Varijacijski račun i primjene

Radojičić, Una

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Una Radojičić

Varijacijski račun i primjene

Završni rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Una Radojičić

Varijacijski račun i primjene

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc Krešimir Burazin

Osijek, 2015.

Sadržaj

Sažetak U ovome radu ukratko ćemo se upoznati sa osnovama varijacijskog računa. Bavit ćemo se problemom traženja lokalnog minimuma određenog funkcionala na način da tražimo nužne i dovoljne uvjete postojanja ekstrema tog funkcionala. Također, razmatrat ćemo i problem traženja globalnog minimuma funkcionala. Na kraju rada pokazat ćemo neke od primjena varijacijskog računa u matematici i fizici.

Ključne rječi *Euler-Lagrangeova jednadžba, Beltramov identitet varijacija funkcionala, Legendreov test, Jacobijev test, problem Brachistohorne, Platonov problem, geodezija na sferi, Hamiltonov princip*

Abstract In this paper, we will shortly be introduced to the basics of Calculus of Variations. We will deal with problem of finding a local minima of certain functional in a way to seek the necessary and sufficient conditions for the existence of extrema of this functional. Also, we will consider the problem of searching for the global minimum of functional. At the end of the paper we will show some of the applications of Calculus of Variations in mathematics and physics.

Key words *Euler-Lagrange equation, Beltram's identity, Variation of functional, Legendre's test, Jacobi's test, Brachistohorne problem, Plato's problem, Geodetics on sphere, Hamilton's principe*

1 Uvod i motivacija

Do uvođenja varijacijskog računa, mnoge je, naizgled jednostavne probleme bilo teško, ako ne i nemoguće egzaktno riješiti. Jedan je od takvih problema, nama izrazito intuitivan, je problem pronalaženja najkraće spojnice dvaju točaka u ravnini.

1.1 Problem najkraćeg puta

Cilj nam je pronaći glatku realnu funkciju y čiji će graf predstavljati najkraći put između točaka (a, A) i (b, B). Iako nam je intuitivno jasno da će najkraća spojnica dvaju točaka u ravnini biti pravac kroz dane točke, dokaz te slutnje nije trivijalan, te ga se jako dugo nije znalo provesti.

Pretpostavimo da za funkciju y vrijedi $y(a) = A$ i $y(b) = B$. Duljina luka krivulje $y = y(x)$ od točke (a, A) do (b, B) je

$$S = \int_S \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

Početni problem svodi se na traženje funkcije y za koju je vrijednost integrala S najmanja moguća.

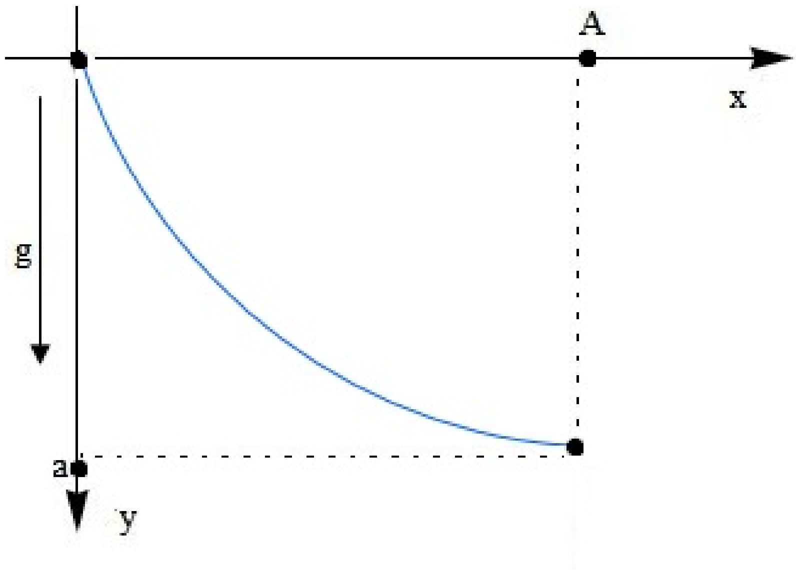
1.2 Problem Brachistohorne

Još jedan u nizu problema, ako ne i najvažniji, koji su potaknuli razvijanje varijacijskog računa, je takozvani problem Brachistohorne. Naziv problema dolazi od grč. *brakhistos khrónos* što znači najkraće vrijeme. Sukladno tome, zadatak nam je odrediti glatku funkciju y, čiji će graf predstavljati putanju po kojoj će materijalna točka mase m, pod utjecajem gravitacijske sile, ispuštena iz ishodišta, bez trenja, u najkraćem vremenu stići u točku (a, A).

Primijetimo da bi problem, u slučaju da zamenarimo gravitacijsku silu, bio jednak problemu najkraćeg puta, jer bi vrijeme i put bili direktno proporcionalni, pri čemu bi konstantna brzina predstavljala koeficijent proporcionalnosti.

Problem je 1696. uveo J. Bernoulli, a izazovu rješavanja problema odazvali su se neki od najvećih matematičara tog vremena, kao npr. Leibniz i Newton, te ga riješili samo godinu dana kasnije, stoga se 1967. uzima za godinu uvođenja varijacijskog računa.

Zanimljiva je činjenica da se istim problemom bavio i G. Galilei, te najbolje što je uspio pokazati je da rješenje nije pravac kao što je prvotno mislio. Naime, G, Galilei je zaključio da bi optimalna putanja mogla biti određeni kružni luk koji spaja dane točke.



Slika 1: Brachistohorna

Formulirajmo sada problem matematički.
Neka je $s(t)$ prijeđeni put u trenutku t, $v(t)$ brzina u trenutku t, m masa materijalne točke, te g gravitacijska konstanta.

Prema zakonu očuvanja energije je $E_k = E_{gp}$, odnosno

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}.$$

Primijenimo li činjenicu da je brzina u trenutku t zapravo prva derivacija puta po vremenu u tom trenutku zaključujemo

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = v(t) = \sqrt{2gy} \text{ što povlači}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}}.$$

Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe po varijabli t slijedi

$$t = \int\limits_{\widehat{OA}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^a \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} \mathrm{d}x.$$

Konačno, problem smo sveli na traženje funkcije y za koju je t najmanji mogući!

2 Nužni uvjeti postojanja ekstema

Primijetimo da su se motivacijski problemi sveli na traženje minimuma funkcionala

$$I(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$$

na skupu $\mathcal{C} := \{y \in \mathrm{C}^1([a,b]) \ : \ y(a) = A \ \& \ y(b) = B\}$. Podintegralnnu funkciju $L \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$ nazivamo Lagrangeian[1].

Napomena 2.1. Ako malo bolje pogledamo Lagrangeian u problemu Brachistohorne, vidjet ćemo da nije definiran u svim točkama $\mathbb{R}^3$. Pokazat ćemo da će sve iskazane tvrdnje vrijediti i za L koji je klase $\mathrm{C}^2(\Omega)$, za $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ otvoren.

Postoji nekoliko načina za rješavanje ovog problema. Mi ćemo se prvenstveno baviti traženjem nužnih i dovoljnih uvjeta postojanja lokalnog minimuma danog funkcionala.

Napomena 2.2. Problem maksimizacije funkcionala I jednostavno se svodi na problem minimizacije funkcionala $-I$.

Da bismo uopće mogli razmatrati problem traženja lokalnog minimuma funkcionala I potrebno je definirati okolinu funkcije iz $\mathcal{C}$, za što će nam biti potrebna definicija norme na istom tom prostoru. Normu je naravno moguće definirati na više načina, ali mi ćemo prezentirati i koristiti samo jedan.

Definicija 2.1. Norma $||\cdot||$ na vektorskom prostoru svih funkcija klase $\mathrm{C}^1([a,b])$, pri čemu je $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definira se kao preslikavanje $||\cdot|| : \mathrm{C}^1([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ izrazom

$$||y|| := \max_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x)|.$$

Napomena 2.3. Lako se provjeri da ovako definirano preslikavanje $\|\cdot\|$ zaista zadovoljava svojstva norme.

Sada kada smo uveli pojam norme na prostoru diferencijabilnih funkcija, prirodno je definirati i otvorenu kuglu određenu tom istom normom.

Definicija 2.2. Za funkciju $y_0 \in \mathrm{C}^1([a,b])$ i $\delta > 0$ realan broj, otvorenu kuglu oko y_0, radijusa δ označavamo $K(y_0, \delta)$ i definiramo s

$$K(y_0, \delta) := \{y \in \mathrm{C}^1([a,b]) : \|y - y_0\| < \delta\}.$$

---

[1] Naziv nosi u čast talijanskom matematičaru i astronomu Joseph-Louisu Lagrangeu (1736.-1813.)

2.1 Euler-Lagrangeova jednadžba

Pretpostavimo sada da je $y_0 \in \mathcal{C}$ lokalni minimum funkcionala I na $\mathcal{C}$. To znači $I(y_0) \leq I(y)$ za svaki $y \in K(y_0, \delta)$, za neki $\delta > 0$. Ova nejednakost vrijedi posebno i za funkcije oblika

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon\eta(x) \in \mathcal{C}, \tag{1}$$

za $\eta \in \mathcal{D} := \{\mathrm{C}^1([a, b]) : \eta(a) = \eta(b) = 0\}$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Napomena 2.4. Kako je $y \in K(y_0, \delta)$, to slijedi da funkcija $\eta \in \mathcal{C}$ ne može biti proizvoljno "velika". Preciznije,

$$\|y - y_0\| = \|y_0 + \varepsilon\eta - y_0\| = \varepsilon \|\eta\| < \delta,$$

odnosno,

$$\|\eta\| < \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Raspišemo li to po definiciji norme $||.||$ zaključujemo

$$\max_{x\in[a,b]} |\eta(x)| + \max_{x\in[a,b]} |\eta'(x)| = \|\eta\| < \frac{\delta}{\varepsilon},$$

odnosno, za fiksan ε apsolutna vrijednost funkcije η i njene prve derivacije moraju biti *dovoljno male* da bi $y \in \mathcal{C}$ bila u $K(y_0, \delta)$.

Napomena 2.5. Od sada, kada budemo razmatrali problem loklane minimizacije funkcionala I, za funkciju $\eta \in \mathcal{D}$, pretpostavljat ćemo da je dovoljno *mala*.

Uvrstimo li izraz (1) u funkcional I slijedi

$$I = \int_a^b L(x, y_0(x) + \varepsilon\eta(x), y_0'(x) + \varepsilon\eta(x))\mathrm{d}x.$$

Za fiksnu funkciju η, funkcional I postaje funkcional varijable $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Po pretpostavci je y_0 lokalni minimum funkcionala I, pa zaključujemo da je $\varepsilon = 0$ lokalni minimum funkcije $\varepsilon \longmapsto I(y_0 + \varepsilon\eta)$. Sada iz nužnog uvjeta ekstrema za funkciju jedne varijable dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(I(y_0 + \varepsilon\eta)\right)_{|\varepsilon=0} = 0.$$

Definicija 2.3. Izraz $\delta I(y_0, \eta) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{I(y_0+\varepsilon\eta)-I(y_0)}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(I(y_0 + \varepsilon\eta)\right)_{|\varepsilon=0}$ nazivamo *prva varijacija* funkcionala I u y_0.

Napomena 2.6. Primjetimo da je nužan uvjet da bi funkcija $y_0 \in \mathcal{C}$ bila lokalni ekstrem funkcionala I zapravo

$$\delta I(y_0, \eta) = 0,$$

za svaku funkciju $\eta \in \mathcal{D}$.

Pravilom za složeno deriviranje te korištenjem tvrdnje da integral neprekidne funkcije (u našem slučaju Lagrangeiana) i derivacija komutiraju slijedi

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(y_0+\varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = \int\limits_a^b \Big[\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x) + \partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\Big]\eta'(x)\mathrm{d}x.$$

Parcijalnom integracijom drugog člana u gornjem integralu dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(y_0+\varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = \int\limits_a^b \eta(x)\Big[\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\Big]\mathrm{d}x$$
$$+ \partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x)\Big|_{x=a}^{b}$$

Kako vrijedi $\eta(a) = \eta(b) = 0$, to je $\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x)\Big|_{x=a}^{b} = 0$, pa slijedi

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(y_0+\varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = \int\limits_a^b \eta(x)\Big[\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\Big]\mathrm{d}x = 0 \quad (2)$$

Zbog proizvoljnosti funkcije $\eta \in \mathcal{D}$ izraz (2) nije dobar alat za određivanje stacionarnih funkcija funkcionala I. Zato će nam od velike važnosti biti sljedeći teorem.

Teorem 2.4. *(Osnovna lema varijacijskog računa)*
Ako za neprekidnu funkciju $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int\limits_a^b \phi(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0$$

za svaku $\eta \in \mathrm{C}^1([a, b])$ za koju je $\eta(a) = \eta(b) = 0$, onda je $\phi \equiv 0$.

Dokaz. Dokaz provodimo kontradikcijom: pretpostavimo da je $\phi(x) \neq 0$ za neki $x \in [a, b]$. Kako je ϕ neprekidna na $[a, b]$ to postoji podinterval $(c, d) \subseteq [a, b]$ na kojem je ϕ strogo negativna ili strogo pozitivna. Bez smanjenja općenitosti neka je $\phi(x) > 0$ za svaki $x \in [c, d]$. Definirajmo funkciju η izrazom

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-c)^2(x-d)^2, & x \in [c, d] \\ 0, & x \notin [c, d]. \end{cases}.$$

Lako se pokaže da ovako definirana η zadovoljava uvjete teorema i vrijedi

$$\int\limits_a^b \eta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int\limits_c^d \eta(x)\phi(x)\mathrm{d}x > 0$$

što je kontradikcija s pretpostavkom teorema. Q.E.D.

Primjenom Osnovne leme varijacijskog računa na jednakost (2) zaključujemo da je za svaki $x \in [a, b]$

$$\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0.$$

Gornja jednadžba naziva se Euler-Lagrangeova[2] jednadžba i nužan je uvjet da bi funkcija $y_0 \in \mathcal{C}$ bila ekstrem funkcionala I. Dodatno, ona će nam služiti kao sredstvo za određivanje "kandidata" za lokalni minimum funkcionala I.

Definicija 2.5. Za funkciju $y \in \mathcal{C}$ kažemo da je *stacionarna funkcija* funkcionala I ako zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu za dani funkcional.

2.1.1 Posebni slučajevi Euler-Lagrangeove jednadžbe

Ukoliko je Lagrangeian L posebnog oblika, Euler-Lagrangeova jednadžba može se dodatno pojednostaviti. To će nam biti posebno korisno u rješavanju konkretnih problema. Najzanimljiviji među njima se pokazuju sljedeći slučajevi:

U slučaju da *Lagrangeian L ne ovisi eksplicitno o y'*, tada je $\partial_3 L = 0$ pa Euler-Lagrangeova jednadžba glasi

$$\partial_2 L(x, y(x)) = 0.$$

U slučaju kada *Lagrangeian L ne ovisi eksplicitno o y*, tada je $\partial_2 L = 0$, pa Euler-Lagrangeova jednadžba glasi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\partial_3 L(x, y'(x)\right) = 0,$$

što je pak ekvivalentno s

$$\partial_3 L(x, y'(x)) = \mathrm{c}, \quad \text{za neki } \mathrm{c} \in \mathbb{R}.$$

U slučaju kada *Lagrangeian L ne ovisi eksplicitno o x*, tada je $\partial_1 L = 0$. Pomnožimo li Euler-Lagrangeovu jednadžbu s y' dobivamo

$$y' \frac{\partial L}{\partial y} - y' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0. \tag{3}$$

Iskoristimo li formulu za složeno deriviranje na $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$ slijedi da je

$$\frac{\partial L}{\partial y} y' = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial L}{\partial y'} y''. \tag{4}$$

[2]U literaturi se često, u čast švicarskom matematičaru Leonhardu Euleru (1707 – 1783), naziva i samo Eulerova jednadžba

Uvrstimo li izraz (4) u jednakost (2.1.1) dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial L}{\partial y'}y'' - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0.$$

Kako je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}y'\right) = \frac{\partial L}{\partial y'}y'' + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

to slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(L - \frac{\partial L}{\partial y'}y'\right) = 0,$$

što je ekvivalntno s

$$L - \frac{\partial L}{\partial y'}y' = \mathrm{c}, \text{za neki } \mathrm{c} \in \mathbb{R}.$$

Gornji izraz poznat pod nazivom *Beltramov identitet*[3].

2.2 Uvjeti transverzalnosti

Što kada vrijednost funcije $y = y(x)$ u rubovima segmenta nije unaprijed zadana, to jest kada minimizaciju funkcionala I vršimo po skupu $\mathrm{C}^1([a,b])$? Analognim zaključivanjem kao u izvodu Euler-Lagrangeove jednadžbe dolazimo do jednakosti

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(y_0 + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = \int_a^b \eta(x)\big[\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x)) \\ + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\big]\mathrm{d}x \;+\; \partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x)\Big|_{x=a}^{b} = 0\end{aligned} \tag{5}$$

Ova jednakost mora vrijediti za proizvoljnu funkciju $\eta \in \mathrm{C}^1([a,b])$ pa posebno i za η takvu da je $\eta(a) = \eta(b) = 0$. To nas svodi slučaj kada je vrijednost funkcije y na rubovima intervala bila unaprijed zadana, te implicira

$$\int_a^b \eta(x)[\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))]\mathrm{d}x = 0$$

za sve $\eta \in \mathrm{C}^1([a,b])$. Primjenom Osnovne leme varijacijskog računa na prethodnu jednakost zaključujemo da funcija y mora zadovoljavati Euler-Lagrangeovu jednadžbu.

Dodatno, da bi jednakost 5 vrijedila za proizvoljnu $\eta \in \mathrm{C}^1([a,b])$, i drugi sumand u 5 mora biti jednak 0. Odnosno,

$$\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x)\Big|_{x=a}^{b} = 0.$$

[3]Eugenio Beltrami (1835. - 1900.), talijanski matematičar

Posebno, ako izaberemo η takvu da je $\eta(a) = 0$ i $\eta(b) \neq 0$, slijedi

$$\partial_3 L(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0.$$

Ukoliko izaberemo η takvu da je $\eta(b) = 0$ i $\eta(a) \neq 0$, slijedi

$$\partial_3 L(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0.$$

Izraze

$$\partial_3 L(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0, \quad \partial_3 L(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$$

nazivamo *uvjeti transverzalnosti ili poprečnosti.*

Konačno da bi funkcija $y_0 \in \mathrm{C}^1([a, b])$ bila ekstrem funkcionala I, nužno je da zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu te uvjete transverzalnosti.

2.3 Generalizacije Euler-Lagrangeove jednadžbe

2.3.1 Vektorske funkcije

Do sada smo tražili nužne uvjete ekstrema funkcionala I jedne varijable. Međutim, što kada I ovisi o vektorskoj funkciji $\vec{y} = (y_1(x), ..., y_n(x))$? Odnosno, zanima nas problem minimizacije funkcionala

$$I(\vec{y}) = \int_a^b L(x, \vec{y}, \vec{y}\,')\mathrm{d}x, \;\; \vec{y} \in \mathcal{C}^n,$$

gdje je L dovoljno glatka. Slično kao u slučaju jedne varijable, pretpostavit ćemo da je $\vec{y}_0 = (y_1^0, y_2^0 ..., y_n^0)$ lokalni minimum funkcionala I. Tada je za neki $delta > 0$

$$I(\vec{y}_0) \leq I(\vec{y}), \;\text{ za svaki } \vec{y} \in K(\vec{y}_0, \delta).$$

Prethodna nejednakost vrijedi posebno i za funkcije oblika

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \varepsilon \vec{\eta},$$

pri čemu je $\vec{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_n)$, $\eta_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, ..., n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
Uvrstimo li gornji izraz u funkcional I dobivamo

$$I = \int_a^b L(x, \vec{y}_0 + \varepsilon \vec{\eta}, \vec{y}\,'_0(x) + \varepsilon \vec{\eta}\,'(x))\mathrm{d}x.$$

Za fiksnu funkciju $\vec{\eta}$, I postaje funkcional realne varijable ε. Dodatno, po pretpostavci je $\vec{y}_0$ lokalni minimum funkcionala I pa je $\varepsilon = 0$ lokalni minimum funkcije

$\varepsilon \longmapsto I(\vec{y}_0 + \varepsilon\vec{\eta})$.
Sada iz nužnog uvjeta ekstrema za funkciju jedne varijable dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(\vec{y}_0 + \varepsilon\vec{\eta})_{|\varepsilon=0} = 0.$$

Koristeći formulu za složeno deriviranje i linearnost integrala zaključujemo

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}_{|\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial L}{\partial y_i'}\eta_i'\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Parcijalnom integracijom drugog člana u gornjem integralu je

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}_{|\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^{n}\int_a^b (\frac{\partial L}{\partial y_i}\eta_i - \eta_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y_i'})\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial L}{\partial y_i}\bigg|_{x=a}^{b} = 0. \tag{6}$$

Za svaku funkciju $\eta_i, i = 1, ..., n$ je $\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0$ pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial L}{\partial y_i}\bigg|_{x=a}^{b} = 0.$$

Za proizvoljni $j \in \{1, 2, ..., n\}$ odaberimo funkciju $\vec{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathcal{D}^n$ takvu da je $\eta_j \neq 0$ i $\eta_i = 0$ za $i \neq j$. Jednakost (6) tako postaje

$$\int_a^b (\frac{\partial L}{\partial y_j}\eta_j - \eta_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y_j'})\mathrm{d}x = 0, \text{ za svaki j} = 1, ..., n.$$

Primjenom Osnovne leme varijacijskog računa na prethodan niz jednakosti dobivamo sustav Euler-Lagrangeovih jednadžbi

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}(x, \vec{y}_0(x), \vec{y}\,'_0(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\partial L}{\partial y_i'})(x, \vec{y}_0(x), \vec{y}\,'_0(x)) = 0,\ i = 1, ..., n,$$

koje nam predstavljaju nužan uvjet da bi funkcija $\vec{y}_0$ bila ekstrem funkcionala I.

2.3.2 Funkcije više varijabli

Euler-Lagrangeovu jednadžbu poopćiti možemo i na način da funkciju y promatramo kao funkciju varijabli $x_1, ..., x_n$. Ukoliko označimo $x = (x_1, ..., x_n)$, tada se naš varijacijski problem svodi na minimizaciju funkcionala

$$I(y) = \int_\Omega L(x, y(x), \bigtriangledown y(x))\mathrm{d}x,$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, zatvoreno područje omeđeno s glatkom plohom $\partial\Omega$, koja samu sebe ne presjeca. Funkcija $y \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ je takva da joj je vrijednost na rubu $\partial\Omega$ unaprijed zadana. Preciznije,

$$y_{|\partial\Omega}(x) = f(x), \text{za neku funkciju } f \in \mathrm{C}^1(\partial\Omega).$$

Pretpostavimo sada da je $y_0 \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, takva da je $y_{0|\partial\Omega}(x) = f(x)$ lokalni minimum funkcionala I. Tada je

$$I(y_0) \leq I(y), \text{ za svaku funkciju } y \in K(y_0, \delta), \, \delta > 0,$$

pri čemu je sada $K(y_0, \delta)$ otvorena kugla u $\mathrm{C}^1(\Omega)$, sa središtem u y_0 i radijusa δ. Posebno, gornja nejednakost vrijedi i za y oblika

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon\eta(x),$$

pri čemu je $\eta \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ t.d je $\eta_{|\partial\Omega}(x) = 0$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li takav y u I, za fiksnu funkciju η, postaje funkcional realne varijable ε. Dodatno, po pretpostavci je y_0 lokalni minimum funkcionala I, pa je $\varepsilon = 0$ lokalni minimum funkcije $\varepsilon \longmapsto I(y_0 + \varepsilon\eta)$. Sada iz nužnog uvjeta ekstrema za funkciju jedne varijable dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(y_0 + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = 0.$$

Kako integral i derivacija neprekidne funkcije komutiraju, to slijedi

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(y_0 + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\varepsilon}(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), \bigtriangledown y(x) + \varepsilon \bigtriangledown \eta(x))\mathrm{d}x.$$

Koristeći formulu za složeno deriviranje uz oznaku $y_{x_k} := \dfrac{\partial y}{\partial x_k}$, je

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(y_0 + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial y_{x_1}}\frac{\mathrm{d}y_{x_1}}{\partial \varepsilon} + \cdots + \frac{\partial L}{\partial y_{x_n}}\frac{\mathrm{d}y_{x_n}}{\mathrm{d}\varepsilon} \right) \mathrm{d}x = 0. \tag{7}$$

Iz $\frac{\mathrm{d}y_{x_n}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \eta_{x_n}$ slijedi

$$\int\limits_{\Omega} (\frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y_{x_1}}\eta_{x_1} + ... + \frac{\partial L}{\partial y_{x_n}}\eta_{x_n})\mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

Primjenom teorema o divergenciji, i-ti sumand u gornjem integralu možemo preformulirati kao

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial y_{x_i}}\eta_{x_i}\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial L}{\partial y_{x_i}}\nu_i \cdot \mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial y_{x_i}}\right)\eta \mathrm{d}x,$$

gdje je ν_i i-ta komponeneta jedinične vanjske normale na $\partial\Omega$. Kako je $\eta_{|\partial\Omega} = 0$, to slijedi $\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial L}{\partial y_{x_i}}\mathrm{d}\vec{S} = 0$, odnosno jednadžba (8) sada glasi

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial y_{x_i}} \right) \eta \, \mathrm{d}x = 0. \tag{9}$$

Primijetimo da smo početni integral sveli na oblik sličan onom kod funkcija jedne varijable. Sukladno tome i Osnovnu lemu varijacijskog računa na sličan način ćemo poopćiti i na funkcije više varijabli.

Teorem 2.6. *Ako za funkciju $\phi \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\int\limits_{\Omega} \phi(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0$$

za svaku funkciju $\eta \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ takvu da je $\eta_{|\partial\Omega} \equiv 0$, onda je $\phi \equiv 0$.

Dokaz. Dokaz provodimo kontradikcijom: pretpostavimo da je $\phi(P_0) \neq 0$ za neku točku $P_0 \in \Omega$. Kako je ϕ neprekidna na Ω to postoji $\varepsilon > 0$ takav da je ϕ na kugli sa središtem u P_0 radijusa ε strogo negativna ili strogo pozitivna. Bez smanjenja općenitosti neka je $\phi(P) > 0$ za svaku točku $P \in K(P_0, \varepsilon)$.
Definirajmo funkciju η izrazom

$$\eta(P) = \begin{cases} ((\varepsilon)^2 - ||P - P_0||^2)^2 & , P \in K(P_0, \varepsilon) \\ 0 & , P \notin K(P_0, \varepsilon). \end{cases}.$$

Lako se pokaže da ovako definirana η zadovoljava uvjete teorema i vrijedi

$$\int\limits_{\Omega} \phi(x)\eta(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{K(P_0,\epsilon)} \phi(x)\eta(x)\mathrm{d}x > 0,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom teorema. Q.E.D.

Primjenom Teorema (2.6) na jednakost (9) zaključujemo da je za svaki $x \in \Omega$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y_0(x), \bigtriangledown y_0(x)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial y_{x_i}}(x, y_0(x), \bigtriangledown y_0(x)) = 0.$$

Gornja jednadžba je nužan uvjet da bi funkcija y_0 bila ekstrem funkcionala I.

2.4 Nužni uvjeti II. reda

Do sada smo razmatrali nužne uvjete koji su uključivali samo prvu varijaciju funkcionala I. Kako nam je kod realnih funkcija realne varijable i druga derivacija funkcije bila izrazito bitna i ovdje će se pokazati da je tako. Uvjete koje ćemo sada promatrati nazivaju se nužni uvjeti drugog reda upravo zato što ovise o drugoj varijaciji danog funkcionala, koju ćemo definirati na sličan način kao i prvu.

Definicija 2.7. Neka su dane funkcije $y_0 \in \mathcal{C}$ i $\eta \in \mathcal{D}$. Izraz

$$Q(y_0, \eta) := \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\varepsilon^2}(y_0 + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0}$$

nazivamo druga varijacija funkcionala I u y_0.

Primjetimo da druga varijacija funkcionala I nije ništa drugo nego druga derivacija funkcije $\varepsilon \longmapsto I(y + \varepsilon\eta)$ u točki $\varepsilon = 0$. Stoga ćemo ju tako i računati. Koristeći činjenicu da integral i derivacija neprekidne funkcije komutiraju zaključujemo da je

$$Q(y, \eta) = \int_a^b \left(\eta^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} + \eta'^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \right) \mathrm{d}x.$$

Ukoliko je funkcija $y_0 \in \mathcal{C}$ stacionarna funkcija funkcionala I gornji izraz može se zapisati u obliku pogodnijem za korištenje u daljnjim dokazima. Parcijalnom integracijom drugog člana gornje sume dobivamo

$$\int_a^b (2\eta\eta' \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}) \mathrm{d}x = \eta(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(2\eta \frac{\partial L}{\partial y \partial y'} \right) \Bigg|_{x=a}^{b} - \int_a^b \eta^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} \mathrm{d}x,$$

što uz $\eta(a) = \eta(b) = 0$ daje

$$Q(y, \eta) = \int_a^b \left[\eta^2 (\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}) + \eta'^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \right] \mathrm{d}x.$$

Prije nego počnemo s razmatranjima nužnih uvjeta II. reda, pogledajmo kako uopće činjenica da je funkcija $y_0 \in \mathcal{C}$ lokalni minimum funkcionala I utječe na drugu varijaciju tog funkcionala. Ukoliko je y_0 lokalni minimum od I, to je $I(y_0) \leq I(y)$ za svaki $y \in K(y_0, \delta)$ pri čemu je $\delta \in \mathbb{R}$ pozitivan. Ova nejednakost vrijedi posebno i za funkcije oblika $y(x) = y_0(x) + \varepsilon\eta(x)$, za $\eta \in \mathcal{D}$ dovoljno mali i $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Sada je

$$I(y_0) \leq I(y_0 + \varepsilon\eta).$$

Kako je Lagrangeian L klase C^2 na svojoj domeni, razvijmo funkciju $\varepsilon \longmapsto I(y+\varepsilon\eta)$ u Taylorov red do članova drugog reda, u okolini točke $\varepsilon = 0$:

$$I(y_0 + \varepsilon\eta) = I(y_0) + \varepsilon \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}(y_0 + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} + R_2(\varepsilon),$$

pri čemu je ostatak R_2 dan izrazom $R_2(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon^2}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\varepsilon^2}(y+\theta\varepsilon\eta)$, za neki $\theta \in (0,1)$. Dodavanjem i oduzimanjem druge varijacije u ostatak R_2 slijedi

$$R_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}(Q(y_0,\eta) + o(\varepsilon)),$$

za o koji je dan izrazom

$$o(\varepsilon) = \int_a^b \left(\eta^2\overline{S} + \eta'^2\overline{R}\right)\mathrm{d}x,$$

pri čemu su

$$\begin{aligned}
\overline{R}(x,\eta,\eta',\varepsilon) &= \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x,y_0,y_0') - \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x,y_0+\theta\varepsilon\eta, y_0'+\theta\varepsilon\eta'),\\
\overline{S}(x,\eta,\eta',\varepsilon) &= \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y_0,y_0') - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y_0+\theta\varepsilon\eta, y_0'+\theta\varepsilon\eta')\\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial y'}(x,y_0,y_0') - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial y'}(x,y_0+\theta\varepsilon\eta, y_0'+\theta\varepsilon\eta').
\end{aligned}$$

Dodatno, kako zbog neprekidnosti vrijedi $\overline{R}, \overline{S} \longrightarrow 0$ kada $\varepsilon \longrightarrow 0$, zaključujemo da $o(\varepsilon) \longrightarrow 0$ kada $\varepsilon \longrightarrow 0$, čime smo opravdali korištenje oznake $o(\varepsilon)$. Sada vrijedi

$$I(y_0+\varepsilon\eta) = I(y_0) + \varepsilon\delta(y_0,\eta) + \frac{\varepsilon^2}{2}Q(y_0,\eta) + \frac{\varepsilon^2}{2}o(\varepsilon).$$

Kako je y_0 po pretpostavci lokalni minimum funkcionala I to slijedi $\delta(y_0,\eta) = 0$. Zaključujemo da je

$$I(y_0) - I(y_0+\varepsilon\eta) = -\frac{\varepsilon^2}{2}Q(y_0,\eta) - \frac{\varepsilon^2}{2}o(\varepsilon) \le 0. \tag{10}$$

Odnosno

$$Q(y_0,\eta) + o(\varepsilon) \ge 0.$$

Sada nam je jasno da kako bi nejednakost 10 vrijedila za svaki $\varepsilon > 0$, druga varijacija, $Q(y_0,\eta)$, funkcionala I u y_0 mora biti nenegativna.

2.4.1 Legendreov test

Upravo smo pokazali da ukoliko je funkcija $y_0 \in \mathcal{C}$ lokalni minimum funkcionala I, onda je druga varijacija danog funkcionala u y_0 nenegativna za svaku funkciju $\eta \in \mathcal{D}$. Voljeli bismo kada bismo mogli ustanoviti pozitivnu semidefinitnost varijacije Q, bez da moramo provjeravati njenu vrijednost u svakoj funkciji η. Upravo tu će nam koristiti Legendreov[4] test, ali prije nego ga iskažemo, dokazat ćemo jedan pomoćni rezultat.

[4] Adrien-Marie Legendre (1752. - 1833.), francuski matematičar

Lema 2.1. Neka su $R, S \in \mathrm{C}([a,b])$ proizvoljne neprekidne funkcije. Ako je funkcional $J(\eta) = \int\limits_a^b (R\eta'^2 + S\eta^2)\mathrm{d}x > 0$, za svaku $\eta \in \mathcal{D}$ nenul funkciju, onda je $R(x) \geq 0$, za svaki $x \in [a,b]$.

Dokaz. Dokaz provodimo kontradikcijom: pretpostavimo da je $R(x_0) < 0$, za neki $x_0 \in [a,b]$. Označimo $R(x_0) = -2\delta$, $\delta > 0$.
Kako je R neprekidna na $[a,b]$, tada za svaki $\varepsilon > 0$ dovoljno mali vrijedi da je $R(x) < \frac{1}{2}R(x_0) = -\delta$ za $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.
Definirajmo η izrazom

$$\eta(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{\varepsilon}(x - x_0), & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ 0, & x \notin (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

i označimo s $M_s := \max\limits_{x\in[a,b]} |S(x)|$. Primijetimo najprije da smo funkciju η dobro definirali: $\eta \in \mathrm{C}^1([a,b])$, te $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b (R\eta'^2 + S\eta^2)\mathrm{d}x &= \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \Big((\frac{\pi}{\varepsilon})^2 R(x) \sin^2 \frac{2\pi}{\varepsilon}(x - x_0) + S(x) \sin^4 \frac{\pi}{\varepsilon}(x - x_0) \Big) \mathrm{d}x \\
&\leq \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} (\frac{\pi}{\varepsilon})^2 R(x) \sin^2 \frac{2\pi}{\varepsilon}(x - x_0)\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |S(x)|\mathrm{d}x \\
&\leq -(\frac{\pi}{\varepsilon})^2 \delta \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \sin^2 \frac{2\pi}{\varepsilon}(x - x_0)\mathrm{d}x + M_s \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \mathrm{d}x \\
&= -\delta \frac{\pi^2}{2\varepsilon} + 2M_s\varepsilon < 0
\end{aligned}$$

za ε dovoljno mali, što je kontradikcija s pretpostavkom teorema.

Q.E.D.

Teorem 2.8. *(Legenderov test) Neka su $\eta \in \mathrm{D}$ nenul funkcija, $y_0 \in \mathcal{C}$, te $L \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Ako je y_0 lokalni minimum funcionala I, tada je*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0') \geqslant 0.$$

Dokaz. Ako je y_0 minimum funkcionala I, onda je nužno da $Q(y_0, \eta) \geq 0$ za svaku funkciju η koja zadovoljava uvjete teorema. Odnosno

$$Q(y_0, \eta) = \int\limits_a^b \left[\eta^2 \big(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0, y_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y_0') \big) + \eta'^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0') \right] \mathrm{d}x \geq 0$$

Primjenom Leme 2.1 na gornju nejednakost slijedi

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0') \geqslant 0.$$

Q.E.D.

Napomena 2.7. Ukoliko nejednakost

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0') \geqslant 0$$

zamjenimo strogom nejednakošću, onda taj uvjet zovemo jaki ili strogi Legenderov uvjet.

Prava će nam važnost Legenderovog testa biti jasna nakon što razmotrimo dovoljne uvjete ekstrema funkcionala I. Prije toga, pogledajmo primjere.

Primjer 1. *Odredimo, uz uvjete $y(0) = 0$, $y(b) = 0$, lokalni minimum funkcionala*

$$I(y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^b (y'^2 - y^2)\mathrm{d}x,$$

Primjetimo odmah da je

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0') = 1 > 0,$$

odnosno, da po Legenderovom testu, stacionarna funkcija koju dobijemo rješavanjem pripadne Euler-Lagrangeove jednadžbe, može biti lokalni minimum. Pogledajmo sada kako izgleda druga varijacija funkcionala I za konkretnu funkciju η danu s $\eta(x) = \sin\frac{\pi x}{b}$.

$$\begin{aligned} Q(y, \eta) = \int\limits_0^b (\eta'^2 - \eta^2)\mathrm{d}x &= \int\limits_0^b (\frac{\pi^2}{b^2}\cos\frac{\pi x}{b} - \sin^2\frac{\pi x}{b}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4b}(\pi^2 - b^2) < 0, \ \textit{za} \ b > \pi \end{aligned}$$

Zaključujemo da y sigurno nije lokalni minimum od I ukoliko je $b > \pi$. Je li y minimum ukoliko je $b \leq \pi$ još uvijek ne znamo. Rješavanjem Euler-Lagrangeove jednadžbe zaključujemo da su stacionarne funkcije oblika

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x), \ \textit{za neke realne konstante} \ c_1, c_2.$$

Iz početnih uvjeta slijedi da je
$c_1 = 0$, $c_2\sin(b) = 0$. Ukoliko je $b \neq k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$ tada je $c_2 = 0$, odnosno stacionarna funkcija je

$$y \equiv 0.$$

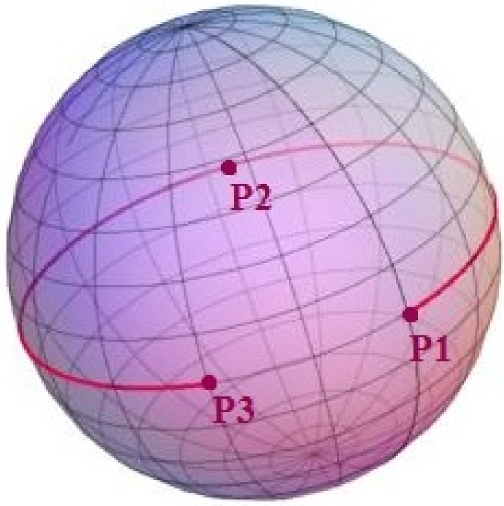
Pogledajmo sada što je kada $b = \pi$. Sada $\sin(b) = 0$, pa je konstanta c_2 proizvoljna. To nam daje čitavu klasu stacionarnih funkcija oblika

$$y = c\sin(x), \ \textit{pri čemu je} \ c \in \mathbb{R}.$$

Kako je $b \leq \pi$ Legenderov je test zadovoljen i svaka od tih funkcija može biti lokani minimum funkcionala I na $[a, b]$.
Primijetimo da nam je duljina intervala $[a, b]$ određivala može li stacionarna funkcija biti lokalni minimum funkcionala I ili ne. Sada nam je jasno da će nam trebati jos jedan test koji će u ovisnosti o intervalu $[a, b]$ određivati je li stacioarna funkcija kandidat za lokalni minimum.

2.4.2 Jacobijev test

Primjer 2. *Promotrimo problem traženja najkraćeg puta između dvaju točaka na sferi. U poglavlju Primjene varijacijskog računa pokazati ćemo da je najkraća spojnica točaka P_1 i P_2 na sferi zapravo luk kružnice koju smo dobili presjecanjem sfere i ravnine koja je određena tim dvjema točkama i središtem sfere. Jasno nam je da te dvije točke dijele kružnicu na dva kružna luka. Naravno, najkraću spojnicu će predstavljati onaj kraći. Neka je nadalje zadana točka P_3 na kružnici određenoj točkama P_1, P_2 i središtem sfere, postavljena tako da je najkraća spojnica između točaka P_1 i P_2 luk $\widehat{P_1P_2}$, a točaka P_2 i P_3 luk $\widehat{P_2P_3}$ dane kružnice. Međutim luk $\widehat{P_1P_2P_3}$ ne mora nužno biti najkraća spojnica točaka P_1 i P_3.*



Slika 2: Spojnica točaka P_1 i P_3

Primjetimo samo kada bi udaljenost točaka P_1 i P_3, gledajući preko točke P_2 bila manja, onda bi luk $\widehat{P_1P_2P_3}$ možda bio najkraća spojnica tih točaka.

Prethodna su nam dva primjera pokazala da duljina intervala na kojemu promatramo problem igra veliku ulogu u odlučivanju može li stacionarna funkcija biti lokalni minimum. U skladu s tim dat ćemo još jedan uvjet koji će morati zadovoljavati stacionarna funkcija da bi mogla biti lokalni minimum. Traženi se uvjet naziva Jacobijev[5] test i ovisi o intervalu po kojemu integriramo Lagrangeian.

[5]Carl Gustav Jacob Jacobi (1084. - 1851.) njemački matematičar

Prije nego iskažemo Jacobijev test definirajmo još nekoliko važnih pojmova.

Definicija 2.9. Neka je I funkcional, pri čemu je $L \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Euler-Lagrangeovu jednadžbu funkcionala koji za $y \in \mathcal{C}$ funkciji $\eta \longmapsto Q(y, \eta)$, pri čemu je Q druga varijacija funkcionala I, nazivamo *Jacobijeva jednadžba* funkcionala I. Ona je dana izrazom

$$\left[\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}\right]\eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}\eta'\right] = 0.$$

Dodatno, za točku $x_0 \in (a, b]$ kažemo da je konjugirana točki a, ukoliko postoji netrivijalno rješenje η_0 Jacobijeve jednadžbe funkionala I, za koje je $\eta_0(a) = \eta_0(x_0)$.

Sljedeći ćemo teorem iz tehničkih razloga navesti bez dokaza, a dokaz se može pronaći u literaturi [14].

Teorem 2.10. *(Jacobijev test)*
Ako je $y_0 \in \mathcal{C}$ lokalni minimum funkcionala $I(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$ na $[a, b]$, onda ne postoji točka $c \in (a, b)$ konjugirana točki a.

Napomena 2.8. Može se pokazati da vrijedi i jača tvrdnja. Odnosno, da ukoliko vrijede pretpostavke prethodnog teorema, tada ne postoji točka $c \in (a, b]$ konjugirana točki a. Taj uvjet nazivamo jaki ili strogi Jacobijev test.

Do sada smo prezentirali nekoliko nužnih uvjeta koje mora zadovoljavati funkcija $y \in \mathcal{C}$ da bi bila lokalni minimum funkcionala I. Međutim, niti jedan od njih ne pruža garanciju da će funkcija koja ih zadovoljava stvarno biti lokalni minimum za I. Upravo ćemo se zato pozabaviti traženjem dovoljnih uvjeta postojanja ekstrema funkcionala I.

3 Dovoljni uvjeti

Prisjetimo se prvo dovoljnih uvjeta ekstrema funkcije jedne varijable. Oni su nam bili vezani za drugu derivaciju funkcije koju smo minimizirali.

Teorem 3.1. *Neka je funcija $f \in \mathrm{C}^2([a,b])$, te $x_0 \in [a,b]$ stacionarna točka funkcije f. Ukoliko je $f''(x_0) > 0$, onda je x_0 točka minimuma funkcije f.*

Slično će dovoljni uvjeti ekstrema funkcionala I ovisiti o drugoj varijaciji tog funkcionala.

Teorem 3.2. *Neka je $y_0 \in \mathcal{C}$ stacionarna funkcija funcckcionala I. Ako je $Q(y_0, \eta) > 0$ za svaku nenul funkciju $\eta \in \mathcal{D}$, tada je y_0 lokalni minimum funkcionala I.*

Dokaz. Kako je $y_0 \in \mathcal{C}$ stacionarna funkcija funkcionala I, onda je $\varepsilon = 0$ stacionarna točka funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane izrazom

$$f(\varepsilon) = I(y_0 + \varepsilon\eta),$$

pri čemu je $\eta \in \mathcal{D}$. Kada bi funkcija f bila klase $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, tada bi nam uvjet da je $f''(0) > 0$, bio dovoljan da $\varepsilon = 0$ bude minimum funkcije f.
Druga derivacija funkcije f dana je s

$$f''(\varepsilon) := \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\varepsilon^2}(y + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = \int_a^b (\eta^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} + \eta'^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2})\mathrm{d}x.$$

Kako se u gornjem izrazu pojavljuju: η, η', te parcijalne derivacije drugog reda Lagrangeiana L, a to su sve neprekidne funkcije, to slijedi da je i f'' neprekidna. Odnosno, zaključujemo da je $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$. Sada f zadovoljava pretpostavke teorema o dovoljnim uvjetima ekstrema funkcije jedne varijable pa zaključujemo da ukoliko je $f''(0) > 0$, onda je $\varepsilon = 0$ minimum funkcije f. To je ekvivalentno tvrdnji da ukoliko je

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\varepsilon^2}(y + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} = Q(y_0, \eta) > 0,$$

onda je y_0 lokalni minimum funkcionala I. Q.E.D.

Napomena 3.1. Prethodni teorem ne daje *alat* za provjeravanje je li stacionarna funkcija zaista lokalni minimum danog funkcionala. Zato bismo voljeli pronaći način za provjeru pozitivne definitnosti druge varijacije Q, bez da direktno provjeravamo njenu vrijednost u svakoj funkciji $\eta \in \mathcal{D}$. Zato će nam sljedeći teorem biti izrazito važan.

Teorem 3.3 (Dovoljni uvjeti)**.** *Ukoliko za stacionarnu funkciju $y_0 \in \mathcal{C}$ funkcionala I vrijedi*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0') > 0,$$

te ukoliko na $(a, b]$ ne postoji točka konjugirana točki a, onda je druga varijacija funkcionala I, $Q(y_0, \eta) > 0$ za svaku nenul funkciju $\eta \in \mathcal{D}$.

Dokaz. Neka je

$$Q(y_0, \eta) = \int_a^b (R\eta'^2 + S\eta^2) \mathrm{d}x,$$

pri čemu su

$$R = \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}, \quad S = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}.$$

Primjetimo da za svaku realnu diferencijabilnu funkciju $w \in \mathrm{C}^1([a, b])$ vrijedi

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(w\eta^2)\mathrm{d}x = w(b)\eta^2(b) - w(a)\eta^2(a) = 0, \text{ za svaki } \eta \in \mathcal{D}.$$

Dodamo li taj izraz u drugu varijaciju funkcionala I u y_0 $Q(y_0, \eta)$ slijedi

$$\begin{aligned} Q(y_0, \eta) &= \int_a^b \left[R\eta'^2 + S\eta^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(w\eta^2) \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left[R\eta'^2 + S\eta^2 + 2w\eta\eta' + w'\eta^2 \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left[R\eta'^2 + 2w\eta\eta' + \eta^2(w' + S) \right] \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Varijacija Q bila bi pozitivno semidefinitana ukoliko bismo ju sveli na potpun kvadrat. To bismo postigli za w koja zadovoljava Riccatievu[6] jednadžbu

$$w^2 = R(S + w'). \tag{11}$$

Kako su R, S neprekidne na $[a, b]$, te $R > 0$, to je funkcija

$$f(x, w) = \frac{1}{R}(w^2 - S)$$

dobro definirana i neprekidna na $[a, b] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ pa po Peanovom teoremu Cauchyeva zadaća određena nekim početnim uvjetom i Riccatijevom jednadžbom

$$w' = \frac{1}{R}(w^2 - S)$$

ima rješenje. Uvrstimo li izraz 9 u drugu varijaciju dobivamo

$$Q(y_0, \eta) = \int_a^b R(\eta' + \frac{w\eta}{R})^2 \mathrm{d}x.$$

[6]Riccatijeva jednadžba je bilo koja obična diferencijalna jednadžba oblika $y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$. Nazvana je po talijanskom matematičaru J. F. Riccatiju (1676. - 1754).

Kako je po pretpostavci $R > 0$ gornji je izraz dobro definiran te očito nenegativan. Pogledajmo još može li biti $Q = 0$. Podintegralna funkcija je nenegativna, stoga je $Q = 0$ ako i samo ako je podintagralna funkcija jednaka 0. Dodatno je $R > 0$, pa slijedi

$$\eta' + \frac{w\eta}{R} = 0, \tag{12}$$

za $\eta \in \mathcal{D}$. Kako je $\eta \in \mathcal{D}$, to je $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Cauchyeva zadaća određena linearnom difetencijalnom jednadžbom 12 i početnim uvjetom $\eta(a) = 0$ ima jedinstveno rješenje na $[a, b]$, a funkcija $\eta \equiv 0$ je sigurno rješenje, stoga je $\eta \equiv 0$ jedino rješenje. Odnosno

$$Q(y_0, \eta) = 0$$

ako i samo ako je $\eta \equiv 0$, iz čega zaključujemo da je Q pozitivno definitna. Međutim, imamo propust. Rješenje w Riccatijeve jednadžbe možda nije definirano na cijelom $[a, b]$. Uvjerimo se u to sljedećim primjerom:

Za $R \equiv 1$, $S \equiv -1$ Riccatijeva jednadžba glasi $w' = w^2 + 1$. Njeno rješenje je $w(x) = \tan(x - c)$, za $c \in \mathbb{R}$. Kako je $\tan : (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, funcija w neće biti defnirana u točkama oblika $x - c = k\frac{\pi}{2}$. Preciznije, rješenje w Riccatijeve jednadžbe neće postojati na cijelom $[a, b]$, kada god je $b - a \geq \pi$. Ovaj ćemo problem riješiti tako da standardnom supstitucijom

$$w(x) = -\frac{R(x)v'(x)}{v(x)} \tag{13}$$

Riccatievu jednadžbu svedemo na linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s nekonstantnim koeficijentima danu s

$$Sv = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Rv').$$

Primjetimo da je dobivena jednadžba upravo Jacobijeva jednadžba za funkcional I. Tvrdnju smo dokazali ako pronađemo rješenje Jacobijeve jednadžbe koje ne iščezava na $[a, b]$. Kako su R i S neprekidne na $[a, b]$ tada Cauchyeva zadaća određena linearnom Jacobijevom jednadžbom i nekim početnim uvjetima sigurno ima rješenje i ono je definirano na cijelom $[a, b]$. To je velika prednost linearne jednadžbe drugog reda nad Riccatijevom. Odaberemo početne uvjete CZ s

$$v(a) = \delta > 0, \quad v'(a) = 1.$$

Kako je $v'(a) = 1 > 0$, to slijedi da funcija v raste na nekoj okolini točke a. Dodatno, zbog uvjeta teorema, v ne može ponovo na $(a, b]$ poprimiti vrijednost $v(a) = \delta$, pa zaključujemo da je $v(x) \geq \delta > 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Pronašli smo funkciju koja rješava Jacobijevu jednadžbu, definirana je na cijelom $[a, b]$, te ne iščezava na $[a, b]$. Sada je funkcija w dobro definirana izrazom 13 na cijelom $[a, b]$. Q.E.D.

Vratimo se sada na važnost nužnih uvjeta II. reda, preciznije Legendreovog testa. Primjetimo da dovoljne uvjete nije uvijek jednostavno provjeriti. Jacobijeva jednadžba može imati poprilično "ružno" rješenje za koje neće biti jednostavno odrediti postiže li u nekoj točki intervala $(a, b]$ jednaku vrijenost kao u a. Stoga je dobra praksa prvo provjeriti Legenderov test, te ako ga dana funkcija ne zadovoljava, odmah zaključujemo da ne može biti lokalni minimum ua I.

Napomena 3.2. Primjetimo da smo do sada zahtjevali da je Lagrangeian L klase $C^2(\mathbb{R}^3)$. To nije uvijek slučaj, i može se pokazati da sve do sada iskazane tvrdnje vrijede i kada je L definiran i dva puta neprekidno diferencijabilan na nekom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Ta činjenica slijedi iz toga da su nužni i dovoljni uvjeti funkcija više realnih varijabli iskazani na nekom otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$. Kako je osnovna ideja varijacijskog računa varirati funkciju za koju smo pretpostavili da je minimum funkcionala I, te time promatrati I kao funkcional realne varijable ε, opravdali smo gornji argument.

4 Globalni ekstremi

Do sada smo razvili alate za određivanje kandidata za lokalni minimum funkcionala I te za provjeru jesu li ti kandidati stvarno lokalni minimumi za I, pri čemu je podintegralna funkcija, Lagrangeian morala biti klase $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Međutim, ukoliko na Lagrangeian zahtjevamo još neke uvjete, problem minimizacije se može poprilično pojednostavniti. Dodatno, ukoliko nam je poznato da varijacijski problem sigurno ima rješenje te nam je Euler-Lagrangeova jednadžba dala samo jednu stacionarnu funkciju, onda nam je jasno da je ta funkcija upravo rješenje polaznog problema. Pitanje je jedino kako biti siguran da problem ima rješenje.

Prisjetimo se prvo problema minimizacije funkcije jedne varijable. Ukoliko je funkcija koju minimiziramo konveksna na svojoj domeni, onda je stacionarna točka te funkcije ujedno i njen globalni minimum. Slična će se tvrdnja moći primjeniti i na varijacijske probleme. Prije daljnjeg razmatranja definirajmo osnovne pojmove konveksne analize.

Definicija 4.1. Za skup $M \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksan, ukoliko za svaka njegova dva elementa x_1, $x_2 \in M$ vrijedi da je i njihova spojnica iz M. Preciznije, M je konveksan ako je

$$\Big(\forall x_1, x_2 \in M\Big)\Big(\forall t \in [0,1]\Big) \qquad (1-t)x_1 + tx_2 \in M.$$

Kako smo definirali konveksan skup, ima smisla promatrati i funkcije definirane na takvom skupu.

Definicija 4.2. Za realnu funkciju f, definiranu na konveksnom skupu $M \subset \mathbb{R}^n$, kažemo da je konveksna na M ukoliko

$$\Big(\forall x_1, x_2 \in M\Big)\Big(\forall t \in [0,1]\Big) \quad f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Napomena 4.1. Konveksnost domene M, u prethodnoj definiciji, potrebna je da funkcija f bude definirana u svakoj točki oblika $(1-t)x_1 + tx_2$, za $x_1, x_2 \in M$.

Konveksnost funkcije, posebno one više varijabli, generalno nije jednostavno provjeriti. Dodatno, sama definicija, zbog nejednakosti koja mora vrijediti u proizvoljnim točkama domene te za svaki $t \in [0,1]$ nije praktična za provjeru konveksnosti funkcije. Upravo zato ćemo uvesti karakterizaciju konveksnih funkcija.

Teorem 4.3. *Neka je $M \subset \mathbb{R}^2$ konveksan skup i $f \in \mathrm{C}^2(M)$. Funkcija f je konveksna na M ako i samo ako je Hessijan*[7] *funkcije f pozitivno semidefinitan. Preciznije,*

$$Hf(x,y) \geq 0, \ \textit{za svaki } (x,y) \in M.$$

[7]Hesseova matrica ili kraće Hessijan H funkcije $f \in \mathrm{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, u točki $P \in \Omega$ definira se kao matrica reda n s elemantima $H_{i,j} = \partial^2_{ij} f(P)$.

Po Silvesterovom kriteriju to je ispunjeno kada je

$$\partial^2_{11} f(x,y) \geq 0$$
$$\partial^2_{11} f(x,y)\partial^2_{22} f(x,y) - (\partial^2_{12} f(x,y))^2 \geq 0.$$

Prije nego dokažemo teorem koji nam daje dovoljne uvjete na Lagrangeian, za globalni ekstrem funkcionala I, pokažimo da nejednakost iz Definicije 4.2 povlači drugu nejednakost koja ne sadrži $t \in [0,1]$.

Neka je $M \subset \mathbb{R}^n$ konveksan, te $f \in \mathrm{C}^1(M)$. Tada f možemo razviti u Taylorov red oko proizvoljne točke $x_1 \in M$ do članova 1. reda:

$$f(x) = f(x_1) + \nabla f(x^*)(x - x_1).$$

Dodatno, ukoliko je x oblika $(1-t)x_1 + tx_2$, za $x_2 \in M$, $t \in (0,1)$, tada je

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = f(x_1) + \nabla f(x^*)t(x_2 - x_1).$$

Kako je f konveksna funkcija, to slijedi

$$f(x_1) + \nabla f(x^*)t(x_2 - x_1) = f((1-t)x_1 + tx_2) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1),$$

odnosno

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x^*)(x_2 - x_1),$$

pri čemu je x^* između x_1 i $x = tx_2 + (1-t)x_1$. Ukoliko $t \longrightarrow 0$ dobivamo

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1)(x_2 - x_1).$$

Ovim smo izvodom upravo dokazali sljedeću lemu.

Lema 4.1. Ukoliko je $f \in \mathrm{C}^1(M)$ konvkesna funkcija defnirana na $M \subset \mathbb{R}^n$ konveksanom skupu, tada je za svaka dva $x_1, x_2 \in M$

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1)(x_2 - x_1).$$

Uvjeti koji će nam garantirati da je stacionarna funkcija y_0 funkcionala I ujedno i njegov minimum bit će usko vezani za konveksnost pripadnog Lagrangeiana L.

Teorem 4.4. *Ukoliko je Lagrangeian $L \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$ funkcionala I konveksan u odnosu na zadnje dvije varijable, y, y', onda je svaka funkcija $y_0 \in \mathcal{C}$ koja zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu za I globalni minimum danog funkcionala.*

Dokaz. Za svaki $x \in [a,b]$ označimo sa

$$M_x := \{(y(x), y'(x)) : y \in \mathcal{C}\}.$$

Sada za fiksan $x \in [a,b]$, Lagrangeian L možemo promatrati kao funkciju na M_x. Uz tu oznaku, pretpostavka teorema je da je za svaki $x \in [a,b]$, L konveksna funkcija na M_x. Da bi ta definicija bila valjana, M_x mora biti konveksan skup, što slijedi iz konveksnosti skupa $\mathcal{C}$. Dodatno, kako je $M_x \subset \mathrm{R}^2$, tada konveksnost od L na M_x možemo provjeravati pomoću karakterizacije iz Teorema 4.3.

Sada za proizvoljne
$(y_1(x), y_1'(x)), (y_2(x), y_2'(x)) \in M_x$, iz Leme 4.1 slijedi

$$\begin{aligned} L(x, y_2(x), y_2'(x)) \geq L(x, y_1(x), y_1'(x)) &+ \partial_2 L(x, y_1(x), y_1'(x))(y_2(x) - y_1(x)) \\ &+ \partial_3 L(x, y_1(x), y_1'(x))(y_2'(x) - y_1'(x)). \end{aligned} \tag{14}$$

Neka je $y_0 \in \mathcal{C}$ stacionarna funckcija za I, te neka je $y \in \mathcal{C}$ proizvoljna funkcija. Iz (14) zaključujemo

$$\begin{aligned} I(y) - I(y_0) &= \int_a^b L(x, y, y')\mathrm{d}x - \int_a^b L(x, y_0, y_0')\mathrm{d}x \\ &\geq \int_a^b \partial_2 L(x, y_0, y_0')(y - y_0)\mathrm{d}x + \int_a^b \partial_3 L(x, y_0, y_0')(y' - y_0')\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom drugog integrala u gornjem izrazu dobivamo

$$\begin{aligned} I(y) - I(y_0) \geq \partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))(y(x) - y_0(x))\Big|_{x=a}^{b} \\ - \int_a^b \left(\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\right)(y(x) - y_0(x))\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Kako su $y_0, y \in \mathcal{C}$, te je y_0 po pretpostavci stacionarna funkcija za I, tada je

$$\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))(y(x) - y_0(x))\Big|_{x=a}^{b} = 0,$$

$$\int_a^b \left(\partial_2 L(x, y_0, y_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_3 L(x, y_0, y_0')\right)(y - y_0)\mathrm{d}x = 0.$$

Odnosno

$$I(y) - I(y_0) \geq 0, \text{ za svaki } y \in \mathcal{C}.$$

Zaključujemo da je y_0 globalni minimumm funkcionala I. Q.E.D.

Dobra je praksa da, ukoliko iz Euler-Lagrangeove jednadžbe dobijemo samo jednu stacionarnu funkciju, provjerimo je li Lagrangeian konveksna funkcija obzirom na zadnje dvije varijable. Ukoliko je odgovor potvrdan, onda je stacionarna funkcija sigurno minimum, i to globalni, te ne moramo provjeravati dovoljne uvjete.

Napomena 4.2. Primjetimo najprije da smo u iskazu Teorema 4.4 zahtijevali da je $L \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Međutim, to ne mora uvijek biti slučaj. Pogledajmo primjer Brachistohorne. Tu zahtjevamo da je $y(x) > 0$, za svaki $x \in [a, b]$, odnosno skup svih mogućih rješenja ovog varijacijskog problema je $\mathrm{C}^1([a, b]; (0, \inf))$. Kako je taj skup konveksan, to možemo provesti zaključivanje kao u Teoremu 4.3.

5 Primjene varijacijskog računa

5.1 Problem nakraćeg puta

Prisjetimo se da smo originalni problem sveli na traženje funkcije $y \in \mathcal{C}$ za koju je vrijednost integrala

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} \mathrm{d}x$$

najmanja moguća. Pripadni Lagrangeian dan je s $L(x, y, y') = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$. Formulirajmo Euler-Lagrangeovu jednadžbu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \in \mathbb{R}.$$

Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama zaključujemo

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

pri čemu su c_1, c_2 realne konstante čiju ćemo vrijednost odrediti iz početnog uvjeta.

$$y(a) = A \Rightarrow c_1 = \frac{A - B}{a - b}$$
$$y(b) = B \Rightarrow c_2 = A - a\frac{A - B}{a - b}$$

Konačno, rješenje problema bi zaista mogao biti pravac kroz točke (a, A), (b, B), dan jednadžbom

$$y(x) - A = \frac{A - B}{a - b}(x - A).$$

Kako je L definiran na cijelom $\mathbb{R}^3$, nemamo prbloema s konveksnošću domene, pa možemo provjeriti konveksnost Lagrangeiana obzirom na zadnje dvije varijable koristeći karakterizaciju iz Teorema 4.2. Vrijedi sljedeće:

$$\partial^2_{yy} L = 0, \quad \partial^2_{yy'} L = 0$$

$$\partial^2_{y'y'} L = \frac{2 + y'^2}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} > 0 \implies \partial^2_{yy} L \, \partial^2_{y'y'} L - (\partial^2_{yy'} L)^2 > 0.$$

Zaključujemo da je L konveksan obzirom na y, y' pa je stacionarna funkcija globalni minimum funkcionala S, odnosno rješenje početnog problema.

5.2 Geodezija na sferi

U prethodnom smo se primjeru bavili traženjem najkraće udaljenosti među dvjema točkama u ravnini. Međutim, što kada se točke nalaze na sferi danog radijusa i optimalnu putanju tražimo među svim krivuljama na toj sferi, koje prolaze danim točkama.

Uvedimo najprije sferne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \Rightarrow \mathrm{d}x = \sin\phi\cos\theta \mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta \mathrm{d}\theta - r\sin\phi\sin\theta \mathrm{d}\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \Rightarrow \mathrm{d}y = \sin\phi\sin\theta \mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta \mathrm{d}\theta + r\cos\phi\sin\theta \mathrm{d}\phi \\ z &= r\cos\theta \Rightarrow \mathrm{d}z = \cos\theta \mathrm{d}r - r\sin\theta \mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

pri čemu su

$$r \in \mathbb{R}^+, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi].$$

Tražimo najkraći put između točaka $A = (r_A, \phi_A, \theta_A)$ i $B = (r_B, \phi_B, \theta_B)$, koje se nalaze na sferi konstantnog radijusa $r = R$. Kako je radijus konstantan, to je $\mathrm{d}r = 0$.
Element duljine luka $\widehat{AB}$ dan je izrazom

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}.$$

Uvrštavanjem rezultata dobivenog diferenciranjem sfernih koordinata u gornju jednakost slijedi

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(R\mathrm{d}\theta)^2 + (R\mathrm{d}\phi\sin\theta)^2}.$$

Koristeći teorem o implicitnoj funkciji, pri čemu smo ϕ prikazali kao funkciju od θ zaključujemo

$$\mathrm{d}s = R\sqrt{1 + (\phi'\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$$

Konačno duljina luka krivulje $\phi = \phi(\theta)$ između točaka A i B na sferi konstantnog radijusa R dana je s

$$S = \int_S \mathrm{d}s = R\int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{1 + (\phi'\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$$

Sada se početni problem sveo na traženje funkcije $\phi = \phi(\theta)$, klase $\mathrm{C}^1([0, \pi])$, za koju je vrijednost integrala S najmanja moguća.
Kako je Lagrangeian dan izrazom

$$L(\theta, \phi, \phi') = \sqrt{1 + \sin^2\theta\phi'^2},$$

to se ϕ u L ne pojavljuje eksplicitno, odnosno $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0$. Zahvaljujući tome, Euler-Lagrangeovu jednadžbu možemo zamijeniti Beltramvim identitetom

$$\frac{\sin^2\theta\phi'^2}{\sqrt{1 + (\phi'\sin\theta)^2}} = c, \text{ za neku konstantu c} \in \mathbb{R}.$$

Sređivanjem gornjeg izraza dolazimo do diferencijalne jednadžbe koja se rješava direktnom integracijom

$$\phi' = \frac{c}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - c^2}}, \text{ za neki } c \in \mathbb{R}.$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe dano je u obliku

$$\cos(\phi + c_1) = \frac{\tan c_2}{\tan\theta}, \text{ za neke } c_1, c_1 \in \mathbb{R},$$

što je pak ekvivalentno s

$$\cos\theta\cos\phi\cos c_2 - \cos\theta\sin\phi\sin c_2 = \tan c_1 \sin\theta.$$

Ukoliko gornju jednadžbu transformiramo u Kartezijeve koordinate dobivamo izraz

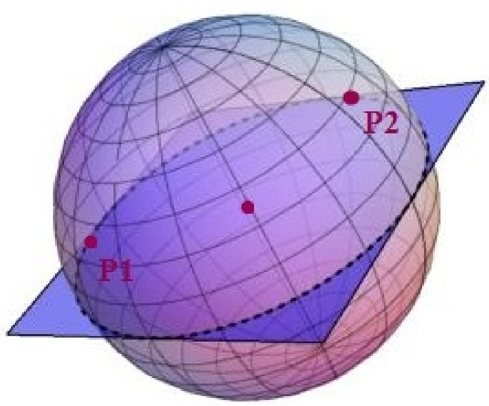
$$x\cos c_2 - y\sin c_2 = z\tan c_1,$$

koji predstavlja jednadžbu ravnine kroz središte sfere. Zaključujemo da bi rješenje problema mogla biti krivulja koja se nalazi na presjeku sfere i ravnine koja prolazi središtem sfere. Drugim riječima, luk kružnice prolazi danim točkama, a središte joj je u središtu sfere. Niti u ovom primjeru nemamo problem s konveksnošću domene od L zato što je definiran na $\mathbb{R}^3$, stoga ima smisla promatrati konveksnost Lagrangeiana u odnosu na zadnje dvije koordinate. Kako je

$$\partial^2_{\phi\phi}L = 0, \quad \partial^2_{\phi\phi'}L = 0$$

$$\partial^2_{\phi'\phi'}L = \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{(1+\phi'^2\sin^2\theta)^3}} > 0 \implies \partial^2_{\phi\phi}L\partial^2_{\phi'\phi'}L - \partial^2_{\phi\phi'}L > 0,$$

to prema Teoremu 4.1 slijedi da je L konveksan u odnosu na zadnje dvije varijable, pa zaključujemo da je dani kružni luk zaista rješenje našeg problema. Primijetimo



Slika 3: Najkraća spojnica dviju točaka na sferi

samo da točke A i B dijele pripadnu kružnicu na dva luka. Kada bismo htjeli provjeriti koji je od ta dva luka minimum funkcionala S, morali bismo svaki opisati zasebnom jednadžbom i podvrgniti ih Jacobijevom testu. Nama je dovoljno da komentiramo da je najkraća spojnica danih točaka kraći luk.

Primjedba 5.1. Na sličan način se može pronaći najkraći put između dvije točke na proizvoljnoj plohi.

5.3 Problem Brachistohorne

Problem traženja putanje po kojoj će materijalna točka u najkraćem vremenu stići u točku (a, A) ekvivalentan je problemu traženja funkcije y koja minimizira integral

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} \mathrm{d}x.$$

Kako je Lagrangeian dan s

$$L(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}},$$

to se varijabla x u njemu ne pojavljuje eksplicitno, odnosno $\partial_x L = 0$. Zahvaljujući tome, Euler-Lagrangeovu jednadžbu možemo zamjeniti Beltramovim identitetom

$$\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} - y'(x)\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)(1 + y'(x)^2)}} = c, \text{za neki c} \in \mathbb{R}.$$

Transformacijom gornjeg izraza dolazimo do diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

$$y(x)(1 + y'(x)^2) = \frac{1}{c^2},$$

koja uz supstituciju $D := \frac{1}{c^2}$, prelazi u

$$y'(x) = \sqrt{\frac{D - y}{y}}.$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe dano je parametarski s

$$y(u) = \frac{D}{2}(1 - cos(u))$$

$$x(u) = \frac{D}{2}(u - sin(u))$$

i predstavlja cikloidu.

Konstanta D se računa iz početnih uvjeta i zanimljivo je da ju nije moguće izračunati egzaktno, nego se računa korištenjem neke od numeričkih metoda.

Slika 4: Cikloida

Pokažimo još da je stacionarna funkcija i globalni minimum za t. To ćemo učiniti provjerom konveksnosti od L u odnosu na zadnje dvije varijable. Kako je

$$\partial^2_{yy}L = \frac{3\sqrt{1+y'^2}}{4\sqrt{y^5}} > 0, \quad \partial^2_{y'y'}L = \frac{2+y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}}$$

$$\partial^2_{yy'}L = \frac{-y'}{2\sqrt{y^3(1+y'^2)}} \implies \partial^2_{yy}L\partial^2_{y'y'}L - \partial^2_{yy'}L > 0,$$

po Teoremu 4.2 slijedi da je L konveksna u odnosu na zadnje dvije varijable, pa je stacionarna funkcija globalni minimum funkcionala I.

Primijetimo još da materijalna točka nije imala početnu brzinu. Slučaj kada je točka ispuštena s početnom brzinom v_0 treba se razmotriti posebno, te se tada u obzir uzima i kut pod kojim je točka izbačena.

5.4 Platonov problem

Još jedan u nizu zanimljivih, te naizgled jednostavnih problema je takozvani Platonov problem. Zadatak nam je pronaći glatku krivulju koja spaja točke (a, A) i (b, B), takvu da je oplošje plohe koja nastaje rotiranjem te krivulje oko x osi najmanje moguće.

Neka je funkcija $y \in \mathrm{C}^1([a, b])$ takva da je $y(a) = A > 0$ i $y(b) = B > 0$. Ploha koja nastaje rotiranjem krivulje $y = y(x)$ oko x osi ima oplošje

$$O = 2\pi \int_a^b |y(x)|\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

Ako malo bolje pogledamo problem, jasno nam je da rješenje nema smisla tražiti među krivuljama koje poprimaju nepozitivne vrijednosti. Stoga znak apsolutne vrijednosti možemo izostaviti. Početni problem se svodi na traženje funkcije $y \in \mathcal{C}$, $y > 0$ na $[a, b]$, za koju je vrijednost integrala O najmanja moguća. Kako je pripadni Lagrangeian dan izrazom

$$L(x, y, y') = y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}, \text{ pr čemu je } y > 0,$$

to se varijabla x ne pojavljuje eksplicitno, pa će nam nužan uvjet ekstrema predstavljati Beltramov identitet

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2 y}{\sqrt{1+y'^2}} = c, \text{ za neku konstantu c} \in \mathbb{R}.$$

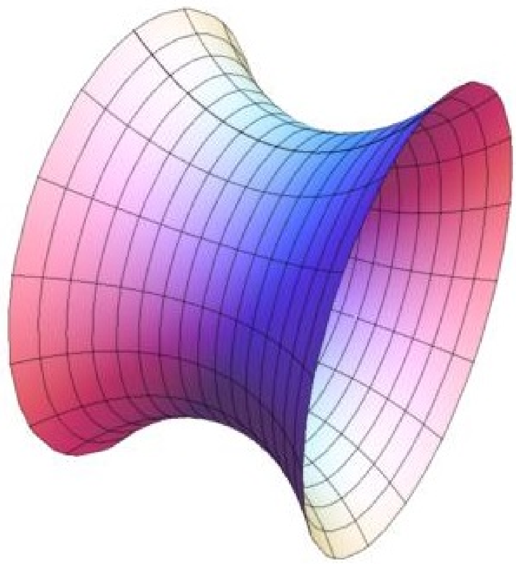
Sređivanjem gornjeg izraza dolazimo do diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1},$$

čije je rješenje dano izrazom

$$y = c \cosh \frac{x-d}{c},$$

pri čemu su c,d realne konstante koje se određuju iz početnog uvjeta.



Slika 5: Ploha koja nastaje rotiranjem funkcije cosh oko osi x

U ovom ćemo primjeru, umjesto da provjeravamo je li Lagrangeian konveksna funkcija, provjetiti dovoljne uvjete ekstrema. Kako je

$$\partial^2_{y'y'} L = \frac{y(x)}{\sqrt{(1+y'^2(x))^3}} > 0, \text{ jer je } y(x) > 0 \text{ na } [a,b],$$

jaki Legenderov test je ispunjen. Dodatno, Jacobijeva jednadžba funkcionala I dana je izrazom

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} \left[\frac{\eta'^2}{1+y'^2(x)} + \eta^2 \right] = 0,$$

odnosno,

$$\frac{\eta'^2}{1+y'^2(x)} + \eta^2 = 0.$$

Jasno nam je da je to ispunjeno ako i samo ako je $\eta = \eta' = 0$. Kako jednadžba nema netrivijano rješenje, to ne postoji niti točka iz segmenta $(a,b]$ koja je konjugirana a, pa je i jaki Jacobijev test zadovoljen. Zaključujemo da je stacionarna funkcija zaista minimum funkcionala O.

5.5 Hamiltonov princip

Hamiltonov[8] princip jedan je od najvećih uspjeha varijacijskog računa. Pomaže nam da probleme iz klasične mehanike i drugih područja fizike promatramo kao varijacijske probleme. Osnovna je ideja Hamiltonovog principa da će sustav u gibanju pratiti putanju koja minimizira integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{r}(t), \vec{r'}(t))\mathrm{d}t,$$

pri čemu je Lagrangeian L dan kao razlika kinetičke i potencijalne energije zatvorenog sustava, a $\vec{r}(t)$ i $\vec{r'}(t)$ predstavljaju vektore smjera i brzine danog sustava. Jednostavnosti radi, umjesto promatranja cijelog sustava, gledat ćemo samo jednu česticu u $\mathbb{R}^3$, pa je stoga

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Potencijalna energija čestice ovisi o njenoj poziciji, pa je

$$E_p = E_p(t, \vec{r}(t)),$$

dok kinetička ovisi o masi čestice i njenoj brzini, pa je

$$E_k = E_k(t, \vec{r'}(t)) = \frac{1}{2}m||\vec{r}(t)||^2.$$

Primijetimo samo da potencijalnu energiju nismo dali konkretnom formulom. To je zato što ne znamo točno o kojoj se vrsti potencijalne energije radi. Dodatno, osim što problem možemo promatrati u više dimenzija, ne moramo se ograničiti samo na jednu česticu, nego na isti način možemo opisati gibanje čitavog sustava. U tom bi slučaju rezultatntna kinetička i potencijalna energija bile dane kao suma potencijalnih i kinetičkih energija svake pojedine čestice u sustavu.
Bitno je napomenuti da se Euler-Lagrangeove jednadžbe funkcionala S poklapaju sa jednadžbama drugog Newtonovog aksioma, odnosno da Hamiltonov princip poštuje Newtonove zakone. Tu ćemo tvrdnju i pokazati. Kako je $S(x, y, z)$ funkcional tri varijable, sustav Euler-Lagrangeovih jednadžbi glasi

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial z'} = 0.$$

Raspisat ćemo prvu jednadžbu, ostale slijede analogno. Kako iz

$$L(t, x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{2}m(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2) - E_p(t, x, y, z),$$

slijedi da je

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x'} = mx'',$$

[8]William Rowan Hamilton (1805–1865), irski fizičar, matematičar i astronom

pa Euler-Lagrangeova jednadžba glasi

$$mx'' = \frac{\partial E_p}{\partial x} \equiv F_x.$$

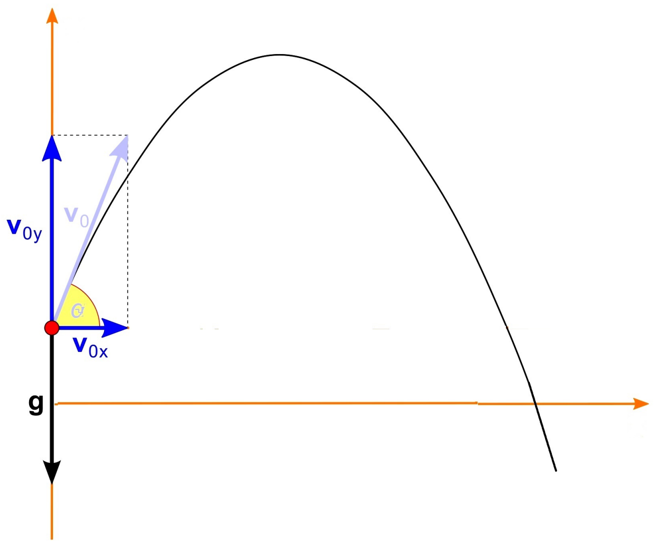
Ako malo bolje pogledamo gornju jednadžbu, ona zapravo predstavlja drugi Newtonov aksiom za gibanje čestice po x osi. Druge dvije jednadžbe dane su s

$$my'' = \frac{\partial E_p}{\partial y} \equiv F_y$$
$$mz'' = \frac{\partial E_p}{\partial z} \equiv F_z$$

i ekvivalentne su jednadžbama drugog Newtonovog aksioma za gibanja po y i z osima.

5.5.1 Primjena Hamiltonovog principa na kosi hitac

Zadatak nam je pronaći ravninsku putanju po kojoj putuje projektil mase m, početne brzine $\vec{v_0} = (v_{0x}, v_{0y})$, izbačen iz točke $(0, h)$ pod kutom θ, uz pretpostavku da je otpor zraka zanemariv.



Slika 6: Putanja ispaljenog projektila

Iz trigonometrije pravokutnog trokuta je $(v_{0x}, v_{0y}) = (||v_0|| \cos\theta, ||v_0|| \sin\theta)$. Hamiltonov princip nam kaže da će se projektil gibati po putanji $(x(t), y(t))$, koja minimizira funkcional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, y, x', y')\mathrm{d}t,$$

pri čemu je $L = E_k - E_p$. Kinetička energija projektila dana je s

$$E_k(t, x', y') = \frac{1}{2}m(x'(t)^2 + y'(t)^2),$$

a potencijalna, u ovom slučaju gravitacijska s

$$E_p(t, x, y) = mgy(t).$$

Uvrstimo izraze za kinetičku i potencijalnu energiju projektila u funkcional S slijedi

$$S = m\int_{t_1}^{t_2}(\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - gy)\mathrm{d}t.$$

Formirajmo sada pripadne Euler-Lagrangeove jednadžbe. Prva Euler-Lagrangeova jednadžba glasi

$$x'' = 0,$$

iz čega integriranjem slijedi da je

$$x' = c \in \mathbb{R}.$$

No, ova nam je tvdnja bila poznata. Brzina po x je konstantna zato što na projektil ne djeluje sila u smjeru x osi. Dodatno, kako je početna brzina u x smjeru jednaka v_{0x}, a konstantna je duž x osi, zaključujemo da je

$$c = v_{0x} = ||v_0|| \cos\theta,$$

odnosno

$$x' = ||v_0|| \cos\theta.$$

Integriranjem slijedi da je

$$x = ||v_0|| \cos\theta t + d, \text{za neki } d \in \mathbb{R}.$$

Konstantu d ćemo odrediti iz početnog položaja. Kako je $x(0) = 0$ slijedi da je $d = 0$.

Druga Euler-Lagrangeova jednadžba glasi

$$y'' = g,$$

iz čega integriranjem slijedi

$$y' = gt + c, \text{ pri čemu je } c \in \mathbb{R}.$$

Kako je početna brzina u smjeru y osi jednaka v_{0y}, odnosno

$$y'(0) = v_{0y},$$

zaključujemo da je

$$c = v_{0y} = ||v_0|| \sin\theta.$$

Ponovnom integracijom slijedi

$$y = \frac{-gt^2}{2} + ||v_0|| \sin\theta t + d, \text{ za neki } d \in \mathbb{R}.$$

Konstantu d ćemo odrediti iz početnog položaja projektila. Kako je $y(0) = h$ slijedi da je $b = h$. Konačno, putanja kretanja projektila dana je paramatarski s

$$x(t) = ||v_0|| \cos\theta t \tag{15}$$

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + ||v_0|| \sin\theta t + h \tag{16}$$

Primjetimo da, ukoliko je $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$, odnosno ako je $\cos\theta \neq 0$, iz jednadžbe (14) varijablu t možemo izraziti pomoću x. Slijedi da je

$$t = \frac{x}{||v_0|| \cos\theta}.$$

Uvrstimo li gornju relaciju u jednadžbu 9, zaključujemo da je

$$y(x) = \frac{-gx^2}{||v_0||^2 \cos\theta^2} + x \tan\theta + h,$$

što je jednadžba parabole.
Primijetimo da bismo isti izvod dobili i da smo se služili isključivo drugi Newtonovim aksiomom.

6 Literatura

[1] M. Alić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[2] U. Brechtken - Manderscheid, *Introduction to the Calculus of Variations*, First Edition, CRC Press, 1991., ISBN 0412366908, 9780412366901

[3] J. A. Burns, *Introduction to the Calculus of Variations and Control with Modern Applications*, CRC Press, 2013., ISBN 146657139X, 9781466571396

[4] A. Cherkaev, E. Cherkaev, *Calculus of Variations and Applications*, Lecture Drafts 2003.

[5] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, 2ed., Springer, 2008, ISBN 9780387357799

[6] C. Fox, *An Introduction to the Calculus of Variations*, First Edition, Courier Corporation, 1950., ISBN 0486654990, 9780486654997

[7] I. M. Gelfand, Fomin, S. V., *Calculus of Variations*, Second Edition, Courier Corporation, 2012., ISBN 0486135012, 9780486135014

[8] P. J. Olver , *Introduction to the Calculus of Variations* , University of Minnesota, dostupno na `http://www.math.umn.edu/~olver/ln_/cv.pdf`, posljednji put posjećeno 24.9.2015.

[9] B. V. Ramana, *Higher Engineering Mathematics*, Calculus of Variations Chap-04, August 30, 2006., Tara McGrew-Hill Publiching Company Limited, ISBN 9780070634190, 007063419X

[10] H. Sagan , *Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications; Reprint edition (December 21, 1992), ISBN 0486673669, 978-0486673660

[11] Š. Ungar, *Matematička analiza u* R^n, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

[12] F. Wan, *Introduction To The Calculus of Variations And Its Applications*, Second Edition, CRC Press, 1995., ISBN 0412051419, 9780412051418

[13] *Chapter one, Introduction, Optimal Control Problem*, dostupno na `http://press.princeton.edu/chapters/s9760.pdf`, posljednji put posjećeno 24.9.2015.

[14] *Calculus of Variations*, dostupno na `http://liberzon.csl.illinois.edu/teaching/cvoc/node19.html`, posljednji put posjećeno 24.9.2015.