Regularno varirajuće funkcije i primjene u vjerojatnosti

Bastijan, Tea

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:982127

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Tea Bastijan

Regularno varirajuće funkcije i primjene u vjerojatnosti

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Tea Bastijan

Regularno varirajuće funkcije i primjene u vjerojatnosti

Diplomski rad

Mentor: doc.dr.sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2021.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu bavit ćemo se regularno varirajućim funkcijama i njihovim primjenama u vjerojatnosti. U prvom poglavlju objasnit ćemo pojam mjere i izmjerivih skupova pozitivne mjere. Definirat ćemo aditivne, izmjerive i multiplikativne funkcije te navesti neka njihova svojstva. U drugom poglavlju definirat ćemo sporo varirajuće funkcije i navesti nekoliko primjera takvih funkcija. Zatim ćemo iskazati i dokazati najvažnije teoreme vezane uz svojstva sporo varirajućih funkcija. Na kraju ćemo definirati regularno varirajuće funkcije i navesti nekoliko funkcija koje to jesu, odnosno nisu. U trećem poglavlju bavit ćemo se svojstvima regularno varirajućih funkcija. Za početak ćemo navesti teoreme o reprezentaciji i uniformnoj konvergenciji. Zatim ćemo definirati asimptotski ekvivalentne funkcije i pokazati da je regularno varirajuća funkcija s indeksom $p \neq 0$ uvijek asimptotski ekvivalentna monotonoj funkciji. Definirat ćemo regularno varirajuće nizove i vidjeti kakva je njihova veza s regularno varirajućim funkcijama. Iskazat ćemo nekoliko tvrdnji pomoću kojih dolazimo do jednog od najvažnijih teorema u ovome radu - Karamatinog teorema. Na kraju ćemo navesti neke klasične teoreme u kojima svojstvo regularne varijacije ima važnu ulogu, a među kojima je i Karamatin Tauberovski teorem. U zadnjem poglavlju bavit ćemo se primjenama regularno varirajućih funkcija u vjerojatnosti. Prvo ćemo dokazati kakva svojstva ima transformirana funkcija distribucije na intervalu $[0,\infty]$ primjenom Karamatinog Tauberovskog teorema. Zatim ćemo promatrati slabu konvergenciju normalizirane i centralizirane sume S_n te normaliziranog i centraliziranog maksimuma M_n nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Definirat ćemo domenu i maksimalnu domenu atrakcije slučajne varijable, odnosno funkcije distribucije te iskazati Fisher - Tippettov teorem. Vidjet ćemo kako možemo opisati maksimalnu domenu atrakcije Fréchetove distribucije koristeći regularno varirajuće funkcije te navesti nekoliko distribucija koje se nalaze u toj domeni.

2 Osnovni pojmovi

U ovome poglavlju objasnit ćemo osnovne pojmove vezane uz izmjerive skupove i izmjerive funkcije. Iskazat i dokazat ćemo nekoliko tvrdnji koje će nam biti korisne u nastavku rada.

Za početak pogledajmo što je to mjera i koji su to izmjerivi skupovi pozitivne mjere te neka njihova svojstva.

Neka je $X \neq \emptyset$ proizvoljan skup i M σ - algebra podskupova od X. Pod mjerom μ na (X, M) podrazumjevamo preslikavanje $\mu : M \to [0, \infty)$ za koje vrijedi :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$, gdje su $A_i \in M$ disjunktni skupovi.

Sa (X, M) označavamo izmjeriv prostor, a sa (X, M, μ) prostor mjere. Skupove $A \in M$ nazivamo izmjerivim skupovima, a kažemo da su pozitivne mjere ako je $\mu(A) > 0$.

Teorem 2.1. *Neka su $A \subset \mathbb{R}$ i $B \subset \mathbb{R}$ izmjerivi skupovi pozitivne mjere s obzirom na Borelovu $\sigma-$ algebru. Tada skup $D := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ sadrži otvoreni interval.*

Dokaz ovoga teorema možete pronaći u [2, str. 3, Teorem 1.1.2].

Korolar 2.1. *Ako skup $S \subset \mathbb{R}$ sadrži podskup pozitivne mjere, onda skup $S + S := \{s + s' : s, s' \in S\}$ sadrži otvoreni interval.*

Dokaz. Neka je skup A spomenuti poskup skupa S, a $B := \{-a : a \in A\}$. Tvrdnja odmah slijedi primjenom Teorema 2.1.

□

Korolar 2.2. *Ako je S aditivna podgrupa od $\mathbb{R}$ i S sadrži skup pozitivne mjere, onda je $S = \mathbb{R}$. Ako je T multiplikativna podgrupa od $(0, \infty)$ i T sadrži skup pozitivne mjere, onda je $T = (0, \infty)$.*

Za dokaz korolara pogledati [2, str. 4, Korolar 1.1.4].

Prijeđimo na definiciju aditivne funkcije.

Definicija 2.1. *Za funkciju k kažemo da je aditivna ako za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$k(x + y) = k(x) + k(y).$$

Sada ćemo navesti nekoliko svojstava takvih funkcija na skupu pozitivne mjere.

Lema 2.1. *Ako je k aditivna i ograničena odozgo na skupu A pozitivne mjere, onda je k ograničena na nekoj okolini ishodišta.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $k(x) \leq M < \infty$, za $x \in A$. Prema Korolaru 2.1, $A + A$ sadrži neki interval $(y - \delta, y + \delta)$, pri čemu je $\delta > 0$. Ukoliko je $|t| < \delta$, imamo $t + y = a + a'$, pri čemu su $a, a' \in A$, pa vrijedi da je $k(t) = k(a) + k(a') - k(y) \leq 2M - k(y)$. Prema tome, k je omeđena odozgo na intervalu $(-\delta, \delta)$. Kako je $k(t) = -k(-t)$, k je omeđena i odozdo na intervalu $(-\delta, \delta)$, kao što smo i trebali pokazati.

□

Teorem 2.2. *Ako je k aditivna funkcija, ograničena odozgo ili odozdo na skupu A pozitivne mjere, onda se $k(x)$ može prikazati u obliku cx, za neku konstantu c.*

Dokaz. Kako je k aditivna funkcija, vrijede sljedeće jednakosti :

$$k(nx) = nk(x),\ k\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{k(x)}{m},\ m,n = 1,2,\dots \text{ te } k(rx) = rk(x), r \in \mathbb{Q}.$$

Prema Lemi 2.1 postoje $M, \delta > 0$ takvi da je $|k(x)| \leq M$, za $|x| < \delta$. Zbog aditivnosti je $|k(x)| \leq \frac{M}{n}$, za $|x| < \frac{\delta}{n} (n = 1,2,\dots)$.
Za bilo koji realni x i $n = 1,2,\dots$ možemo naći racionalan r takav da je $|r - x| < \frac{\delta}{n}$. Kako je $k(r) = rk(1)$, za racionalan r i $n = 1,2,\dots$ vrijedi :

$$|k(x) - xk(1)| = |k(x-r) + (r-x)k(1)| \leq \frac{M + \delta|k(1)|}{n}.$$

Ako pustimo $n \to \infty$, onda je $k(x) = xk(1)$, što smo i htjeli dokazati.

□

Prethodni teorem se često koristi u slabijem obliku, no da bi ga iskazali prvo definirajmo kada je funkcija izmjeriva.

Definicija 2.2. *Neka su (X, Σ) i (Y, T) izmjerivi prostori. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ izmjeriva ako vrijedi da je $f^{-1}(E) \in \Sigma$, za svaki $E \in T$.*

Teorem 2.3. *Ako je k aditivna i izmjeriva funkcija, onda je $k(x) = cx$ za neku konstantu c.*

Za dokaz vidi [2, str. 5, Teorem 1.1.7].

Promotrimo sada aditivne funkcije koje nisu oblika cx. Ako skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ promatramo kao vektorski prostor nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, svaki realni x možemo jedinstveno zapisati kao konačnu linearnu kombinaciju :

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i, \quad n = 0,1,\dots, r_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b_i \in B \subset \mathbb{R}.$$

Za proizvoljni $b_0 \in B$, možemo definirati funkciju k nad skupom B sa $k(b_0) := b_0, k(b) := 0, b \in B, b \neq b_0$. Ukoliko funkciju k proširimo na $\mathbb{R}$ sa

$$k(x) := \sum_{i=1}^{n} r_i k(b_i) \quad \text{ako je} \quad x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i,$$

k je aditivna, ali nije oblika $k(x) = cx$, za proizvoljnu konstantu c.

Definicija 2.3. *Kažemo da je funkcija $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ multiplikativna ako je*

$$g(\lambda)g(\mu) = g(\lambda\mu), \quad \forall \lambda, \mu > 0.$$

Ako uzmemo funkciju $k(x) = \log g(e^x)$, onda je funkcija k aditivna ako je funkcija g multiplikativna, pa Teorem 2.3 možemo zapisati na sljedeći način.

Teorem 2.4. *Ako je g multiplikativna i izmjeriva funkcija, onda je $g(\lambda) = \lambda^c$, za $\lambda > 0$ i neku realnu konstantu c.*

Pogledajmo što su to skupovi prve i druge kategorije te skupovi koji imaju Baireovo svojstvo. Za podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ kažemo da je prve kategorije u $\mathbb{R}$, ako se može prikazati kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova. U suprotnom, kažemo da je skup druge kategorije u $\mathbb{R}$. Za skup A kažemo da ima Baireovo svojstvo ako postoji otvoreni skup G takav da je simetrična razlika A Δ G skup prve kategorije, a za funkciju f kažemo da ima Baireovo svojstvo ako za svaki otvoreni skup G, njegova praslika $f^{-1}(G)$ ima Baireovo svojstvo.

Napomena 2.1. *Sve tvrdnje koje smo naveli za izmjerive skupove pozitivne mjere, odnosno za izmjerive funkcije vrijede i za skupove druge kategorije, odnosno funkcije koje imaju Baireovo svojstvo. Mi ćemo se u ovome radu ograničiti samo na izmjerivost, a za više informacija možete pogledati [2, str. 2 - 6].*

3 Definicija i primjeri regularno varirajućih funkcija

U ovom ćemo poglavlju vidjeti što je to sporo, odnosno regularno varirajuća funkcija te koja su svojstva sporo varirajućih funkcija.

3.1 Sporo varirajuće funkcije

Definicija 3.1. *Neka je l pozitivna izmjeriva funkcija koja je definirana na intervalu $(0,\infty)$ te zadovoljava*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1, \quad \forall \lambda > 0.$$

Tada kažemo da je l sporo varirajuća funkcija.

Primjer 3.1. *Pogledajmo sada nekoliko primjera sporo varirajućih funkcija.*

1. *Trivijalni primjer sporo varirajuće funkcije je funkcija $l(x) = c, c > 0$.*
2. *Najjednostavniji netrivijalni primjer ovih funkcija je $l_1(x) = \log x$. Funkcije kao što su*

$$l_2(x) = \log(\log x), \quad l_3 = \log(\log(\log x)), \quad \ldots, \quad l_k = \underbrace{\log\log\ldots\log}_{k\text{- puta}} x \tag{1}$$

   također su sporo varirajuće.
3. *Svaka funkcija f takva da je $\lim_{x\to\infty} f(x)$ konačan i pozitivan je sporo varirajuća.*
4. *Sporo varirajuća funkcija je i funkcija*

$$l(x) = \exp\left\{\frac{\log x}{\log(\log x)}\right\}.$$

5. *Funkcije koje možemo zapisati na sljedeći način*

$$l(x) = \exp\left\{l_1^{\alpha_1}(x) l_2^{\alpha_2}(x) \cdots l_k^{\alpha_k}(x)\right\}, \quad 0 < \alpha_i < 1, \forall i \in \{1,2,\ldots,k\},$$

   gdje je $l_1(x) = \log x$, a $l_i, i = 2,\ldots,k$ su definirane kao u (1), su sporo varirajuće. Primjeri takvih funkcija su

$$f(x) = \exp\left\{(\log x)^{\frac{1}{3}}\right\} \quad i \quad g(x) = \exp\left\{(\log x)^{\frac{1}{2}}(\log(\log x))^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Teorem 3.1. *(Teorem o uniformnoj konvergenciji) Ako je l sporo varirajuća funkcija, kada $x \to \infty$, onda $\frac{l(\lambda x)}{l(x)}$ konvergira uniformno prema jedinici na svakom kompaktnom skupu iz intervala $(0,\infty)$ koji sadrži λ.*

Dokaz. Neka je $h(x) := \log l(e^x)$. Pretpostavljamo da za svaki $u \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} h(x+u) - h(x) = 0 \tag{2}$$

i trebamo pokazati uniformnu konvergenciju na kompaktnim u - skupovima iz $\mathbb{R}$. Dovoljno je pokazati uniformnu konvergenciju na proizvoljnom segmentu $[0,a]$. Izaberimo proizvoljni $\varepsilon \in (0,a)$. Za $x > 0$ definirajmo sljedeće skupove :

$$\begin{aligned}
I_x &:= [x, x+2a] \\
E_x &:= \left\{ t \in I_x : |h(t) - h(x)| \geq \frac{1}{2}\varepsilon \right\} \\
{E_x}^* &:= \left\{ t \in [0,2a] : |h(x+t) - h(x)| \geq \frac{1}{2}\varepsilon \right\}.
\end{aligned}$$

Ovako definirani skupovi E_x, ${E_x}^*$ su izmjerivi, kao i funcija l te vrijedi $|E_x| = |{E_x}^*|$ ($|\cdot|$ predstavlja Lebesqueovu mjeru). Prema (2), indikator funcija skupa ${E_x}^*$ konvergira po točkama u 0 kada $x \to \infty$. Njezin integral, $|{E_x}^*|$, također konvergira u 0. Prema tome, za $x \geq x_0$ je $|E_x| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Uzmimo sada proizvoljni $c \in [0,a]$. Skup $I_{x+c} \bigcap I_x = [x+c, x+2a]$ ima duljinu $2a - c \geq a$, dok za $x \geq x_0$ vrijedi

$$|E_x \cup E_{x+c}| < |E_x| + |E_{x+c}| = |{E_x}^*| + |{E_{x+c}}^*| < \varepsilon < a.$$

Prema tome, za $c \in [0,a]$, $x \geq x_0$, skup $I_{x+c} \bigcap I_x \backslash E_x \cup E_{x+c}$ je skup pozitivne mjere, pa je neprazan. Sada, neka je t proizvoljna točka tog skupa. Tada vrijedi

$$|h(t) - h(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

i

$$|h(t) - h(x+c)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Dakle, za svaki $c \in [0,a]$, $x \geq x_0$ vrijedi da je

$$|h(x+c) - h(x)| < \varepsilon,$$

pa smo dokazali uniformnu konvergenciju na proizvoljnom segmentu $[0,a]$. Prema tome, uniformna konvergencija vrijedi na svakom segmentu, a time i na svakom kompaktnom skupu.

□

Prethodni dokaz proveden je uz kvantitativni pristup. Dokaz ovog teorema s kvalitativnim pristupom te još nekoliko zanimljivih dokaza možete pogledati u [2, str. 7 - 10, Teorem 1.1.7].

Prije nego iskažemo Teorem o reprezentaciji, navest ćemo važno svojstvo sporo varirajućih funkcija koje će nam omogućiti dokaz teorema.

Lema 3.1. *Ako je l pozitivna, izmjeriva, definirana na nekom intervalu $[a,\infty)$ te zadovoljava*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1, \quad \forall \lambda > 0,$$

onda je l ograničena na svim konačnim intervalima oblika $[x, x+n]$ $(n = 1,2,\ldots)$. Ako je $h(x) := \log l(e^x)$, onda je h također ograničena na svim konačnim intervalima oblika $[x, x+n]$ $(n = 1,2,\ldots)$.

Dokaz. Prema Teoremu o uniformnoj konvergenciji možemo pronaći dovoljno velik x^* takav da je

$$|h(x+u) - h(x)| < 1, \quad \text{za } x \geq x^*, u \in [0,1],$$

iz čega slijedi da je $|h(x)| \leq 1+|h(x^*)|$ na segmentu $[x^*, x^*+1]$. Indukcijom slijedi i da je $|h(x)| \leq n+|h(x^*)|$ na segmentu $[x^*, x^*+n]$, $n = 1, 2, \ldots$, pa je tvrdnja dokazana za funkciju h. Prema tome, tvrdnja vrijedi i za funkciju $l(x) = \exp h(\log x)$.

$\square$

Teorem 3.2. *(Teorem o reprezentaciji) Funkcija l je sporo varirajuća ako i samo ako se može zapisati u obliku*

$$l(x) = c(x) \exp\left\{\int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}, \quad x \geq a, \tag{3}$$

za neki $a > 0$, gdje su c i ε izmjerive funkcije i $c(x) \to c \in (0, \infty)$, $\varepsilon(x) \to 0$ kada $x \to \infty$.

Prije nego što krenemo na dokaz teorema, pogledajmo drugačiji zapis izraza (3) :

$$l(x) := \exp\left\{c_1(x) + \int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\},$$

pri čemu su c_1 i $\varepsilon(x)$ ograničene i izmjerive, $c_1(x) \to d \in \mathbb{R}$, a $\varepsilon(x) \to 0$ kada $x \to \infty$.

Dokaz. $\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavljamo da vrijedi (3). Tada je

$$\frac{l(\lambda x)}{l(x)} = \frac{c(\lambda x)}{c(x)} \exp\left\{\int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}.$$

Izaberimo proizvoljni segment $[a, b]$ takav da je $0 < a < b < \infty$ te proizvoljni $\varepsilon > 0$. Tada za svaki x veći ili jednak nekom x_0 i za svaki $\lambda \in [a, b]$ vrijedi

$$(1-\varepsilon)\exp\{-\varepsilon \max(|\log a|, |\log b|)\} < \frac{c(\lambda x)}{c(x)} \exp\left\{\int_x^{\lambda x} \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\} < (1+\varepsilon)\exp\{\varepsilon \max(|\log a|, |\log b|)\},$$

iz čega slijedi da je funkcija l sporo varirajuća.

$\boxed{\Rightarrow}$ Kako bi dokazali ovaj smjer označimo $h(x) := \log l(e^x)$. Trebamo pokazati da ako h zadovoljava (2), onda se može zapisati na sljedeći način :

$$h(x) = d(x) + \int_b^x e(v) dv, \quad x \geq b, \tag{4}$$

gdje je $b = \log a$, $d(x) = c_1(e^x)$, $e(x) = \varepsilon(e^x)$, pri čemu $d(x) \to d \in \mathbb{R}$ i $e(x) \to 0$ kada $x \to \infty$. Prema Lemi 3.1 h je integrabilna na svim konačnim intervalima oblika $[x, x+n]$ za $n = 1, 2, \ldots$, pa je i ograničena i izmjeriva. Za dovoljno veliki x^* imamo

$$h(x) = \int_x^{x+1} \Big(h(x) - h(t)\Big) dt + \int_{x^*}^{x} \Big(h(t+1) - h(t)\Big) dt + \int_{x^*}^{x^*+1} h(t) dt, \quad x \geq x^*.$$

Zadnji integral u sumi je konstanta, označimo ju sa c. Pogledajmo sada drugi integral. Ukoliko označimo $e(x) := h(x+1) - h(x)$, prema (2) $e(x) \to 0$ kada $x \to \infty$. Ostaje nam samo

$$\int_x^{x+1} \Big(h(x) - h(t)\Big) dt = \int_0^1 \Big(h(x) - h(x+u)\Big) du,$$

koji konvergira prema nuli kada $x \to \infty$ prema Teoremu o uniformnoj konvergenciji. Ako označimo

$$d(x) = c + \int_0^1 \Big(h(x) - h(x+u)\Big) du,$$

slijedi (4), pa je teorem dokazan.

$\square$

Primjer 3.2. *Pogledajmo sada kako funkcije iz Primjera 3.1 možemo zapisati pomoću Teorema o reprezentaciji.*

1. *Ukoliko u (3) uvrstimo* $c(x) = c \in (0,\infty)$ *i* $\varepsilon(u) = 0$ *dobivamo upravo* $l(x) = c, c > 0$.

2. *Neka je* $l_1(x) = \log x$ *i neka su* $l_i, i = 2,\dots,k$ *definirane kao u (1). Možemo ih zapisati na sljedeći način :*

$$\begin{aligned}
l_1(x) &= \exp\left\{\int_e^x \frac{1}{u\log u}du\right\} = \exp\left\{\int_e^x \frac{1}{ul_1(u)}du\right\}\\
l_2(x) &= \exp\left\{\int_{e^e}^x \frac{1}{u\log u\log(\log u)}du\right\} = \exp\left\{\int_{e^e}^x \frac{1}{ul_1(u)l_2(u)}du\right\}\\
l_3(x) &= \exp\left\{\int_{e^{e^e}}^x \frac{1}{ul_1(u)l_2(u)l_3(u)}du\right\}\\
&\vdots\\
l_k(x) &= \exp\left\{\int_a^x \frac{1}{ul_1(u)l_2(u)\cdots l_k(u)}du\right\}, \quad \textit{gdje je } a \textit{ rješenje jednadžbe } \underbrace{\log\log\dots\log}_{k+1\text{- puta}} a = 0.
\end{aligned}$$

3. *Funkciju* $l(x) = \exp\left\{\frac{\log x}{\log(\log x)}\right\}$ *zapišimo na sljedeći način :*

$$l(x) = \exp\left\{\int_1^x \frac{\log(\log u) - 1}{u[\log(\log u)]^2}du\right\}.$$

   Sada je očito da i ona zadovoljava Teorem o reprezentaciji.

4. *Preostale su nam još funkcije* f *i* g *pa pogledajmo kako one izgledaju:*

$$f(x) = \exp\left\{(\log x)^{\frac{1}{3}}\right\} = \exp\left\{\int_1^x \frac{1}{3u(\log u)^{\frac{2}{3}}}du\right\}$$

$$g(x) = \exp\left\{(\log x)^{\frac{1}{2}}(\log(\log x))^{\frac{1}{2}}\right\} = \exp\left\{\int_e^x \frac{1}{2u\sqrt{\log u}}\left(\sqrt{\log(\log u)} + \frac{1}{\sqrt{\log(\log u)}}\right)du\right\}.$$

3.2 Regularno varirajuće funkcije

Pretpostavimo sada da je f pozitivna funkcija koja je definirana na intervalu $(0,\infty)$ te neka je S skup svih $\lambda > 0$ takvih da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = g(\lambda) \in (0,\infty). \tag{5}$$

Teorem 3.3. *(Teorem o karakterizaciji) Ako je* $f > 0$ *izmjeriva funkcija i vrijedi (5), za svaki* λ *iz skupa pozitivne mjere, onda*

(i) *(5) vrijedi za svaki* $\lambda > 0$;

(ii) *postoji realan broj* p *takav da je* $g(\lambda) \equiv \lambda^p, \forall \lambda > 0$;

(iii) $f(x) = x^p l(x)$, *gdje je* l *sporo varirajuća funkcija.*

Dokaz. Uzmimo $\lambda, \mu \in S$. Tada je prema (5)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda\mu x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda\mu x)}{f(\mu x)} \cdot \frac{f(\mu x)}{f(x)} = g(\lambda)g(\mu),$$

pa je $\lambda\mu \in S$ i vrijedi $g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu)$. Iz (5) također vidimo da ako je $\lambda \in S$, onda je i $\frac{1}{\lambda} \in S$, te je $g\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{g(\lambda)}.$ Prema tome, S je multiplikativna podgrupa od $(0,\infty)$.
Kao i u prethodnim dokazima označimo $h(x) := \log f(e^x)$, $k(u) := \log g(e^u)$, $T := \{\log\lambda : \lambda \in S\}$.
Tada je u

$$\lim_{x\to\infty} h(x+u) - h(x) = k(u) \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in T \subset \mathbb{R}, \tag{6}$$

T aditivna podgrupa od $\mathbb{R}$ i vrijedi $k(u+v) = k(u) + k(v), u, v \in T$.
Prema pretpostavci teorema, skup T je i skup pozitivne mjere, pa je prema Korolaru 2.2 $T = \mathbb{R}$.
Time je (i) dokazan.

Pogledamo li (5), vidimo da je g limes kvocijenta funkcija koje su izmjerive, pa je g izmjeriva. Slično, iz (6) slijedi da je k izmjeriva. Kako je $T = \mathbb{R}$ i vrijedi $k(u+v) = k(u) + k(v), u, v \in T$, k je aditivna, odnosno g je multiplikativna funkcija. Tada prema Teoremu 2.4 postoji neki $p \in \mathbb{R}$ takav da je $k(u) \equiv pu$, odnosno $g(\lambda) \equiv \lambda^p$, čime je i (ii) dokazan.

Ako označimo $l(x) := \frac{f(x)}{x^p}$, onda je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1, \quad \forall \lambda > 0$$

pa je teorem dokazan.

□

Ako su uvjeti Teorema o karakterizaciji zadovoljeni, vrijedi da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^p, \quad \forall \lambda > 0. \tag{7}$$

Definicija 3.2. *Za pozitivnu funkciju f koja je izmjeriva te zadovoljava (7) kažemo da je regularno varirajuća u ∞ s indeksom $p \in \mathbb{R}$ i pišemo $f \in R_p$. Broj p nazivamo indeks regularne varijacije.*

Primjetimo, ako je $p = 0$, onda je funkcija f sporo varirajuća funkcija.

Primjer 3.3. *Pogledajmo sada nekoliko primjera.*

1. *Najjednostavniji primjer regularno varirajuće funkcije s indeksom p je funkcija $f_0(x) = x^p$.*

2. *Uočimo da iako je $f_1(x) = [\log x]$ sporo varirajuća funkcija, $g_0(x) = \exp\{[\log x]\}$ nije regularno varirajuća funkcija, gdje $[\cdot]$ označava cijeli dio broja.*

3. *Funkcije $g_1(x) = e^x$ i $g_2(x) = \sin(x+2)$ nisu regularno varirajuće funkcije.*

4. *U vjerojatnosti su nam jako korisne funkcije distribucija. Za funkciju distribucije $F(x)$ kažemo da je regularno varirajuća s indeksom α ukoliko je njezina repna distribucija $1 - F(x)$ regularno varirajuća s indeksom $-\alpha$. Pogledajmo koje funkcije distribucija regularno variraju.*

(i) Prvo ćemo proučiti Frechetovu funkciju distribucije $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$, $x \geq 0$. *Za repnu distribuciju* $1 - \Phi_\alpha(x)$ *vrijedi da je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-\Phi_\alpha(tx)}{1-\Phi_\alpha(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1-e^{(-tx)^{-\alpha}}}{1-e^{(-t)^{-\alpha}}} = \begin{bmatrix} u = -t^{-\alpha} \\ t \to \infty \\ u \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{u\to 0} \frac{1-e^{x^{-\alpha}u}}{1-e^{u}} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{x^{-\alpha}u}-1}{e^{u}-1}.$$

Koristeći L'Hopitalovo pravilo dobivamo

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^{x^{-\alpha}u}-1}{e^{u}-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{d}{du}\left(e^{x^{-\alpha}u}-1\right)}{\frac{d}{du}\left(e^{u}-1\right)} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{x^{-\alpha}u}x^{-\alpha}}{e^{u}} = x^{-\alpha}.$$

Dakle,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-\Phi_\alpha(tx)}{1-\Phi_\alpha(t)} = x^{-\alpha},$$

pa je prema Definiciji 3.2 Frechetova repna distribucija regularno varirajuća s indeksom $-\alpha$.

(ii) Cauchyjeva funkcija distribucije dana je izrazom $F(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$. *Primjenom L'Hopitalovog pravila dobivamo da je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(tx)}{\frac{\pi}{2}-\arctan(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(tx)\right)}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(t)\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{xt^2+x}{x^2t^2+1} = x^{-1},$$

pa je prema Definiciji 3.2 Cauchyjeva repna distribucija regularno varirajuća s indeksom -1.

(iii) Repna distribucija standardne normalne slučajne varijable nije regularno varirajuća.

4 Svojstva regularno varirajućih funkcija

U ovom ćemo poglavlju iskazati i dokazati najvažnija svojstva regularno varirajućih funkcija među kojima se ističu Karamatin i Karamatin Tauberovski teorem.

Pogledajmo kako teoremi koje smo iskazali za sporo varirajuće funkcije izgledaju u slučaju regularno varirajućih funkcija.

Teorem 4.1. *(Teorem o reprezentaciji regularno varirajućih funkcija) Funkcija f je regularno varirajuća s indeksom p ako i samo ako se može zapisati u obliku*

$$f(x) = x^p l(x) = x^p c(x) \exp\left\{\int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right\}, \quad x \geq a, \tag{8}$$

za neki $a > 0$, gdje $c(x) \to c \in (0,\infty)$ i $\varepsilon(x) \to 0$ kada $x \to \infty$.

Sljedeća jednadžba nam daje malo drugačiju reprezentaciju regularno varirajućih funkcija koja će nam biti korisna u dokazivanju kasnijih tvrdnji :

$$f(x) = (c + o(1)) \exp\left\{\int_1^x \frac{p + o(1)}{u} du\right\}, \quad 0 < c < \infty, \tag{9}$$

pri čemu sa $o(1)$ označavamo neku funkciju g za koju vrijedi da $|g(x)| \to 0$ kada $x \to \infty$.

Uz oznaku $d := \log c$, reprezentacija funkcije $h(x) := \log f(e^x)$ je sljedeća :

$$h(x) = d + o(1) + \int_0^x (p + o(1)) dy, \quad d \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Iz (10) slijedi jednostavno, ali vrlo važno svojstvo regularno varirajućih funkcija.

Propozicija 4.1. *Ako je f regularno varirajuća funkcija s indeksom $p \neq 0$, onda kada $x \to \infty$*

$$f(x) \to \begin{cases} \infty, & \text{ako je } p > 0 \\ 0, & \text{ako je } p < 0 \end{cases}.$$

Kod sporo varirajućih funkcija, imali smo uniformnost za $\lambda \in [a,b], 0 < a \leq b < \infty$. Kod regularno varirajućih funkcija s indeksom $p > 0$ možemo uzeti da je $a = 0$, dok za $p < 0$ možemo uzeti $b = \infty$. U nekim slučajevima morat ćemo funkciju $f(x)$ modificirati na intervalu $(0,X)$, no to nas ne ograničava s obzirom da na svojstvo regularne varijacije utječe samo ponašanje funkcije kada $x \to \infty$.

Teorem 4.2. *(Teorem o uniformnoj konvergenciji regularno varirajućih funkcija) Ako je f regularno varirajuća s indeksom p, onda*

$$\tfrac{f(\lambda x)}{f(x)} \to \lambda^p \text{ kada } x \to \infty \text{ uniformno}$$

$$\begin{array}{ll} \text{na svakom intervalu } [a,b], 0 < a \leq b < \infty, & \text{ako je } p = 0 \\ \text{na svakom intervalu } (0,b], 0 < b < \infty, & \text{ako je } p > 0 \\ \text{na svakom intervalu } [a,\infty), 0 < a < \infty, & \text{ako je } p < 0 \end{array},$$

koji sadrži λ.

U slučaju kada je $p>0$ pretpostavljamo da je funkcija f ograničena na svakom intervalu $(0,X)$.

Dokaz. Slučaj $p=0$ smo već dokazali u Teoremu o uniformnoj konvergenciji. Dokazat ćemo samo slučaj $p>0$ jer se slučaj $p<0$ dokazuje slično. S obzirom na Teorem o uniformnoj konvergenciji možemo se ograničiti na $\lambda \in (0,1]$.
Neka je $\varepsilon \in (0,1)$ i definirajmo $\Lambda := \left(\frac{1}{8}\varepsilon\right)^{\frac{1}{p}}$. Tada je

$$0<\lambda^p<\frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{i} \quad 0<4\lambda^{p+1}\le \frac{1}{2}\varepsilon, \quad 0<\lambda\le\Lambda. \tag{11}$$

Možemo pronaći x_1 takav da funkcije iz (8) za $x \ge x_1$ zadovoljavaju

$$\frac{1}{2}c \le c(x) \le 2c \;\; \text{i} \;\; \varepsilon(x)\le 1. \tag{12}$$

Za $0<\lambda\le\Lambda$ i $x\ge\frac{x_1}{\lambda}$, (12) je zadovoljeno i za x i za λx, te vrijedi $\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \le 4\lambda^{p+1}$. Tada iz (11) slijedi

$$\left|\frac{f(\lambda x)}{f(x)}-\lambda^p\right| < \varepsilon, \quad 0<\lambda\le\Lambda,\; x\ge\frac{x_1}{\lambda}. \tag{13}$$

Definirajmo $M := \sup_{0<t\le x_1} f(t) < \infty$. Tada možemo pronaći x_2 takav da je $\frac{M}{f(x)} < \frac{1}{2}\varepsilon$ za sve $x \ge x_2$. Sada opet iz (11) slijedi

$$\left|\frac{f(\lambda x)}{f(x)}-\lambda^p\right| < \varepsilon, \quad 0<\lambda\le\Lambda,\; x_2\le x\le\frac{x_1}{\lambda}. \tag{14}$$

Za sporo varirajuću funkciju $l(x) := \frac{f(x)}{x^p}$, prema Teoremu o uniformnoj konvergenciji možemo pronaći x_3 takav da je

$$\left|\frac{l(\lambda x)}{l(x)}-1\right| < \varepsilon, \quad \Lambda\le\lambda\le 1,\; x\ge x_3.$$

Prema tome, za $\Lambda\le\lambda\le 1,\; x\ge x_3$ vrijedi

$$\left|\frac{f(\lambda x)}{f(x)}-\lambda^p\right| = \lambda^p \left|\frac{l(\lambda x)}{l(x)}-1\right| \le \varepsilon.$$

Kombinirajući prethodnu nejednakost sa (13) i (14) dobivamo

$$\left|\frac{f(\lambda x)}{f(x)}-\lambda^p\right| \le 2\varepsilon, \quad 0<\lambda\le 1,\; x\ge \max(x_2,x_3),$$

pa je uniformna konvergencija dokazana.

□

Općenito regularno varirajuće funkcije ne moraju biti monotone, ali u nastavku ćemo pokazati da je svaka regularno varirajuća funkcija s indeksom $p\ne 0$ asimptotski ekvivalentna nekoj monotonoj funkciji. Pogledajmo prvo kada su dvije funkcije asimptotski ekvivalentne.

Definicija 4.1. *Kažemo da su funkcije f i g asimptotski ekvivalente ako vrijedi*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

i pišemo $f(x)\sim g(x)$ kada $x\to\infty$.

Teorem 4.3. *Neka je f regularno varirajuća funkcija s indeksom p i izaberimo $a \geq 0$ takav da je f lokalno ograničena na intervalu $[a,\infty)$.*
Ako je $p > 0$, onda

(i) $\overline{f}(x) := \sup\{f(t) : a \leq t \leq x\} \sim f(x)$ *kada* $x \to \infty$

(ii) $\underline{f}(x) := \inf\{f(t) : t \geq x\} \sim f(x)$ *kada* $x \to \infty$.

Ako je $p < 0$, onda

(i) $\sup\{f(t) : t \geq x\} \sim f(x)$ *kada* $x \to \infty$

(ii) $\inf\{f(t) : a \leq t \leq x\} \sim f(x)$ *kada* $x \to \infty$.

Dokaz. Dokazat ćemo samo slučaj $p > 0$, slučaj $p < 0$ dokazuje se slično. Prvo napravimo odgovarajuću modifikaciju funkcije f na konačan interval (to nam ne utječe niti na svojstvo regularne varijacije niti na tvrdnju teorema). Tada iz Teorema 4.2 slijedi uniformnost na intervalu $(0,1]$, iz čega slijedi da je

$$\sup_{\lambda\in(0,1]} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \to \sup_{\lambda\in(0,1]} \lambda^p \quad \text{kada } x \to \infty.$$

Dakle, funkcija $\overline{f}(x)$ je asimptotaki ekvivalentna funkciji $f(x)$ kada $x \to \infty$, pa je tvrdnja (i) dokazana. Tvrdnja (ii) dokazuje se slično.

□

Sljedeći rezultat (koji je zapravo ekvivalentan Teoremu 4.3) nam govori o globalnim granicama za $\frac{f(y)}{f(x)}$, pri čemu je f regularno varirajuća funkcija.

Teorem 4.4. *(Potterov teorem)*

(i) Ako je l sporo varirajuća funkcija, onda za proizvoljne konstante $a > 1$ i $\delta > 0$ postoji x_0 takav da za svaki $x, y \geq x_0$ vrijedi

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq a \max\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{\delta}, \left(\frac{y}{x}\right)^{-\delta}\right\}.$$

(ii) Nadalje, ako je l ograničena daleko od 0 i ∞ na svakom kompaktnom podskupu od $[0,\infty)$, onda za svaki $\delta > 0$ postoji $a' > 1$ takav da za svaki $x, y > 0$ vrijedi

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq a' \max\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{\delta}, \left(\frac{y}{x}\right)^{-\delta}\right\}.$$

(iii) Ako je f regularno varirajuća funkcija sa indeksom p, onda za proizvoljne konstante $a > 1$ i $\delta > 0$ postoji x_0 takav da za svaki $x, y \geq x_0$ vrijedi

$$\frac{f(y)}{f(x)} \leq a \max\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{p+\delta}, \left(\frac{y}{x}\right)^{p-\delta}\right\}.$$

Dokaz.
Tvrdnja (i) slijedi direktno iz Teorema o reprezentaciji.

Kako bi dokazali tvrdnju (ii) izaberimo proizvoljne $a > 1$ i $\delta > 0$ te neka je x_0 takav da tvrdnja (i) vrijedi. Zbog lokalne ograničenosti postoji $a^* \geq 1$ takav da je

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq a^*, \quad \forall 0 \leq x, y \leq x_0.$$

Tada za $0 < x \leq x_0 \leq y$ vrijedi

$$\frac{l(y)}{l(x)} = \frac{l(y)}{l(x_0)} \cdot \frac{l(x_0)}{l(x)} \leq a\left(\frac{y}{x_0}\right)^{\delta} a^* \leq aa^*\left(\frac{y}{x}\right)^{\delta}. \tag{15}$$

Slično, za $0 < y \leq x_0 \leq x$ vrijedi

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq aa^*\left(\frac{y}{x}\right)^{-\delta}. \tag{16}$$

Ako definiramo $a' := aa^*$, kombiniranjem nejednadžbi (15) i (16) slijedi tvrdnja (ii).

Tvrdnja (iii) slijedi direktno iz (i).

□

Sada pogledajmo vezu između regularno varirajućih nizova i regularno varirajućih funkcija.

Definicija 4.2. *Niz (c_n) pozitivnih realnih brojeva je regularno varirajući s indeksom $\alpha \in \mathbb{R}$ ako je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{[tn]}}{c_n} = t^{\alpha}, \quad t > 0.$$

Ako je (c_n) regularno varirajući s indeksom α, onda funkcija $c(x) = c_{[x]}$ pripada skupu R_α.

4.1 Karamatin teorem

U nastavku će nam asimptotsko ponašanje integrala regularno varirajućih funkcija biti od velike važnosti pa ćemo navesti nekoliko rezultata koji nam govore o tome.

Propozicija 4.2. *Ako je l sporo varirajuća funkcija, X dovoljno velik tako da je l lokalno ograničena na intervalu $[X, \infty)$ i $\alpha > -1$, onda je*

$$\int_X^x t^{\alpha} l(t)\,dt \sim \frac{x^{\alpha+1} l(x)}{\alpha+1} \quad \text{kada } x \to \infty.$$

Dokaz. Izaberimo proizvoljni $\delta \in (0, \alpha+1)$. Tada za $a = 2$ i izabrani δ prema tvrdnji (i) Potterovog teorema postoji x_0 takav da je za svaki $x, y \geq x_0$

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq a \max\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{\delta}, \left(\frac{y}{x}\right)^{-\delta}\right\}.$$

Definirajmo $x' := \max\{X, x_0\}$. Uz supstituciju $u = \frac{t}{x}$ dobivamo

$$\int_{x'}^x \frac{t^{\alpha} l(t)}{x^{\alpha+1} l(x)}\,dt = \int_0^1 \frac{l(ux)}{l(x)} \mathbb{I}_{[\frac{x'}{x},1]}(u) u^{\alpha}\,du.$$

Tada je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(ux)}{l(x)} \mathbb{I}_{\left[\frac{x'}{x},1\right]}(u) u^{\alpha} = u^{\alpha}$$

te je prema Potterovom teoremu

$$\frac{l(ux)}{l(x)} \mathbb{I}_{\left[\frac{x'}{x},1\right]}(u) u^{\alpha} < 2u^{\alpha-\delta}.$$

Primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji zaključujemo kako integral s desne strane jednadžbe konvergira prema $\int_0^1 u^{\alpha} du = \frac{1}{\alpha+1}$, pa je konačno

$$\int_{x'}^{x} t^{\alpha} l(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1} l(x)}{\alpha+1} \quad \text{kada } x \to \infty.$$

Izraz na desnoj strani konvergira prema beskonačnosti, pa se ništa neće promijeniti ukoliko x' zamjenimo sa X.

□

Prethodni rezultat vrijedi i kada je $\alpha = -1$, u smislu da je tada

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{l(x)} \int_X^x \frac{l(t)}{t} dt = \infty. \tag{17}$$

Propozicija 4.3. *Neka je l sporo varirajuća funkcija i neka je X takav da je l lokalno integrabilna na intervalu $[X,\infty)$. Tada je $\int_X^x \frac{l(t)}{t} dt$ sporo varirajući i vrijedi (17).*

Dokaz ove propozicije možete pronaći u [2, str. 26. - 27., Propozicija 1.5.9a].

Propozicija 4.4. *Ako je l sporo varirajuća i $\int^{\infty} \frac{l(t)}{t} dt < \infty$, onda je $\int_x^{\infty} \frac{l(t)}{t} dt$ sporo varirajući i vrijedi*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{l(x)} \int_x^{\infty} \frac{l(t)}{t} dt = \infty.$$

Pogledajmo sada slučaj kada je $\alpha < -1$.

Propozicija 4.5. *Ako je l sporo varirajuća i $\alpha < -1$, onda $\int^{\infty} t^{\alpha} l(t) dt$ konvergira i vrijedi*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1} l(x)}{\int_x^{\infty} t^{\alpha} l(t) dt} = -\alpha - 1.$$

Dokaz. Definirajmo $p := \frac{1}{2}(\alpha+1) < 0$. Tada je funkcija $f(x) := x^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} l(x)$ regularno varirajuća s indeksom p i vrijedi

$$\frac{\int_x^{\infty} t^{\alpha} l(t) dt}{x^{\alpha+1} l(x)} + \frac{1}{\alpha+1} = \int_1^{\infty} \left(\frac{f(ux)}{f(x)} - u^p \right) u^{p-1} du.$$

Prema Teoremu o uniformnoj konvergenciji regularno varirajućih funkcija slijedi da je

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(ux)}{f(x)} - u^p \right) = 0.$$

Kako je u^{p-1} integrabilna na intervalu $(1,\infty)$, integral s desne strane jednadžbe teži u nulu kada $x \to \infty$, pa je tvrdnja dokazana.

□

Propoziciju 4.2 možemo zapamtiti na sljedeći način : $l(t)$ možemo izvaditi iz integrala kao da je $l(x)$, tj.

$$\int_X^x t^\alpha l(t)\,dt \sim l(x)\int_X^x t^\alpha\,dt \quad \text{kada } x\to\infty,$$

a slično vrijedi i za Propoziciju 4.5.

Propozicije 4.2 - 4.5 možemo sažeto zapisati u obliku sljedećeg teorema.

Teorem 4.5. *(Karamatin teorem) Neka je f regularno varirajuća funkcija s indeksom p te neka je lokalno ograničena na intervalu $[X,\infty)$. Tada je*

(i) za proizvoljni $\sigma \geq -(p+1)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\sigma+1}f(x)}{\int_X^x t^\sigma f(t)\,dt} = \sigma+p+1;$$

(ii) za proizvoljni $\sigma < -(p+1)$ (i za $\sigma = -(p+1)$ ako je $\int^\infty t^{-(p+1)} f(t)\,dt < \infty$)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\sigma+1}f(x)}{\int_x^\infty t^\sigma f(t)\,dt} = -(\sigma+p+1).$$

Prethodni teorem nam govori kako se sporo varirajuće funkcije ponašaju kada ih pomnožimo potencijama te integriramo. Zanimljivo je da se takvo ponašanje uočava samo kod regularno varirajućih funkcija. U nastavku navodimo obrat Karamatinog teorema.

Teorem 4.6. *(Karamatin teorem ; obrat) Neka je f pozitivna i lokalno integrabilna na intervalu $[X,\infty)$.*

(i) Ako je za proizvoljni $\sigma > -(p+1)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\sigma+1}f(x)}{\int_X^x t^\sigma f(t)\,dt} = \sigma+p+1,$$

onda je f regularno varirajuća s indeksom p.

(ii) Ako je za proizvoljni $\sigma < -(p+1)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\sigma+1}f(x)}{\int_x^\infty t^\sigma f(t)\,dt} = -(\sigma+p+1),$$

onda je f također regularno varirajuća s indeksom p.

Dokaz.

(i) Definirajmo $g(x) := \frac{x^{\sigma+1}f(x)}{\int_X^x t^\sigma f(t)\,dt}$ i izaberimo proizvoljni $y > X$. Tada je za svaki $x > y$

$$\int_y^x \frac{g(t)}{t}\,dt = \log\left\{\frac{\int_X^x t^\sigma f(t)\,dt}{C}\right\}, \quad \text{gdje je } C := \int_X^y t^\sigma f(t)\,dt.$$

Obje strane jednadžbe su apsolutno neprekidne i imaju jednake derivacije, pa vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) = x^{-\sigma-1} g(x) \int_X^x t^\sigma f(t) dt = C x^{-\sigma-1} g(x) \exp\left\{ \int_y^x \frac{g(t)}{t} dt \right\} \\ = C y^{-\sigma-1} g(x) \exp\left\{ \int_y^x \frac{[g(t) - \sigma - 1]}{t} dt \right\}. \end{aligned}$$

Kako je prema pretpostavci teorema $\lim_{x\to\infty} g(x) - \sigma - 1 = p$, tvrdnja da je f regularno varirajuća s indeksom p slijedi iz (9).

(ii) Definirajmo sada $g(x) := \frac{x^{\sigma+1} f(x)}{\int_x^\infty t^\sigma f(t) dt}$. Tada je za svaki $x > X$

$$\int_X^x \frac{g(t)}{t} dt = \log\left\{ \frac{\int_X^\infty t^\sigma f(t) dt}{\int_x^\infty t^\sigma f(t) dt} \right\},$$

pa sličnim postupkom kao u (i) dobivamo da je

$$f(x) = \left\{ X^{-\sigma-1} \int_X^\infty t^\sigma f(t) dt \right\} g(x) \exp\left\{ -\int_X^x \frac{[g(t) + \sigma + 1]}{t} dt \right\}.$$

Kako je $\lim_{x\to\infty} g(x) + \sigma + 1 = -p$, slijedi da je f regularno varirajuća s indeksom p .

□

U nastavku ćemo iskazati još jedan zanimljiv rezultat vezan uz asimptotsko ponašanje regularno varirajuće funkcije.

Teorem 4.7. *(Aljančić - Karamatin teorem) Fiksirajmo $\sigma > 0$. Za funkciju f koja je lokalno integrabilna na intervalu $[X,\infty)$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne :*

(i) Funkcija f je regularno varirajuća s indeksom p.

(ii) Nakon što funkciju f modificiramo na intervalu $(0, X)$ tako da $\int_0^X u^{\sigma-1} \log f(u) du$ konvergira,

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{t^\sigma \log\left\{\frac{f(tx)}{f(x)}\right\}}{t} dt = \int_0^1 \frac{t^\sigma \log(t^p)}{t} dt = \frac{-p}{\sigma^2}.$$

(iii) Nakon što funkciju f modificiramo na intervalu $(0, X)$ tako da $\int_0^X u^{\sigma-1} \log f(u) du$ konvergira,

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{t^\sigma \log\left\{\frac{f(\frac{x}{t})}{f(x)}\right\}}{t} dt = \int_0^1 \frac{t^\sigma \log(t^{-p})}{t} dt = \frac{p}{\sigma^2}.$$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da $(ii) \Rightarrow (i)$. Imamo

$$\log f(x) - \sigma x^{-\sigma} \int_0^x \frac{y^\sigma \log f(y)}{y} dy = p\sigma^{-1} + \sigma\varepsilon(x), \tag{18}$$

gdje $\varepsilon(x) \to 0$ kada $x \to \infty$ i pod pretpostavkom da je $\varepsilon(\cdot)$ lokalno integrabilna. Podijelimo li (18) sa x i integriramo na intervalu $(1, x)$ imamo da je

$$x^{-\sigma} \int_0^x y^{\sigma-1} \log f(y) dy = \frac{p}{\sigma} \log x + \sigma \int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

pa je prema Teoremu o reprezentaciji regularno varirajućih funkcija $\exp\left\{x^{-\sigma}\int_0^x y^{\sigma-1}f(y)dy\right\}$ regularno varirajuća s indeksom $\frac{p}{\sigma}$.
Ali iz (18) slijedi i da je

$$f(x)=\exp\left\{\sigma x^{-\sigma}\int_0^x \frac{y^\sigma \log f(y)}{y}dy\right\}\exp\{p\sigma^{-1}+\sigma\varepsilon(x)\}\sim \exp\left\{\sigma x^{-\sigma}\int_0^x \frac{y^\sigma \log f(y)}{y}dy\right\},$$

što je regularno varirajuće s indeksom p.

Dokažimo sada da $(i)\Rightarrow(ii)$. Prema Teoremu o reprezentaciji regularno varirajućih funkcija vrijedi

$$\log\left(\frac{f(xt)}{f(x)}\right)=\eta(xt)-\eta(x)+p\log t-\int_{xt}^x \frac{\varepsilon(u)}{u}du,$$

gdje $\eta(x)\to c\in\mathbb{R}$ i $\varepsilon(x)\to 0$ kada $x\to\infty$ te možemo pretpostaviti da je $\varepsilon(x)$ ograničena i iščezava u blizini ishodišta. Sada prema Teoremu o dominiranoj konvergenciji imamo da je

$$\int_0^1 \frac{t^\sigma \log t}{t}dt=\frac{-1}{\sigma^2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^1 \frac{t^\sigma\{\eta(xt)-\eta(x)\}}{t}dt=\lim_{x\to\infty}\sigma^{-1}\left\{x^{-\sigma}\int_0^{x^\sigma}\eta\left(v^{\frac{1}{\sigma}}\right)dv-\eta(x)\right\}=0$$

i

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^1 t^{\sigma-1}dt\int_{xt}^x \frac{\varepsilon(u)}{u}du=\lim_{x\to\infty}\int_0^1 t^{\sigma-1}dt\int_t^1 \frac{\varepsilon(xv)}{v}dv=0,$$

iz čega slijedi (ii).
Na analogan način dokazuje se i da su tvrdnje (i) i (iii) ekvivalentne.

□

4.2 Karamatin Tauberovski teorem

Abelovski teoremi govore o asimptotskom ponašanju integralne transformacije funkcije u odnosu na asimptotsko ponašanje originalne funkcije. Obratno, Tauberovski teoremi govore o asimptotskom ponašanju originalne funkcije u odnosu na asimptotsko ponašanje njene integralne transformacije. Tauberovski teoremi su najčešće puno složeniji i zahtjevaju dodatne uvjete na originalnu funkciju koje nazivamo Tauberovskim uvjetima. U ovisnosti o kojoj se integralnoj transformaciji radi (Laplaceova, Fourierova, itd.) imamo razne grupe Tauberovskih teorema. Mi ćemo se u radu baviti Karamatinim Tauberovskim teoremom koji nam govori kako se asimptotski ponaša originalna funkcija s obzirom na asimptotsko ponašanje njene Laplace - Stieltjesove transformacije. Laplace - Stieltjesova transformacija realne funkcije g dana je Lebesque - Stieltjesovim integralom oblika

$$\int e^{-sx}dg(x),\quad s\in\mathbb{C},$$

pa pogledajmo prvo uz koje uvjete Lebesque - Stieltjesov integral možemo svesti na Riemannov integral.

Teorem 4.8. *Neka su dane funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$, a funkcija g ima derivaciju g' skoro svuda na $[a, b]$, onda je*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Kako bi iskazali sljedeći teorem moramo još definirati što su to totalne varijacije. Neka je f realna funkcija definirana barem na skupu $E \subseteq \mathbb{R}$. Totalna varijacija funkcije f na skupu E definira se kao

$$V(f;E) := \sup \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

pri čemu supremum uzimamo po svim konačnim nizovima $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n$ iz E. Neka je I interval u $\mathbb{R}$. Sa $BV(I)$ ćemo označiti klasu svih zdesna neprekidnih funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ koje imaju ograničenu varijaciju, tj. za koje je $V(f;I) < \infty$. Klasu svih zdesna neprekidnih funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ koje imaju lokalno ograničenu varijaciju, tj. za koje je $V(f;J) < \infty$, za svaki kompaktni skup $J \subseteq I$, označavamo sa $BV^1(I)$.
Ako funkcija $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pripada klasi $BV^1(\mathbb{R})$ i iščezava na intervalu $(-\infty, 0)$, njezinu Laplace - Stieltjesovu transformaciju definiramo na sljedeći način :

$$\hat{U}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dU(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-sx} dU(x),$$

gdje je s kompleksan broj oblika $s = \sigma + ir$, $\sigma, r \in \mathbb{R}$. Prethodni integral apsolutno konvergira za $\sigma > \sigma_0$, a za $\sigma < \sigma_0$ apsolutno divergira, gdje je σ_0 realan broj kojeg nazivamo apscisa konvergencije. Apscisa konvergencije σ_0 može poprimiti i vrijednosti $+\infty$ ili $-\infty$. U slučaju kada je $\sigma_0 = +\infty$ ne postoji realan broj za koji integral konvergira, a u slučaju kada je $\sigma_0 = -\infty$ integral konvergira za svaki realan broj.

Teorem 4.9. *(Karamatin Tauberovski teorem)*
Neka je U neopadajuća i zdesna neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$, pri čemu je $U(x) = 0$, za svaki $x < 0$. Ako je l sporo varirajuća funkcija i $c \geq 0, p \geq 0$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne :

$$U(x) \sim \frac{cx^p l(x)}{\Gamma(1+p)} \quad \textit{kada } x \to \infty \tag{19}$$

i

$$\hat{U}(s) \sim cs^{-p} l\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{kada } s \to 0+. \tag{20}$$

Kada je $c = 0$, (19) možemo interpretirati kao $U(x) = o\big(x^p l(x)\big)$. Slično vrijedi i za (20).
Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (19). Za veliki x imamo da je

$$\begin{aligned}
\hat{U}\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^x e^{\frac{-y}{x}} dU(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{n-1}x}^{2^n x} e^{\frac{-y}{x}} dU(y) \\
&\leq U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2^{n-1}} U\big(2^n x\big) \\
&\leq \frac{2c}{\Gamma(1+p)} \left\{ x^p l(x) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2^{n-1}} \big(2^n x\big)^p l\big(2^n x\big) \right\}.
\end{aligned}$$

Prema Potterovom teoremu, (iii), za veliki x to je najviše

$$\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2^{n-1}} 2\left(2^n\right)^{1+p}\right\} \frac{2cx^p l(x)}{\Gamma(1+p)},$$

pa je $\frac{\hat{U}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p l(x)}$ ograničeno kada $x \to \infty$.

Za fiksni x, $U(yx)$ ima LS transformaciju $\hat{U}\left(\frac{s}{x}\right)$, pa $\frac{U(yx)}{x^p l(x)}$ ima transformaciju $\frac{\hat{U}\left(\frac{s}{x}\right)}{x^p l(x)}$. Ali zbog (19) i činjenice da je l sporo varirajuća funkcija za svaki y vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(yx)}{x^p l(x)} = \frac{cy^p}{\Gamma(1+p)} \tag{21}$$

i pripadna transformacija je

$$\frac{c}{\Gamma(1+p)} \int_{[0,\infty)} e^{-sy} d(y^p) = \frac{c}{s^p}.$$

Ovo vrijedi i za $p = 0$, u tom slučaju za fiksni $y \neq 0$ lijeva strana jednadžbe (21) konvergira ka $c\mathbb{I}_{[0,\infty)}(y)$, a pripadna transformacija je c.

Kako je $\frac{\hat{U}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p l(x)}$ ograničeno, možemo primjeniti Teorem neprekidnosti za LS transformacije, pa je za svaki $s > 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\hat{U}\left(\frac{s}{x}\right)}{x^p l(x)} = \frac{c}{s^p}. \tag{22}$$

Uzmemo li da je $s = 2$ te $x = \frac{2}{s}$, slijedi (20).

Obratno, ako (20) vrijedi, činjenica da je l sporo varirajuća funkcija daje (22), za svaki $s > 0$. Zatim, lijeva strana jednadžbe (22) je transformacija od $\frac{U(yx)}{x^p l(x)}$ i ograničena je za $s = 1$, a desna strana jednadžbe je transformacija od $\frac{cy^p}{\Gamma(1+p)}$. Tada prema Teoremu neprekidnosti za LS transformacije vrijedi (21). Uzmemo li $y = 1$, slijedi (19).

□

Teorem 4.10. *(Teorem o monotonoj gustoći) Neka je $U(x) = \int_0^x u(y)dy$, gdje je u monotona na intervalu (z,∞), za neki $z > 0$. Ako je*

$$U(x) \sim cx^\alpha L(x) \quad \textit{kada } x \to \infty,$$

pri čemu je $c \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $L \in R_0$, onda je

$$u(x) \sim c\alpha x^{\alpha-1} L(x) \quad \textit{kada } x \to \infty.$$

Za $c = 0$ prethodne relacije interpretiramo kao $U(x) = o(x^\alpha L(x))$ i $u(x) = o(x^{\alpha-1} L(x))$.

Dokaz teorema možete pronaći u [2, str. 39, Teorem 1.7.2].

U nastavku ćemo navesti nekoliko rezultata vezanih uz funkcije distribucija, a koji će nam biti korisni u primjenama. Uvedimo oznaku $\overline{F}(x) := 1 - F(x)$.

Propozicija 4.6. *Neka je F funkcija distribucije takva da je $F(x) < 1$, za sve $x \geq 0$.*

(i) Ako nizovi (a_n) i (x_n) zadovoljavaju $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$ kada $x_n \to \infty$ i ako za proizvoljnu realnu funkciju g i sve λ iz gustog podskupa od $(0,\infty)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overline{F}(\lambda x_n) = g(\lambda) \in (0,\infty),$$

onda je $g(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$, za neki $\alpha \geq 0$ i $\overline{F}$ je regularno varirajuća.

(ii) Neka je funkcija distribucije F apsolutno neprekidna sa funkcijom gustoće f takvom da je za proizvoljni $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\overline{F}(x)} = \alpha.$$

Tada je $f \in R_{-1-\alpha}$ i posljedično $\overline{F} \in R_{-\alpha}$.

(iii) Neka je $f \in R_{-1-\alpha}$, za proizvoljni $\alpha > 0$. Tada je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\overline{F}(x)} = \alpha.$$

Prethodna tvrdnja također vrijedi ako je $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, za proizvoljni $\alpha > 0$ i ako je gustoća f monotona na intervalu (z,∞), za neki $z > 0$.

(iv) Neka je X nenegativna slučajna varijabla s repom distribucije $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, za proizvoljni $\alpha > 0$. Tada vrijedi da je

$$\begin{array}{ll} EX^{\beta} < \infty, & \text{ako je } \beta < \alpha \\ EX^{\beta} = \infty, & \text{ako je } \beta > \alpha \end{array}.$$

(v) Neka je $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, za proizvoljni $\alpha > 0$. Tada je za sve $\beta \geq \alpha$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta}\overline{F}(x)}{\int_0^x y^{\beta}dF(y)} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha}.$$

Obrat vrijedi kada je $\beta > \alpha$, kada je $\beta = \alpha$ možemo zaključiti samo da je $\overline{F}(x) = o(x^{-\alpha}L(x))$, za proizvoljni $L \in R_0$.

(vi) Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne :

(a)

$$\int_0^x y^2 dF(y) \in R_0$$

(b)

$$\overline{F}(x) = o\left(x^{-2}\int_0^x y^2 dF(y)\right), \quad x \to \infty.$$

Tvrdnje (ii), (iii), (iv) i (vi) iz prethodne propozicije su zapravo specijalni slučajevi Karamatinog teorema i Teorema o monotonoj gustoći. Detaljnija objašnjenja i dokaze možete pronaći u [2].

5 Primjene regularno varirajućih funkcija u vjerojatnosti

U ovom ćemo poglavlju vidjeti kako prethodno navedene tvrdnje o regularno varirajućim funkcijama možemo primjeniti na neke probleme u vjerojatnosti.

5.1 Transformacije funkcije distribucije

U ovom potpoglavlju bavit ćemo se transformacijama funkcije distribucije F neke slučajne varijable X. Promatrat ćemo je na intervalu $[0,\infty)$ s obzirom da tada imamo samo jedan rep koji proučavamo. Koristit ćemo LS transformaciju

$$\hat{F}(s) := E\left[e^{-sX}\right] = \int_{[0,\infty)} e^{-sx} dF(x), \quad s \geq 0.$$

Prvo ćemo definirati n-ti moment :

$$\mu_n := EX^n = \int_{[0,\infty)} x^n dF(x), \quad n = 1,2,....$$

Prema [8], kada je $\mu_n < \infty$, $\hat{F}(s)$ možemo razviti u Taylorov red :

$$\hat{F}(s) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\mu_r (-s)^r}{r!} + o(s^n), \quad s \downarrow 0.$$

Kako bi usporedili repno ponašanje funkcije F sa ponašanjem funkcije $\hat{F}$ oko nule, moramo eliminirati polinom $\sum_{r=0}^{n} \frac{\mu_r(-s)^r}{r!}$ iz razvoja u Taylorov red. To možemo učiniti oduzimanjem ili uzastopnim deriviranjem, pa imamo :

$$f_n(s) := (-1)^{n+1}\left\{\hat{F}(s) - \sum_{r=0}^{n} \frac{\mu_r(-s)^r}{r!}\right\}$$

$$g_n(s) := \frac{d^n f_n(s)}{ds^n} = \mu_n - (-1)^n \hat{F}^{(n)}(s),$$

pri čemu je $f_0(s) = g_0(s) = 1 - \hat{F}(s)$.

Teorem 5.1. *Za funkciju $l \in R_0$, $\mu_n < \infty$ te za $\alpha = n + \beta$, pri čemu je $n \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq \beta \leq 1$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne :*

$$f_n(s) \sim s^{\alpha} l\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{kada } s \downarrow 0; \tag{23}$$

$$g_n(s) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} s^{\beta} l\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{kada } s \downarrow 0; \tag{24}$$

$$\int_x^{\infty} t^n dF(t) \sim n!\, l(x) \quad \textit{kada } x \to \infty \textit{ i kada je } \beta = 0; \tag{25}$$

$$\overline{F}(x) \sim \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} l(x) \quad \textit{kada } x \to \infty \textit{ i kada je } 0 < \beta < 1; \tag{26}$$

$$\int_{[0,x]} t^{n+1} dF(t) \sim (n+1)!\, l(x) \quad \textit{kada } x \to \infty \textit{ i kada je } \beta = 1; \tag{27}$$

$$(-1)^{n+1} \hat{F}^{(n+1)}(s) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta)} s^{\beta-1} l\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{kada } s \downarrow 0 \textit{ i kada je } \beta > 0. \tag{28}$$

Dokaz. Kako $g_n(s) \downarrow 0$ kada $s \downarrow 0$ i kako je $f_n(s)$ n-terostruki integral od $g_n(s)$, ekvivalencija jednadžbi (23) i (24) slijedi nakon što n puta primjenimo Teorem o monotonoj gustoći. Za $\beta > 1$, slično se dobiva i ekvivalencija te dvije jednadžbe sa jednadžbom (28). Kako je $(-1)^{n+1}\hat{F}^{(n+1)}(\cdot)$ LS transformacija od $\int_{[0,x]} t^{n+1} dF(t)$, jednadžbe (27) i (28), (23) su ekvivalentne za $\beta = 1$. Zatim, $s^{-1}g_n(s)$ je LS transformacija funkcije $\int_0^x dt \int_t^\infty y^n dF(y)$, pa je prema Karamatinom Tauberovskom teoremu (24) ekvivalentno s

$$\int_0^x dt \int_t^\infty y^n dF(y) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\beta)} x^{1-\beta} l(x) \quad \text{kada } x \to \infty.$$

Za $\beta < 1$, prema Teoremu o monotonoj gustoći, prethodna jednadžba je ekvivalentna s

$$T_n(x) := \int_x^\infty y^n dF(y) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\beta)} x^{-\beta} l(x) \quad \text{kada } x \to \infty. \tag{29}$$

Za $\beta = 0$, ovo je (25) pa nam preostaje samo slučaj kada je $0 < \beta < 1$. Kako je $\mu_n < \infty$, $\int_0^\infty t^{n-1}\overline{F}(t)dt$ konvergira pa integracijom po dijelovima dobivamo

$$T_n(x) := \int_x^\infty y^n dF(y) = x^n \overline{F}(x) + n\int_x^\infty y^{n-1}\overline{F}(y)dy.$$

Uočimo da je

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}.$$

Prema tome, (26) implicira (29) prema Karamatinom teoremu. Ali također vrijedi i da je

$$\frac{x^n\overline{F}(x)}{T_n(x)} = 1 - \frac{nx^n}{T_n(x)}\int_x^\infty y^{-(n+1)} T_n(y)dy,$$

odakle primjenom Karamatinog teorema dobivamo da (29) implicira (25) - (27).

□

Posebno ćemo promotriti slučaj kada je $n = 0$.

Korolar 5.1. *Za funkciju $l \in R_0$ te za $0 \le \alpha \le 1$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne :*

$$1 - \hat{F}(s) \sim s^\alpha l\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{kada } s \downarrow 0;$$

$$\overline{F}(x) \sim \frac{l(x)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \quad \textit{kada } x \to \infty \textit{ i kada je } 0 \le \alpha < 1;$$

$$\begin{cases} \int_{[0,x]} t dF(t) \sim l(x) & \textit{kada } x \to \infty \textit{ i kada je } \alpha = 1 \\ \int_0^x \overline{F}(t)dt \sim l(x) & \textit{kada } x \to \infty \textit{ i kada je } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Dokaz. Kako bi dokazali drugu tvrdnju u slučaju kada je $\alpha = 1$, uočimo da $\int_0^x \overline{F}(t)dt$ ima LS - transformaciju $\frac{1-\hat{F}(s)}{s}$ i primjenimo Karamatin Tauberovski teorem. Ostale tvrdnje dokazuju se analogno kao i u prethodnom teoremu uz $n = 0$.

□

Postojanje momenata koji regularno variraju također je od velikog značaja za primjene. Uz funkcije f_n i g_n koje su definirane kao na početku potpoglavlja pogledajmo sljedeći teorem.

Teorem 5.2. *Neka je funkcija l lokalno ograničena na intervalu $[0,\infty)$ i sporo varirajuća. Neka je $n \in \mathbb{Z}^+$ i pretpostavimo $\mu_n < \infty$. Za $\alpha = n + \beta$, pri čemu je $0 \le \beta \le 1$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne :*

$$\int_0^1 f_n(s)\, l\left(\frac{1}{s}\right) s^{-(1+\alpha)}\, ds < \infty;$$

$$\int_0^1 g_n(s)\, l\left(\frac{1}{s}\right) s^{-(1+\beta)}\, ds < \infty;$$

$$E\left(X^n \int_1^{X\vee 1} \frac{l(t)}{t}\, dt\right) < \infty \quad \textit{kada je } \beta = 0;$$

$$E(X^\alpha\, l(X)) < \infty \quad \textit{kada je } 0 < \beta < 1;$$

$$E\left(X^{n+1} \int_X^{\infty} \frac{l(t)}{t}\, dt\right) < \infty \quad \textit{kada je } \beta = 1.$$

Dokaz ovoga teorema je sličan, ali jednostavniji od prethodnog pa ćemo ga izostaviti. Za više informacija vidi [2]. Posebno važan slučaj prethodnog teorema dobiva se za $n = 1, \beta = 0$ te $l \equiv 1$ pa ćemo ga navesti u obliku korolara i s tim završiti ovo potpoglavlje.

Korolar 5.2. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne :*

$$E(X \log^+ X) < \infty;$$

$$\int_0^1 \frac{\hat{F}(s) - 1 + \mu_1 s}{s^2}\, ds < \infty;$$

$$\int_0^1 \frac{\log \hat{F}(s) + \mu_1 s}{s^2}\, ds < \infty;$$

$$\int_0^1 \frac{\hat{F}(s) - e^{-\mu_1 s}}{s^2}\, ds < \infty.$$

5.2 Generalizacija Centralnog graničnog teorema

U ovom potpoglavlju promatrat ćemo slabu konvergenciju (konvergenciju po distribuciji) normalizirane i centrirane sume S_n nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Pitamo se kako odrediti niz normalizirajućih i centrirajućih konstanti te koje su moguće granične distribucije za ovakvu sumu. Kako bi pronašli te odgovore bit će nam potrebne stabilne distribucije.

Definicija 5.1. *Neka su X, X_1 i X_2 međusobno nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable te neka su c_1 i c_2 proizvoljni nenegativni brojevi. Ukoliko postoje realni brojevi a i $b > 0$ takvi da vrijedi*

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 \stackrel{d}{=} bX + a, \tag{30}$$

kažemo da je slučajna varijabla, odnosno njezina funkcija distribucije stabilna.

Pogledajmo sada sumu S_n nezavisnih, jednako distribuiranih i stabilnih slučajnih varijabli. Prema (30) postoji niz realnih konstanti a_n i $b_n > 0$ te $X = X_1$ takvih da je

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} b_n X + a_n, \quad n \geq 1.$$

To možemo zapisati i na sljedeći način

$$b_n^{-1}(S_n - a_n) \stackrel{d}{=} X,$$

pa zaključujemo da ako je distribucija stabilna, onda je ona granična distribucija za normaliziranu i centriranu sumu nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Također, prema [11] vrijedi i da je klasa stabilnih distribucija jedina klasa graničnih distribucija za ovakvu sumu.

Zbog važnosti stabilnih distribucija pogledajmo kako izgleda karakteristična funkcija (izvod karakteristične funkcije možete pronaći u [5].)

Teorem 5.3. *Stabilna distribucija ima sljedeću karakterističnu funkciju*

$$\phi_X(t) = Ee^{iXt} = \exp\left\{i\gamma t - c|t|^{\alpha}\big(1 - i\beta sign(t) z(t,\alpha)\big)\right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

pri čemu je γ realna konstanta, $c > 0$, $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$ te

$$z(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \text{ako je } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\ln|t|, & \text{ako je } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Najvažniji parametar u ovoj reprezentaciji je α zato što određuje osnovna svojstva ove klase distribucija kao što su momenti, repovi, asimptotsko ponašanje sumi itd. Nazivamo ga karakteristični eksponent, a pripadnu distribuciju α - stabilnom.

Sada nas zanima kako odabrati niz konstanti $a_n \in \mathbb{R}$ i $b_n > 0$ tako da vrijedi

$$b_n^{-1}(S_n - a_n) \xrightarrow{d} G_\alpha, \tag{31}$$

za neku α - stabilnu distribuciju G_α. Kako bi to napravili, sve funkcije distribucija F za koje normalizirana i centrirana suma S_n ima istu graničnu distribuciju trebamo svrstati u jednu klasu. Ta klasa se naziva domena atrakcije.

Definicija 5.2. *Kažemo da slučajna varijabla X, odnosno njezina funkcija distribucije F pripada domeni atrakcije α - stabilne distribucije G_α ako postoji niz realnih konstanti a_n i $b_n > 0$ takvih da vrijedi (31). Pišemo $X \in DA(G_\alpha)$ i kažemo da (X_n) zadovoljava Centralni granični teorem s limesom G_α.*

Sljedeći teorem u potpunosti karakterizira domenu atrakcije α - stabilne distribucije.

Teorem 5.4.

(i) Funkcija distribucije F pripada domeni atrakcije normalne distribucije ako i samo ako je

$$\int_{|y| \leq x} y^2 dF(y)$$

sporo varirajuća.

(ii) Funkcija distribucije F pripada domeni atrakcije α - stabilne distribucije, za neki $\alpha < 2$ ako i samo ako je

$$F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} L(x), \quad F(1-x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} L(x), \quad x \to \infty,$$

pri čemu je L sporo varirajuća, a c_1 i c_2 su nenegativne konstante takve da je $c_1 + c_2 > 0$.

Za dokaz teorema pogledajte [4]. Proučimo detaljnije slučaj kada je $\alpha = 2$. Ukoliko je $EX^2 < \infty$, onda je

$$\lim_{x\to\infty} \int_{|y|\le x} y^2 dF(y) = EX^2,$$

pa je $X \in DA(2)$. Također, prema Propoziciji 4.6, (vi), zaključujemo da je spora varijacija $\int_{|y|\le x} y^2 dF(y)$ ekvivalentna tvrdnji da je

$$G(x) = P(|X| > x) = o\left(x^{-2} \int_{|y|\le x} y^2 dF(y)\right) \quad \text{kada } x \to \infty. \tag{32}$$

Iz prethodnog razmatranja dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 5.3. *Slučajna varijabla X je u domeni atrakcije normalne distribucije ako i samo ako je $EX^2 < \infty$ ili $EX^2 = \infty$ i tvrdnja (32) vrijedi.*

U slučaju kada je $\alpha < 2$ imamo drugačiju situaciju. Ako je $X \in DA(\alpha)$, to nam implicira da je

$$G(x) = x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0, \tag{33}$$

pri čemu je L sporo varirajuća funkcija i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 G(x)}{\int_{|y|\le x} y^2 dF(y)} = \frac{2-\alpha}{\alpha}.$$

Druga jednadžba slijedi primjenom Propozicije 4.6,(v). Zbog toga je drugi moment slučajne varijable X beskonačan. Možemo primjetiti da je domena atrakcije normalne distribucije puno općenitija od domene atrakcije α - stabilne distribucije za $\alpha < 2$. Vidimo da $DA(2)$ sadrži barem sve distribucije koje imaju konačan drugi moment.

Iz prethodno razmatranih tvrdnji, o momentima distribucija iz $DA(\alpha)$ zaključujemo sljedeće:

Korolar 5.4. *Ako je $X \in DA(\alpha)$, onda je*

$$\begin{array}{ll} E|X|^\delta < \infty, & za\, \delta < \alpha \\ E|X|^\delta = \infty, & za\, \delta > \alpha \ i\ \alpha < 2 \end{array}.$$

Posebno,

$$\begin{array}{ll} var(X) = \infty, & za\, \alpha < 2 \\ E|X| < \infty, & za\, \alpha > 1 \\ E|X| = \infty, & za\, \alpha < 1 \end{array}.$$

Radi jednostavnosti, uvedimo sljedeće oznake :

$$K(x) = x^{-2} \int_{|y| \le x} y^2 dF(y), \quad x > 0,$$

$$Q(x) = G(x) + K(x) = P(|X| > x) + K(x), \quad x > 0.$$

Uočimo da je $Q(x)$ neprekidna i opadajuća na intervalu $[x_0, \infty)$, gdje x_0 označava infimum po svih vrijednostima koje $|X|$ može poprimiti.

U nastavku ćemo iskazati dvije propozicije koje nam govore kako izabrati niz normalizirajućih i centrirajućih konstanti. Dokazi ovih propozicija mogu se pronaći u [6].

Propozicija 5.1. *Niz normalizirajućih konstanti u (31) za $F \in DA(\alpha)$ može se odabrati kao jedinstveno rješenje jednadžbe*

$$Q(b_n) = n^{-1}, \quad n \ge 1.$$

Specijalno, ako je $\sigma^2 = var(X) < \infty$ i $EX = 0$, onda

$$b_n \sim n^{\frac{1}{2}} \sigma, \quad n \to \infty.$$

Za $\alpha < 2$ možemo na alternativan način odabrati b_n tako da je

$$b_n = inf\{y : G(y) < n^{-1}\}, \quad n \ge 1. \tag{34}$$

Uočimo da (34) implicira da

$$G(b_n) \sim n^{-1}, \quad n \to \infty,$$

a to, s obzirom na (33), implicira da je

$$b_n = n^{\frac{1}{\alpha}} L(n), \quad n \ge 1,$$

za odgovarajuću sporo varirajuću funkciju L.

Propozicija 5.2. *Niz centrirajućih konstanti a_n u (31) može se odabrati kao*

$$a_n = n \int_{|y| \le b_n} y dF(y), \tag{35}$$

gdje je b_n niz definiran kao u prethodnoj propoziciji. Specijalno, možemo uzeti $a_n = \tilde{a}n$, gdje je

$$\tilde{a} = \begin{cases} \mu, & \text{ako je } \alpha \in (1,2] \\ 0, & \text{ako je } \alpha \in (0,1) \\ 0, & \text{ako je } \alpha = 1 \text{ i } F \text{ je simetrična} \end{cases} . \tag{36}$$

Sve što smo u gornjem razmatranju zaključili o konvergenciji sume S_n, možemo sažeto iskazati u obliku sljedećeg teorema :

Teorem 5.5. *(Generalizacija Centralnog graničnog teorema) Pretpostavimo da je $F \in DA(\alpha)$, za neki $\alpha \in (0,2]$.*

(i) Ako je $EX^2 < \infty$, onda

$$\left(\sigma n^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}(S_n - \mu n) \xrightarrow{d} \Phi,$$

gdje je Φ standardna normalna distribucija s očekivanjem 0 i varijancom 1.

(ii) Ako je $EX^2 = \infty$ i $\alpha = 2$ ili ako je $\alpha < 2$, onda

$$\left(n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)\right)^{-1}(S_n - a_n) \xrightarrow{d} G_\alpha,$$

za α - stabilnu distribuciju G_α, za odgovarajuću sporo varirajuću funkciju L i niz centrirajućih konstanti definiran kao u (35). Posebno,

$$\left(n^{\frac{1}{\alpha}} L(n)\right)^{-1}(S_n - \tilde{a} n) \xrightarrow{d} G_\alpha,$$

gdje je $\tilde{a}$ definirana kao u (36).

5.3 Domena atrakcije maksimuma

U ovom potpoglavlju $X, X_1, X_2, \dots$ predstavljaju niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli, koje nisu konstantne i imaju zajedničku funkciju distribucije F.

Uzorački maksimum M_n slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots, X_n$ definira se na sljedeći način :

$$M_1 = X_1, \quad M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 2.$$

Bit će nam potrebna i funkcija distribucije maksimuma M_n koju nije teško izračunati:

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Sve tvrdnje koje ćemo u nastavku navesti za maksimum analogno vrijede i za minimum primjenom identiteta

$$\min(X_1, \dots, X_n) = -\max(-X_1, \dots, -X_n).$$

Promatrat ćemo slabu konvergenciju normaliziranog i centriranog maksimuma nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Slično kao i u prethodnom poglavlju, želimo odrediti granične distribucije te niz normalizirajućih i centralizirajućih konstanti. U nastavku ćemo te konstante zvati normirajućim konstantama.

Idući rezultat nam govori koje su sve moguće granične distribucije normiranog maksimuma M_n.

Teorem 5.6. *(Fisher - Tippettov teorem) Neka je (X_n) niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Ako postoji niz normirajućih konstanti $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ i neka funkcija distribucije H (koja nije konstantna) tako da vrijedi*

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H,$$

onda H pripada jednoj od sljedećih distribucija :

$$\textit{Fréchetova}: \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & \textit{ako je } x > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0.$$

$$\textit{Weibullova}: \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\}, & \textit{ako je } x \leq 0 \\ 1, & \textit{ako je } x > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0.$$

$$\textit{Gumbelova}: \quad \Lambda(x) = \exp\left\{-e^{-x}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz teorema možete pronaći u [9]. Funkcije distribucija $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ i $\Lambda(x)$ nazivamo standardnim funkcijama distribucija ekstremne vrijednosti, a pripadne slučajne varijable standardnim ekstremnim slučajnim varijablama. Funkcije distribucija koje su istog tipa kao i $\Phi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x)$ i $\Lambda(x)$ nazivamo distribucijama ekstremne vrijednosti, a pripadne slučajne varijable ekstremne slučajne varijable.

Dakle, jedine granične distribucije za normirani maksimum su distribucije ekstremnih vrijednosti. Ostaje nam još vidjeti kako odabrati niz normirajućih konstanti $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi

$$c_n{}^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H, \tag{37}$$

za neku distribuciju ekstremnih vrijednosti H.

Kako bi došli do zaključka, pogledajmo prvo definiciju i karakterizaciju maksimalne domene atrakcije.

Definicija 5.3. *Kažemo da slučajna varijabla X, odnosno njezina funkcija distribucije F pripada maksimalnoj domeni atrakcije od distribucije ekstremnih vrijednosti H ako postoji niz normirajućih konstanti $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi (37). Pišemo $X \in MDA(H)$.*

Propozicija 5.3. *Funkcija distribucije F pripada maksimalnoj domeni atrakcije od distribucije ekstremnih vrijednosti H sa nizom normirajućih konstanti $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}$ ako i samo ako*

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(c_n x + d_n) = -\ln H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kada je $H(x) = 0$, limes interpretiramo kao ∞.

Za svaku standardnu distribuciju ekstremnim vrijednosti postoji karakterizacija njezine maksimalne domene atrakcije. Mi ćemo u radu vidjeti kako maksimalna domena atrakcije izgleda za Fréchetovu distribuciju $\Phi_\alpha, \alpha > 0$.

Definicija 5.4. *Neka je h neopadajuća funkcija na $\mathbb{R}$. Generalizirani inverz funkcije h definira se kao*

$$h^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq t\}.$$

Posebno, generalizirani inverz funkcije distribucije F

$$F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1,$$

nazivamo funkcija kvantila od F.

Taylorovim razvojem dobivamo

$$1-\Phi_\alpha(x) = 1-\exp\left\{-x^{-\alpha}\right\} \sim x^{-\alpha} \quad \text{kada } x \to \infty,$$

pa se prema tome rep distribucije Φ_α smanjuje polinomijalnom brzinom. Pokazat ćemo da se maksimalna domena atrakcije od Φ_α sastoji od funkcija distribucija F čiji repovi regularno variraju s indeksom $-\alpha$. Kod $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ za niz konstanti d_n možemo uzeti nule jer centriranje nije nužno. Niz konstanti c_n određujemo na sljedeći način :

$$\begin{aligned} c_n = F^{\leftarrow}\left(1-n^{-1}\right) &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1-n^{-1}\right\} \\ &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \left(\frac{1}{\overline{F}}\right)(x) \geq n\right\} \\ &= \left(\frac{1}{\overline{F}}\right)^{\leftarrow}(n). \end{aligned} \tag{38}$$

Teorem 5.7. *Funkcija distribucije F pripada maksimalnoj domeni atrakcije od Φ_α, $\alpha > 0$, ako i samo ako je $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, za neku sporo varirajuću funkciju L. Ako je $F \in MDA(\Phi_\alpha)$, onda*

$${c_n}^{-1} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha,$$

gdje je c_n niz normirajućih konstanti koje odabiremo kao u (38).

Dokaz. Neka je $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, za $\alpha > 0$. Zbog načina na koji smo odabrali niz c_n i regularne varijacije vrijedi da je

$$\overline{F}(c_n) \sim n^{-1} \quad \text{kada } n \to \infty,$$

pa prema tome $\overline{F}(c_n) \to 0$ kada uzmemo da $c_n \to \infty$. Za $x > 0$

$$n\overline{F}(c_n x) \sim \frac{\overline{F}(c_n x)}{\overline{F}(c_n)} \to x^{-\alpha} \quad \text{kada } n \to \infty.$$

Za $x < 0$ odmah slijedi da je $F^n(c_n x) \leq F^n(0) \to 0$, s obzirom da regularna varijacija zahtjeva da je $F(0) < 1$. Prema Propoziciji 5.3, $F \in MDA(\Phi_\alpha)$. Obratno, pretpostavimo da je

$$\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = \Phi_\alpha(x),$$

za sve $x > 0$ i odgovarajući niz konstanti $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} F^n(c_{[ns]} x + d_{[ns]}) = \Phi_\alpha^{\frac{1}{s}}(x) = \Phi_\alpha(s^{\frac{1}{\alpha}} x), \quad s > 0, x > 0.$$

Prema Teoremu o tipovima konvergencije imamo

$$\frac{c_{[ns]}}{c_n} \to s^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{i} \quad \frac{d_{[ns]} - d_n}{c_n} \to 0.$$

Prema tome, (c_n) je regularno varirajući niz u smislu Definicije 4.2, posebno $c_n \to \infty$. Pretpostavimo da je $d_n = 0$ i $n\overline{F}(c_n x) \to x^{-\alpha}$. Tada je $\overline{F} \in R_{-\alpha}$ prema Propoziciji 4.6,(i). Slučaj $d_n \neq 0$ je puno kompliciraniji. Mora se pokazati da $\frac{d_n}{c_n} \to 0$. Ako to vrijedi, možemo opet iskoristiti gornji argument zamjenom d_n s 0. Više o ovome možete pronaći u [2].

□

Za kraj pogledajmo nekoliko primjera distribucija iz $MDA(\Phi_\alpha)$.

Primjer 5.1. *Sljedeće distribucije nalaze se u maksimalnoj domeni atrakcije od* Φ_α *:*

(i) Pareto distribucija čija je repna funkcija distribucije dana s

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + x}\right)^{\alpha}, \quad \alpha, \kappa > 0;$$

(ii) Cauchyjeva distribucija;

(iii) Burrova distribucija čija je repna funkcija distribucije dana s

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + x^{\tau}}\right)^{\alpha}, \quad \alpha, \kappa, \tau > 0;$$

(iv) α *- stabilna distribucija s eksponentom* $\alpha < 2$.

Sve ove distribucije su slične Pareto distribuciji u smislu da je njihov desni rep oblika

$$\overline{F}(x) \sim Kx^{-\alpha}, \quad x \to \infty,$$

za neke $K, \alpha > 0$. *Očito je* $\overline{F} \in R_{-\alpha}$ *što implicira da je* $F \in MDA(\Phi_\alpha)$.
Za niz normirajućih konstanti iz Teorema 5.7 možemo uzeti $c_n = (Kn)^{\frac{1}{\alpha}}$, *pa vrijedi*

$$(Kn)^{\frac{-1}{\alpha}} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha.$$

Posebno, Cauchyjeva distribucija nalazi se u maksimalnoj domeni atrakcije od Φ_1. *Primjenom L'Hopitalovog pravila dobivamo da je*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{(\pi x)^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\pi^{-1}x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi x^2}{\pi(1+x^2)} = 1,$$

tj. $\overline{F}(x) \sim (\pi x)^{-1}$. *To nam implicira da je*

$$\begin{aligned} P\left(M_n \le \frac{nx}{\pi}\right) &= \left(1 - \overline{F}\left(\frac{nx}{\pi}\right)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{nx} + o(1)\right)^n \\ &\to \exp\left\{-x^{-1}\right\} = \Phi_1(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Literatura

[1] N. H. BINGHAM, R. A. DONEY, Asymptotic properties of super - critical branching processes I : The Galton - Watson process, Advances in Applied Probability, 6, 711 - 731.

[2] N. H. BINGHAM, C. M. GOLDIE, J. L. TEUGELS, Regular variation, Cambridge University Press, Cambridge, 1987

[3] P. EMBRECHTS, C. KLÜPPELBERG, T. MIKOSCH, Modelling extremal events for insurance and and finance, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1997

[4] W. FELLER, An introduction to probability theory and its applications II, Wiley, New York, 1971

[5] P. HALL, A comedy of errors : the canonical form for a stable characteristic function, BLMS, 13, 23. - 28.

[6] I. A. IBRAGIMOV, YU. V. LINNIK, Independent and stationary sequences of random variable, Woltrs - Noordhoff, Graninger, 1971

[7] D.JUKIĆ, Mjera i integral, Odjel za matematiku, Osijek, 2012

[8] J. F. C. KINGMAN, S. J. TAYLOR, Introduction to measure and probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1966

[9] S. I. RESNICK, Extreme values, regular variation and point processes, Springer, New York, 1987

[10] S. I. RESNICK, Heavy-Tail Phenomena, Springer, New York, 2007

[11] G. SAMORODNITSKY, M. S. TAQQU, Stable non - Gaussian random processes : Stochastic models with infinite variance, Chapman and Hall, London, 1994

[12] E. SENETA, Regularly varying functions, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1976

[13] D. V. WIDDER, The Laplace transform, Princeton University Press, Princeton, 1941

Sažetak

U ovome radu definirali smo sporo, odnosno regularno varirajuće funkcije i naveli nekoliko primjera. Iskazali smo i dokazali njihova osnovna svojstva među kojima su najvažniji Karamatin teorem i Karamatin Tauberovski teorem. Drugi dio rada bavi se primjenama u vjerojatnosti. Vidjeli smo nekoliko svojstava transfomacija funkcija distribucija koja dobivamo primjenom Karamatinog Tauberovskog teorema. Proučavali smo slabu konvergenciju normalizirane sume, odnosno maksimuma nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

Ključne riječi: sporo varirajuće funkcije, regularno varirajuće funkcije, Karamatin teorem, Karamatin Tauberovski teorem, funkcija distribucije, transformacije, suma nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli, uzorački maksimum, slaba konvergencija, Fisher - Tippettov teorem

Summary

In this paper we defined slowly and regularly varying functions and gave a few examples. We stated and proved their basic properties, among which the most important are Karamata's theorem and Karamata's Tauberian theorem. The second part of the paper deals with application in probability. We saw several properties of the transformed distribution function which we obtain by applying the Karamata's Tauberian theorem. We studied weak convergence of the normalized sum, i.e., the maximum of independent and equally distributed random variables.

Key words: slowly variation, regular variation, Karamata's theorem, Karamata's Tauberian theorem, distribution function, transforms, sums of iid random variables, sample maxima, weak convergence, Fisher - Tippett theorem

Životopis

Rođena sam 5. listopada 1995. godine u Osijeku. 2002. godine upisujem Osnovnu školu Vladimir Nazor u Čepinu, a nakon toga III. gimnaziju u Osijeku. 2014. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom prve godine studija radila sam u restoranu brze prehrane Surfer u Osijeku. Preddiplomski studij završila sam 2018. godine uz završni rad "Nejednakosti za gama i beta funkcije". Na istom fakultetu 2018. godine upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika.