Prebrojivost skupova

Vuković, Tihana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tihana Vuković

Prebrojivost skupova

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tihana Vuković

Prebrojivost skupova

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovome radu promatramo skupove i njihovu prebrojivost, kroz naivnu teoriju skupova. Najprije se kratko bavimo istobrojnim, odnosno ekvipotentnim skupovima, a zatim prelazimo na beskonačne skupove. Uz pomoć beskonačnih skupova gradimo prebrojive i neprebrojive skupove te se njima bavimo do kraja rada. Uvodimo pojam kardinalnosti za proizvoljan skup, prolazimo kroz glavna pravila aritmetike kardinalnosti te pokazujemo neka karakteristična svojstva. Zatim navodimo Cantor-Schröder-Bernsteinov teorem i potkrepljujemo ga primjerima koji ilustriraju njegovu izravnu primjenu. Najveći fokus stavljen je na dokaze svojstava i pravila računanja s kardinalnostima te brojnu primjenu istih na skupovima iz različitih grana matematike. Sadržajno su postavljeni temelji za daljnji razvoj aksiomatske teorije skupova koja precizno potvrđuje i razjašnjava ono što ostaje "visjeti u zraku" u pristupu naivne teorije skupova.

Ključne riječi

skup, ekvipotentnost, konačan skup, beskonačan skup, prebrojiv skup, kardinalnost, aritmetika kardinalnosti, Cantor-Schröder-Bernstein teorem

Set countability

Abstract

In this paper, we will observe sets and their countability through naive set theory. Firstly, we will briefly deal with equipotent sets, and then proceed with infinite sets. With the help of infinite sets, we will form countable and uncountable sets and focus on them until the end of the paper. We will also introduce the concept of cardinality for an arbitrary set, go through the main rules of cardinality arithmetic, and present the main features. Then we will state Cantor-Schröder-Bernstein's theorem and corroborate it with examples which illustrate its direct application. The greatest focus is placed on the proofs of the properties, rules of computation with cardinals as well as on their various use on sets from different branches of mathematics. In terms of content, the foundations have been laid for the further development of axiomatic set theory, which accurately confirms and clarifies what remains "hanging in the air" in naive set theory.

Keywords

set, equipotency, finite set, infinite set, countable set, cardinality, Cantor-Schröder-Bernstein theorem

Sadržaj

Uvod

Teorija skupova, jedna od fundamentalnih matematičkih grana, pripada u skupinu matematičkih znanja s kojima se susrećemo još prije početka našeg obrazovanja. Od samoga djetinjstva pa nadalje kroz život imamo potrebu predmete koji imaju nekakvo zajedničko svojstvo svrstavati u skupine i time ih na neki način razlikovati jedne od drugih. Prirodno je i zapitati se koliko ima takvih predmeta u svakoj pojedinoj skupini ili postoje li dvije skupine s istim brojem predmeta u njima. Tako smo, na samim počecima u osnovnoj školi, brojali imamo li jednako mnogo krušaka i jabuka, da bismo kasnije bili u mogućnosti odlučiti jesu li $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ jednakobrojni skupovi. U nastavku se bavimo upravo time – promatramo različite skupove i želimo vidjeti u kakvoj su vezi jedan s drugim.

Utemeljiteljem teorije skupova smatra se Georg Cantor, njemački matematičar koji je bez služenja aksiomima izgradio dobar dio teorije koja je kasnije proširena preciznim aksiomatskim Zermelo-Fraenkelovim sustavom. U naivnoj teoriji skupova, kakvom se bavio i sam Cantor, a koja je ujedno zastupljena i u ovome radu, skup je pojam koji se ne definira. Smatra se da već postoji određena intuicija pojedinca o pojmu skupa, za kojeg se još ponekad kaže da je kolekcija objekata koji zajedno čine cjelinu. Međutim, takav pristup bio je ujedno i jedini, dok se nisu pojavili paradoksi, a s njima i jasna potreba za uvođenjem aksioma i drugačijim pristupom.

Glavni cilj ovoga rada je pobliže promotriti skupove i njihovu brojnost na Cantorov način i time motivirati i uvidjeti potrebu za uvođenjem Zermelo-Fraenkelovog sustava aksioma. Poglavlje koje slijedi počinjemo s brojnošću konačnih skupova i pokušavamo uspostaviti bijekcije među njima promatrajući ekvipotentne skupove. Navođenjem tvrdnji koje takav odnos uspostavljaju i između beskonačnih skupova, dolazimo do podjele na prebrojive i neprebrojive skupove. U konačnici zaključujemo kako se prebrojivost svodi na traženje bijekcije među skupovima i možemo ju interpretirati kao svojevrsnu generalizaciju ekvipotentnosti na proizvoljne skupove.

U nastavku, brojnost beskonačnih skupova želimo moći kvantitativno zapisati, pa se stoga bavimo kardinalnošću skupova, upoznajemo se s računskim operacijama s kardinalnostima i potkrepljujemo ih odgovarajućim primjerima. Na kraju proučavamo jedan od najvažnijih i najprimjenjivijih rezultata teorije skupova koji nosi ime po tri velika matematičara koji su sudjelovali u njegovom nastanku – Georgu Cantoru, Ernstu Schröderu i Felixu Bernsteinu. Zaključujemo rad s izravnom primjenom ovog teorema na računanje kardinalnosti različitih vrsta skupova.

1 Ekvipotentnost skupova

Odmalena nas u školi uče kako "prebrojati" članove neke cjeline i oduvijek nas zanima možemo li dvije cjeline ili skupine dovesti u vezu po jednakobrojnosti elemenata. No, što se događa kada ne znamo prebrojati koliko neka cjelina ima članova, jer taj broj ide u beskonačnost? U nastavku navodimo priču o Hilbertovom hotelu preuzetu iz [10], jednu od najpoznatijih priča vezanih uz prebrojivost i ekvipotentnost skupova kao motivaciju za proučavanje ove tematike.

Primjer 1.1. ***Hilbertov hotel.*** *Zamislimo da negdje daleko u Svemiru postoji hotel s beskonačno mnogo soba. Sobe su numerirane brojevima $1, 2, 3, \ldots$ No, zamislimo da su sve sobe zauzete gostima, i dolazi još jedan putnik koji želi sobu. Što će portir napraviti s njim? Jednostavno, zamolit će gosta iz sobe 1 da se premjesti u sobu 2, gost iz sobe 2 u sobu 3, itd. Novopridošlog gosta će tada smjestiti u sobu broj 1. (Nemojte si postavljati pitanje koliko će to premještanje trajati!) Pokušajte sami odgovoriti što će portir napraviti kada stigne 1000 novih gostiju, a sve sobe hotela su pune.*

Promotrimo još jedan problem s kojim bi se mogao susresti portir hotela s beskonačno mnogo soba, i čije sve sobe su pune. Zamislimo da u Svemiru postoji još jedan hotel s beskonačno mnogo soba čije su sve sobe popunjene gostima. Jednog dana glavna komisija za graditeljstvo u svemirskim prostranstvima otkrila je da taj drugi hotel nema građevinsku dozvolu. Istog trena taj drugi hotel je morao biti zatvoren i svi gosti (beskonačno mnogo njih!) stali su pred vrata prvog hotela (čije su sve sobe pune). No, portir se brzo snašao. Gosta iz sobe 1 svojeg hotela premjestio je u sobu 2, gosta iz sobe 2 u sobu 4, gosta iz sobe 3 u sobu 6, itd. Tako je ispraznio sve sobe s neparnim brojevima te je u njih smjestio goste iz zatvorenog hotela.

Sada, kada se već tako dobro snalazimo s hotelima s beskonačno mnogo soba promotrimo još jedan problem koji bi portiru mogao zadati glavobolje. Zamislimo da u Svemiru postoji beskonačno mnogo hotela s beskonačno mnogo soba, i sve su sobe popunjene gostima. Svemirska građevinska komisija iz raznih je razloga zatvorila sve hotele osim jednog. Tada su svi gosti (po beskonačno mnogo njih iz svakog od beskonačno mnogo hotela) došli pred vrata tog jednog hotela koji je još imao dozvolu za rad. Snalažljivi portir sada nije znao rješenje ove, na prvi pogled, bezizlazne situacije. Trebao je pomoć matematičara. Može li se uopće ova ogromna grupa novopridošlih gostiju smjestiti u (puni!) hotel? Možete li pomoći portiru? ■

Rješenje posljednjeg problema u Hilbertovom hotelu navest ćemo na kraju ovog poglavlja, nakon boljeg upoznavanja s teorijom i primjerima. Da bismo precizno definirali pojam ekvipotentnih skupova, potrebna nam je definicija bijektivne funkcije.

Definicija 1.1. Neka su X i Y bilo koja dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu $x \in X$ pridružuje točno jedan element $y \in Y$ zovemo **funkcija** ili **preslikavanje** sa X u Y i pišemo

$$f\colon X \to Y \quad \text{ili} \quad x \mapsto f(x), \quad x \in X.$$

Skup svih vrijednosti funkcije f, odnosno skup

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) :\, x \in X\},$$

zovemo *slika funkcije f*.

Definicija 1.2. Kažemo da je funkcija $f\colon X \to Y$ **injekcija** ako

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in X).$$

Također, lako je vidjeti da je funkcija injekcija ako i samo ako vrijedi

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Kažemo da je f **surjekcija** ako je $f(X) = Y$, tj. ako

$$(\forall y \in Y)\,(\exists x \in X) : f(x) = y.$$

Za funkciju koja je injekcija i surjekcija kažemo da je **bijekcija**. Za takve funkcije moguće je definirati funkciju $f^{-1}\colon Y \to X$ za koju vrijedi $f^{-1} \circ f = id_X$ i $f \circ f^{-1} = id_Y$ koju zovemo **inverzna funkcija** funkcije f.

Sada možemo definirati pojam ekvipotentnih skupova uspostavljajući posebnu vrstu preslikavanja između njih.

Definicija 1.3. Za skup X kažemo da je **ekvipotentan** skupu Y ako postoji bijekcija $f\colon X \to Y$. Tada pišemo $X \sim Y$.

Inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$ također je bijekcija te vrijedi $Y \sim X$, pa možemo reći da su skupovi X i Y ekvipotentni. Ekvipotentnost skupova relacija je ekvivalencije:

- refleksivnost: $X \sim X$, za svaki skup X, jer je identiteta $id_X\colon X \to X$ bijekcija
- simetričnost: $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$, što slijedi iz gornjeg razmatranja
- tranzitivnost: $X \sim Y$ i $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$, jer je prema [4, poglavlje Algebra skupova, str. 3] kompozicija bijekcija ponovno bijekcija.

Trivijalan primjer dvaju ekvipotentnih skupova je $\{0,1,2\} \sim \{\square, \triangle, \Diamond\}$. Prema [8, str. 54], dva konačna skupa su ekvipotentna ako i samo ako imaju jednak broj elemenata, te slijedi da su navedeni skupovi takvi. Također, $\{1,2,3,\dots\} \sim \{2,4,6,\dots\}$ jer postoji bijekcija $f\colon \{1,2,3,\dots\} \to \{2,4,6,\dots\}$ definirana pravilom pridruživanja $f(x) = 2x$, za svaki $x \in \{1,2,3,\dots\}$. Navedimo još nekoliko primjera ekvipotentnih skupova.

Primjer 1.2. *Skup prirodnih brojeva ekvipotentan je skupu cijelih brojeva, odnosno $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Zaista, ako definiramo funkciju $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tako da*

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0, \end{cases}$$

dobili smo jednu bijekciju sa $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{N}$. Pokažimo to!
Ispitajmo najprije injektivnost prethodnog preslikavanja. Budući da je funkcija zadana po dijelovima, promatramo dva slučaja:

- *Uzmimo proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ za koje vrijedi $x_1, x_2 \leq 0$ te neka je $f(x_1) = f(x_2)$. Prema definiciji od f, tada je $-2x_1 = -2x_2$, a to je moguće ako i samo ako je $x_1 = x_2$. Zbog proizvoljnosti od x_1 i x_2 slijedi injektivnost funkcije f u ovom slučaju.*

- *U slučaju kada su* $x_1, x_2 > 0$*, analognim slijedom, iz* $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$ *dobivamo* $x_1 = x_2$*. Tada opet iz proizvoljnosti od* x_1 *i* x_2 *slijedi da je funkcija* f *injekcija.*

Preostaje još provjeriti surjektivnost što također dijelimo u dva slučaja:

- *Neka je* $-2y \in \mathbb{N}$ *proizvoljan. Trebamo pronaći* $x \in \mathbb{Z}$, $x \leq 0$ *koji se djelovanjem funkcije* f *preslika u* $-2y$*. Vidimo da za* $x = y \leq 0$ *vrijedi* $f(y) = -2y$ *te je stoga funkcija* f *surjekcija.*

- *Neka je sada* $2y - 1 \in \mathbb{N}$ *proizvoljan. Kao u prethodnom slučaju zaključujemo da za* $x = y > 0$ *vrijedi* $f(y) = 2y - 1$ *te je funkcija* f *surjekcija.*

Dakle, f *je bijekcija i vrijedi* $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$*.* ■

Primjer 1.3. *Bilo koja dva segmenta realnih brojeva su ekvipotentna, tj.* $[a, b] \sim [c, d]$*. Kako bismo se u to uvjerili, pogledajmo funkciju* $g\colon [a, b] \to [c, d]$ *danu s*

$$g(x) = c + \frac{d - c}{b - a}(x - a).$$

Ova funkcija je varijanta afine funkcije i nastala je kao posljedica formule pravca kroz dvije točke (a, c) *i* (b, d)*. Kako je ona linearna funkcija, to povlači da je i bijektivna te su segmenti ekvipotentni skupovi.* ■

Napomena 1.1. Vrijedi i poopćenje prethodnog primjera (vidi [6, str. 18, Example 6]). Za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ vrijedi

$$[a, b] \sim \langle a, b] \sim [a, b\rangle \sim \langle a, b\rangle.$$

Primjer 1.4. *Skup realnih brojeva ekvipotentan je bilo kojem omeđenom intervalu realnih brojeva, tj.* $\mathbb{R} \sim \langle a, b\rangle$*.*
Definirajmo funkciju $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *s*

$$f(x) = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b - a}(x - b)\Big).$$

Funkcija f *je kompozicija dvaju funkcija, prve koja preslikava* $\langle a, b\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ *te druge funkcije koja potom preslika* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$*. Uočimo kako imamo upravo interval* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ *jer je tangens na tom intervalu bijektivna funkcija.*

$$\begin{tikzcd}
\langle a, b\rangle \arrow[r, "x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(x-b)"] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(x-b)\right)"'] & \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \arrow[r, "\operatorname{tg}"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Slika 1: Ilustrativni prikaz preslikavanja f

Uvjerimo se da je preslikvanje f *bijektivno. Kako je već navedeno, tangens je bijektivna funkcija na* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$*, stoga preostaje pokazati bijektivnost funkcije* $x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(x - b)$*.*
Provjerimo najprije injektivnost danog preslikavanja:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b - a}(x_1 - b) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b - a}(x_2 - b), \quad \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle \iff x_1 = x_2.$$

Iz prethodne ekvivalencije slijedi da je dano preslikanje injekcija.

Preostaje još provjeriti surjektivnost. Neka je $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(y-b) \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$*. Treba naći* $x \in \langle a, b \rangle$ *takav da* $x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(y-b)$*. Dakako, jedan takav* x *je upravo* $x = y \in \langle a, b \rangle$ *te je ovo preslikavanje surjekcija.*

Bijektivnost funkcije f *smo mogli provjeriti i na sljedeći način. Kako je preslikavanje* $x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(x-b)$ *varijanta linearne funkcije* $g(x) = ax + b$*, a tangens i linearna funkcija su bijekcije na svojim domenama, tako je i njihova kompozicija* f *također bijekcija. Stoga su skup* $\mathbb{R}$ *i interval* $\langle a, b \rangle$ *ekvipotentni.* ■

Napomena 1.2. Direktno iz prethodnog primjera, za $a = 0$, $b = 1$, dobivamo $\mathbb{R} \sim \langle 0, 1 \rangle$. Ta će se tvrdnja pokazati vrlo korisnom kod dokazivanja neprebrojivosti skupa realnih brojeva u nadolazećim poglavljima ovoga rada.

Naposljetku, vratimo se našem prvom primjeru u ovom poglavlju – Hilbertovom hotelu. Ostao nam je nerazriješen slučaj kada u hotel dolazi beskonačno mnogo novih gostiju iz beskonačno mnogo ostalih hotela. Tvrdnju koju ćemo upotrijebiti za rješavanje ovog problema navodimo i dokazujemo u sljedećoj lemi.

Lema 1.1. *Skup prostih brojeva, u oznaci* $\mathcal{P}$*, je beskonačan.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo na način na koji ju je dokazao Euklid. Drugi način dokazivanja, za koji je potrebna teorija kompleksne analize, čitatelj može pogledati u [7].

Pretpostavimo suprotno, tj. neka je skup prostih brojeva $\mathcal{P}$ konačan i neka je on oblika $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Na intuitivnoj razini, konačne skupove možemo zamišljati kao skupove s konačnim brojem elemenata, a na idućoj stranici uvjerit ćemo se da na ovaj način zaista prikazujemo konačne skupove pa je ovaj zapis skupa $\mathcal{P}$ valjan. Pogledajmo broj $q = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$. Svakako je $q > p_i$, za svaki $i = 1, \ldots, k$ jer smo mu dodali 1, pa $q \notin \mathcal{P}$. Stoga, q nije prost broj, pa prema Osnovnom teoremu aritmetike[1] mora biti djeljiv nekim prostim brojem, odnosno postoji $p_i \in \mathcal{P}$ takav da $p_i \mid q$. Tada očito $p_i \mid q - p_1 p_2 \cdots p_k$ te $p_i \mid 1$, što nije moguće jer q tada ne bi bio složen broj pa dolazimo do kontradikcije. Dakle, skup $\mathcal{P}$ je beskonačan. □

Štoviše, kasnije ćemo pokazati da je $\mathbb{N}$ prebrojivo beskonačan skup, a kako je $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$, iz Teorema 2.4 zaključit ćemo da je $\mathcal{P}$ prebrojivo beskonačan. Više detalja o prebrojivim i beskonačnim skupovima čitatelj može pronaći u sljedećem poglavlju.

U kontekstu Hillbertovog problema, goste možemo povezati s potencijama prostih brojeva. Ponovno, zbog Osnovnog teorema aritmetike, svakom pojedinom gostu će biti dodijeljena jedinstvena potencija prostog broja. Najprije moramo premjestiti goste koji su već u hotelu (beskonačno mnogo njih) u druge sobe. Krećemo od prostog broja 2. Prvo, gosta iz sobe 1 premjestimo u sobu $2^1 = 2$, zatim gosta iz sobe 2 premjestimo u sobu $2^2 = 4$, gosta iz sobe 3 premjestimo u sobu $2^3 = 8$ itd. Općenito, gosta iz sobe n premjestimo u sobu 2^n.

Sada dolaze na red gosti iz prvog od beskonačno mnogo hotela. Njih smjestimo tako da uzmemo sljedeći prost broj (što je 3) te prvog gosta smjestimo u sobu $3^1 = 3$, zatim drugog gosta smjestimo u sobu $3^2 = 9$ itd. Općenito, n-tog gosta iz prvog hotela smjestimo u sobu 3^n. Za goste iz drugog hotela uzimamo prost broj 5 i njegovim gostima pridružujemo

[1]Prema [7], *Osnovni teorem aritmetike* kaže da je prikaz svakog prirodnog broja većeg od 1 u obliku produkta potencija prostih brojeva jedinstven do na poredak faktora.

potencije broja 5. Ovaj postupak ponavljamo za svaki idući hotel i prost broj. Na ovaj način uspjeli bismo smjestiti sve goste u hotel te bismo čak imali i praznih soba jer primjerice sobe 6 i 10 nisu potencije niti jednog prostog broja.

Ovaj problem jedan je od najpoznatijih paradoksa vezanih uz beskonačnost općenito i pokazuje nam da su neke beskonačnosti ipak "veće" i "teže" od drugih.

2 Pojam prebrojivosti

U slučaju konačnih skupova znamo da broj njihovih elemenata predstavlja njihovu kardinalnost. No, kada govorimo o prebrojivim ili čak neprebrojivim skupovima, njihovu kardinalnost ne možemo tako lako opisati. U poglavljima koja slijede dajemo odgovor na kompleksno pitanje "kardinalnosti beskonačnosti".

2.1 Konačni i beskonačni skupovi

Prije nego precizno definiramo ove pojmove, uvedimo oznaku za <u>početni komad</u>, tj. <u>početni segment</u> skupa prirodnih brojeva. On se definira kao skup $\{1, 2, \ldots, k\}$ za svaki prirodan broj k. Oznaka koju ćemo koristiti je $[1..k]$, dok se recimo u [10] koristi oznaka $\mathbb{N}_k$.

Definicija 2.1. Za skup X kažemo da je **konačan** ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je X ekvipotentan skupu $[1..n]$.

Prema dogovoru, uzima se da je $\emptyset$ konačan. Također, napomenimo da za početni komad i proizvoljni $k \in \mathbb{N}$ vrijedi: ako je $f\colon [1..k] \to [1..k]$ injekcija, tada je f i surjekcija (dokaz ove tvrdnje može se pogledati u [9]). Prethodna tvrdnja nam govori da je broj n iz prethodne definicije jedinstven i omogućava da za svaki konačni skup X definiramo broj njegovih elemenata $k(X)$ (koriste se još i oznake kX i $\mathrm{card}(X)$) kao $k(X) = n$, pri čemu je $X \sim [1..n]$. Iz definicije neposredno slijedi da ako imamo skupove X i Y za koje vrijedi $X \sim Y$ i X je konačan skup, onda i Y mora biti konačan.

Teorem 2.1. *Za svaki neprazan podskup $X \subseteq [1..k]$ postoji $l \in \mathbb{N}$, $l \leq k$, takav da je $X \sim [1..l]$ te $k(X) = l$.*

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po k.

- *Baza indukcije:* Za $k = 1$ vrijedi da je $X \subseteq \{1\}$, odnosno da je $X = \{1\}$. Tada je očito $k(X) = 1$.

- *Pretpostavka indukcije:* Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$. Preciznije, za svaki podskup $X \subseteq [1..k]$ postoji $l \in \mathbb{N}$, $l \leq k$, takav da je $X \sim [1..l]$ te $k(X) = l$.

- *Korak indukcije:* Dokažimo sada da tvrdnja vrijedi za $n = k+1$. Neka je $X \subseteq [1..k+1]$. Ukoliko je $X \subseteq [1..k]$, tvrdnja slijedi direktno iz pretpostavke indukcije. Ako je pak $k + 1 \in X$, tada je $X \setminus \{k + 1\} \subseteq [1..k]$ te prema pretpostavci indukcije postoji $l \in \mathbb{N}$, $l \leq k$ takav da je $k(X \setminus \{k+1\}) = l$, odnosno $X \setminus \{k+1\} \sim [1..l]$. Tada je $X \sim [1..l+1]$ te je $k(X) = l + 1$.

Ovime smo dokazali kako tvrdnja vrijedi za proizvoljan prirodan broj k. □

Navedimo još neke važne karakteristike konačnih skupova.

Korolar 2.1. *Svaki podskup konačnog skupa je konačan skup.*

Dokaz. Neka je $X \subseteq Y$, gdje je Y neki konačan skup. Prema definiciji konačnog skupa, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $Y \sim [1..k]$ te je $X \sim X'$, za neki $X' \subseteq [1..k]$. Prema prethodnom teoremu, postoji $l \leq k$ takav da je $X \sim [1..l]$ te je po definiciji X konačan. $\square$

Korolar 2.2. *Ako je X konačan skup, onda ne postoji bijekcija skupa X na neki njegov pravi podskup. Drugim riječima, konačan skup ne može biti ekvipotentan nekom svom pravom podskupu.*

Ovaj korolar pokazao se kao vrlo koristan alat u tvrdnjama u kojima želimo pokazati da nešto nije konačan skup, a njegova posljedica je da skup $\mathbb{N}$ nije konačan. To možemo opravdati tako da definiramo preslikavanje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s $f(n) = n + 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ova funkcija je očito bijekcija sa skupa $\mathbb{N}$ na njegov pravi podskup $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tada, prema kontrapoziciji prethodnog korolara, slijedi da $\mathbb{N}$ nije konačan skup.

Definicija 2.2. Skup koji nije konačan je **beskonačan**.

Direktno iz prethodne definicije slijedi da je $\mathbb{N}$ primjer beskonačnog skupa. Upravo to svojstvo skupa prirodnih brojeva opravdava jednu od karakterizacija beskonačnih skupova opisanu u idućem teoremu.

Teorem 2.2. *Neka je X skup. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) skup X je beskonačan,

b) postoji injekcija sa $\mathbb{N}$ u X,

c) postoji injekcija sa X u X koja nije surjekcija,

d) skup X je ekvipotentan nekom svom pravom podskupu.

Dokaz. *a)* $\implies$ *b)* Pretpostavimo da je X beskonačan skup i induktivno konstruirajmo injekciju $f\colon \mathbb{N} \to X$.

- *Baza indukcije:* Kako je $X \neq \emptyset$, postoji element skupa X kojeg označavamo s $f(1)$.
- *Pretpostavka indukcije:* Pretpostavimo da smo definirali $f(2), \ldots, f(n-1) \in X$.
- *Korak indukcije:* Kako je $X \setminus f([1..n-1]) \neq \emptyset$ (jer bi u protivnom X bio konačan skup), postoji element skupa $X \setminus f([1..n-1])$ kojeg možemo označiti s $f(n)$. Tada, prema principu rekurzivne definicije (vidi [9, slide 88]), imamo funkciju $f\colon \mathbb{N} \to X$.

b) $\implies$ *c)* Pretpostavimo da postoji injekcija $f\colon \mathbb{N} \to X$. Definirajmo funkciju $g\colon X \to X$ na sljedeći način:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \notin f(\mathbb{N}) \\ f(n+1), & x = f(n). \end{cases}$$

Pokažimo da je preslikavanje g injekcija. Uzmimo proizvoljne $x_1, x_2 \in X$ takve da je $x_1 \neq x_2$. Tada razlikujemo tri slučaja:

- Neka $x_1, x_2 \notin f(\mathbb{N})$. Tada prema definiciji funkcije g vrijedi da je $g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2)$. Dakle, u ovom slučaju je g injekcija.

- Neka je $x_1 \in f(\mathbb{N})$ i $x_2 \notin f(\mathbb{N})$. Kako je $x_1 \in f(\mathbb{N})$, slijedi da je $x_1 = f(m)$, za neki $f(m) \in f(\mathbb{N})$. Prema definiciji funkcije g slijedi da je $g(x_1) = f(m+1)$, tj. da je $g(x_1) \in f(\mathbb{N})$, ali da je $g(x_2) = x_2 \notin f(\mathbb{N})$. Tada očito slijedi da je $g(x_1) \neq g(x_2)$ pa je g opet injekcija.

- Neka su $x_1, x_2 \in f(\mathbb{N})$. Tada postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x_1 = f(m)$ i $x_2 = f(n)$. Kako je f funkcija, tada iz $x_1 \neq x_2$ slijedi da je $m \neq n$, a kako je f injekcija, iz $f(m+1) \neq f(n+1)$ slijedi da je $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Zaključujemo da je funkcija g injekcija. Ukoliko uzmemo element $f(1) \in X$, vidimo da se on očito nalazi u $f(\mathbb{N}) \subseteq X$. No, $f(1)$ neće biti slika nijednog elementa $x \in X$ pod djelovanjem funkcije g jer bi u protivnom vrijedilo $x = f(0) \notin f(\mathbb{N})$. Dakle, postoji $y \in X$ $(y = f(1))$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi $g(x) \neq y$ pa funkcija g nije surjekcija.

c) $\implies$ *d)* Pretpostavimo da je preslikavanje $f\colon X \to X$ injekcija, ali da nije surjekcija. Tada je $f(X) \subset X$ pa ukoliko napravimo restrikciju kodomene na sliku funkcije f, dobivamo bijekciju $f\colon X \to f(X)$. Dakle, $X \sim f(X)$.

d) $\implies$ *a)* Neka je $Y \subset X$ i $f\colon X \to Y$ bijekcija. Treba pokazati da je skup X beskonačan. Ukoliko pretpostavimo suprotno, tj. da je X konačan skup, tada iz Definicije 2.1 postoji prirodan broj n takav da je $X \sim [1..n]$. Sad iz definicije ekvipotentnih skupova slijedi da postoji bijekcija $g\colon [1..n] \to X$.

Ukoliko se sad fokusiramo na preslikavanje $h = g^{-1} \circ f \circ g\colon [1..n] \to [1..n]$, možemo lako zaključiti da je h bijekcija kao kompozicija bijekcija. No, istovremeno možemo uočiti sljedeće:

$$h([1..n]) = g^{-1}(f(g([1..n]))) = g^{-1}(f(X)) = g^{-1}(Y) \neq [1..n].$$

Budući da slika funkcije h nije jednaka njenoj kodomeni, slijedi da h nije surjekcija čime smo došli do kontradikcije. Dakle, početni skup X je beskonačan. $\square$

Intuitivno nam je jasno da ukoliko iz beskonačnog skupa izbacimo konačno mnogo elemenata, ne možemo imati konačan skup. Idući primjer nam ilustrira tu situaciju.

Primjer 2.1. *Dokažite: ako je A beskonačan i B konačan skup, onda je skup $A \setminus B$ beskonačan. Problem razlažemo na tri slučaja:*

1) Skupovi A i B su disjunktni, odnosno $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^C = A$, a A je prema pretpostavci beskonačan skup.

2) U presjeku skupova A i B nalazi se podskup skupa A, odnosno $A \cap B = B \subseteq A$ pa skup A možemo zapisati kao disjunktnu uniju na način $A = (A \setminus B) \cup B$. Znamo da je skup B konačan. Kada bi $A \setminus B$ bio konačan skup, onda bi prema tvrdnji koja kaže da je konačna unija konačnih skupova također konačan skup (vidi [9, slide 63]) skup A također morao biti konačan. No, prema pretpostavci je A beskonačan, pa i $A \setminus B$ mora biti beskonačan skup.

3) U presjeku skupova A i B nalazi se podskup skupa B, odnosno $A \cap B = B_1 \subseteq B$ pa analogno kao u prethodnom slučaju zapisujemo $A = (A \setminus B) \cup B_1$. Kako je B konačan, prema Korolaru 2.1 znamo da je B_1 konačan. Sada, budući da je A beskonačan skup, a B i B_1 konačni, opet analogno zaključujemo da je $A \setminus B$ beskonačan skup.

$\blacksquare$

2.2 Prebrojivi i neprebrojivi skupovi

Kako smo vidjeli u prošlom poglavlju, kardinalni broj konačnog skupa se podudara s brojem elemenata tog skupa, pa se i računanje s kardinalnim brojevima konačnih skupova svodi na računanje s prirodnim brojevima. Prirodno je zapitati se što se događa s beskonačnim skupovima, odnosno prebrojivo i neprebrojivo beskonačnim skupovima i njihovim kardinalnim brojevima. Nastavljamo se baviti beskonačnim skupovima, no u ovom poglavlju u kontekstu prebrojivosti.

Definicija 2.3. Skup X je **prebrojivo beskonačan** ako postoji bijekcija $f\colon X \to \mathbb{N}$. Skup je **prebrojiv** ako je konačan ili prebrojivo beskonačan. Skup koji nije prebrojiv je **neprebrojiv**.

Prema [8], iz prethodne definicije vidimo da je skup X prebrojivo beskonačan ako i samo ako postoji bijekcija $f\colon \mathbb{N} \to X$. Ukoliko označimo $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ..., $f(n) = x_n$, ..., prebrojivu beskonačnost skupa možemo definirati i na način kako je navedeno u [2, str. 10]: Skup X je prebrojivo beskonačan ako i samo ako njegove članove možemo poredati u niz te je tada skup X oblika $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Svi članovi toga niza međusobno su različiti jer su članovi skupa X međusobno različiti. U nastavku navodimo primjere prebrojivo beskonačnih skupova te neke njihove karakterizacije.

Primjer 2.2.

- $\mathbb{N}$ *je prebrojivo beskonačan skup, jer je* $id\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $id(x) = x$ *bijektivno preslikavanje.*
- $2\mathbb{N}$ *je prebrojivo beskonačan skup. Naime,* $f\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ *je bijekcija (u Primjeru 1.2 pokazali smo bijektivnost za slično preslikavanje).*
- $2\mathbb{N} - 1$ *je prebrojivo beskonačan skup, jer je* $f\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} - 1$, $f(x) = 2x - 1$ *ponovno bijekcija (također vidi Primjer 1.2).*
- $\mathbb{Z}$ *je prebrojivo beskonačan skup jer postoji bijekcija sa* $\mathbb{Z}$ *u* $\mathbb{N}$ *navedena u Primjeru 1.2.*

■

Do sada smo se uvjerili u prebrojivost skupova prirodnih i cijelih brojeva, no prirodno je zapitati se može li se ista tvrdnja prenijeti i na skup racionalnih te čak realnih i kompleksnih brojeva i njihove Kartezijeve produkte. Navedimo nekoliko karakterizacija prebrojivih skupova koje će nam, između ostalog, pomoći da dokažemo prebrojivost skupa racionalnih brojeva.

Teorem 2.3. *Neka je* $X \neq \emptyset$. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) X *je prebrojiv,*

b) postoji surjekcija $f\colon \mathbb{N} \to X$,

c) postoji injekcija $g\colon X \to \mathbb{N}$.

Dokaz. $a) \implies b)$ Pretpostavimo da je X prebrojiv skup. Tada prema definiciji on može biti konačan ili prebrojivo beskonačan. Promatramo dvije situacije:

- Ukoliko je neprazan skup X konačan, tada postoji bijekcija $f\colon [1..n] \to X$ za neki prirodan broj n. Definirajmo funkciju $h\colon \mathbb{N} \to X$ na sljedeći način:

$$h(j) = \begin{cases} f(j), & j \in [1..n] \\ f(1), & j > n. \end{cases}$$

  Budući da je funkcija h definirana preko bijekcije f te za $j > n$ ne vrijedi injektivnost, zaključujemo da je $h\colon \mathbb{N} \to X$ tražena surjekcija.

- Ukoliko je X prebrojivo beskonačan skup, tada postoji bijekcija $f\colon \mathbb{N} \to X$ koja je očito i surjekcija.

b) $\implies$ *c)* Neka je $f\colon \mathbb{N} \to X$ surjekcija. Treba pronaći injekciju $g\colon X \to \mathbb{N}$. Uzmimo proizvoljan $x \in X$. Kako je funkcija f surjekcija slijedi da postoji element domene koji se preslika u element $x \in X$. Kako ne znamo ništa o injektivnosti funkcije f, taj element ne mora biti jedinstven pa je praslika $f^{-1}(x) \subseteq \mathbb{N}$. Sada prema Teoremu o dobrom uređenju skupa prirodnih brojeva[2] slijedi da skup $f^{-1}(x)$ ima najmanji element kojeg možemo označiti s n_x. Kako je f surjekcija, tako je skup $f^{-1}(x)$ neprazan za svaki $x \in X$, a zbog jedinstvenosti najmanjeg elementa možemo definirati funkciju $g\colon X \to \mathbb{N}$ s $g(x) = n_x$. Budući da su za različite elemente skupa X njihove praslike disjunktni skupovi, funkcija g je traženo injektivno preslikavanje.

c) $\implies$ *a)* Neka je $g\colon X \to \mathbb{N}$ injekcija. Ukoliko napravimo restrikciju kodomene na sliku funkcije g, dobivamo bijekciju $g\colon X \to g(X)$. Prema tome je $X \sim g(X)$. Budući da je $g(X) \subseteq \mathbb{N}$, intuitivno je jasno da on može biti konačan ili prebrojivo beskonačan, u što ćemo se uvjeriti u sljedećem teoremu, pa iz prethodne ekvipotentnosti zaključujemo da je skup X prebrojiv. □

Teorem 2.4. *Svaki podskup prebrojivog skupa je konačan ili prebrojivo beskonačan skup.*

Dokaz. Neka je X prebrojiv skup, $Y \subseteq X$. Prema prethodnom teoremu znamo da postoji injekcija $f\colon X \to \mathbb{N}$, pa ukoliko gledamo restrikciju $f|_Y$, znamo da je ona injekcija sa skupa Y u skup $\mathbb{N}$. Koristeći prethodni teorem zaključujemo da je Y prebrojiv skup, odnosno da je konačan ili prebrojivo beskonačan. □

U sljedećem korolaru pokazujemo da je skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojivo beskonačan. Dokaz je moguće provesti formalno ili direktno. Mi ćemo se fokusirati na formalan dokaz, a direktan se može naći u [9, slide 66, Primjer 9.3].

Korolar 2.3. *Skup* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *je prebrojivo beskonačan.*

Dokaz. Prema Teoremu 2.3, dovoljno je konstruirati injekciju $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Jedno takvo preslikavanje dano je s $f(m,n) = 2^m 3^n$ te pokažimo da je ono zaista injekcija.

Neka je $(m,n) \neq (x,y)$, $m < x$. Ako je $f(m,n) = f(x,y)$, tada je $2^m 3^n = 2^x 3^y$, odnosno $3^n = 2^{x-m} 3^y$. S lijeve strane jednakosti imamo neparan broj, a s desne umnožak neparnog i parnog broja. Da bi jednakost vrijedila, zdesna moramo imati neparan broj, pa mora biti $2^{x-m} = 1$, to jest $x = m$. Sada imamo $3^n = 3^y$, iz čega slijedi $n = y$ te je f injekcija. □

[2] Prema [9, slide 61], *Teorem o dobrom uređenju skupa* $\mathbb{N}$ tvrdi da svaki podskup skupa $[1..n]$, za $n \in \mathbb{N}$, ima najmanji element te da svaki podskup skupa $\mathbb{N}$ ima najmanji element.

Ukoliko imamo prebrojivo mnogo prebrojivih skupova, može nas zanimati što možemo zaključiti o njihovoj uniji i njihovom Kartezijevom produktu. Više o tome nam govore sljedeće dvije tvrdnje:

Teorem 2.5. *Unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz prebrojivih skupova. Prema diskusiji nakon Definicije 2.3, tada elemente svakog pojedinog skupa A_i možemo poredati u niz $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$ te je stoga

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{a_{ij} : (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}.$$

Sada definirajmo funkciju $f\colon \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ na sljedeći način: pretpostavimo da je $a_{ij} \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Tada za takav element postoji minimalni indeks i_0 za koji je $a_{ij} \in A_{i_0}$. Iz prethodnog slijedi da postoji jedinstveni indeks j_0 takav da je $a_{ij} = a_{i_0 j_0}$. Definirajmo $f(a_{ij}) := (i_0, j_0)$. Zbog način na koji je definirana, lako se vidi da je f injektivna funkcija te je zato $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \sim f(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$. Dakle, dovoljno je pokazati prebrojivost skupa $f(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$. Znamo da je $f(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, a kako je prema prethodnom korolaru skup $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ prebrojivo beskonačan, prema Teoremu 2.4 skup $f(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ je konačan ili prebrojivo beskonačan. Iz Definicije 2.3 tada slijedi da je on prebrojiv skup. $\square$

Teorem 2.6. *Kartezijev produkt konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da imamo samo dva skupa A i B (slučaj kada imamo više od dva skupa dokazuje se indukcijom po broju skupova, čitatelj može pronaći dokaz u [8]). Za svaki element $a \in A$ definiramo skup $B_a := \{(a,b)\colon b \in B\}$. Prema pretpostavci teorema skup B je prebrojiv, pa je takav i skup B_a. Sada Kartezijev produkt možemo napisati kao prebrojivu uniju prebrojivih skupova $A\times B = \bigcup_{a\in A} B_a$ te iz prethodnog teorema možemo zaključiti da je $A\times B$ prebrojiv skup. $\square$

Prethodne dvije tvrdnje nam govore da će prebrojiva unija i konačan Kartezijev produkt prebrojivih skupova biti prebrojiv skup. No, što ako imamo Kartezijev produkt prebrojivo mnogo prebrojivih skupova? Idući primjer nam ilustrira kako već u slučaju Kartezijevog produkta prebrojivo mnogo dvočlanih skupova nećemo imati prebrojiv skup.

Primjer 2.3. *Skup nizova nula i jedinica* $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f\colon \mathbb{N}\to\{0,1\}\}$ *nije prebrojiv skup. Pomoću ranije iskazanih tvrdnji znamo da ako je skup prebrojiv, tada postoji surjekcija sa skupa prirodnih brojeva u taj skup. Prema kontrapoziciji te tvrdnje, kako bismo pokazali da skup* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *nije prebrojiv, nužno je uvjeriti se u nepostojanje surjekcije* $f\colon \mathbb{N}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. *Definirajmo takvu funkciju na sljedeći način:*

$$f(n) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_n}, \ldots), \quad x_{n_i} \in \{0,1\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Pokažimo sada da ta funkcija nije surjekcija. Uzmimo niz $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *takav da je*

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots), \quad y_i \in \{0,1\}, \quad y_n = \begin{cases} 0, & x_{n_n} = 1 \\ 1, & x_{n_n} = 0. \end{cases}$$

Zbog ovakve definicije od y *lako vidimo da će za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijediti da je* $f(n) \neq y$. *Dakle, funkcija* f *nije surjekcija pa skup* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *nije prebrojiv.* $\blacksquare$

Prema [9, slide 79], prethodni se dokaz naziva **Cantorov dijagonalni postupak**, a njegovo će nam poopćenje uskoro pomoći pri dokazivanju neprebrojivosti skupa realnih brojeva. Prije toga, formalno pokažimo prebrojivost skupova cijelih i racionalnih brojeva, iako smo se u prebrojivost skupa $\mathbb{Z}$ uvjerili i ranije u Primjeru 2.2.

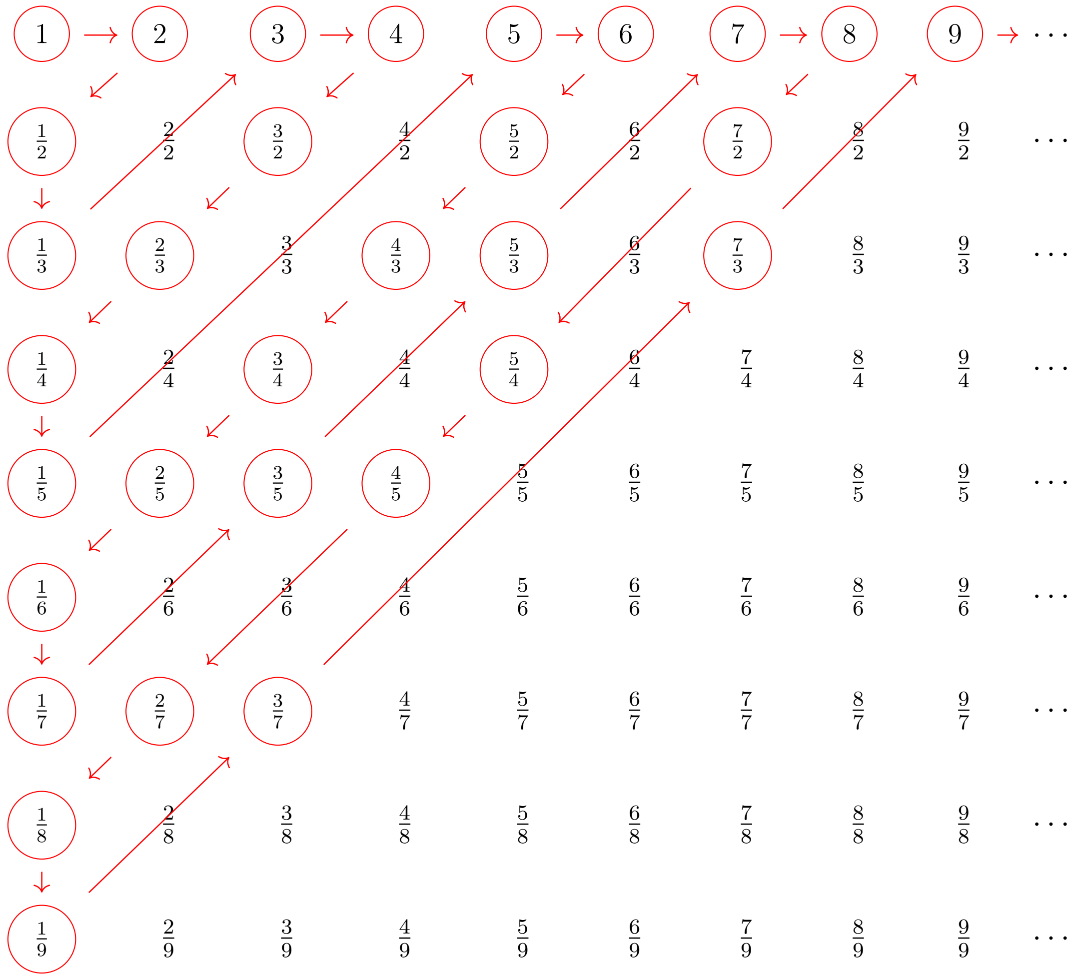
Lema 2.1. *Skupovi cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ i racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ su prebrojivi.*

Dokaz. Pokažimo prvo tvrdnju za skup $\mathbb{Z}$. Uvođenjem oznake $\mathbb{Z}^-$ za skup negativnih cijelih brojeva te $\mathbb{Z}^+$ za skup pozitivnih cijelih brojeva, skup $\mathbb{Z}$ možemo prikazati kao
$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$. Kako je svaki od skupova $\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+$ prebrojiv (štoviše, $\{0\}$ je konačan skup), tvrdnja slijedi iz Teorema 2.5.

Neka je sada $\mathbb{Q}^-$ skup negativnih racionalnih brojeva i $\mathbb{Q}^+$ skup pozitivnih racionalnih brojeva. Tada je $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. Preslikavanje $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$ definirano sa $f(q) = -q$ je očito bijekcija, stoga će tvrdnja biti pokazana ukoliko dokažemo da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv skup. Neka je $A = \{(x, y)\colon x, y \in \mathbb{N}, \text{nzd}(x, y) = 1\}$, odnosno A je skup svih uređenih parova prirodnih brojeva takvih da su oni relativno prosti. Iz definicije skupa A očigledno je da je $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pa znamo da je A prebrojiv jer je $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojiv skup (Teorem 2.4 i Korolar 2.3). Definiramo $F\colon A \to \mathbb{Q}^+$, $F(x, y) = \frac{x}{y}$. Ovo preslikavanje je očito bijektivno, pa iz toga po definiciji slijedi da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv te je i sam $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup. $\square$

Dokaz prebrojivosti skupa $\mathbb{Q}$ možemo i vizualizirati. Kao što smo vidjeli u formalnom dokazu, dovoljno je pokazati da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv, odnosno naći bijekciju $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$.

Grafički prikazano, napravimo tablicu kao na Slici 2, u kojoj u prvi red bilježimo racionalne brojeve s nazivnikom 1, u drugom redu racionalne brojeve s nazivnikom 2 i tako dalje, sve do racionalnih brojeva s nazivnikom 9 (naravno, niz racionalnih brojeva nastavlja se u beskonačnost, no mi stajemo ovdje zbog jednostavnosti prikaza). Prolazimo kroz sve brojeve na način prikazan crvenim strelicama te na taj način formiramo skup $\mathbb{Q}^+$ i pokazujemo da je prebrojiv, pa onda od ranije znamo da je i $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup. Neke racionalne brojeve, poput $\frac{2}{2}, \frac{6}{2}, \frac{2}{4}$ i ostalih, nismo uključili jer bismo u tom slučaju ponavljali brojeve više puta - jasno je da smo ove brojeve već "pokupili" u obliku $1, 3, \frac{1}{2}$, kao što je slučaj i sa svim ostalima koje smo "preskočili".



Slika 2: Prikaz Cantorovog prebrojavanja skupa $\mathbb{Q}$

Vidjeli smo da prebrojivost nekih skupova možemo pokazati na dva načina, koristeći neke od navedenih tvrdnji ili direktno nalaženjem prikladne bijekcije u skup $\mathbb{N}$. U nastavku navodimo neke primjere prebrojivih, ali i neprebrojivih skupova.

Primjer 2.4. *Pokažimo da je skup algebarskih brojeva prebrojiv. Jednadžbu*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

nazivamo algebarska jednadžba n-tog stupnja nad skupom $\mathbb{R}$. Prema Osnovnom teoremu algebre[3] znamo da svaka algebarska jednadžba n-tog stupnja ima n korijena koji mogu biti realni ili kompleksni brojevi jednostruke ili višestruke kratnosti. Algebarski broj je realan ili kompleksan broj koji je korijen algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima $a_0, \ldots, a_n$. Znamo da je broj $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ korijen jednadžbe $qx - p = 0$, pa vidimo da je $\mathbb{Q}$, za kojeg smo dokazali da je prebrojiv, podskup skupa algebarskih brojeva.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, skup svih algebarskih jednadžbi s cjelobrojnim koeficijentima ekvipotentan je prebrojivom skupu svih konačnih nizova cijelih brojeva $a_0, \ldots, a_n$. Prema tvrdnji da je skup svih konačnih nizova kojima su članovi elementi zadanog prebrojivog skupa također prebrojiv skup (za dokaz pogledati [8, str. 62]), skup svih algebarskih jednadžbi s cjelobrojnim

[3]Prema [5], *Osnovni teorem algebre* tvrdi da za svaki polinom P s koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$ koji je nekonstantan, tj. $\deg P \geq 1$, postoji $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $P(\alpha) = 0$.

koeficijentima je prebrojiv skup. Isto tako, skup svih rješenja algebarskih jednadžbi s cjelobrojnim koeficijentima je prebrojiv jer svaka algebarska jednadžba n-tog stupnja ima točno n rješenja, odnosno korijena. ■

U nastavku ćemo dokazati teorem o najvažnijem neprebrojivom skupu, skupu realnih brojeva, pomoću ranije spomenutog Cantorovog dijagonalnog postupka.

Teorem 2.7. *Skup $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.*

Dokaz. U poglavlju "Ekvipotentnost skupova" pokazali smo da je $\mathbb{R} \sim \langle 0,1 \rangle$, što povlači da je dovoljno pokazati da je $\langle 0,1 \rangle$ neprebrojiv skup. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\langle 0,1 \rangle$ prebrojiv. Tada njegove članove možemo poredati u niz te neka je $\langle 0,1 \rangle = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, pri čemu svaki $a_i \in \mathbb{R}$ ima decimalni zapis koji sadrži beskonačno mnogo decimala različitih od nule:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.a_{00}\, a_{01}\, a_{02} \dots \\ a_1 &= 0.a_{10}\, a_{11}\, a_{12} \dots \\ a_2 &= 0.a_{20}\, a_{21}\, a_{22} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Primjera radi, pišemo 0.899999... umjesto 0.9. Za svaki prirodan broj k definiramo broj

$$b_k = \begin{cases} a_{kk} + 1, & \text{ako je } a_{kk} \in \{0,1,2,\dots,7\} \\ 1, & \text{ako je } a_{kk} \in \{8,9\}. \end{cases}$$

Sada možemo definirati $b = 0.b_0\, b_1\, b_2 \dots$ Jasno je da b nikada ne može postići vrijednosti 0 i 1, pa je $b \in \langle 0,1 \rangle$. Također, $b \neq a_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, jer se međusobno razlikuju na k-tom decimalnom mjestu i time smo došli do kontradikcije. Dakle, $\langle 0,1 \rangle$ je neprebrojiv, pa je takav i $\mathbb{R}$. □

Primjer 2.5. *Dijagonalnim postupkom dokaže se da $\mathbb{R} \nsim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Za više detalja pogledati u [10, str. 33].* ■

U algebri se često kod dokazivanja izomorfnosti struktura koristi ekvipotentnost skupova na kojima je ta struktura zasnovana. Primjerice, grupe $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ nisu izomorfne jer skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$ nisu ekvipotentni. Za više informacija o ovim strukturama pogledati u [5].

3 Kardinalnost

Za preciznu definiciju kardinalnog broja potrebna nam je definicija ordinalnih brojeva te prije svega aksiomatska teorija skupova, koja je izvan dosega ovoga rada. Zato, nastavljamo govoriti o "kardinalnostima" skupova, umjesto o kardinalnim brojevima skupova. U nastavku uvodimo oznake za neke standardne kardinalnosti pojedinih skupova.

Definicija 3.1. Za ekvipotentne skupove X i Y kažemo da imaju istu **kardinalnost** i pišemo $k(X) = k(Y)$.

Iz definicije slijedi da postoji bijekcija $X \to Y$, odnosno da je $X \sim Y$. Ovime dolazimo do temeljnog svojstva kardinalnih brojeva:

$$k(X) = k(Y) \iff X \sim Y.$$

Napomenimo da nigdje nismo precizno definirali kardinalni broj. Budući da je ekvipotentnost skupova relacija ekvivalencije, mogli bismo pokušati definirati kardinalni broj kao klasu ekvivalencije s obzirom na relaciju biti ekvipotentan, odnosno

$$k(X) = \{Y : Y \text{ je skup takav da je } Y \sim X\}.$$

Ako je $X = \emptyset$, definicija je dobra, međutim problemi nastaju za $X \neq \emptyset$ jer tada $k(X)$ nije skup nego prava klasa (klasa koja nije skup) s kojom "ne znamo" raditi. U nastavku slijedi paradoks koji nam razjašnjava zbog čega ne možemo na takav način definirati kardinalni broj.

Primjer 3.1. ***Russellov paradoks*** *nam daje primjer jedne prave klase. On nam kaže da*

$$R = \{x \colon x \text{ je skup i } x \notin x\}$$

nije skup, već prava klasa. Prema [9], skup $\{x \colon \sigma(x)\}$ ćemo zvati klasa ako je σ nekakvo svojstvo, odnosno izjavna funkcija.
U dokazu paradoksa prvo pretpostavimo suprotno, odnosno da je R skup te da je $R \in R$. Tada prema definiciji skupa R vrijedi $R \notin R$ te pretpostavka $R \in R$ nije bila dobra. Kako vrijedi da $R \notin R$, to povlači da R mora zadovoljavati uvjet iz definicije skupa R, odnosno mora vrijediti $R \in R$, što nas opet vodi na kontradikciju. Dakle, pretpostavka da je R skup dovodi nas do kontradikcije, što znači da R ne može biti skup.

Ovaj paradoks otkrio je i dokazao Bertrand Russell 1901. godine i njime obrazložio zašto u teoriji skupova ne možemo graditi skupove pomoću skupova koji još nisu izgrađeni. Laički rečeno, paradoks možemo oblikovati i ovako (sam Russell ga je također ovako koristio):
Pretpostavimo da postoji grad i u njemu samo jedan muški brijač te da su svi muškarci u gradu redovito obrijani. Neki se briju sami, a neki dolaze brijaču. Razumno je zamisliti sljedeće pravilo: Brijač brije sve i isključivo one muškarce koji se ne briju sami. U ovako zadanim uvjetima možemo postaviti pitanje: Brije li brijač sebe?
Više detalja o ovome paradoksu te skupovima i pravim klasama može se naći u [10]. ■

Napomena 3.1. Navedimo neke temeljne kardinalnosti koje su nam poznate otprije:

- $k(\emptyset) = 0$,
- $k([1..n]) = n$,
- $k(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (čitamo: alef nula),
- $k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$ (čitamo: kontinuum).

Uočimo sljedeće: ukoliko za neki skup X vrijedi da je $k(X) = \aleph_0$, onda je $X \sim \mathbb{N}$, odnosno, postoji bijekcija s X u $\mathbb{N}$. Analogno vrijedi i ukoliko je neki skup ekvipotentan sa skupom realnih brojeva. Navedimo još neka svojstva koja slijede iz tvrdnji i primjera koje smo dokazali u prošlom poglavlju te neke čiji se dokazi mogu pronaći u [9] i [10]:

- $k(\mathbb{Z}) = k(\mathbb{Q}) = k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = k(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \aleph_0$,
- $k(\langle a, b\rangle) = k(\langle a, b]) = k([a, b\rangle) = k([a, b]) = \mathfrak{c}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b$,
- $k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \mathfrak{c}$,

- $k(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = k(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \neq \aleph_0$,
- $k(\{0,1\}^{\mathbb{R}}) = k(\mathcal{P}(\mathbb{R})) \neq \mathfrak{c}$.

U Lemi 3.1 pokazat ćemo generalizaciju posljednja dva svojstva, na proizvoljan skup.

Definicija 3.2. Kažemo da je **kardinalnost skupa** X **manja ili jednaka kardinalnosti skupa** Y, u oznaci $k(X) \leq k(Y)$, ako postoji injekcija $X \to Y$ ili ako postoji $Y_1 \subseteq Y$ takav da je $X \sim Y_1$. Ako je $k(X) \leq k(Y)$ i $k(X) \neq k(Y)$, kažemo da je **kardinalnost skupa** X **manja od kardinalnosti skupa** Y, u oznaci $k(X) < k(Y)$.

Također, zapamtimo da uvijek vrijedi $X \subseteq Y \Rightarrow k(X) \leq k(Y)$ kao vrlo korisnu tvrdnju u rješavanju zadataka s kardinalnostima. Tvrdnja vrijedi jer postoji injekcija $f\colon X \to Y$, $f(x) = x$, za svaki $x \in X$.

3.1 Računanje s kardinalnostima

Upoznali smo se s pojmom kardinalnosti skupova pa nas prirodno zanima koje sve operacije s njima znamo raditi. Tri glavne operacije sažete su u sljedeću definiciju.

Definicija 3.3. Neka su x i y kardinalni brojevi, a X i Y skupovi za koje vrijedi $k(X) = x$ i $k(Y) = y$.

- **zbroj kardinalnih brojeva** x i y je kardinalni broj unije skupova X i Y, pri čemu su X i Y disjunktni skupovi, tj. $X \cap Y = \emptyset$
$$x + y := k(X \cup Y).$$
Ukoliko je $X \cap Y \neq \emptyset$, tada je
$$x + y = k(X' \cup Y'),$$
pri čemu su, primjerice, $X' = X \times \{1\}$ i $Y' = Y \times \{2\}$ disjunktni skupovi. Naime, tada vrijedi $X \sim X'$ i $Y \sim Y'$ te je $k(X) = k(X')$ i $k(Y) = k(Y')$.
- **umnožak kardinalnih brojeva** x i y je kardinalni broj Kartezijevog produkta skupova X i Y
$$x \cdot y := k(X \times Y)$$
- **potencija** x^y je kardinalni broj skupa X^Y svih funkcija s Y u X
$$x^y := k(X^Y).$$

Vidimo da su dane operacije definirane pomoću skupovnih operacija unije i Kartezijevog produkta. Sada pogledajmo neka općenita svojstva računanja s kardinalnostima (pored se nalaze ekvivalentne operacije sa skupovima koje su u suštini smjernice na koji način pokazati navedena svojstva).

Teorem 3.1. *Neka su X, Y, Z međusobno disjunktni skupovi. Tada vrijedi:*

(1)	$(k(X)+k(Y))+k(Z)=k(X)+(k(Y)+k(Z))$	$(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)$
(2)	$k(X)+k(Y)=k(Y)+k(X)$	$X\cup Y=Y\cup X$
(3)	$(k(X)\cdot k(Y))\cdot k(Z)=k(X)\cdot(k(Y)\cdot k(Z))$	$(X\times Y)\times Z\sim X\times(Y\times Z)$
(4)	$k(X)\cdot k(Y)=k(Y)\cdot k(X)$	$X\times Y\sim Y\times X$
(5)	$k(X)\cdot(k(Y)+k(Z))=k(X)\cdot k(Y)+k(X)\cdot k(Z)$	$X\times(Y\cup Z)=(X\times Y)\cup(X\times Z)$
(6)	$k(X)^{k(Y)}\cdot k(X)^{k(Z)}=k(X)^{k(Y)+k(Z)}$	$X^Y\times X^Z\sim X^{Y\cup Z}$
(7)	$k(X)^{k(Z)}\cdot k(Y)^{k(Z)}=(k(X)\cdot k(Y))^{k(Z)}$	$X^Z\times Y^Z\sim(X\times Y)^Z$
(8)	$(k(X)^{k(Y)})^{k(Z)}=k(X)^{k(Y)\cdot k(Z)}$	$(X^Y)^Z\sim X^{Y\times Z}$
(9)	$1\cdot k(X)=k(X)$	$\{1\}\times X\sim X$
(10)	$0\cdot k(X)=0$	$\emptyset\times X=\emptyset.$

Dokaz. Svojstva (1) i (2) slijede direktno iz asocijativnosti i komutativnosti unije skupova. Ostala svojstva dokazujemo nalaženjem prikladnih bijektivnih preslikavanja kako bismo pokazali ekvipotentnost traženih skupova, ili pokazujemo skupovnu jednakost.

(3) Trebamo pokazati ekvipotentnost skupa $(X\times Y)\times Z$ sa skupom $X\times(Y\times Z)$. Za svaki $((x,y),z)\in(X\times Y)\times Z$ definirajmo preslikavanje $((x,y),z)\mapsto(x,(y,z))$ i uvjerimo se da je bijektivno.
Injektivnost: Neka su $(x_1,(y_1,z_1))$, $(x_2,(y_2,z_2))\in X\times(Y\times Z)$. Tada je

$$\begin{aligned}(x_1,(y_1,z_1))=(x_2,(y_2,z_2)) &\iff x_1=x_2\ \wedge\ (y_1,z_1)=(y_2,z_2)\\ &\iff x_1=x_2\ \wedge\ y_1=y_2\ \wedge\ z_1=z_2,\end{aligned}$$

odnosno, preslikavanje je injektivno.
Surjektivnost: Za svaki $(x,(y,z))\in X\times(Y\times Z)$ postoji $((a,b),c)\in(X\times Y)\times Z$ takav da $((a,b),c)\mapsto(x,(y,z))$. Takav element $((a,b),c)$ je upravo jednak elementu $((x,y),z)$ te zaključujemo da je preslikavanje surjektivno.
Dakle, ovime smo pronašli traženo bijektivno preslikavanje i pokazali ekvipotentnost navedenih skupova.

(4) Pokažimo da je $X\times Y\sim Y\times X$. Pogledajmo funkciju $f\colon X\times Y\to Y\times X$, definiranu s $f(x,y)=(y,x)$. Na analogan način kao u prethodnom slučaju pokaže se da je ova funkcija bijekcija, čime smo pokazali traženu ekvipotentnost među skupovima.

(5) Treba pokazati skupovnu jednakost $X\times(Y\cup Z)=(X\times Y)\cup(X\times Z)$. Neka je $(x,y)\in X\times(Y\cup Z)$ proizvoljan. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}(x,y)\in X\times(Y\cup Z) &\iff x\in X\ \wedge\ (y\in Y\ \vee\ y\in Z)\\ &\iff (x,y)\in X\times Y\ \vee\ (x,y)\in X\times Z\\ &\iff (x,y)\in(X\times Y)\cup(X\times Z)\end{aligned}$$

te je jednakost skupova pokazana.

(6) U ovom slučaju pokazujemo ekvipotentnost skupova $X^Y\times X^Z$ i $X^{Y\cup Z}$.
Promotrimo funkciju $f\in X^{Y\cup Z}$, odnosno $f\colon Y\cup Z\to X$ (podsjetimo se, $X^{Y\cup Z}=\{f\mid f\colon Y\cup Z\to X\}$) te njezine restrikcije $f|_Y\colon Y\to X$ i $f|_Z\colon Z\to X$.

Sada možemo definirati novo preslikavanje $g\colon X^{Y\cup Z} \to X^Y \times X^Z$ pravilom pridruživanja $g(f) = (f|_Y, f|_Z)$ i provjeriti njezinu bijektivnost.
Injektivnost: Pretpostavimo $g(f_1) = g(f_2)$, za sve $f_1, f_2 \in X^{Y\cup Z}$. Prema definiciji funkcije g, prethodno raspisujemo kao $(f_1|_Y, f_1|_Z) = (f_2|_Y, f_2|_Z)$, a to vrijedi onda i samo onda ako je $f_1|_Y = f_2|_Y$ i $f_1|_Z = f_2|_Z$, odnosno g je injekcija.
Surjektivnost: Neka je $(h|_Y, h|_Z) \in X^Y \times X^Z$ proizvoljan. Treba pronaći $f \in X^{Y\cup Z}$ tako da vrijedi $g(f) = (h|_Y, h|_Z)$. Prema definiciji funkcije g iz prethodne jednakosti dobivamo $(f|_Y, f|_Z) = (h|_Y, h|_Z)$, što vrijedi ako i samo ako je $f|_Y = h|_Y$ te $f|_Z = h|_Z$. Ovime je surjektivnost preslikavanja g pokazana.
Dakle, g je bijektivno preslikavanje i pokazali smo traženu ekvipotentnost.

(7) Vrlo slično kao u dokazu prethodnog svojstva, promatramo funkciju $f \in (X \times Y)^Z$, tj. $f\colon Z \to X \times Y$. Tada, za sve $z \in Z$ vrijedi $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$, pri čemu je $f_1(z) \in X,\ f_2(z) \in Y$. Dakle, $f_1 \in X^Z,\ f_2 \in Y^Z$. Definiramo preslikavanje $g\colon (X \times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z$ dano s $g(f) = (f_1, f_2)$. Na analogan način kao u slučaju (6) pokaže se da je g bijekcija te smo pokazali ekvipotentnost $X^Z \times Y^Z \sim (X \times Y)^Z$.

(8) Trebamo pokazati $(X^Y)^Z \sim X^{Y\times Z}$. Neka je $f \in X^{Y\times Z}$, tj. $f\colon Y \times Z \to X$, definirana s $f(y, z) = x,\ x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$. Ukoliko fiksiramo $z \in Z$, dobivamo $g_z(y) = f(y, z)$, za sve $y \in Y$. Sada pogledajmo funkciju $h\colon Z \to X^Y$ s pravilom pridruživanja $h(z) = g_z,\ z \in Z$. Prema definiciji funkcije h, znamo da je $h \in (X^Y)^Z$. Neka je $F\colon X^{Y\times Z} \to (X^Y)^Z$, $F(f) = h$ nova funkcija te pokažimo da je ona bijekcija.
Injektivnost:

$$\begin{aligned} F(f_1) = F(f_2),\ f_1, f_2 \in X^{Y\times Z} &\iff h_1 = h_2 \iff h_1(z) = h_2(z),\ \forall z \in Z \\ &\iff g_z^{(1)}(y) = g_z^{(2)}(y),\ \forall z \in Z,\ y \in Y \\ &\iff f_1(y, z) = f_2(y, z),\ \text{tj. } f_1 = f_2 \text{ i } F \text{ je injekcija.} \end{aligned}$$

Surjektivnost: Neka je $h \in (X^Y)^Z$. Treba pronaći funkciju $f \in X^{Y\times Z}$ takvu da je $F(f) = h$. Funkcija h je slika funkcije f, a $f \in X^{Y\times Z}$ te je $f(y, z) = g_z(y)$ za fiksan $z \in Z$, za sve $y \in Y$. Kako je $g_z = h(z)$, vidimo da za proizvoljnu $h \in (X^Y)^Z$ postoji funkcija $f \in X^{Y\times Z}$ takva da ju funkcija F preslika u funkciju h. Odavde slijedi da je F surjekcija.
Dakle, F je bijekcija, pa smo pronašli bijektivno preslikavanje i pokazali zadanu ekvipotentnost.

(9) Želimo pokazati $\{1\} \times X \sim X$. Pogledajmo funkciju $f\colon X \to \{1\} \times X$, $f(x) = (1, x),\ x \in X$ i pokažimo da je ona bijektivna funkcija.
Injektivnost:

$$f(x_1) = f(x_2),\, x_1, x_2 \in X \iff (1, x_1) = (1, x_2) \iff x_1 = x_2,$$

tj. f je injekcija.
Surjektivnost: Neka je $(1, y) \in \{1\} \times X,\ y \in X$. Trebamo pronaći $x \in X$ koji se djelovanjem funkcije f preslika u $(1, y)$. Dakle, iz $f(x) = (1, y)$ slijedi $(1, x) = (1, y)$, odnosno $x = y$ te je jedan takav element y i f je surjekcija.
Pokazali smo da je f injekcija i surjekcija, pa i bijekcija te vrijedi dano svojstvo.

(10) Slijedi iz svojstva navedenog u [8] koje tvrdi da je Kartezijev produkt praznog skupa s bilo kojim skupom jednak praznom skupu.

$\square$

U aritmetici kardinalnosti postoje još mnoge tvrdnje koje nam uvelike pomažu pri rješavanju konkretnih zadataka te jednakosti koje općenito vrijede za otprije poznate kardinalnosti. U sljedećim primjerima navodimo i pokazujemo neke od njih.

Korolar 3.1. *Neka su X, Y, Z neprazni skupovi i neka je $k(X) \leq k(Y)$. Tada vrijedi:*

i) $k(X) + k(Z) \leq k(Y) + k(Z)$,

ii) $k(X) \cdot k(Z) \leq k(Y) \cdot k(Z)$,

iii) $k(X)^{k(Z)} \leq k(Y)^{k(Z)}$.

Dokaz.

i) Pretpostavimo da je $X \subseteq Y$. Ukoliko $X \nsubseteq Y$, odaberemo $Y' \subseteq Y$ takav da je $X \sim Y'$. Nadalje, neka je $Y \cap Z = \emptyset$ (tada je i $X \cap Z = \emptyset$). Ukoliko Y i Z nisu disjunktni, možemo odabrati Y' i Z' takve da je $Y' \cap Z' = \emptyset$ i $Y' \cup Z' = Y \cup Z$. Tada vrijedi $X \cup Z \subseteq Y \cup Z$, pa je $k(X \cup Z) \leq k(Y \cup Z)$. Prema Definiciji 3.3, slijedi $k(X) + k(Z) \leq k(Y) + k(Z)$.

ii) Ponovno pretpostavimo $X \subseteq Y$, u suprotnom postupamo isto kao u prethodnom slučaju. Tada je $X \times Z \subseteq Y \times Z$, odakle slijedi $k(X \times Z) \leq k(Y \times Z)$, odnosno $k(X) \cdot k(Z) \leq k(Y) \cdot k(Z)$.

iii) Prema Definiciji 3.3, $k(X)^{k(Z)} = k(X^Z)$ i $k(Y)^{k(Z)} = k(Y^Z)$, što znači da trebamo pokazati da je $k(X^Z) \leq k(Y^Z)$. Neka je $f\colon X^Z \to Y^Z$, $f(g) = h$, odnosno $g(x) = h(x)$, za svaki $x \in Z$. Pri tome su $g\colon Z \to X$, $h\colon Z \to Y$ te vidimo da su im domene iste, dok za kodomene vrijedi $X \subseteq Y$. Provjerimo je li f injekcija:

$$g_1 \neq g_2 \Rightarrow \exists x_0 \in Z \text{ takav da je } g_1(x_0) \neq g_2(x_0) \Rightarrow h_1(x_0) \neq h_2(x_0) \Rightarrow f(g_1) \neq f(g_2).$$

Dakle, f je injekcija pa vrijedi $k(X^Z) \leq k(Y^Z)$.

$\square$

Napomena 3.2. Istaknimo također da ne vrijedi sljedeće svojstvo:

$$\text{Ako je } k(X) + k(Y) = k(X) + k(Z), \text{ onda je } k(Y) = k(Z).$$

Pokažimo to kontraprimjerom. Ukoliko je npr. $X = \mathbb{N} \cup \{\pi\}$, a $Y = \mathbb{N} \cup \{\pi, e\}$, tada je $k(X) = k(\mathbb{N}) + k(\{\pi\}) = \aleph_0 + 1$ te $k(Y) = k(\mathbb{N}) + k(\{\pi, e\}) = \aleph_0 + 2$. Vrijedi $X \sim Y$, stoga vrijedi i jednakost $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 2$, no $1 \neq 2$. Napomenimo da je $X \sim Y$ jer postoji bijekcija $f\colon X \to Y$ dana s

$$f(n) = \begin{cases} \pi, & n = \pi \\ e, & n = 1 \\ n - 1, & n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Primjer 3.2. *Dokažite da vrijedi:*

- $2 + 2 = 4$
  Znamo $k(\{0,1\}) = 2$*,* $k(\{3,4\}) = 2$ *i* $\{0,1\} \cap \{3,4\} = \emptyset$*. Slijedi*

  $$2 + 2 = k(\{0,1\}) + k(\{3,4\}) = k(\{0,1\} \cup \{3,4\}) = k(\{0,1,3,4\}) = 4.$$

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
  Znamo da je $k(-\mathbb{N}) = \aleph_0$*, jer je* $-\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$*. Također,* $k(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \aleph_0$ *jer* $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{N}$*. Uzimajući u obzir da je* $-\mathbb{N} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}) = \emptyset$ *i* $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$*, imamo*

  $$\aleph_0 + \aleph_0 = k(-\mathbb{N}) + k(\mathbb{N} \cup \{0\}) = k(-\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \{0\}) = k(\mathbb{Z}) = \aleph_0.$$

- $\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$
  Općenito vrijedi: ako je A *neprebrojiv i* $B \subseteq A$ *prebrojiv, onda je* $A \setminus B \sim A$ *([10, str. 33, Propozicija 1.34]). Stavimo* $A = \mathbb{R}$ *i* $B = \mathbb{N}$ *te iz tvrdnje slijedi* $k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$*, dok je* $k(\mathbb{N}) = \aleph_0$*. Analognim postupkom kao u prethodnim slučajevima, jer je* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \emptyset$*, dobivamo traženu tvrdnju.*

- $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
  Iskoristimo li činjenicu da je $[a,b\rangle \sim \mathbb{R}$*,* $a < b$ *te je stoga* $k([0,1\rangle) = \mathfrak{c}$ *i* $k([1,2\rangle) = \mathfrak{c}$*, pri čemu je* $[0,1\rangle \cap [1,2\rangle = \emptyset$*, analogno dobivamo tvrdnju.*

- $2 \cdot 2 = 4$
  Dokaz je sličan dokazu za zbroj, a umjesto operacije unije koristi se operacija Kartezijev produkt.

- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

  $$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = k(\mathbb{N}) \cdot k(\mathbb{N}) = k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0,$$

  jer je $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*.*

- $\mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{c}$
  Kako je $k([0,1\rangle) = \mathfrak{c}$ *i* $k(\mathbb{Z}) = \aleph_0$*, imamo*

  $$\mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = k([0,1\rangle) \cdot k(\mathbb{Z}) = k([0,1\rangle \times \mathbb{Z}).$$

  Konstruirajmo funkciju $f\colon [0,1\rangle \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *pravilom pridruživanja* $f(x,y) = x + y$*. Preslikavanje* f *je očigledno bijekcija, pa je* $[0,1\rangle \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{R}$*. Dakle,*

  $$k([0,1\rangle \times \mathbb{Z}) = k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}.$$

  Preostala svojstva dokazujemo nakon što dokažemo C-S-B te Cantorov teorem, dvije vrlo važne tvrdnje koje imaju jaku ulogu u primjeni na zadatke.

■

3.2 Cantor-Schröder-Bernstein teorem i primjene

Sljedeći teorem jedan je od najvažnijih teorema ove grane matematike. Povijesno gledano, Cantor je prvi iskazao tvrdnju teorema, a Berstein ga je 1897. godine prvi dokazao. Teorem je do danas dokazan na više različitih načina. Nakon Bernsteina, 1898. godine dokazao ga je i Schröder. U nekim literaturama mogu se pronaći i nazivi Cantor-Bernsteinov ili Schröder-Bernsteinov teorem, ovisno o verziji i godini izdanja dokaza.

Teorem 3.2. ***(Cantor-Schröder-Bernstein)***
Ako postoje injekcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$, onda postoji i bijekcija između skupova X i Y, to jest $X \sim Y$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da su skupovi X i Y disjunktni (ukoliko X i Y nisu disjunktni, uzimamo njima ekvipotentne disjunktne skupove A i B). Zanima nas unija $X \cup Y$ i njezina odgovarajuća particija: uzmimo proizvoljan $x_0 \in X$ i djelujmo na njega najprije funkcijom f, zatim funkcijom g, nakon toga ponovno funkcijom f, pa funkcijom g itd. Naizmjeničnim djelovanjem ovih dvaju funkcija na proizvoljni element $x_0 \in X$ moguće je dobiti sljedeća dva slučaja:

1) lanac se zatvara, odnosno čini ciklus

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, mapsto, "f"] & y_0 \arrow[r, mapsto, "g"] & x_1 \arrow[r, mapsto, "f"] & y_1 \arrow[r, mapsto, "g"] & \cdots \arrow[r, mapsto, "g"] & x_k \arrow[r, mapsto, "f"] & y_k \arrow[llllll, mapsto, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

   Zbog injektivnosti funkcija f i g i činjenice da g vraća y_k na neki od prethodnih x_j, taj element može biti jedino x_0.

2) lanac se ne zatvara
   Tada lanac pokušavamo proširiti ulijevo na sljedeći način: ako je $x_0 \in \mathcal{R}(g)$, tada s lijeve strane lanac proširujemo s $g^{-1}(x_0)$. Zatim, ako je $g^{-1}(x_0) \in \mathcal{R}(f)$, slijeva proširujemo lanac s $f^{-1}(g^{-1}(x_0))$ itd. Ponavljajući postupak nadalje, možemo dobiti tri slučaja:

   a) lanac se proteže beskonačno ulijevo, odnosno

$$\ldots \xmapsto{g} x_0 \xmapsto{f} y_0 \xmapsto{g} x_1 \xmapsto{f} y_1 \xmapsto{g} x_2 \xmapsto{f} y_2 \xmapsto{g} \ldots$$

   b) lanac lijevo staje na nekom elementu skupa X

$$x_0 \xmapsto{f} y_0 \xmapsto{g} x_1 \xmapsto{f} y_1 \xmapsto{g} x_2 \xmapsto{f} y_2 \xmapsto{g} \ldots$$

   c) lanac lijevo staje na nekom elementu skupa Y

$$y_0 \xmapsto{g} x_0 \xmapsto{f} y_1 \xmapsto{g} x_1 \xmapsto{f} y_2 \xmapsto{g} x_2 \xmapsto{f} \ldots$$

Dakle, moguće su četiri vrste lanaca. Sada definiramo funkciju koja će elementu x, ukoliko se on nalazi u nekom od prva tri navedena lanca, pridružiti $f(x)$, te ukoliko se x nalazi u četvrtom tipu lanca, funkcija će mu pridružiti $g^{-1}(x)$. Matematički zapisano, definiramo $F\colon X \to Y$ pravilom pridruživanja

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \text{ u jednom od prva tri lanca} \\ g^{-1}(x), & \text{inače.} \end{cases}$$

Pokažimo da je tako definirana funkcija bijekcija.
Surjektivnost: Neka je $y \in Y$. Ako je y u jednom od prva tri lanca, tada znamo da postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$, pa je prema definiciji funkcije $F(x) = f(x) = y$. Ako je y u četvrtom lancu, tada je i $g(y) = x$ u tom lancu, pa vrijedi $F(g(y)) = F(x) = g^{-1}(x) = y$. Time je dokazana surjektivnost.
Injektivnost: Uzmimo dva elementa $x_1, x_2 \in X$ takva da je $F(x_1) = F(x_2)$. Uočimo da je, zbog definicije funkcije F, element $F(x)$ uvijek član istoga lanca kao i element x. To implicira da x_1 i x_2 moraju biti sadržani u istom lancu. Ukoliko su x_1 i x_2 u jednom od prva tri lanca, tada je $F(x_1) = f(x_1)$ i $F(x_2) = f(x_2)$. Iz pretpostavke slijedi da je $f(x_1) = F(x_1) = F(x_2) = f(x_2)$. Kako je, prema pretpostavci teorema, f injekcija, vrijedi $x_1 = x_2$. Ukoliko se x_1 i x_2 nalaze u četvrtome lancu, tada vrijedi $F(x_1) = g^{-1}(x_1) = y_1$ te $F(x_2) = g^{-1}(x_2) = y_2$. Ponovno, prema pretpostavci je $F(x_1) = F(x_2)$, pa je $y_1 = y_2$. Odavde slijedi $g^{-1}(x_1) = y_1 = y_2 = g^{-1}(x_2)$, a kako je g dobro definirana bijektivna funkcija, djelovanjem funkcije g na prethodni izraz dobivamo $x_1 = x_2$ te je injektivnost dokazana.
Ovime smo pokazali da postoji bijekcija sa skupa X u skup Y, što je i trebalo pokazati. □

Napomena 3.3. U terminima kardinalnosti, C-S-B teorem možemo i ovako iskazati:

Ako je $k(X) \leq k(Y)$ i $k(Y) \leq k(X)$, tada je $k(X) = k(Y)$.

Pogledajmo izravnu primjenu C-S-B teorema na sljedećim primjerima i tvrdnjama.

Primjer 3.3. *Želimo pokazati da je $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$, odnosno naći bijekciju sa skupa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$ ili obratno. Jedna takva funkcija je dana s $x \mapsto (x, 0)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. U Primjeru 1.3 pokazali smo da je $\mathbb{R} \sim \langle 0,1 \rangle$ pa očito vrijedi $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Odavde slijedi da možemo umjesto bijekcije sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$ naći bijekciju sa $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ u $\mathbb{R}$. Definiramo funkciju sa $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ u $\mathbb{R}$ danu s*

$$(0.y_0 y_1 \ldots, 0.z_0 z_1 \ldots) \;\mapsto\; 0.y_0 1 z_0 1 y_1 1 z_1 \ldots$$

koja je zbog načina na koji je definirana očito bijekcija. ■

Kako bismo mogli pokazati još mnoge tvrdnje i jednakosti među kardinalnostima, prije svega zanima nas ponešto o kardinalnosti skupa i kardinalnosti njegovog partitivnog skupa. U tu svrhu navodimo sljedeće:

Lema 3.1. *Za svaki skup X vrijedi $\mathcal{P}(X) \sim \{0,1\}^X$, odnosno $k(\mathcal{P}(X)) = 2^{k(X)}$.*

Dokaz. Neka je $Y \subseteq X$. Definiramo karakterističnu funkciju $\chi_Y\colon X \to \{0,1\}$ na sljedeći način:

$$\chi_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{za } y \in Y \\ 0, & \text{za } y \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Svakom takvom pojedinom podskupu Y pripada jedinstvena karakteristična funkcija. Skup karakterističnih funkcija definiranih na skupu X podudara se sa skupom $\{0,1\}^X$, pa vrijedi $\mathcal{P}(X) \sim \{0,1\}^X$. U terminima kardinalnosti, $k(\mathcal{P}(X)) = k(\{0,1\}^X) = 2^{k(X)}$. □

Teorem 3.3. ***(Cantorov)*** *Za svaki skup X vrijedi $k(X) < k(\mathcal{P}(X))$, odnosno $k(X) < 2^{k(X)}$.*

Dokaz. Ukoliko je $X = \emptyset$, tada je $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. U terminima kardinalnosti slijedi da je $k(X) = 0 < 1 = k(\mathcal{P}(X))$.

Neka je sada $X \neq \emptyset$. Općenito, znamo da je $X \subseteq \mathcal{P}(X)$ pa prema diskusiji nakon Definicije 3.2 vrijedi da je $k(X) \leq k(\mathcal{P}(X))$. Kako bismo dokazali tvrdnju teorema, potrebno je još pokazati da je $k(X) \neq k(\mathcal{P}(X))$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $k(X) = k(\mathcal{P}(X))$ što povlači postojanje bijekcije $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Za funkciju f vrijedi da za svaki $x \in X$ je $f(x) \in \mathcal{P}(X)$, odnosno da je $f(x) \subseteq X$.

Definirajmo skup $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\} \subseteq X$. Očito je $Y \in \mathcal{P}(X)$. Budući da je funkcija f bijekcija pa time i surjekcija, tada za tako definiran skup $Y \in \mathcal{P}(X)$ mora postojati $x_0 \in X$ takav da je $f(x_0) = Y$. Preostaje još provjeriti je li $x_0 \in Y$ ili $x_0 \notin Y$. Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$x_0 \in Y \iff x_0 \notin f(x_0) \iff x_0 \notin Y.$$

Očito smo došli do kontradikcije što povlači da ne postoji takav x_0 koji će funkcija f preslikati u skup Y. Na temelju toga zaključujemo da funkcija f nije surjekcija pa time ni bijekcija. Dakle, $k(X) \neq k(\mathcal{P}(X))$ pa je $k(X) < k(\mathcal{P}(X))$. Iskoristimo li još i tvrdnju prethodne leme, dobivamo da je $k(X) < 2^{k(X)}$. □

Cantorov teorem nam, između ostaloga, govori da niti jedan skup ne može biti ekvipotentan svom partitivnom skupu. U nastavku ćemo pokazati preostala bitna svojstva o poznatim kardinalnostima skupova.

Primjer 3.4.

- $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
  Prema [8, Teorem 3.25] i Lemi 3.1, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R} \iff k(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = k(\mathbb{R}) \iff 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. *Dakle,* $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}$. *Prema Teoremu 3.1, (6),* $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0}$*, a kako smo u Primjeru 3.2 pokazali da je* $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$*, vrijedi* $2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ *te je tvrdnja pokazana.*

- $2^2 = 4$
  Znamo da vrijedi $k(\{a, b\}) = 2$, $k(\{c, d\}) = 2$. *Tada je*

  $$2^2 = k(\{a, b\})^{k(\{c,d\})} = k(\{a, b\}^{\{c,d\}}).$$

  Promotrimo skup $\{a, b\}^{\{c,d\}} = \{f | f \colon \{c, d\} \to \{a, b\}\}$. *Takvih funkcija ima najviše četiri, neka su to funkcije* f_1, f_2, f_3, f_4. *Zapišimo sva moguća pravila pridruživanja:*

  $$\begin{array}{llll} f_1(c) = a & f_2(c) = b & f_3(c) = a & f_4(c) = b \\ f_1(d) = b & f_2(d) = a & f_3(d) = a & f_4(d) = b. \end{array}$$

  Slijedi da je $2^2 = k(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}) = 4$.

- $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
  Ovu tvrdnju pokazujemo koristeći C-S-B teorem na način da pokažemo $\mathfrak{c} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$ *i* $\aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$ *odakle će slijediti jednakost te dvije kardinalnosti.*

1) $\mathfrak{c} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$

Trebamo pronaći injekciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ *jer je* $k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$ *i* $k(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}) = \aleph_0^{\aleph_0}$ *(skup* $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ *je skup svih nizova racionalnih brojeva). Ukoliko za* f *uzmemo funkciju koja svakom* $x \in \mathbb{R}$ *pridružuje niz racionalnih brojeva koji konvergira ka tom* x*, tada je* f *injekcija zbog jedinstvenosti limesa. Spomenimo da* f *ne može biti surjekcija, a samim time ni bijekcija, jer postoje divergentni nizovi u koje se nitko neće preslikati. Dakle,* $\mathfrak{c} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$.

2) $\aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$

Znamo da je $k([0,1]) = \mathfrak{c}$ *i* $k(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \aleph_0^{\aleph_0}$*, pa želimo pronaći injekciju* $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$*. Uzmimo* $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $a = (a_1, a_2, \dots)$ *i definirajmo*

$$f(a) = 0.\underbrace{0\dots0}_{a_1}1\underbrace{0\dots0}_{a_2}1\underbrace{0\dots0}_{a_3}1\dots$$

Recimo, ako je niz $a = (3, 1, 6, \dots)$*, tada je* $f(a) = 0.0001010000001\dots$

Ovako definirana funkcija je injektivna, što znači da je $\aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$.

Iz 1) i 2) slijedi tražena jednakost.

- $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Prema do sada dokazanim svojstvima i Teoremu 3.1, (8), vrijedi

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

- $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Prema prethodnim svojstvima vrijedi sljedeće:

$$2^{\aleph_0} = k(\{0,1\})^{k(\mathbb{N})} = k\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right).$$

Preostaje pokazati da je kardinalnost skupa svih nizova nula i jedinica jednaka $\mathfrak{c}$*. Znamo da je* $\mathfrak{c} = k(\langle 0,1])$ *pa je dovoljno pronaći bijekciju između poluotvorenog intervala* $\langle 0,1]$ *i skupa* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*. To ćemo postići tako da realne brojeve iz intervala* $\langle 0,1]$ *prikažemo u tzv. dijadskom sustavu, tj. samo pomoću znamenki* 0 *i* 1*. Neki od primjera takvih zapisa su:*

$$\frac{1}{3} = 0.0101\dots, \quad \frac{1}{5} = 0.00110011\dots, \quad \frac{1}{6} = 0.0010101\dots$$

Uočimo i da postoje primjeri brojeva iz $\langle 0,1]$ *koji nemaju jedinstven zapis u dijadskom sustavu. Primjerice:*

$$\frac{1}{2} = 0.1, \quad \frac{1}{2} = 0.01111\dots, \quad \frac{1}{4} = 0.01, \quad \frac{1}{4} = 0.00111\dots$$

No, budući da će dva zapisa imati samo neki racionalni brojevi, takvih izuzetaka je prebrojivo mnogo, dok će ostali realni brojevi iz intervala $\langle 0,1]$ *imati jedinstven prikaz u dijadskom sustavu. Zbog toga, svaki* $x \in \langle 0,1]$ *ima jedinstven zapis u obliku* $x = 0.x_1x_2x_3\dots x_n\dots$*, gdje je* $x_n = 1$ *za beskonačno mnogo indeksa* n*. Na temelju toga, možemo definirati funkciju* $f\colon \langle 0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *koja će svakom elementu danog intervala pridružiti niz nula i jedinica s beskonačno mnogo jedinica, tj.*

$$f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Međutim, uočimo kako se u skupu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nalaze i nizovi s konačno mnogo jedinica te da takvih nizova ima prebrojivo mnogo. Ukoliko skup svih nizova s konačno mnogo jedinica označimo s A, tada je skup A prebrojiv i možemo ga zapisati kao

$$A = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{R}(f).$$

Kako je skup $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, slijedi da je

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = A \cup \mathcal{R}(f).$$

Ukoliko napravimo restrikciju kodomene $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ na sliku funkcije f, tada će funkcija $f \colon \langle 0,1] \to \mathcal{R}(f)$ biti bijekcija. Dakle, vrijedi da je $\mathcal{R}(f) \sim \langle 0,1]$ pa je

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim A \cup \langle 0,1].$$

Budući da znamo da je A prebrojiv, a $\langle 0,1]$ neprebrojiv skup pa time i beskonačan, prema [8, str. 59] vrijedi

$$\langle 0,1] \sim A \cup \langle 0,1].$$

Sada iz tranzitivnosti relacije ekvipotentnosti slijedi da je $\langle 0,1] \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. U konačnici, lako zaključujemo da vrijedi

$$2^{\aleph_0} = k\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right) = k(\langle 0,1]) = \mathfrak{c}.$$

$\blacksquare$

Naposljetku, koristeći sve što smo do sada naveli riješimo nekoliko primjera i pogledajmo kako to zaista izgleda u praksi.

Primjer 3.5. *Odredite kardinalnost skupa svih aritmetičkih nizova cijelih brojeva.*
Neka je $S = \{a_n = a_0 + nd : a_0,\, d \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Iz područja matematičke analize, a ovdje i same definicije skupa S jasno je da aritmetički niz jednoznačno određuje početni član i razlika niza. Definirajmo funkciju $f \colon S \to \mathbb{Z}^2$ s $f((a_n)) = (a_0, d)$. Funkcija f je bijekcija ako i samo ako je $S \sim \mathbb{Z}^2$, odnosno $k(S) = k(\mathbb{Z}^2)$. Sada je

$$k(\mathbb{Z}^2) = k(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = k(\mathbb{Z}) \cdot k(\mathbb{Z}) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = (\aleph_0)^2 = \aleph_0.$$

Dakle, $k(S) = \aleph_0$. $\blacksquare$

U idućem primjeru koristimo sljedeće:

$$\mathfrak{c}^n = \underbrace{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdots \mathfrak{c}}_{n \text{ puta}} = \mathfrak{c},$$

a također vrijedi i

$$n \cdot \aleph_0 = \underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0}_{n \text{ puta}} = \aleph_0, \qquad (\aleph_0)^n = \underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdots \aleph_0}_{n \text{ puta}} = \aleph_0.$$

Tvrdnje vrijede zbog jednakosti dokazanih u Primjeru 3.2 i jer su konačna unija i konačan produkt prebrojivih skupova ponovno prebrojivi skupovi.

Primjer 3.6. *Odredite kardinalnost skupa svih realnih matrica dimenzije 2×2 čija je determinanta jednaka 1.*
Neka je $T = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon \det(A) = 1\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Koristeći C-S-B teorem, moramo pokazati dvije nejednakosti:*

1) $k(T) \leq k(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$
Skup $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ *ekvipotentan je skupu* $\mathbb{R}^4$*, pa je* $k(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = k(\mathbb{R}^4) = \mathfrak{c}$. *Jedna bijekcija između ova dva skupa je* $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *dana s* $f(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *Provjerimo to:*
<u>*Injektivnost:*</u> *Pretpostavimo* $f(a, b, c, d) = f(e, f, g, h)$.

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) = f(e, f, g, h) &\iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &\iff a = e \wedge b = f \wedge c = g \wedge d = h \\ &\iff (a, b, c, d) = (e, f, g, h), \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da je f injekcija.
<u>*Surjektivnost:*</u> *Neka je* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Tražimo* $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ *koji će se djelovanjem funkcije f preslikati u navedenu matricu, odnosno*

$$f(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Imamo:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

odnosno za svaku matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *postoji uređena četvorka* $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, w) = (a, b, c, d)$ *takva da je* $f(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *te je f surjekcija.*
Dakle, f je zaista bijektivno preslikavanje. Imamo:

$$T \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow k(T) \leq k(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = k(\mathbb{R}^4) = k(\mathbb{R})^4 = \mathfrak{c}^4 = \mathfrak{c}.$$

2) $k(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \leq k(T)$
Neka je $A = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \subseteq T$. *Znamo da je tada* $k(A) \leq k(T)$, *a* $k(A) = k(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathfrak{c}$. *Dakle,* $\mathfrak{c} \leq k(T)$.

Iz 1) i 2) primjenom C-S-B teorema slijedi $k(T) = \mathfrak{c}$. ■

Primjer 3.7. *Dokažite da je skup* $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ *prebrojiv.*
Pokazat ćemo da je $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$, *odnosno u terminima kardinalnosti* $k(\mathbb{N}) = k(\mathbb{N}^n) = \aleph_0$. *Koristeći C-S-B teorem, tražimo injekciju za svaku od dvije nejednakosti. Prvo definiramo*

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n \ \ s \ \ f(n) = (n, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1 \text{ jedinica}}).$$

Ovako definirana funkcija je očigledno injekcija te vrijedi $k(\mathbb{N}) \leq k(\mathbb{N}^n)$. S druge strane, promotrimo funkciju

$$g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \ \textit{definiranu s} \ g((n_1, n_2, \ldots, n_n)) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_n^{n_n},$$

pri čemu je p_i $i-$ti prost broj. Osnovni teorem aritmetike (može se naći u [7]) nam tvrdi da je faktorizacija jedinstvena do na poredak, pa imamo $k(\mathbb{N}^n) \leq k(\mathbb{N})$. Dakle, vrijedi $k(\mathbb{N}^n) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0$. ■

Literatura

[1] F. M. Brückler, V. Čačić, M. Doko, M. Vuković, *Zbirka zadataka iz teorije skupova*, web izdanje, PMF–MO, Zagreb, 2009.

[2] D. Jukić, *Mjera i integral*, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I (Prepravljeno izdanje)*, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[4] D. Kovačević, D. Žubrinić, *Uvod u diskretnu matematiku*, Element, Zagreb, 2006.

[5] H. Kraljević, *Algebra*, skripta, PMF–MO, Osijek, 2007.

[6] M. Maleš, *Teorija skupova*, skripta, Split, 2003.

[7] I. Matić, *Uvod u teoriju brojeva*, Odjel za matematiku, Osijek, 2015.

[8] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[9] Š. Ungar, *Uvod u teoriju skupova i matematičku logiku*, online dostupna prezentacija, Osijek, 2016. (javno dostupno na: `https://www.mathos.unios.hr/~sime/HR/skupovi/skupovi-slides.pdf`)

[10] M. Vuković, *Teorija skupova*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2015.