Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

Jagodić, Petar

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Petar Jagodić
Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe
završni rad

Osijek, 2021

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Petar Jagodić

Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2021

Sažetak

U ovom radu proučavat ćemo trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe. Najprije da bismo uopće znali baratati sa jednadžbama i nejednadžbama, kratko ćemo uvesti definiciju trigonometrijskih funkcija, kao i njihova svojstva. Potom ćemo proći kroz pojedine tipove trigonometrijskih jednadžbi tako što ćemo proučiti osnovne, homogene, linearne, transcendentne, ciklometrijske jednadžbe kao i one koje možemo svesti na algebarske. Nadalje, definirat ćemo sustav trigonometrijskih jednadžbi i prikazati jedan konkretan primjer istih. Na kraju bavit ćemo se trigonometrijskim nejednadžbama, njihovom definicijom i primjerima.

Ključne riječi

sinus, kosinus, tangens, kotangens, trigonometrijske jednadžbe, trigonometrijske nejednadžbe

Abstract

In this paper, we will study trigonometric equations and trigonometric inequalities. First, in order to be able to handle with these equations and inequalities at all, we will briefly introduce definition of trigonometric function as well as their properties. After that, we will go through certain types of trigonometric equations by studying the basic, homogenous, linear, transcendent, cyclometric equations as well as those equations that we can reduce to algebraic. Furthermore, we will define a system of trigonometric equations and present one of their concrete examples. Finally, we will deal with trigonometric inequalities, their definition and examples.

Keywords

sine, cosine, tangent, cotangent, trigonometric equations, trigonometric inequalities

Sadržaj

1 Uvod

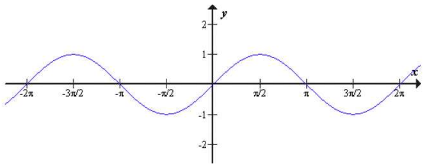
Trigonometrija (grč. trigonom = trokut + metron = mjera) je dio matematike koji proučava odnose među segmentima pravaca (dužinama) i kutovima trokuta na ravnini (ravninska trigonometrija) ili na površini kugle (sferna trigonometrija). Po riječima Françoisa Vietea, francuskog matematičara, trigonometrija je ponos matematičara, jer nas ona uči kako da na divan način mjerimo po nebu, zemlji i vodi.
Nebitno na koji način, bilo to svjesno ili nesvjesno, mi svakodnevno nešto mjerimo. Prstima, nogama, vizualno, pomoću pomagala (ravnalo, građevinski metar, šestar, kutomjer,...) - na sve te načine možemo mjeriti svakoga dana. Ponekad "posao mjerenja" nije tako lak. Primjerice, učenici prvog razreda čim sjednu u školske klupe uče uspoređivati odnose među predmetima. U tu svrhu, kako bi si što bolje (zornije) prikazali odnose među mjerama, uvodi se pomoćno sredstvo, tipa olovke, koja postaje fizikalna jedinica za mjerenje i uspoređivanje sa ostalim predmetima koje mjerimo. Također u tu svrhu može nam poslužiti korak i predalj, pri čemu moramo biti svjesni da je njihovo korištenje dosta neprecizno te kao takvi nisu dobri instumenti za mjerenje. Po sličnosti, mjerenje pomoću pedlja možemo povezati sa mjerenjem pomoću štapa, ravnala, šestara... Dok, primjerice, za ono što ne možemo odmah izmjeriti, što bi se reklo "onako odokativno", virtualno, mi formiramo takozvane jednadžbe preko kojih, uz poznavanje vrijednosti nekih veličina, računamo vrijednosti nepoznatih veličina koje nas u tom trenutku zanimaju. Za računanje nepoznatih veličina, kutova,... Na tom području uveliko nam pomažu trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe, što je ujedno i tema ovog završnog rada. Posvetit ćemo se trigonometrijskim jednadžbama i tipovima istih, kao i trigonometrijskim nejednadžbama i njihovim primjenama uz odgovarajuće primjere.

2 Definicija i svojstva trigonometrijskih funkcija

Definicija 2.1 *Graf funkcije f(x) =* $\sin x$ *naziva se SINUSOIDA.*

Napomena 2.1

- *Sinus je omeđena funkcija, odnosno* $|\sin x| \leq 1$.
- *Funkcija* $f(x) = sinx$ *je periodična:* $\forall x \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, *gdje je* $k \in \mathbb{Z}$ *bilo koji cijeli broj.*
- *Nultočke funkcije* $f(x) = \sin x$ *su brojevi oblika* $x_o = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

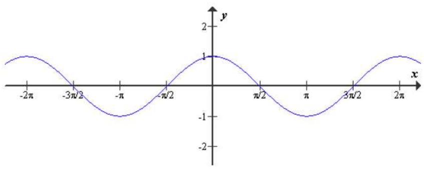


Slika 1: graf funkcije f(x) = sin x

Napomena 2.2

- *Promotrimo funkciju* $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ *(*)*
- *Temeljni period ove funkcije je* $\frac{2\pi}{b}$
- *Broj* $|a|$ *zovemo AMPLITUDA sinusoide (vrijedi:* $-|a| \leq \sin x \leq |a|$*)*
- *Graf funkcije (*) nastaje pomakom grafa funkcije* $g(x) = a \sin bx$, *za broj* $\frac{-c}{b}$

Napomena 2.3
Vrijedi sljedeća jednakost: $cosx = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *gdje je dana funkcija kosinus* $cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

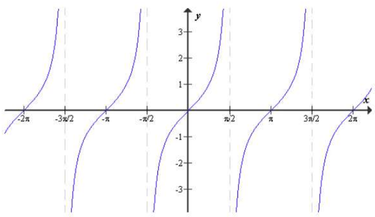


Slika 2: Graf funkcije f(x) = cos x

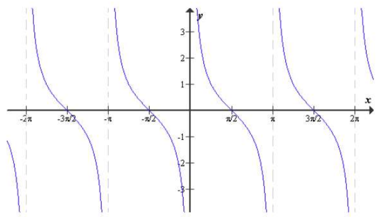
Napomena 2.4

Navodimo neka svojstva trigonometrijskih funkcija tangens i kotangens:

- $tg : \mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
- $ctg : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
- *vertikalna asimptota za funkciju* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *je* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- *vertikalna asimptota za funkciju* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ *je* $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- *Temeljni period funkcija* $\operatorname{tg} x$ *i* $\operatorname{ctg} x$ *je* π
- *Funkcije* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *i* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ *nisu omeđene*



(a) Graf funkcije f(x) = tg x



(b) Graf funckije f(x) = ctg x

3 Trigonometrijske jednadžbe

- Trigonometrijska jednadžba jest jednadžba oblika $f(\sin x, \cos x) = 0$, gdje je f bilo koja realna funkcija dviju varijabli.

- Riješiti trigonometrijsku jednadžbu znači odrediti vrijednosti neke trigonometrijske funkcije nepoznatog broja ili kuta da bi se iz te vrijednosti odredio sam broj ili kut.

3.1 Tipovi trigonometrijskih jednadžbi

Primjer 3.1
Riješimo jednadžbu $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

Rješenje:
1. način
$\sin^2 x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \implies \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ili $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Skup rješenja jednadžbe $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ je $\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Skup rješenja jednadžbe $sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ je $\{\frac{-\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{\frac{-3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Sva ta rješenja mogu se zapisati u obliku $\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, što je opće rješenje zadane jednadžbe.

2. način
Znamo da vrijedi: $\sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$
Tada vrijedi $\frac{1-cos2x}{2} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} - \frac{cos2x}{2} = 0 \iff cos2x = 0$ pa mora vrijediti: $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, odnosno $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.1.1 Osnovne jednadžbe

Definicija 3.1 *Osnovne trigonometrijske jednadžbe su jednadžbe oblika* $\sin x = p$, $\cos x = p$, $\operatorname{tg} x = r$, $ctg\ x = r$ *gdje su* $p, r \in \mathbb{R}$, *pri čemu vrijedi* $|p| \leq 1$. *(Ako bi vrijedilo* $|p| > 1$ *onda jednadžba* $\sin x = p$ *nema rješenja u skupu* $\mathbb{R}$*)*

Napomena 3.1

jednadžba	*sva rješenja*
$\sin x = p$	$x = (-1)^k arcsinp + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \lvert p\rvert \leq 1$, *u suprotnom nema rješenja*
$\cos x = p$	$x = \pm \arccos p + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \lvert p\rvert \leq 1$, *u suprotnom nema rješenja*
$\operatorname{tg} x = r$	$x = \arctan r + k\pi, k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}$
$ctg\ x = r$	$x = arcctg\ r + k\pi, k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}$

Primjer 3.2
Riješite jednadžbu $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Rješenje:

Uvodimo supstituciju (zamjenu): $t = 2x - \frac{\pi}{3}$.
Sada dobivamo jednadžbu oblika $\cos t = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Po prethodnoj napomeni slijedi da su sva rješenja jednadžbe oblika $\cos t = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ oblika $t = \pm \arccos \frac{-\sqrt{3}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Sad "vratimo supstituciju": $2x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos \frac{-\sqrt{3}}{2} + 2k\pi$,
što je ekvivalentno s:
$2x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;/ :2 \implies x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
tj. $x_{1k} = \frac{7\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$x_{2k} = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3.1.2 Jednadžbe koje se svode na algebarske

Primjer 3.3
Riješimo jednadžbu $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$

Rješenje:

Upotrebom izraza $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
polazna jednadžba prelazi u jednadžbu:

$$1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$$

Sada uvedemo supstituciju $t = \sin x$ i time dobivamo sljedeću algebarsku jednadžbu

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

čija su rješenja $t_{1,2} = -\frac{5\pm3}{4}$ odnosno $t_1 = -\frac{1}{2}$ i $t_2 = -2$.
Vratimo supstituciju:
jednadžba $\sin x = -2$ nema rješenja, dok su rješenja jednadžbe $\sin x = \frac{-1}{2}$ dana sa:

$$x_{1k} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ili } x_{2k} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

3.1.3 Homogene trigonometrijske jednadžbe

Definicija 3.2 *Jednadžbe oblika* $a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0$ *zovemo homogenim trigonometrijskim jednadžbama, pri čemu su* $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Primjer 3.4
Riješimo jednadžbu $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$

Rješenje:

Polaznu jednadžbu podijelimo sa $\cos^2 x$ (to smijemo napraviti ako je $\cos x \neq 0$, a u suprotnom, tj. kad bi vrijedilo da je $\cos x = 0$, odnosno da je $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ polazna jednadžba svodi se na jednadžbu $\sin^2 x = 0$, što nije istinito za vrijednost ovakvog x)

$$\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 / : \cos^2 x$$

$\iff \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\sin x}{\cos x} + 2 = 0 \iff \mathrm{tg}^2 x + 3 \,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0.$

Sada uvodimo supstituciju $y = \mathrm{tg}\, x$ i dobivamo sljedeću jednadžbu: $y^2 + 3y + 2 = 0$ čija su rješenja dana sa: $y_{1,2} = -\frac{3 \pm 1}{2}$, odnosno $y_1 = -1$ i $y_2 = -2$.

Međutim, zadatak nije završen jer još samo moramo vratiti supstituciju.

$$\mathrm{tg}\, x = -1 \implies x_{1k} = \mathrm{arctg}(-1) + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\mathrm{tg}\, x = -2 \implies x_{2k} = \mathrm{arctg}(-2) + k\pi = -1.107 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(približno do na 3 decimale)

Primjer 3.5
Riješimo jednadžbu $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

Rješenje

Iako na prvi pogled ova jednadžba ne liči na homogenu, ona se itekako može svesti na takvu na način da se umjesto broja 2 na desnoj strani jednakosti stavi $2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, a dobro znamo da je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Time zapravo ništa nismo promijenili, ali smo si uveliko pomogli pri rješavanju jednadžbe.

$$6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$\iff 4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Sada novonastalu jednadžbu podijelimo sa $\cos^2 x$ (kao i u prethodnom primjeru, a to smijemo napraviti jer brojevi koji zadovoljavaju $\cos^2 x = 0$ nisu rješenja jednadžbe). Dobili smo:

$$4 \,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 3 = 0.$$

Iz pripadne kvadratne jednadžbe slijedi da je $\mathrm{tg}\, x = -1$ ili $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{4}$

$$1^o \quad \mathrm{tg}\, x = -1 \implies x_{1k} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$2^o \quad \mathrm{tg}\, x = \frac{3}{4} \implies x_{2k} = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

3.1.4 Linearne trigonometrijske jednadžbe

Definicija 3.3
Jednadžbu oblika $a\cos x + b\sin x = c$, pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$, zovemo linearna trigonometrijska jednadžba.

Postupak rješavanja:

Linearnu trigonometrijsku jednadžbu možemo riješiti zamjenom $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Nakon toga dobit ćemo iracionalnu jednadžbu koju moramo kvadrirati da bismo dobili algebarsku (čim tu radimo na taj način moramo biti svjesni da ćemo dobiti jednadžbu koja ne mora biti ekvivalentna polaznoj - zbog toga razloga problemu rješavanja tih jednadžbi pristupamo na drugačiji način).
Koristit ćemo univerzalnu supstituciju:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \;,\; \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Time smo polaznu jednadžbu sveli na algebarsku sa nepoznanicom $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Napomena 3.2
Jednadžba dobivena prethodno opisanim postupkom neće uvijek biti ekvivalentna polaznoj jer tangens polovičnog kuta nije definiran za $x = k\pi$ pa bi u svakom slučaju trebalo obaviti i provjeru te vidjeti hoće li ti brojevi biti rješenja jednadžbe.

Napomena 3.3
Postupak rješavanja linearnih jednadžbi nije jedinstven. Nakon navedenog primjera vidjet ćemo jedan drugačiji način (tzv. metodu pomoćnog kuta).

Primjer 3.6
Riješimo jednadžbu $2\sin x - 3\cos x = 1$.

Rješenje:

$2\sin x - 3\cos x = 1 \iff 2\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 3\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1$
Uvodimo susptituciju $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ i dobivamo:

$$2*2u - 3*(1-u^2) = 1+u^2$$

$$u^2 + 2u - 2 = 0 \implies u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Sada vratimo supstituciju:

1^o $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1+\sqrt{3} \implies \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(-1+\sqrt{3}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\implies x_{1k} = 2\operatorname{arctg}(-1+\sqrt{3}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\iff x_{1k} = 1.2638 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (približno do na 4 decimale)

2^o $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1-\sqrt{3} \implies \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(-1-\sqrt{3}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\implies x_{2k} = 2\operatorname{arctg}(-1-\sqrt{3}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\iff x_{2k} = -2.4398 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (približno do na 4 decimale).

"Metoda pomoćnog kuta"

Polaznu jednadžbu $a\cos x + b\sin x = c$ podijelimo s $\sqrt{a^2+b^2}$ i dobivamo sljedeće:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Pošto je $|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}| \leq 1$ i $|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}| \leq 1$, tada postoji kut φ takav da je $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Time gornja jednadžba prelazi u $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Primjer 3.7 *Riješimo jednadžbu* $2\sin x - 3\cos x = 1$.

Rješenje:
$c = 1$, $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$
$\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$,$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$ Izračunamo kut φ (iz $\sin\varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ ili iz $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$) i dobivamo $\varphi = -0.9828$ pa sada imamo jednadžbu oblika $\sin(x - 0.9828) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.
Odatle na jedinstven način dolazimo do rješenja(do na 4 decimale):

$$x_{1k} = 1.2638 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_{2k} = 3.8434 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Napomena 3.4 *Spomenimo još jednadžbu oblika*

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0.$$

Tu jednadžbu zovemo simetrična trigonometrijska jednadžba koju rješavamo tako da uvedemo supstituciju $t = \sin x + \cos x$. *Kvadriranjem dobivamo* $\frac{t^2-1}{2} = \sin x\cos x$ *i time polaznu jednadžbu svodimo na kvadratnu (po nepoznanici* t*).*

3.1.5 Transcendentne jednadžbe

Primjer 3.8
Riješite jednadžbu: $2^{\sin^2 x} + 4 * 2^{\cos^2 x} = 6$

Rješenje:
Znamo da je $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. To uvrstimo u polaznu jednadžbu. Sada dobivamo

$$2^{\sin^2 x} + 4 * 2^{1-\sin^2 x} = 6 \iff 2^{2\sin^2 x} - 6 * 2^{\sin^2 x} + 8 = 0$$

Uvodimo supstituciju $2^{\sin^2 x} = t$ što nam daje jednadžbu oblika $t^2 - 6t + 8 = 0$. Odavde slijedi da je $t_1 = 2$ i $t_2 = 4$, odnosno da je

1^o $2^{\sin^2 x} = 2 \implies \sin^2 x = 1 \implies x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2^o $2^{\sin^2 x} = 4 \implies \sin^2 x = 2 \implies$ nema rješenja.

Napomena 3.5
Mnoge transcendentne jednadžbe, uporabom pogodnih transformacija, možemo svesti na algebarske jednadžbe (kao u prethodnom primjeru).

Definicija 3.4
Jednadžba oblika $F(x) = f(x)$ u kojoj barem jedna funkcija nije algebarska zovemo transcendentnom jednadžbom. Samo neke transcendentne jednadžbe se mogu svesti na algebarski oblik (primjerice eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske). Općenito, transcendentne jednadžbe je moguće riješiti samo približno, pomoću numeričkih metoda.

Najjednostavnije transcendentne trigonometrijske jednadžbe su:

$$\cos x = 0 \ , \ \sin x = x, \ldots$$

3.1.6 Ciklometrijske jednadžbe

Definicija 3.5
Ciklometrijske jednadžbe su jednadžbe u kojima se pojavljuju ciklometrijske funkcije.

Način rješavanja:
Funkcije na lijevoj i desnoj strani jednadžbe komponiraju se sa zgodno odabranom trigonometrijskom funkcijom. Moguće da dobivena jednadžba neće biti ekvivalentna polaznoj pa bi zbog toga uvijek trebalo provjeriti zadovoljavaju li sva izračunata rješenja polaznu jednadžbu. Postupak rješavanja ilustrirat ćemo na sljedećem primjeru.

Primjer 3.9
Riješite jednadžbu

$$\arcsin x + \arccos(2x) = \frac{\pi}{6}.$$

Rješenje:
Cijelu prethodno zadanu jednadžbu komponiramo funkcijom koja x pridružuje $\sin x$, tj. $x \mapsto \sin x$

$$\sin(\arcsin x)\cos(\arccos(2x)) + \cos(\arcsin x)\sin(\arccos(2x)) = \frac{1}{2}$$

Odavde slijedi:
$x * 2x + \sqrt{1-x^2} * \sqrt{1-4x^2} = \frac{1}{2}$
$\iff 2x^2 + \sqrt{1-x^2} * \sqrt{1-4x^2} = \frac{1}{2}$
$\iff 2\sqrt{1-x^2} * \sqrt{1-4x^2} = 1-4x^2$
kvadriranjem obje strane jednakosti dobijemo:
$1-4x^2 = 0$
$\iff x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$
Ovime smo došli do potencijalnih rješenja za koja moramo provjeriti zadovoljavaju li polaznu jednadžbu. Nakon provjere, lako se može vidjeti da je konačno rješenje $x = \frac{1}{2}$.

3.2 Sustavi trigonometrijskih jednadžbi

Definicija 3.6
Sustav jednadžbi u kojemu je barem jedna jednadžba trigonometrijska zovemo sustavom trigonometrijskih jednadžbi.

Napomena 3.6
Sustav koji se sastoji od dvije trigonometrijske jednadžbe sa dvije nepoznanice svodimo na algebarske, upotrebom određenih transformacija.

Primjer 3.10
Pronađite sva rješenja danog sustava

$$\sin x + \cos y = 0$$
$$\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}.$$

Rješenje:

Iz npr. prve jednadžbe izrazimo kosinus preko sinusa. Dobivamo $\cos y = -\sin x$. Sada u drugu jednadžbu polaznog sustava uvrštavamo, tj. zamjenjujemo varijable:

$$\sin^2 x + (-\sin x)^2 = \tfrac{1}{2}$$
$$\iff \sin^2 x + \sin^2 x = \tfrac{1}{2}$$
$$\iff 2\sin^2 x = \tfrac{1}{2} / : 2$$
$$\iff \sin^2 x = \frac{1}{4} \iff \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \iff \sin x = \pm\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Sada u prvu jednadžbu polaznog sustava uvrštavamo (1) i dobivamo

$$\cos y = \pm\frac{1}{2}. \tag{2}$$

(ako je $\sin x = \frac{1}{2}$, onda je $\cos y = -\frac{1}{2}$, te ako je $\sin x = -\frac{1}{2}$, onda je $\cos y = \frac{1}{2}$)

Jednadžbe (1) i (2) su elementarne trigonometrijske i njih rješavamo na standardni način. Nakon rješavanja (koje je veoma jednostavno i zato ga izostavljamo uz napomenu da funkcije sinus i kosinus trebaju biti suprotnog predznaka u dobivenoj vrijednosti $\frac{1}{2}$) dobivamo:

$x_{1k} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
$y_{1k} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
$x_{2k} = -(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
$y_{2k} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4 Trigonometrijske nejednadžbe

Definicija 4.1
Trigonometrijske nejednadžbe su nejednakosti oblika $f(x) \geq 0$ *ili* $f(x) > 0$*, gdje je* f *neka trigonometrijska funkcija.*

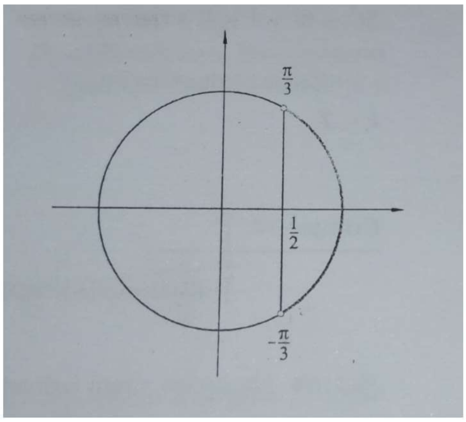
Napomena 4.1
Pri rješavanju trigonometrijskih nejednadžbi (tj. prilikom svođenja na osnovni oblik primjenom trigonometrijskih identiteta i algebarskih postupaka) bitno je staviti naglasak na periodičnost, monotonost i neprekidnost trigonometrijskih funkcija.

Primjer 4.1
Nejednadžbe $\sin x \geq \frac{1}{2}$, $\cos x \geq -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x < 2$ *su neki od primjera osnovnih trigonometrijskih nejednadžbi.*

Primjer 4.2
Riješimo nejednadžbu $2\sin(x + \frac{\pi}{2}) - 1 > 0$

Rješenje:

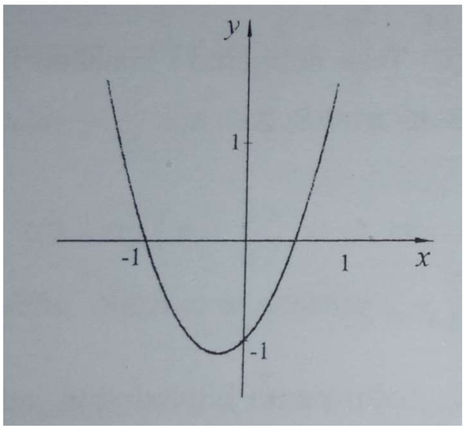
Prethodnu nejednadžbu možemo zapisati u obliku $\cos x > \frac{1}{2}$ što je ekvivalentno polaznoj nejednadžbi. Sada rješenje možemo pokazati na brojevnoj kružnici



$x \in \langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{R}.$

Primjer 4.3
Riješimo nejednadžbu $2\cos^2 x + \cos x \geq 1$.

Rješenje:
$2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$ je kvadratna nejednadžba. Uvodimo supstituciju $t = \cos x$ i dobivamo $2t^2 + t - 1 \geq 0$. Odnosno sa lijeve strane nejednadžbe imamo polinom drugog stupnja. Skiciramo graf tog polinoma, tj. graf funkcije $f(x) = 2t^2 + t - 1$.



Uočimo da je $f(t) \geq 0$ za $\forall t \geq \frac{1}{2}$ i za $t \leq -1$ Rješenja su svi $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi: $\cos x \geq \frac{1}{2}$ ili $\cos x = -1$.
Nacrtamo li brojevnu kružnicu (isto kao u prethodnom primjeru) i stavimo okomicu na os apcisa, pravac $x = \frac{1}{2}$ siječe kružnicu u točkama $-\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{3}$ (A te točke su rubovi intervala u kojem tražimo rješenje). Tada imamo : $x \in \langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$.
Još trebamo pronaći rješenje od $\cos x = -1$, a to su brojevi oblika $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Literatura

[1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije, 1. dio*, Element, Zagreb, 2008.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika u 24 lekcije, priručnik za pripremu državne mature, programi A i B*, 1. izdanje, Zagreb, 2010.

[4] `www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?!D=62017`

[5] `www.halapa.com/matpdf/12ms001.pdf`