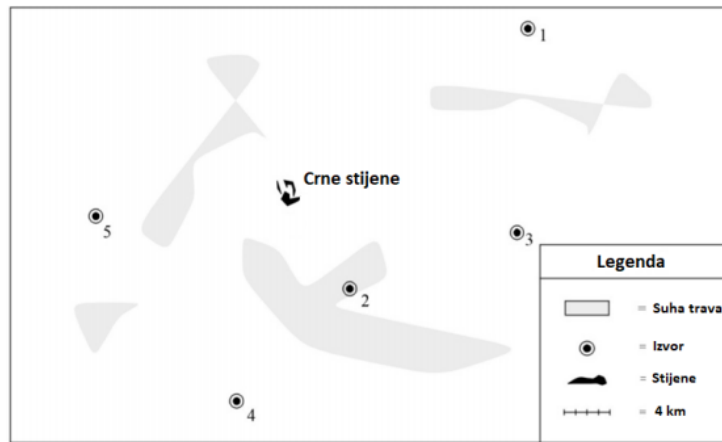
Učitelji su istaknuli da su učenici pri istraživanju postavljali pitanja kako bi razjasnili problem što je i cilj samog istraživanja. Neki su učenici razmišljali o profitu, a ne troškovima dok su neki bili zbunjeni na početku i razmišljali o kvaliteti bicikla, prodajnoj cijeni, porezima, broju proizvedenih bicikala što nisu toliko bitne informacije za rješavanje ovog problema. Ali također ima i učenika koji su brzo shvatili da troškovi s najmanjim nagibom su i najjeftiniji.

Učenici su na različite načine pokušavali doći do rješenja, modelirali su pomoću lineane funkcije i crtanja grafova, uspoređivali lokacije po parovima i analizirali rezultate te su zaključivali na temelju računanju u usporedbi lokacija, ponekad uz izmišljene pretpostavke i pogreške.

Neke su grupe izračunavale i uspoređivale cijene za određeni broj bicikala za svako područje A, B, C i D i pri tome su imale poteškoće s formulacijom jer nisu mogle pronaći točan broj bicikala kada je jedna od opcija bila bolja. Kako ne bi stali tu s rješavanjem ponekad su samo napravili pretpostavku o tome. Uzeli su aproksimacije ili su samo rekli da je za manji broj bicikala bolji A, a za veći broj bolja je opcija C. Neke grupe su u fazi djelovanja shvatile da bi taj broj mogli pronaći rješavanjem sustava jednadžbi. One naprednije grupe rješavale su jednadžbe, a zatim uspoređivale vrijednosti funkcija na intervalima koje su dobile. Neke grupe koristile su grafički pristup i pronašle točke presjeka iz grafikona pomoću GeoGebre ili drugog softvera.

### **Primjer 2.**

*Na mapi su prikazani izvori vode u pustinji. Zadatak je obojiti područja u pustinji tako da obojeno područje oko svakoga izvora sadrži točke koje su tome izvoru najbliže.*



U ovom primjeru učitelji ističu kako učenici na više načina pokušavaju ostvariti ciljano znanje. Neki učenici su skicirali linije između navedenih točaka s više ili manje zakrivljenih linija bez jasnih sjecišta tih linija dok su drugi crtali kružnice ili određivali područja crtajući zakrivljene linije, ali bilo je i učenika koji su odmah znali što trebaju raditi.

Učitelji su istaknuli neke pogreške koje su učenici radili prilikom rješavanja ovog problema. Neki učenici su crtali kružnice, linije i simetrale tako da nije jasno vidljivo koje područje pripada kojem izvoru, neki su započeli s crtanjem kružnica i linija, ali nisu znali što dalje. Bilo je i učenika koji nisu precizno crtali simetrale stoga nisu mogli zaključiti što se događa u sjecištu simetrala. Neki učenici su crtali područja pomoću zakrivljenih linija bez ikakve matematičke strategije dok su drugi označili točno koje područje pripada kojem izvoru, ali se ne vidi njihova strategija kojom su došli do takvog rješenja.

Prethodno navedena dva primjera su preuzeta iz MERIA projekta gdje se može pronaći i detaljan opis kako održati sat istraživačke nastave koristeći ove primjere, ali i mnoge druge.

**Primjer 3.** (*Dizajniranje parkirne garaže*)

*Učenici imaju zadatak dizajnirati garažu u zgradi kojoj su već određene dimenzije i sve što je potrebno za izgradnju zgrade. Učenici osmišljavaju izgled parkirališta, parkirnih mjesta te ulaznih rampi.*



Ovim zadatkom se željelo prikazati kako je matematika izrazito važna za izgradnju različitih objekata. Ovaj zadatak je loše strukturiran stoga on nema jedinstveno rješenje. Ovdje je važno da učenici procjenjuju i što bolje iskoriste prostor koji im je dan kako bi prilikom realizacije tog projekta prostor bio makimalno iskorišten. Učenici koriste matematiku za odlučivanje o rasporedu i veličini parkirnih mjesta i ostalih elemenata kao što su rampe ili stubišta.

Problem koji su učenici imali prilikom rješavanja problema jest nagib rampe gdje su učitelji vidjeli priliku da ponove s učenicima trigonometriju i trokute. U ovom zadatku je jako važna vizualizacija jer ideje učenika moraju odgovarati realnim dimenzijama.

Učitelji ističu kako su učenici bili uključeni u rješavanje zadatka, izražavali svoje mišljenje i raspravljali o njima jer su se osjećali kao mali arhitekti. Još jedna pozitivna strana jest ta što su aktivno bili uključeni i učenici koji su smatrani slabijima.

**Primjer 4.** (*Prebrojavanje*)

*Učenici imaju zadatak osmisliti vlastiti plan kako će prebrojati koliko ljudi ima na nekoj velikoj javnoj površini.*

Brojanje je ključna matematička kompetencija za rano djetinjstvo i prvi razred osnovne škole. Međutim, prebrojavanje nije samo ključna kompetencija na početku obrazovanja već se koristi i izvan škole u mnogim profesionalnim područjima kao što su biologija, ekologija, geologija, medicina, novinarstvo te sociologija. Za razliku od prebrojavanja u školi koje je neproblematična aktivnost, u svijetu rada prebrojavanje može postati zaista težak zadatak.

Kao problematični dijelovi zadatka navode se izračunavanje određene površine te procjena veličine prostora koju jedna osoba ili mala skupina ljudi zazuima dok stoje. Najčešće pitanje koje su grupe postavljale je koliko osoba može stati u jedan kvadratni metar.

Učitelji navode kako su učenici ostali iznenađeni što svaka grupa ima drugačiju procjenu koja se smatrala prihvatljivom. Učenici su tražili od učitelja točan odgovor, ali u ovakvom tipu zadatka on ne postoji. Uzrok ovakvog ponašanja od strane učenika leži u tome što se u većini nastave postavljaju zatvoreni tipovi zadataka na koje su oni navikli.

Primjer 3. i primjer 4. su primjeri iz projekta MASCIL gdje možemo pronaći još sličnih primjera za istraživačku nastavu s iskutvima iz raznih zemalja.

Neke od važnijih sastavnica matematike su modeliranje te dokazivanje. Sljedećim primjerom istraživačke nastave koji se nalazi u PRIMAS projektu uz mnoštvo sličnih primjera učenicima se pruža prilika za raspravu o ključnim pitanjima pri modeliranju i dokazivanju.

**Primjer 5.** (*Više kave ili mlijeka?*)

*Dvije čaše su ispred učenika, u jednoj se nalazi kava, u drugoj se nalazi mlijeko. U obje čaše je jednaka količina tekućine. Učitelj ili jedan od učenika uzme žlicu kave i prelije u čašu s mlijekom te promiješa tekućinu. Zatim uzmu žlicu dobivene tekućine i preliju u čašu s kavom. Postavlja se pitanje je li više kave u čaši s mlijekom ili mlijeka u čaši s kavom?*

Glavni cilj ovakvog problema jest da učenici pronađu što više matematičkih alata i metoda koje bi im pomogle doći do rješenja. Većina učenika će prvo pomisliti da je više kave u čaši mlijeka nego mlijeka u čaši kave, ali eksperimentiranjem i razmišljanjem se ta tvrdnja pokazuje neistinitom.

Ovaj problem pruža mogućnost da učenici promijene gledište na algebru, ali i da rasprave o ključnim pitanjima pri dokazivanju kao što su upotreba grafičkog prikaza, vrijednost jednog primjera naspram općeg dokaza.

Učitelji su uočili nekoliko načina na koje su učenici rješavali problem. Neki su koristili numerički model, drugi su se koristili crtežima, tj. grafičkim prikazom, a neki su se koristili slovima gdje su kombinirali grafički i numerički model. Ali bilo je i onih učenika koji su koristili ekstremne slučajeve kako

bi dokazali da je jednaka količina kave u mlijeku i mlijeka u kavi. Ti učenici pokazuju da razumiju moć modeliranja kada se nađu u nekoj situaciji.

## Zaključak

U nastavi modernog doba prakticira se modeliranje realnih problema, traže različite metode rješavanja problema, koristi se nova tehnologija koja se s vremenom sve više razvija, prakticira se predstavljanje, komuniciranje te interpretiranje. Vidjeli smo način na koji bi se trebalo provoditi istraživačka nastava, ali i razne izazove s kojima se učitelji susreću dok u svakodnevnoj nastavi pokušavaju provoditi istraživačku nastavu. Kako bismo odgovorili na zahtjeve nastave modernog doba, a na temelju viđenih činjenica možemo zaključiti da su u matematičkom obrazovanju izrazito potrebne promjene te određivanje zajedničkih ciljeva i stavova cijelog obrazovnog sustava. Cilj matematičkog obrazovanja nije samo da učenici nauče postupke već da razvijaju svoju kreativnost, kritičko razmišljanje, rade s nedostatkom informacija, surađuju i komuniciraju s drugima, stječu vještine koncentracije i ustrajnosti te integriraju matematički sadržaj. Zadaci i strategije poučavanja koje proizlaze iz istraživačkih procesa trebali bi potaknuti razvoj traženih kompetencija. Kako bi provedba istraživačke nastave bila što uspješnija potrebno je jako puno dodatnog vremena za pripremu i izvođenje nastavnih sati što zahtijeva podršku same škole, ali i cijelog obrazovnog sustava. Također bi bilo poželjno organizirati zajednicu učitelja unutar koje bi se razmijenjivala iskustva, stavovi te promicao profesionalni razvoj učitelja. Možemo zaključiti da je istraživačka nastava izrazito koristan oblik nastave u pogledu razvoja kompetencija učenika koje zahtijeva moderno društvo današnjice. Ali s druge strane, organizacija takvog tipa nastave zahtijeva puno vremena i strpljenja uz razne izazove i prepreke koje učitelji susreću tijekom provedbe istraživačke nastave.

## Sažetak

Suvremena nastava matematike stavlja važnost na samostalnost i aktivnost učenika stoga se današnja nastava matematike sve više okreće istraživačkoj nastavi. U ovom radu je opisano što smatramo kada kažemo istraživačka nastava, što čini osnovu takvog oblika nastave te koji oblik zadataka potiče istraživanje.

Istaknuta je uloga nastavnika kao vođe, moderatora te organizatora procesa istraživanja u nastavi. Postavljanje pitanja je ključno kao pokretač istraživačkog procesa stoga je važno da učitelji pametno odabranim pitanjima vode učenike kroz istraživanje kako bi došli do rješenja. Ovisno o količini podrške od strane učitelja razlikujemo tri vrste učeničkih istraživanja koje su također navedene u ovom radu.

Svaki oblik nastave ima svojih pozitivnih, ali i negativnih strana tako i istraživački oblik nastave. U radu su navedene pozitivne strane istraživačke nastave, ali i prepreke koje učitelji susreću prilikom provedbe takvog oblika nastave. Uz to je navedena i usporedba tradicionalne nastave, na koju su većina učenika i učitelja navikli, i istraživačke nastave.

**Ključne riječi:** učenik, učitelj, istraživati, problem, pitanja, istraživačka nastava, matematika

## Summary

The contemporary way of teaching mathematics places the most importance on the independence and activity of its students and therefore today's schooling is increasingly based on inquiry-based learning. This paper describes what we mean by inquiry-based learning, as well as what lays in its basis and which particular form of task encourages research.

We put emphasis on the role of teachers as leaders, moderators and organizers of the research process in teaching. As an initiative of the research process, asking questions is crucial, so it is important that teachers wisely choose questions that would guide students through research and allow them to come up with solutions. Depending on the amount of support provided by the teachers we distinguish three types of student research, which are also listed in this paper.

Not unlike other forms of teaching, inquiry-based learning also has its positive and negative sides. The paper presents the positive aspects of inquiry-based learning, as well as the obstacles that teachers encounter in implementing such a form teaching. In addition, we provided a comparison between inquiry-based learning and traditional teaching, with which most students and teachers are accustomed to.

**Key words:** student, teacher, research, problem, question, inquiry-based learning, math

## Literatura

- [1] R. Bos, M. Doorman i B. Jessen, *Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike*, Projekt MERIA, kolovoz 2017, 3-29.
- [2] Z. Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.
- [3] Republika Hrvatska, *Nacionalni okvirni kurikulum*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, Zagreb, srpanj 2011.
- [4] *Fibonacci project*,  
URL: <http://fibonacci-project.eu>
- [5] *Hrvatski jezični portal*,  
URL: <http://hjp.znanje.hr/index.php?show=search>
- [6] *Mascil project*,  
URL: <https://mascil-project.ph-freiburg.de>
- [7] *Meria project*,  
URL: <https://meria-project.eu/>
- [8] *Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja*,  
URL: <https://pisa.ncvvo.hr/sto-je-pisa/>
- [9] *Primas project*,  
URL: <https://primas-project.eu/>
- [10] *Virtualna učionica*,  
URL: <https://loomen.carnet.hr/course/view.php?id=10561>

## Životopis

Zovem se Vedrana Solar, rođena sam u Novoj Gradiški, 10.07.1996. Odrasla sam u Bročicama, mjestu pokraj Novske, gdje sam od 2003. do 2007. pohađala Područnu školu Bročice. Tijekom prva četiri razreda išla sam u dramsku skupinu, na folklor te vatrogasce. Nakon prva četiri razreda u područnoj školi nastavila sam svoje osnovnoškolsko obrazovanje u Osnovnoj školi Novska. 2011. godine, nakon završetka osnovne škole, upisala sam prirodoslovno - matematičku gimnaziju u srednjoj školi Tina Ujevića u Kutini koju sam završila 2015. godine te sam iste godine upisala Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Između svake akademske godine odradila sam ljetnu sezonu, prvu godinu u Novigradu, a ostale tri u Rovinju. Tijekom akademske godine 2018./2019. volontirala sam u Dokkici, držala sam instrukcije iz matematike. Slobodno vrijeme volim iskoristiti na vožnju biciklom, trčanje, rolanje ili crtanje. Volim se kreativno izražavati stoga, kada imam više slobodnog vremena volim ukrašavam torte fondanom. Trenutno sam zaposlena u Srednjoj školi Novska na mjestu profesora stručnih predmeta tehničara za razvoj videoigara.