Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Paula Džigumović

Specijalni realni vektorski prostori

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Paula Džigumović

Specijalni realni vektorski prostori

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2021.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Vektorski prostori **2**
1.1 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ 2
1.2 Funkcije 3
1.3 Operatori 4

2 Motivacija **6**

3 Unitaran prostor **8**

4 Normiran prostor **11**

5 Metrički prostor **16**
5.1 Nizovi u metričkom prostoru 20

6 Potpuni prostori **23**
6.1 Banachov prostor 23
6.2 Hilbertov prostor 26

7 Topološki prostor **29**
7.1 Baza topologije 31

Literatura **33**

Sažetak **35**

Summary **35**

Životopis **36**

Uvod

Vektorski prostor jedna je od najvažnijih struktura koju skupovi elemenata mogu imati. Uz prikladno definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom iz polja, skup postaje vektorski prostor, no definiranjem dodatnih pojmova i navođenjem tvrdnji koje ih povezuju, pojam vektorskog prostora može se proširiti do određenih specijalnih prostora. U tim prostorima mnogi matematički pojmovi, kao što su funkcije i operatori, zadovoljavaju svojstva koja imaju široku primjenu u raznim područjima. U ovom radu definirat ćemo nekoliko bitnih specijalnih vektorskih prostora, iskazati i dokazati važne tvrdnje koje vrijede u pojedinom prostoru te opisati kako su ti prostori međusobno povezani i kako se trenutno promatrani prostor može *načiniti* koristeći svojstva prethodno promatranog prostora.

U poglavlju *Vektorski prostori* definirat ćemo vektorski prostor te navesti $\mathbb{R}^n$ kao primjer vektorskog prostora. U potpoglavljima *Funkcije* i *Operatori* definirat ćemo pojam funkcije, odnosno operatora te iskazati osnovna svojstva i tvrdnje koje će biti potrebne za dokazivanje važnih tvrdnji o našim specijalnim vektorskim prostorima.

Sljedeće poglavlje, *Motivacija*, sadrži grafički prikaz koji ilustrira veze među prostorima koji će se promatrati u ovom radu te objašnjava važnost uvođenja specijalnih vektorskih prostora.

Poglavlje *Unitaran prostor* navodi svojstva i definiciju skalarnog produkta i unitarnog prostora, dok se u sljedećem poglavlju naslovljenom *Normiran prostor* definira norma te se pojam unitarnog prostora proširuje do pojma normiranog prostora.

U poglavlju *Metrički prostor* uvodi se definicija metrike i pojam metričkog prostora, a u potpoglavlju *Nizovi u metričkom prostoru* navedene su osnovne tvrdnje o nizovima u ovom prostoru koje su potrebne kako bi se u sljedećem poglavlju, *Potpuni prostori*, mogli definirati Banachov i Hilbertov prostor.

Zadnje poglavlje, *Topološki prostori*, opisuje proširenje pojma metričkog prostora do topološkog prostora preko otvorenih skupova, a u potpoglavlju *Baza topologije* dokazana je upravo karakterizacija baze topologije.

1 Vektorski prostori

Neka je $\mathbb{F}$ skup s barem dva elementa na kojem su zadane dvije binarne operacije; zbrajanje, $+: \mathbb{F}\times\mathbb{F}\to\mathbb{F}$, $(\lambda,\mu)\mapsto\lambda+\mu$, i množenje, $\cdot: \mathbb{F}\times\mathbb{F}\to\mathbb{F}$, $(\lambda,\mu)\mapsto\lambda\mu$, takve da su $(\mathbb{F},+)$ i $(\mathbb{F}\setminus\{0\},\cdot)$ Abelove grupe, tj. da vrijede svojstva:

1. asocijativnost, tj. $(\lambda+\mu)+\nu=\lambda+(\mu+\nu)$, $\forall\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{F}$, odnosno $(\lambda\mu)\nu=\lambda(\mu\nu)$, $\forall\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$;
2. postojanje neutralnog elementa, tj. $\exists\ 0\in\mathbb{F}$ tako da je $0+\lambda=\lambda+0=\lambda$, $\forall\lambda\in\mathbb{F}$, odnosno $\exists 1\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$ tako da je $1\cdot\lambda=\lambda\cdot 1=\lambda$, $\forall\lambda\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$;
3. postojanje inverznog elementa, tj. $\forall\lambda\in\mathbb{F}\ \exists\lambda'\in\mathbb{F}$ takav da je $\lambda+\lambda'=\lambda'+\lambda=0$, odnosno $\forall\lambda\in\mathbb{F}\setminus\{0\}\ \exists\lambda^{-1}\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$ takav da je $\lambda\lambda^{-1}=\lambda^{-1}\lambda=1$;
4. komutativnost, tj. $\lambda+\mu=\mu+\lambda$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{F}$, odnosno $\lambda\mu=\mu\lambda$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$,

i neka je množenje distributivno u odnosu na zbrajanje, tj. vrijedi

$$\lambda(\mu+\nu)=\lambda\mu+\lambda\nu,\quad \forall\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{F}.$$

U tom slučaju skup $\mathbb{F}$ naziva se polje.

Neka je V neprazan skup. Definirajmo na V operacije zbrajanja, $+: V\times V\to V$, $(x,y)\mapsto x+y$, i množenja elementima polja $\mathbb{F}$, $\cdot: \mathbb{F}\times V\to V$, $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$, tako da je V komutativna grupa s obzirom na operaciju zbrajanja (dakle, vrijedi asocijativnost, postoji neutralni element za zbrajanje, kao i inverzni element te dodatno vrijedi komutativnost zbrajanja u V). Neka također vrijedi distributivnost u odnosu na zbrajanje u V te distributivnost u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{F}$, kvaziasocijativnost ($(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{F}$ i $\forall x\in V$) i neka vrijedi svojstvo $1x=x$, $\forall x\in V$. U tom slučaju $(V,+,\cdot)$ naziva se vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

Najčešće se promatraju vektorski prostori nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ za koje tada kažemo da su *realni*, odnosno *kompleksni*. U nastavku ovog rada promatrat ćemo isključivo realne vektorske prostore.

1.1 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ oznaka je za skup svih uređenih n-torki realnih brojeva,

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\colon x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}.$$

Definirajmo sljedeće operacije:

(i) $+: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n):=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$;

(ii) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) \coloneqq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Skup $\mathbb{R}^n$ s prethodno definiranim operacijama čini realan vektorski prostor, tj. vrijede sljedeća svojstva:

(V1) asocijativnost:

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n;$$

(V2) postojanje neutralnog elementa:

$$\exists\, 0 \in \mathbb{R}^n \text{ tako da je } 0 + x = x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

(V3) postojanje suprotnog elementa:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists x' \in \mathbb{R}^n \text{ takav da je } x + x' = x' + x = 0;$$

(V4) komutativnost:

$$x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

(V5) distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{R}$:

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ i } \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

(V6) distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ i } \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

(V7) kvaziasocijativnost:

$$(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ i } \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

(V8) netrivijalnost množenja:

$$1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1.2 Funkcije

U ovom potpoglavlju navest ćemo osnovna svojstva funkcija, s naglaskom na realne funkcije realne varijable, koja će kasnije biti korištena prilikom dokazivanja važnih tvrdnji o specijalnim vektorskim prostorima.

Definicija 1.1. *Neka su D i K neprazni skupovi. Postupak f koji svakom elementu skupa D pridružuje točno jedan element skupa K naziva se funkcija ili preslikavanje sa D u K. Pišemo $f\colon D \to K$.*

Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naziva se još i realna funkcija realne varijable.

Definicija 1.2. *Svaka funkcija $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ naziva se niz realnih brojeva.*

Niz ćemo označavati s (x_k), pri čemu je x_k k-ti član niza.

Definicija 1.3. *Neka je (x_k) niz realnih brojeva. Kažemo da je taj niz konvergentan ako postoji realan broj x_0 takav da $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_k - x_0| < \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$.*

Broj x_0 iz Definicije 1.3 naziva se limes niza. Osim limesa niza, definirat ćemo i limes funkcije u nekoj točki.

Definicija 1.4. *Neka je $x_0 \in [a, b]$ i $f\colon D \to \mathbb{R}$, pri čemu je $D = [a, b] \setminus \{x_0\}$. Kažemo da je L limes funkcije f u točki x_0 i pišemo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ako za svaki niz (x_k) iz D, $x_k \neq x_0$, koji konvergira prema x_0 niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_k))$ konvergira prema L.*

Još jedno važno svojstvo funkcija jeste neprekidnost.

Definicija 1.5. *Kažemo da je funkcija $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ ako ona ima limes u točki x_0 koji je jednak $f(x_0)$, tj. ako je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkcija je neprekidna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako je neprekidna u svakoj točki tog intervala.

1.3 Operatori

Od posebne važnosti su funkcije koje elemente vektorskog prostora preslikavaju u elemente vektorskog prostora (istog tog ili nekog drugog).

Definicija 1.6. *Neka su V i W vektorski prostori. Svako preslikavanje $A\colon V \to W$ naziva se operator.*

Za operator A kažemo da je aditivan ako vrijedi

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \quad \forall x, y \in V.$$

Ako su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, kažemo da je operator A homogen ako je

$$A(\lambda x) = \lambda A(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \text{ i } \forall x \in V.$$

Ako je operator A aditivan i homogen, tj.

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ i } \forall x, y \in V,$$

kažemo da je operator A linearan. Za linearne operatore umjesto $A(x)$ pišemo Ax. S $L(V,W)$ označavat ćemo skup svih linearnih operatora $A\colon V \to W$.

Na skupu $L(V,W)$ možemo definirati operacije zbrajanja i množenja skalarom iz polja $\mathbb{F}$. Neka su $A, B \in L(V,W)$. Zbroj operatora A i B definira se kao operator $A+B\colon V \to W$ zadan s

$$(A+B)x = Ax + Bx, \quad x \in V.$$

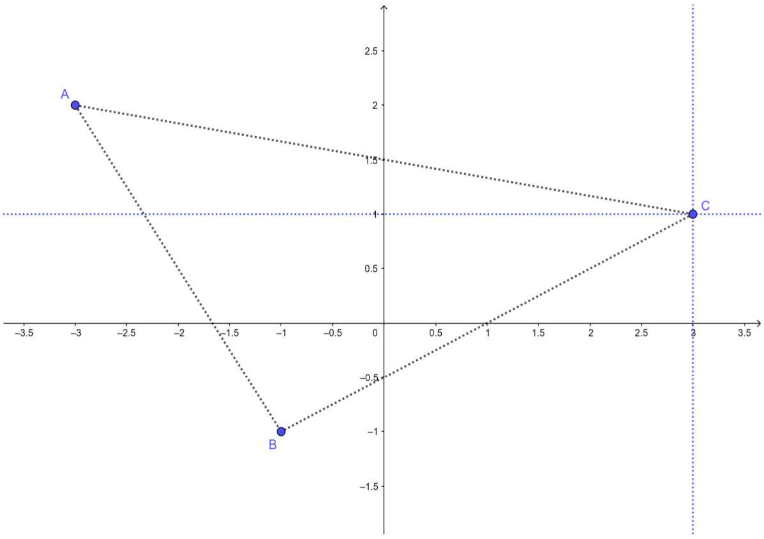
Množenje operatora skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$ definira se kao operator $\lambda A\colon V \to W$ zadan s

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax), \quad x \in V.$$

Tako definirani operatori su linearni te uz tako definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom skup $L(V,W)$ postaje vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

2 Motivacija

Realan vektorski prostor struktura je koja povezuje elemente promatranog skupa V i skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ primjer je jednog takvog prostora, jer zadovoljava svojstva *(V1)-(V8)*. Na takvom prostoru definirano je zbrajanje elemenata i množenje elemenata realnim brojevima, ali te nam operacije ne daju puno mogućnosti za promatranje svojstava među elementima. Uređene n-torke realnih brojeva možemo grafički prikazati; npr. za $n = 2$ uređene parove možemo prikazati kao točke u koordinatnom sustavu.



Slika 1: Točke u koordinatnoj ravnini

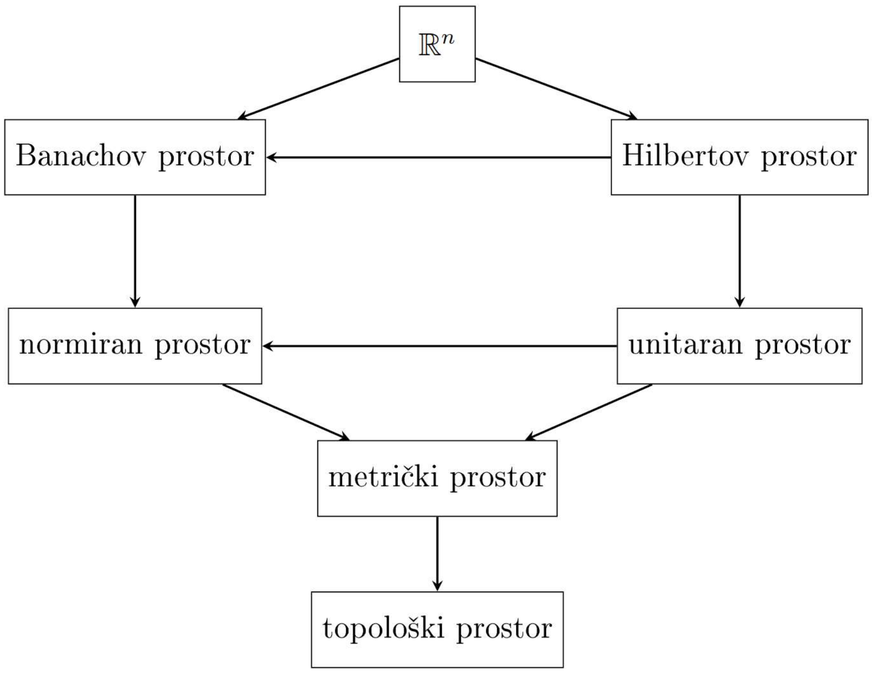
Promatrajući Sliku 1, prirodno se postavlja pitanje je li moguće definirati udaljenost između dvije točke i je li smisleno definirati duljinu određenog objekta. Koristeći same operacije koje čine vektorski prostor, to nije moguće, stoga je potrebno definirati nova preslikavanja koja će reprezentirati udaljenost dviju točaka, duljinu dužine čije su krajnje točke ishodište koordinatnog sustava i proizvoljna točka ravnine i slično.

Definiranjem takvih preslikavanja obogaćuje se struktura samog prostora, pa se nameće i promatranje svojstava određenih matematičkih pojmova unutar tih prostora. Na primjer, hoće li i na koji način djelovanje operatora na elemente vektorskog prostora utjecati na njihovu strukturu.

Također, postavlja se pitanje imaju li podskupovi promatranog skupa V svojstva koja mogu obogatiti strukturu samog prostora. Na primjeru prostora $\mathbb{R}^n$ može se promotriti postoji li smislen način za "stavljanje" uređenih n-torki u podskupove skupa $\mathbb{R}^n$ pomoću kojih će se moći definirati nova struktura na tom prostoru.

Uvođenjem preslikavanja kao što su skalarni produkt, norma i metrika te familije skupova kao što je topologija, realan vektorski prostor može se proširiti do prostora u kojima će biti moguće odrediti spomenuta svojstva elemenata. Uvođenjem tih pojmova dobit će se, redom, unitaran prostor, normiran prostor, metrički prostor te topološki prostor. Ti prostori se tada, uvođenjem još dodatnih pojmova i svojstava, mogu podijeliti na neke specifične prostore. Tako npr. možemo definirati Banachov i Hilbertov prostor koji su dodatno potpuni.

Pokazat će se da iz pojedinog prostora možemo načiniti novu strukturu, odnosno definirati preslikavanje uz koje će se struktura prostora proširiti. Na taj način će se vidjeti da je svaki unitaran prostor normiran, svaki normiran prostor metrički i svaki metrički prostor topološki. Također, svaki Hilbertov prostor je potpun i unitaran, pa je i Banachov, jer je Banachov prostor potpun i normiran. Ovi odnosi prikazani su na Slici 2.



Slika 2: Odnosi među prostorima

3 Unitaran prostor

Definicija 3.1. *Neka je X realan vektorski prostor. Preslikavanje $\langle\cdot|\cdot\rangle : X\times X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

(U1) $\langle x|x\rangle \geq 0,\ \forall x \in X;$
(U2) $\langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0;$
(U3) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle,\ \forall x, y \in X;$
(U4) $\langle \lambda x|y\rangle = \lambda\,\langle x|y\rangle,\ \forall x, y \in X$ *i* $\forall \lambda \in \mathbb{R};$
(U5) $\langle x + y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle,\ \forall x, y, z \in X$

naziva se skalarni produkt na X.
Uređen par $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ naziva se unitaran prostor.

U prostoru $\mathbb{R}^n$ skalarni produkt definiran je kao funkcija $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\langle (x_1, \ldots, x_n)|(y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

a naziva se još i *standardni* ili *euklidski* skalarni produkt.

Napomena 1. *Lako se pokaže da je prethodno definirana funkcija skalarni produkt. Zaista, ako je $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan, tada je*

$$\langle (x_1, \ldots, x_n)|(x_1, \ldots, x_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Kako je kvadrat realnog broja uvijek nenegativan, vrijedi svojstvo (U1). Tako definirana funkcija zadovoljava i svojstvo (U2) jer suma n kvadrata realnih brojeva može biti jednaka nula jedino u slučaju kada su svi kvadrati jednaki nula, odnosno ako je $x_i^2 = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, a obrat vrijedi jer je

$$\langle (0, \ldots, 0)|(0, \ldots, 0)\rangle = \sum_{i=1}^{n} 0^2 = 0.$$

Svojstvo (U3) je zadovoljeno zbog komutativnosti množenja realnih brojeva.
Za proizvoljne $\lambda \in \mathbb{R}$ i $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ je

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(x_1, \ldots, x_n)|(y_1, \ldots, y_n)\rangle &= \langle (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)|(y_1, \ldots, y_n)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&= \lambda \langle (x_1, \ldots, x_n)|(y_1, \ldots, y_n)\rangle,
\end{aligned}$$

pa vrijedi svojstvo (U4).
Za proizvoljne $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ *je*

$$\begin{aligned}\langle(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)|(z_1,\dots,z_n)\rangle &= \langle(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)|(z_1,\dots,z_n)\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_iz_i+\sum_{i=1}^{n}y_iz_i,\end{aligned}$$

a kako je

$$\sum_{i=1}^{n}x_iz_i=\langle(x_1,\dots,x_n)|(z_1,\dots,z_n)\rangle \quad i \quad \sum_{i=1}^{n}y_iz_i=\langle(y_1,\dots,y_n)|(z_1,\dots,z_n)\rangle,$$

slijedi svojstvo (U5). □

Vektor $x\in X$ može se skalarno pomnožiti samim sobom ili vektorom $y\in X$ različitim od x. Drugim riječima, za dana dva vektora x i y u unitarnom prostoru možemo računati tri različita skalarna produkta, $\langle x|x\rangle$, $\langle y|y\rangle$ i $\langle x|y\rangle$. Sada ćemo pokazati u kakvom su oni odnosu.

Teorem 3.1 (Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost)**.** *Neka je* $(X,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ *unitaran prostor. Tada je*

$$|\langle x|y\rangle|^2\le\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle,\quad \forall x,y\in X.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su x *i* y *linearno zavisni.*

Dokaz. Ako je $y=0$, tada je $\langle y|y\rangle=0$. Zato je i $\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle=0$. Također je i $\langle x|y\rangle=\langle x|0\rangle=0$. Dakle, lijeva i desna strana nejednakosti su jednake, pa za $y=0$ vrijedi jednakost.

Neka je $y\neq0$ i $e=\frac{y}{\sqrt{\langle y|y\rangle}}$. Tada je

$$\langle e|e\rangle=\left\langle\frac{y}{\sqrt{\langle y|y\rangle}}\middle|\frac{y}{\sqrt{\langle y|y\rangle}}\right\rangle=\frac{1}{\langle y|y\rangle}\langle y|y\rangle=1.$$

Zbog svojstva *(U1)* je

$$\langle x-\langle x|e\rangle e|x-\langle x|e\rangle e\rangle\ge0$$

pa daljnjim sređivanjem dobivamo

$$0\le\langle x-\langle x|e\rangle e|x-\langle x|e\rangle e\rangle=\langle x|x\rangle-2\langle x|e\rangle\langle e|x\rangle+|\langle x|e\rangle|^2=\langle x|x\rangle-|\langle x|e\rangle|^2.$$

Dakle, vrijedi

$$|\langle x|e\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle,$$

iz čega slijedi tražena nejednakost.

Nadalje, pretpostavimo da je $|\langle x|y\rangle|^2 = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$. Tada je

$$\langle x - \langle x|e\rangle e | x - \langle x|e\rangle e\rangle = 0,$$

pa zbog svojstva *(U2)* vrijedi $x = \langle x|e\rangle e$, odnosno $x = ky$, pri čemu je $k = \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle}$. Dakle, vektori x i y su linearno zavisni.

Obratno, ako je $x = ky$, uvrštavanjem u $|\langle x|y\rangle|^2$ i $\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$ dobije se tražena jednakost. ■

4 Normiran prostor

Definicija 4.1. *Neka je X realan vektorski prostor. Preslikavanje $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

(N1) $||x|| \geq 0$, $\forall x \in X$;
(N2) $||x|| = 0 \iff x = 0$;
(N3) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *i* $\forall x \in X$;
(N4) (nejednakost trokuta) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, $\forall x, y \in X$

naziva se norma na X.
Uređen par $(X, ||\cdot||)$ naziva se normiran prostor.

Primjer 4.1. *Pokažimo da je preslikavanje $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$, $||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ norma. Treba provjeriti vrijede li za to preslikavanje svojstva (N1)-(N4). Svojstva (N1) i (N2) direktno slijede primjenom svojstava (U1) i (U2) skalarnog produkta.*
Za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x \in X$ je

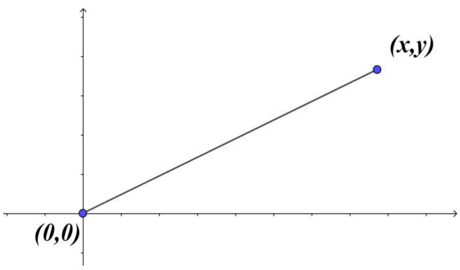
$$||\lambda x|| = \sqrt{\langle \lambda x|\lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x|x\rangle} = |\lambda| \cdot ||x||,$$

pa vrijedi svojstvo (N3).
Svojstvo (N4) slijedi primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle \\ &\leq \langle x|x\rangle + 2|\langle x|y\rangle| + \langle y|y\rangle \\ &\leq \langle x|x\rangle + 2\sqrt{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle} + \langle y|y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

□

Napomena 2. *Neka je $X = \mathbb{R}^2$ i (x, y) proizvoljna točka tog prostora. Norma $||\cdot||$ definirana pomoću standardnog skalarnog produkta računa duljinu dužine čije su krajnje točke ishodište $(0,0)$ i točka (x, y) (vidjeti Sliku 3).*



Slika 3: Dužina s krajnjim točkama $(0,0)$ i (x, y)

Duljina te dužine iznosi

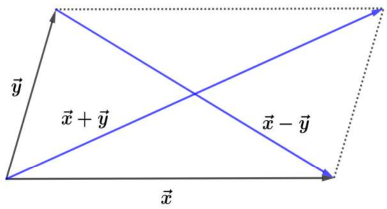
$$||(x,y)|| = \sqrt{\langle (x,y)|(x,y)\rangle} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$\square$

Neka su x, y elementi normiranog prostora X. Jednakost

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

naziva se relacija paralelograma. Geometrijski, to znači da je suma površina kvadrata nad dijagonalama paralelograma jednaka sumi površina kvadrata nad svim stranicama paralelograma (vidjeti Sliku 4). Kažemo da norma zadovoljava relaciju paralelograma ako za svake dvije točke promatranog prostora vrijedi relacija paralelograma.



Slika 4: Pravilo paralelograma za zbroj vektora u ravnini

Teorem 4.1. *Norma na realnom vektorskom prostoru X inducirana je nekim skalarnim produktom na X izrazom*

$$||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

ako i samo ako zadovoljava relaciju paralelograma. U tom slučaju je

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right).$$

Dokaz. U Primjeru 4.1 pokazali smo da preslikavanje definirano danim izrazom $||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ zadovoljava svojstva *(N1)-(N4)* norme.

Uvrštavanjem

$$||x+y|| = \sqrt{\langle x+y|x+y\rangle}, \quad ||x-y|| = \sqrt{\langle x-y|x-y\rangle}$$

u $||x+y||^2 + ||x-y||^2$ te

$$||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}, \quad ||y|| = \sqrt{\langle y|y\rangle}$$

u $2||x||^2 + 2||y||^2$, dobiju se jednaki izrazi, pa vrijedi relacija paralelograma.

Obratno, neka norma zadovoljava relaciju paralelograma. Treba pokazati da je preslikavanje dano s $\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$ skalarni produkt, odnosno da zadovoljava svojstva *(U1)-(U5)*.

Svojstvo *(U1)* ispunjeno je jer je

$$\langle x|x\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+x||^2 - ||x-x||^2\right) = \frac{1}{4}||2x||^2 \geq 0.$$

Kako je

$$\langle x|x\rangle = 0 \iff ||2x||^2 = 0 \iff ||2x|| = 0 \iff x = 0,$$

vrijedi svojstvo *(U2)*.
Zbog jednakosti

$$\langle y|x\rangle = \frac{1}{4}\left(||y+x||^2 - ||y-x||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - |-1|^2 \cdot ||x-y||^2\right) = \langle x|y\rangle$$

zadovoljeno je i svojstvo *(U3)*.
Prije nego što dokažemo da je ispunjeno svojstvo *(U4)*, pokazat ćemo da vrijedi svojstvo *(U5)*. Uočimo da je

$$\begin{aligned}
\langle x+y|2u\rangle &= \frac{1}{4}\left(||x+y+2u||^2 - ||x+y-2u||^2\right) \\
&= \frac{1}{4}(||x+u+y+u||^2 - ||x-u+y-u||^2 + ||x+u-(y+u)||^2 \\
&\quad -||x-u-(y-u)||^2) \\
&= \frac{1}{4}\left(2||x+u||^2 + 2||y+u||^2 - 2||x-u||^2 - 2||y-u||^2\right) \\
&= 2\cdot\frac{1}{4}\left(||x+u||^2 - ||x-u||^2\right) + 2\cdot\frac{1}{4}\left(||y+u||^2 - ||y-u||^2\right) \\
&= 2\langle x|u\rangle + 2\langle y|u\rangle.
\end{aligned}$$

Za $y = 0$ i $x = z$ slijedi $\langle z|2u\rangle = 2\langle z|u\rangle + 2\langle 0|u\rangle = 2\langle z|u\rangle$, pa je

$$2\langle x|u\rangle + 2\langle y|u\rangle = \langle x+y|2u\rangle = 2\langle x+y|u\rangle,$$

iz čega dijeljenjem s 2 slijedi svojstvo *(U5)*.
Preostaje još pokazati da vrijedi i svojstvo *(U4)*, tj. da je $\langle \lambda x|y\rangle = \lambda\,\langle x|y\rangle$, za sve $x, y \in X$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$.
Neka su $x, y \in X$ proizvoljni. Najprije ćemo pokazati da svojstvo vrijedi za svaki

$\lambda \in \mathbb{N}$, zatim za $\lambda = -1$ i $\lambda = 0$ (iz čega će slijediti da vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{Z}$), onda za svaki $\lambda \in \mathbb{Q}$ te ćemo na kraju pokazati da vrijedi i za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prilikom dokazivanja svojstva *(U5)*, pokazali smo i da *(U4)* vrijedi za $\lambda = 2$. Pretpostavimo da je svojstvo *(U4)* zadovoljeno za $\lambda = n$, tj. da je $\langle nx|y\rangle = n\langle x|y\rangle$, i pokažimo da vrijedi i za $\lambda = n+1$:

$$\langle (n+1)x|y\rangle = \langle nx + x|y\rangle = \langle nx|y\rangle + \langle x|y\rangle = n\langle x|y\rangle + \langle x|y\rangle = (n+1)\langle x|y\rangle.$$

Ovime smo pokazali da svojstvo vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$.

Za $\lambda = -1$ slijedi:

$$\langle -x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(||-x+y||^2 - ||-x-y||^2\right) = -\frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) = -\langle x|y\rangle.$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\langle -mx|y\rangle = -\langle mx|y\rangle = -m\langle x|y\rangle.$$

Također, vrijedi

$$\langle 0 \cdot x|y\rangle = \langle 0|y\rangle = 0 = 0 \cdot \langle x|y\rangle,$$

iz čega slijedi tvrdnja i za svaki $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Kako je

$$\langle x|y\rangle = \left\langle m \cdot \frac{1}{m}x \middle| y\right\rangle = m\left\langle \frac{1}{m}x \middle| y\right\rangle,$$

dijeljenjem s m slijedi

$$\left\langle \frac{1}{m}x \middle| y\right\rangle = \frac{1}{m}\langle x|y\rangle,$$

odnosno svojstvo vrijedi i za svaki $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Neka su $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije dane s

$$f(\lambda) = \lambda\langle x|y\rangle, \quad g(\lambda) = \langle \lambda x|y\rangle, \quad x, y \in X.$$

Kako smo već dokazali da *(U4)* vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{Q}$, slijedi

$$f(\lambda) = g(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Funkcija f je linearna, pa je i neprekidna, dok je funkcija g kompozicija neprekidnih funkcija, pa je i ona neprekidna. Dakle, f i g su neprekidne funkcije realne varijable koje se podudaraju u svim racionalnim brojevima, što znači da se moraju podudarati

i u svim realnim brojevima.
Sada je

$$\lambda\langle x|y\rangle = \langle \lambda x|y\rangle, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R},$$

odnosno vrijedi svojstvo *(U4)*. ■

Možemo zaključiti da nije svaka norma inducirana skalarnim produktom, ali svaki skalarni produkt inducira neku normu. To znači da se na svakom unitarnom prostoru može definirati norma uz koju taj prostor postaje normiran prostor.

5 Metrički prostor

Definicija 5.1. *Neka je X neprazan skup. Preslikavanje $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$;
(M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
(M3) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$;
(M4) (nejednakost trokuta) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$

naziva se metrika na X.
Uređen par (X, d) naziva se metrički prostor.

Metrika se još naziva i *funkcija udaljenosti* ili *udaljenost.*

Uočimo da svojstvo *(M1)* slijedi iz preostala tri svojstva. Zaista, neka su x, y proizvoljni elementi iz X. Zbog *(M2)* je

$$d(x, x) = 0,$$

a prema svojstvu *(M4)* je

$$d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x).$$

Iz svojstva *(M3)*, $d(x, y) = d(y, x)$, slijedi

$$0 = d(x, x) \leq 2d(x, y),$$

tj.

$$2d(x, y) \geq 0.$$

Dijeljenjem s 2 dobivamo svojstvo *(M1)*.

Primjer 5.1. *Neka je X normiran prostor. Pokažimo da je preslikavanje definirano s*

$$d(x, y) = ||x - y||, \quad x, y \in X,$$

metrika, tj. da ispunjava svojstva (M1)-(M4).

Zbog svojstva (N1) vrijedi $||x - y|| \geq 0$, pa je svojstvo (M1) ispunjeno.

Zbog (N2) je $||x - y|| = 0$ ako i samo ako je $x - y = 0$, a to vrijedi ako i samo ako je $x = y$. Dakle, zadovoljeno je svojstvo (M2).

Kako je (prema svojstvu (N3)) $||x - y|| = || - (y - x)|| = | - 1| \cdot ||y - x||$, slijedi svojstvo (M3).

Neka je $z \in X$ proizvoljna točka. Tada je $||x - y|| = ||x - z + z - y||$ te je zbog (N4)

$$||x - z + z - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y||.$$

Dakle, $||x - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y||$, pa je ispunjeno svojstvo (M4). $\square$

Iz Primjera 5.1 možemo zaključiti da se na svakom normiranom prostoru može definirati metrika uz koju taj prostor postaje metrički prostor.

Svojstvo nejednakosti trokuta može se proširiti uzimajući u obzir više točaka.

Propozicija 5.1. *U metričkom prostoru* (X, d) *vrijedi:*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n), \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in X.$$

Dokaz. Prema svojstvu *(M4)* vrijedi

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_n).$$

Primijenimo li svojstvo *(M4)* na $d(x_2, x_n)$, slijedi:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_n).$$

Nastavimo li induktivno primjenjujući svojstvo *(M4)*, nakon $n-2$ koraka slijedi tvrdnja, odnosno

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n).$$

■

Propozicija 5.2. *Za svake četiri točke* x_1, x_2, x_3, x_4 *u metričkom prostoru* (X, d) *vrijedi*

$$d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

Dokaz. Iz Propozicije 5.1 slijedi

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4) + d(x_4, x_2).$$

Zbog svojstva *(M3)* je $d(x_4, x_2) = d(x_2, x_4)$, pa oduzimanjem $d(x_3, x_4)$ s obje strane nejednakosti slijedi tvrdnja, tj.

$$d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

■

Geometrijski, u Propoziciji 5.2 tvrdi se da je razlika duljina dviju nasuprotnih stranica četverokuta manja ili jednaka zbroju duljina preostale dvije stranice.

Definicija 5.2. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $x \in X$ *prozvoljna točka i* $r > 0$.
Skup $K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ *naziva se otvorena kugla u* X *sa središtem u točki* x *radijusa* r.
Skup $\overline{K}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ *naziva se zatvorena kugla u* X *sa središtem u točki* x *radijusa* r.
Skup $S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$ *naziva se sfera u* X *sa središtem u točki* x *radijusa* r.

Iz prethodne definicije možemo uočiti da proizvoljna zatvorena kugla sadrži otvorenu kuglu i sferu s istim središtem i radijusom.

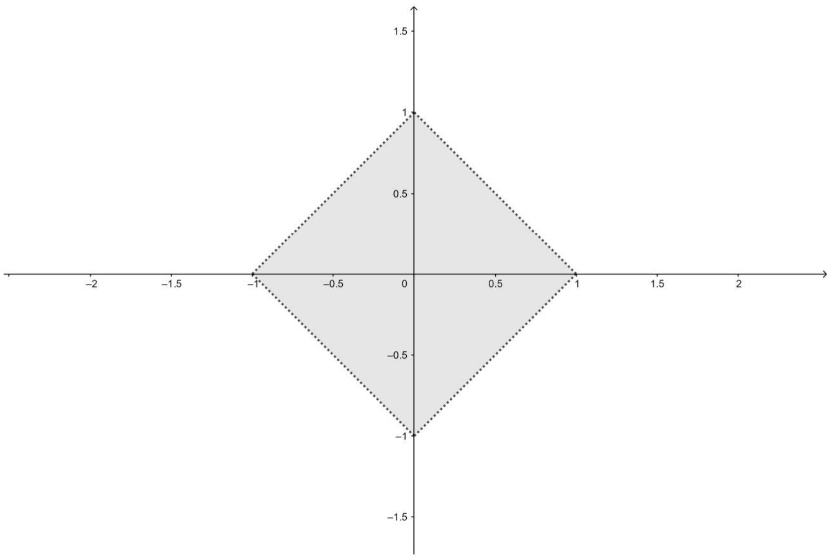
Od posebne važnosti su otvorene kugle, jer ćemo pomoću njih kasnije moći definirati skupove karakteristične za određene prostore.

Primjer 5.2. *Neka je* $X = \mathbb{R}^2$, $x = (0, 0)$ *i* $r = 1$. *U nastavku ćemo promotriti kako izgledaju otvorene kugle u nekim specijalnim metrikama.*

1. *Neka je*

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$

Tada je $K(x, r) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon |y_1| + |y_2| < 1\}$. *Grafički prikaz ovog skupa prikazan je na Slici 5.*

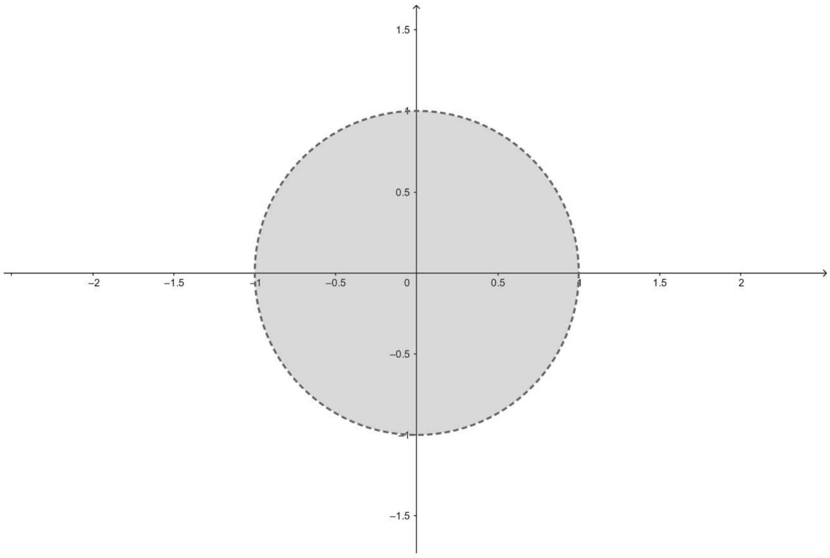


Slika 5: Otvorena kugla uz metriku d_1

2. *Neka je*

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Tada je $K(x, r) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < 1\}$. *Grafički prikaz ovog skupa dan je Slikom 6.*

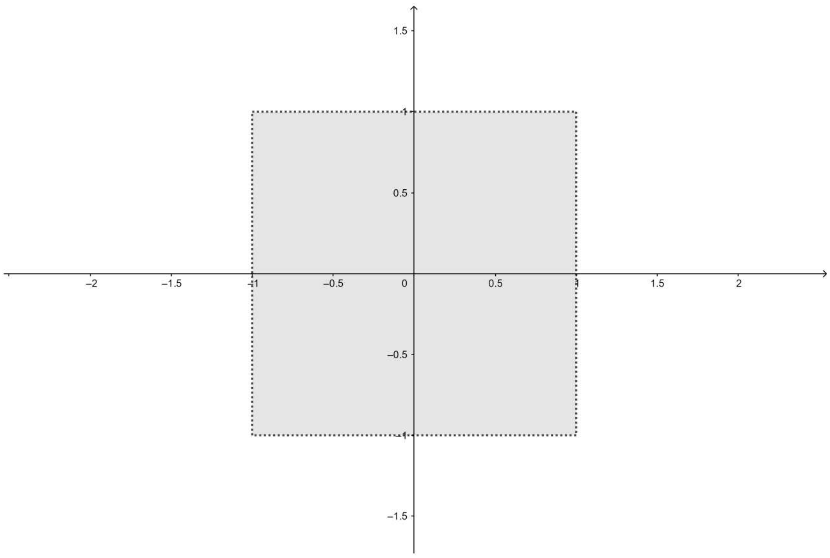


Slika 6: Otvorena kugla uz metriku d_2

3. Ako je

$$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\},$$

tada je $K(x,r) = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \max\{|y_1|,|y_2|\} < 1\}$. *Ovaj skup grafički je prikazan na Slici 7.* □



Slika 7: Otvorena kugla uz metriku d_∞

5.1 Nizovi u metričkom prostoru

S pojmom niza realnih brojeva upoznali smo se u Definiciji 1.2 koju vrlo jednostavno možemo proširiti do definicije niza u proizvoljnom metričkom prostoru X.

Definicija 5.3. *Svako preslikavanje $x \colon \mathbb{N} \to X$, pri čemu je X proizvoljan metrički prostor, naziva se niz u X.*

Niz u $\mathbb{R}^n$ je preslikavanje koje prirodnim brojevima pridružuje vektore iz $\mathbb{R}^n$. Drugim riječima, svaka funkcija $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ je niz u $\mathbb{R}^n$. Kao što je već rečeno u poglavlju 1.2, umjesto $x(k)$, vrijednosti niza pisat ćemo u obliku x_k, a sam niz označavat ćemo s (x_k).

Kako bismo u sljedećem poglavlju mogli definirati još neke prostore, potrebno je uvesti i pojam konvergentnog niza te Cauchyjevog niza u metričkom prostoru.

Definicija 5.4. *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da taj niz konvergira ukoliko $\exists x_0 \in X$ takav da $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_0) < \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$.*

Konvergencija niza prvenstveno ovisi o prostoru u kojem promatramo taj niz. Dva niza koja su zadana istom formulom, ali u različitim prostorima, ne moraju istovremeno biti konvergentni. U Primjerima 5.3 i 5.4 ilustrirat ćemo ovu činjenicu.

Primjer 5.3. *Promotrimo niz $x_k = \frac{1}{k} + 1$, $k \in \mathbb{N}$ te dokažimo da je taj niz konvergentan u prostoru $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Štoviše, pokazat ćemo da taj niz konvergira broju $x_0 = 1 \in \mathbb{R}$.*

Primijetimo da je

$$|x_k - x_0| = \left| \frac{1}{k} + 1 - 1 \right| = \left| \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

zbog $k \in \mathbb{N}$. Mora biti $\frac{1}{k} < \varepsilon$, pa ako uzmemo $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, tada $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_k - 1| < \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$. Dakle, niz je konvergentan. □

Primjer 5.4. *Niz $x_k = \frac{1}{k} + 1$, $k \in \mathbb{N}$, ne konvergira u prostoru $(\langle 0, 1\rangle, |\cdot|)$. Naime, iz prethodnog primjera uočavamo kako je jedino smisleno za x_0 uzeti broj 1, no kako $1 \notin \langle 0, 1\rangle$, polazni niz ne može konvergirati u ovom prostoru. Dakle, u ovom slučaju niz nije konvergentan.* □

Osim konvergentnih nizova, od interesa su nam i Cauchyjevi nizovi te ćemo se u nastavku i s njima upoznati.

Definicija 5.5. *Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da je taj niz Cauchyjev ukoliko $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_m, x_k) < \varepsilon$, $\forall m, k \geq k_0$.*

Teorem 5.1. *Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.*

Dokaz. Neka niz (x_k) u prostoru (X, d) konvergira točki $x_0 \in X$. Treba pokazati da je taj niz Cauchyjev, odnosno da $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_m) < \varepsilon$, $\forall k, m \geq k_0$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Kako (x_k) konvergira točki x_0, vrijedi

$$d(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall k \geq k_0.$$

Zato je $\forall k, m \geq k_0$

$$d(x_k, x_m) \leq d(x_k, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Uočimo kako obrat Teorema 5.1 ne vrijedi. Navest ćemo primjer Cauchyjevog niza koji nije konvergentan.

Primjer 5.5. *Pokažimo da je niz $x_k = \frac{1}{k}+1$, $k \in \mathbb{N}$ Cauchyjev u prostoru $(\langle 0, 1\rangle, |\cdot|)$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $k \leq m$, $k, m \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$|x_k - x_m| = \left|\frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{m} - 1\right| = \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k}.$$

Za $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, prema definiciji Cauchyjevog niza ovaj niz je Cauchyjev u $(\langle 0, 1\rangle, |\cdot|)$, a ranije smo pokazali da taj niz nije konvergentan u $(\langle 0, 1\rangle, |\cdot|)$. □

Dakle, općenito, Cauchyjev niz ne mora biti konvergentan. Od posebne važnosti su Cauchyjevi nizovi koji su istovremeno i konvergentni. Može se pokazati da će u $\mathbb{R}^n$ svaki Cauchyjev niz biti konvergentan. U tu svrhu definirat ćemo omeđen niz i podniz niza te navesti nekoliko tvrdnji koje vrijede za njih.

Definicija 5.6. *Niz (x_k) u metričkom prostoru X je omeđen ako postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $\{x_k \colon k \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, r)$.*

Definicija 5.7. *Neka je $x \colon \mathbb{N} \to X$ niz u X i neka je $u \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rastući niz prirodnih brojeva. Tada kompoziciju $x \circ u \colon \mathbb{N} \to X$ nazivamo podniz niza (x_k) i označavamo s (x_{u_k}).*

Teorem 5.2. *Svaki Cauchyjev niz je omeđen.*

Dokaz. Neka je (x_k) Cauchyjev niz. Prema definiciji Cauchyjevog niza, za $\varepsilon = 1$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_{k_0}) < 1$, $\forall k \geq k_0$. Označimo

$$M := \max\{1, d(x_1, x_{k_0}), d(x_2, x_{k_0}), \ldots, d(x_{k_0-1}, x_{k_0})\} + 1.$$

Tada su svi članovi niza (x_k) sadržani u $K(x_{k_0}, M)$, pa je niz (x_k) omeđen.

■

Teorem 5.3. *Svaki omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po n.

Neka je $n = 1$ i (x_k) omeđen niz u $\mathbb{R}$. Kako je (x_k) niz realnih brojeva, on ima konvergentan podniz (vidjeti [12], str. 42. Propozicija 2.4.).

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n i pokažimo da vrijedi i za $n+1$. Neka je (x_k) omeđen niz u $\mathbb{R}^{n+1}$, $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n, x_k^{n+1})$. Prema pretpostavci indukcije niz $\hat{x_k} = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ ima konvergentan podniz. Neka je to $\hat{x}_{u_k} = (x_{u_k}^1, \ldots, x_{u_k}^n)$. Niz (x_k^{n+1}) je omeđen niz realnih brojeva, pa prema bazi indukcije ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti, neka je to $(x_{u_k}^{n+1})$.

Prema tome, niz $x_{u_k} = (x_{u_k}^1, \ldots, x_{u_k}^n, x_{u_k}^{n+1})$ je konvergentan podniz niza (x_k). ■

Teorem 5.4. *Ako neki podniz Cauchyjevog niza konvergira nekoj točki $x_0 \in X$, tada i cijeli niz konvergira prema x_0.*

Dokaz. Neka je (x_{u_k}) podniz Cauchyjevog niza (x_k) te neka (x_{u_k}) konvergira prema x_0. Nadalje, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Kako je niz (x_k) Cauchyjev, postoji $k_1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_k, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k, m \geq k_1.$$

Kako je $\lim_{k\to\infty} x_{u_k} = x_0$, postoji $k_2 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_{u_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq k_2.$$

Označimo $k_0 := \max\{k_1, k_2\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ vrijede prethodne dvije nejednakosti. Kako je $u_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, zbog nejednakosti trokuta je

$$d(x_k, x_0) \leq d(x_k, x_{u_k}) + d(x_{u_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, niz (x_k) konvergira prema x_0. ■

Sada možemo pokazati da je u $\mathbb{R}^n$ svaki Cauchyjev niz konvergentan. Kako je svaki konvergentan niz Cauchyjev, u $\mathbb{R}^n$ Cauchyjevi nizovi i konvergentni nizovi su ekvivalentni pojmovi.

Teorem 5.5. *Niz u $\mathbb{R}^n$ je Cauchyjev ako i samo ako je konvergentan.*

Dokaz. Neka je (x_k) proizvoljan Cauchyjev niz u $\mathbb{R}^n$. Prema Teoremu 5.2 (x_k) je i omeđen, pa prema Teoremu 5.3 ima konvergentan podniz. Neka taj podniz konvergira prema točki x_0. Tada iz Teorema 5.4 slijedi da i niz (x_k) konvergira prema x_0.

Obratno, neka je dan proizvoljan konvergentan niz u $\mathbb{R}^n$. Prema Teoremu 5.1 taj niz je i Cauchyjev. ■

6 Potpuni prostori

U ovom poglavlju promatrat ćemo metričke prostore u kojima je svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Definicija 6.1. *Kažemo da je metrički prostor (X, d) potpun ukoliko svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira nekoj točki iz X.*

Iz definicije potpunog prostora i razmatranja iz potpoglavlja 5.1 slijedi da je $\mathbb{R}^n$ uz standardnu metriku potpun metrički prostor.

6.1 Banachov prostor

Definicija 6.2. *Potpun normiran prostor naziva se Banachov prostor.*

Definicija 6.3. *Neka su X i Y normirani prostori i $A \in L(X, Y)$. Kažemo da je operator A ograničen ako postoji $M > 0$ takav da je $||Ax|| \leq M||x||$, $\forall x \in X$.*

S $B(X, Y)$ označavamo skup svih ograničenih linearnih operatora $A\colon X \to Y$. Neka je $A \in B(X, Y)$. Definirajmo

$$||A|| := \sup\{||Ax||\colon x \in X, ||x|| \leq 1\} = \sup\{||Ax||\colon x \in X, ||x|| = 1\}.$$

Iz definicije od $||A||$ slijedi da je

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||, \quad \forall A \in B(X, Y) \text{ i } \forall x \in X.$$

Dakle, $||A||$ je najmanji među svim realnim brojevima $M > 0$ takav da je

$$||Ax|| \leq M||x||, \quad \forall x \in X,$$

pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in X$, $x \neq 0$, takav da vrijedi

$$||Ax|| \geq (||A|| - \varepsilon)||x||.$$

Teorem 6.1. *Preslikavanje $A \mapsto ||A||$ je norma na vektorskom prostoru $B(X, Y)$. Ako je Y Banachov prostor, tada je i $B(X, Y)$ Banachov prostor.*

Dokaz. Najprije pokažimo da prethodno definirano preslikavanje zadovoljava svojstva *(N1)-(N4)*. Iz definicije broja $||A||$ slijede svojstva *(N1)* i *(N2)*.
Kako je

$$||\lambda A|| = \sup\{||\lambda Ax||\colon x \in X, ||x|| \leq 1\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

vrijedi svojstvo *(N3)*.
Neka su $A, B \in B(X, Y)$ proizvoljni. Tada za proizvoljan $x \in X$ vrijedi

$$\begin{aligned}
||(A+B)x|| &= ||Ax + Bx|| \\
&\leq ||Ax|| + ||Bx|| \\
&\leq ||A|| \cdot ||x|| + ||B|| \cdot ||x|| \\
&= (||A|| + ||B||)||x||
\end{aligned}$$

te je ispunjeno i svojstvo *(N4)*.

Nadalje, pretpostavimo da je Y Banachov prostor te pokažimo da je i prostor $B(X, Y)$ Banachov. Neka je (A_k) Cauchyjev niz u $B(X, Y)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Prema definiciji Cauchyjevog niza, tada $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da $\forall k, m \geq k_\varepsilon$ vrijedi

$$||A_k - A_m|| \leq \varepsilon.$$

Iz prethodnog slijedi da je $\forall k, m > k_\varepsilon$

$$||A_k x - A_m x|| \leq \varepsilon ||x||,$$

što znači da je $\forall x \in X$ niz $(A_k x)$ Cauchyjev u Y. Kako je Y potpun prostor, taj niz konvergira u Y. Označimo

$$Ax = \lim_{k \to \infty} A_k x, \quad \forall x \in X.$$

Time je definiran operator $A \in L(X, Y)$, jer za proizvoljne $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
A(\lambda x + \mu y) &= \lim_{k \to \infty} A_k(\lambda x + \mu y) \\
&= \lim_{k \to \infty} (\lambda A_k x + \mu A_k y) \\
&= \lambda \lim_{k \to \infty} A_k x + \mu \lim_{k \to \infty} A_k y \\
&= \lambda Ax + \mu Ay.
\end{aligned}$$

Kako niz $(A_k x)$ konvergira prema $Ax \in Y$ i kako $\forall k, m \geq k_\varepsilon$ vrijedi

$$||A_k x - A_m x|| \leq \varepsilon ||x||,$$

ako $m \to \infty$, slijedi da je za $k \geq k_\varepsilon$

$$||A_k x - Ax|| \leq \varepsilon ||x||, \ \forall x \in X.$$

Dakle, za $k \geq k_\varepsilon$ je operator $A_k - A$ ograničen i linearan, tj. $A_k - A \in B(X,Y)$. Zbog toga je i operator $A = A_k - (A_k - A) \in B(X,Y)$. Sada $\forall k \geq k_\varepsilon$ slijedi

$$||A_k - A|| \leq \varepsilon,$$

tj. niz (A_k) konvergira u $B(X,Y)$. Dakle, normiran prostor $B(X,Y)$ je potpun, pa i Banachov.

■

U svrhu dokaza propozicije s kojom ćemo završiti ovo poglavlje, prisjetimo se da je red uređen par nizova $((x_k),(s_k))$, gdje je (s_k) niz parcijalnih suma niza (x_k), o čemu možete pročitati više u [13]. Navedimo najprije pomoćnu tvrdnju o Cauchyjevim nizovima čiji dokaz se nalazi u [10].

Teorem 6.2. *Neka je X normiran prostor i (x_k) Cauchyjev niz u X. Tada za svaki niz (ε_k) u $\langle 0,\infty\rangle$ postoji podniz (x_{u_k}) takav da vrijedi*

$$||x_{u_{k+1}} - x_{u_k}|| < \varepsilon_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Propozicija 6.1. *Normiran prostor X je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red u X konvergira.*

Dokaz. Pretpostavimo da svaki apsolutno konvergentan red u X i konvergira. Neka je (x_k) Cauchyjev niz u X. Tada postoji podniz (x_{u_k}) takav da je

$$||x_{u_{k+1}} - x_{u_k}|| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

U tom slučaju red $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_{u_{k+1}} - x_{u_k}||$ konvergira, pa po pretpostavci konvergira i red $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{u_{k+1}} - x_{u_k})$, odnosno niz (s_k) parcijalnih suma tog reda konvergira. Označimo $s = \lim_{k\to\infty} s_k$. Parcijalne sume oblika su

$$s_k = \sum_{i=1}^{k}(x_{u_{i+1}} - x_{u_i}) = x_{u_{k+1}} - x_{u_1},$$

što znači da niz (x_{u_k}) konvergira i $\lim_{k\to\infty} x_{u_k} = x_{u_1} + s =: x \in X$. Tada konvergira i niz (x_k) te vrijedi $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Dakle, prostor X je potpun.

Obratno, neka je X Banachov prostor i red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ apsolutno konvergentan. Nadalje, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} ||x_k|| < \varepsilon,$$

pa za $p > q \geq m$ vrijedi

$$||s_p - s_q|| = \left|\left|\sum_{k=q+1}^{p} x_k\right|\right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} ||x_k|| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} ||x_k|| < \varepsilon$$

te je niz parcijalnih suma (s_k) konvergentan. Dakle, red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ je konvergentan.

■

6.2 Hilbertov prostor

Definicija 6.4. *Potpun unitaran prostor naziva se Hilbertov prostor.*

Kako skalarni produkt inducira normu, Hilbertov prostor poseban je slučaj Banachovog prostora. U nastavku ovog poglavlja navest ćemo nekoliko svojstava Hilbertovog prostora. Za Hilbertov prostor koristit ćemo oznaku H.

Za opisivanje određenih svojstava Hilbertovog prostora potrebno je prvo uvesti pojam ortogonalnosti. Općenito, za x, y iz unitarnog prostora X kažemo da su ortogonalni ako vrijedi $\langle x|y\rangle = 0$ te pišemo $x \perp y$.

Teorem 6.3 (Pitagorin teorem)**.** *Neka su $x_1, \ldots, x_n \in H$, $x_i \perp x_j$ za $i \neq j$. Tada vrijedi:*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2.$$

Dokaz. Uočimo da je

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|\right|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x_i|x_j\rangle .$$

Svi članovi sume na desnoj strani prethodne jednakosti za koje je $i \neq j$ jednaki su nula, pa je

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x_i|x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i|x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2,$$

iz čega slijedi tražena jednakost. ∎

Za podskup $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ skupa H, pri čemu je A proizvoljan skup indeksa, kažemo da je ortonormiran ako je normiran, tj. $||u_\alpha|| = 1$, $\forall \alpha \in A$, i ako je ortogonalan, tj. $u_{\alpha_1} \perp u_{\alpha_2}$ za $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Teorem 6.4 (Besselova nejednakost)**.** *Neka je $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ortonormiran skup u Hilbertovom prostoru H. Tada za svaki $x \in H$ vrijedi*

$$\sum_{\alpha\in A} |\langle x|u_\alpha\rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da elementi proizvoljnog konačnog skupa $F \subset A$ zadovoljavaju traženu nejednakost. Vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x - \sum_{\alpha\in F}\langle x|u_\alpha\rangle u_\alpha||^2 \\ &= ||x||^2 - 2\left\langle x \middle| \sum_{\alpha\in F}\langle x|u_\alpha\rangle u_\alpha \right\rangle + \left|\left|\sum_{\alpha\in F}\langle x|u_\alpha\rangle u_\alpha\right|\right|^2 . \end{aligned}$$

Primjenom Pitagorinog teorema slijedi

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x||^2 - 2\sum_{\alpha\in F} |\langle x|u_\alpha\rangle|^2 + \sum_{\alpha\in F} |\langle x|u_\alpha\rangle|^2 \\ &= ||x||^2 - \sum_{\alpha\in F} |\langle x|u_\alpha\rangle|^2, \end{aligned}$$

iz čega dobivamo traženu nejednakost. ■

Teorem 6.5. *Neka je $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ortonormiran skup u Hilbertovom prostoru H. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Ako je $\langle x|u_\alpha\rangle = 0$ za svaki $\alpha \in A$, onda je $x = 0$.*

2. *$||x||^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x|u_\alpha\rangle|^2$ za svaki $x \in H$.*

3. *Za svaki $x \in H$ je $x = \sum_{\alpha\in A} \langle x|u_\alpha\rangle\, u_\alpha$, pri čemu suma sadrži prebrojivo mnogo nenul članova i konvergira neovisno o poretku članova.*

Dokaz. *1.* $\Longrightarrow$ *3.* Neka je $x \in H$ proizvoljan. Označimo s $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ one elemente $\alpha \in A$ za koje je $\langle x|u_\alpha\rangle \neq 0$. Kao posljedica Besselove nejednakosti, takvih α_j ima prebrojivo mnogo te niz $\left(\sum |\langle x|u_{\alpha_j}\rangle|^2\right)$ konvergira, pa prema Pitagorinom teoremu vrijedi

$$\left|\left|\sum_{j=k}^{m} \langle x|u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}\right|\right|^2 = \sum_{j=k}^{m} |\langle x|u_{\alpha_j}\rangle|^2,$$

što konvergira prema 0 kada $m, k \to \infty$. Dakle, niz $\left(\sum \langle x|u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}\right)$ je Cauchyjev, pa i konvergentan jer je H potpun. Ako označimo $y = x - \sum \langle x|u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}$, tada je $\langle y|u_\alpha\rangle = 0$, $\forall \alpha \in A$, pa je prema *1.* $y = 0$.

3. $\Longrightarrow$ *2.* Kada $k \to \infty$, vrijedi

$$||x||^2 - \sum_{j=1}^{k} |\langle x|u_{\alpha_j}\rangle|^2 = \left|\left|x - \sum_{j=1}^{k} \langle x|u_{\alpha_j}\rangle u_{\alpha_j}\right|\right|^2 \to 0$$

iz čega slijedi tvrdnja.

2. $\Longrightarrow$ *1.* Ako je $\langle x|u_\alpha\rangle = 0$, kako vrijedi jednakost iz tvrdnje *2.*, slijedi $x = 0$. ■

Ortonormiran skup sa svojstvima iz Teorema 6.5 naziva se ortonormirana baza prostora H.

Propozicija 6.2. *Svaki Hilbertov prostor ima ortonormiranu bazu.*

Dokaz. Prema Zornovoj lemi (vidjeti [7], str. 5.), familija ortonormiranih skupova uređena inkluzijom ima maksimalni element, što je ekvivalentno tvrdnji *1.* Teorema 6.5. ■

Primjer 6.1. $\mathbb{R}^2$ *uz standardni skalarni produkt je Hilbertov prostor. Ortonormirana baza ovog prostora je skup* $\{(1,0),(0,1)\}$. *Skup je očito ortonormiran, pa pokažimo još da je baza prostora.*

Zaista, neka je $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *proizvoljan. Ako je* $\langle (x_1, x_2) | (1, 0) \rangle = 0$, *mora vrijediti* $x_1 = 0$. *Slično, iz* $\langle (x_1, x_2) | (0, 1) \rangle = 0$ *slijedi* $x_2 = 0$. *Dakle, tada je* $x = 0$. *Vrijedi jednakost*

$$||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 = |\langle (x_1, x_2) | (1, 0) \rangle|^2 + |\langle (x_1, x_2) | (0, 1) \rangle|^2 .$$

Također, vrijedi i da je

$$x = x_1(1,0) + x_2(0,1) = \langle x | (1,0) \rangle (1,0) + \langle x | (0,1) \rangle (0,1).$$

Dakle, skup $\{(1,0),(0,1)\}$ *je ortonormirana baza prostora* $\mathbb{R}^2$. □

7 Topološki prostor

Definicija 7.1. *Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ podskupova od X sa svojstvima:*

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
(T2) $\mathcal{T}$ *je zatvorena na unije;*
(T3) $\mathcal{T}$ *je zatvorena na konačne presjeke*

naziva se topologija na X.
Uređen par $(X, \mathcal{T})$ naziva se topološki prostor.

Elementi topologije nazivaju se otvoreni skupovi.

Neka je X proizvoljan metrički prostor. U poglavlju 5 upoznali smo se s pojmom otvorene kugle u metričkom prostoru, a sada ćemo pomoću otvorenih kugli definirati otvorene skupove u metričkom prostoru.

Definicija 7.2. *Kažemo da je skup $U \subseteq X$ u metričkom prostoru X otvoren ako $\forall x \in U\ \exists r_x > 0$ takav da je $K(x, r_x) \subseteq U$.*

Drugim riječima, skup u metričkom prostoru je otvoren ako se oko svake točke tog skupa može opisati otvorena kugla koja će u cjelosti biti sadržana u polaznom skupu. Prazan skup smatramo otvorenim po definiciji. Također, primijetimo da je i skup X otvoren.

Primjer 7.1. *Pokažimo da je otvorena kugla otvoren skup. Neka je (X, d) metrički prostor i $K(x, r)$ otvorena kugla u X. Neka je $y \in K(x, r)$. Treba pokazati da postoji $r_y > 0$ takav da je $K(y, r_y) \subseteq K(x, r)$. Označimo s d udaljenost točke y do točke x, tj. $d = d(x, y)$. Neka je $r_y = r - d$ i x_0 proizvoljna točka iz $K(y, r_y)$. Zbog nejednakosti trokuta vrijedi:*

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(y, x) < r_y + d = r - d + d = r.$$

Dakle, proizvoljna točka kugle $K(y, r_y)$ ujedno je element i kugle $K(x, r)$, što znači da je i cijela kugla $K(y, r_y)$ sadržana u $K(x, r)$. Sada iz definicije otvorenog skupa slijedi da je otvorena kugla otvoren skup. □

Navest ćemo karakterizaciju otvorenih skupova u metričkom prostoru.

Teorem 7.1. *Skup U u metričkom prostoru (X, d) je otvoren ako i samo ako se može prikazati kao unija otvorenih kugli.*

Dokaz. Pretpostavimo da je skup U otvoren. Prema definiciji otvorenog skupa, $\forall x \in U\ \exists r_x > 0$ takav da je $K(x, r_x) \subseteq U$. Promotrimo uniju svih takvih kugli, $\bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$. Kako je svaka od kugli $K(x, r_x)$ cijela sadržana u U, to je

$\bigcup_{x\in U} K(x, r_x) \subseteq U$. No, kako je svaka točka $x \in U$ sadržana u barem jednoj kugli iz $\bigcup_{x\in U} K(x, r_x)$, to je $U \subseteq \bigcup_{x\in U} K(x, r_x)$. Dakle, vrijedi $U = \bigcup_{x\in U} K(x, r_x)$.

Obratno, neka je $U = \bigcup_{\alpha\in A} K(x_\alpha, r_\alpha)$, pri čemu je A skup indeksa. Neka je $x \in U$ proizvoljna točka skupa U. Treba pokazati da $\exists r_x > 0$ takav da je $K(x, r_x) \subseteq U$. Kako je $x \in U = \bigcup_{\alpha\in A} K(x_\alpha, r_\alpha)$, to je x element barem jedne kugle iz unije $\bigcup_{\alpha\in A} K(x_\alpha, r_\alpha)$. Neka je $x \in K(x_\alpha, r_\alpha)$, za neki $\alpha \in A$. Neka je $r_x > 0$ takav da je $r_x < r_\alpha - d(x, x_\alpha)$ i neka je $y \in K(x, r_x)$ proizvoljan. Tada, zbog svojstva nejednakosti trokuta, vrijedi:

$$d(y, x_\alpha) \leq d(y, x) + d(x, x_\alpha) < r_x + d(x, x_\alpha) < r_\alpha - d(x, x_\alpha) + d(x, x_\alpha) = r_\alpha.$$

Dakle, $y \in K(x_\alpha, r_\alpha)$, što znači da je $K(x, r_x) \subseteq K(x_\alpha, r_\alpha) \subseteq U$. ■

Sada kada smo definirali otvorene skupove i naveli njihovu karakterizaciju u metričkom prostoru, promotrimo familiju svih takvih skupova.

Teorem 7.2. *Neka je $\mathcal{T}$ familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d). Tada je $\mathcal{T}$ topologija na X.*

Dokaz. Treba pokazati da za prethodno definiranu familiju $\mathcal{T}$ vrijede svojstva *(T1)-(T3)*.
Kako su $\emptyset$ i X po definiciji otvoreni, vrijedi svojstvo *(T1)*.
Neka je $\bigcup_{\alpha\in A} T_\alpha$ unija svih elemenata iz $\mathcal{T}$. Prema Teoremu 7.1, svaki T_α može se prikazati kao unija kugli, pa će i skup $\bigcup_{\alpha\in A} T_\alpha$ biti unija kugli, što je prema Teoremu 7.1 otvoren skup. Dakle, vrijedi svojstvo *(T2)*.
Neka su $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$ i pokažimo da je i njihov presjek $\bigcap_{i=1}^n T_i$ također otvoren skup. Neka je $x \in \bigcap_{i=1}^n T_i$. Tada je $x \in T_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Kako su svi T_i otvoreni, $\exists r_1, \ldots, r_n > 0$ takvi da je $K(x, r_i) \subseteq T_i$. Neka je $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Tada je $K(x, r) \subseteq K(x, r_i) \subseteq T_i$, pa je $K(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n T_i$, odnosno vrijedi svojstvo *(T3)*. ■

Dakle, pomoću otvorenih skupova u metričkom prostoru može se definirati topologija uz koju taj prostor postaje topološki prostor.
Osim otvorenih skupova, postoje i skupovi koje nazivamo zatvorenim skupovima.

Definicija 7.3. *Kažemo da je skup A u topološkom prostoru X zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus A$ otvoren.*

Primijetimo da neće svaki skup koji nije otvoren biti zatvoren. U prostoru $\mathbb{R}$ otvoreni skupovi su otvoreni intervali, npr. interval $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, je otvoren. Međutim, poluotvoreni interval $[a, b\rangle$ nije otvoren (jer se oko točke a ne može opisati otvorena kugla koja bi bila podskup intervala $[a, b\rangle$), ali taj interval nije niti zatvoren, jer njegov komplement $\langle -\infty, a\rangle \cup [b, \infty\rangle$ nije otvoren. Dakle, postoje skupovi koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni. Međutim, postoje topološki prostori u kojima su svi otvoreni skupovi istovremeno i zatvoreni.

Primjer 7.2. *Neka je* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. $\mathcal{T}$ *očito zadovoljava svojstva (T1)-(T3), pa je* $\mathcal{T}$ *jedna topologija na* X. *Otvoreni skupovi su* $\emptyset$ *i* X, *a njihovi komplementi,* X *i* $\emptyset$ *redom, su zatvoreni skupovi. Dakle, svi otvoreni skupovi ujedno su i zatvoreni skupovi. Ovako definirana topologija najmanja je topologija na* X *i naziva se trivijalna topologija.* $\square$

Primjer 7.3. *Neka je* $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. *Kako su svi podskupovi od* X *elementi familije* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ *očito zadovoljava svojstva (T1)-(T3), odnosno* $\mathcal{T}$ *je topologija na* X. *Također, jer su svi podskupovi od* X *otvoreni, njihovi komplementi također su sadržani u* $\mathcal{T}$, *pa su svi zatvoreni skupovi ujedno i otvoreni. Ovako definirana topologija* $\mathcal{T}$ *najveća je topologija na* X *i naziva se diskretna topologija.* $\square$

7.1 Baza topologije

Umjesto navođenja svih elemenata topologije, ponekad je jednostavnije navesti skup pomoću kojeg se mogu odrediti svi elementi topologije. Takav skup naziva se baza topologije. Intuitivno možemo zaključiti da će takav skup zapravo biti podskup polazne topologije koji zadovoljava određena svojstva.

Definicija 7.4. *Neka je* $\mathcal{T}$ *topologija na* X. *Kažemo da je familija* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ *baza topologije* $\mathcal{T}$ *ukoliko se svaki element iz* $\mathcal{T}$ *može prikazati kao unija elemenata iz* $\mathcal{B}$.

Dakle, baza topologije je familija koja je podskup te topologije i pomoću koje se mogu prikazati svi elementi topologije.

Teorem 7.3. *Neka je* X *neprazan skup i* $\mathcal{B}$ *familija podskupova od* X. $\mathcal{B}$ *je baza neke topologije na* X *ako i samo ako vrijedi:*

1. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;
2. *Ako su* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *i* $x \in B_1 \cap B_2$, *tada postoji skup* $B \in \mathcal{B}$ *takav da je* $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ *kojoj je* $\mathcal{B}$ *baza tada je*

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \ : \ B_\alpha \in \mathcal{B},\ \alpha \in A,\ A \text{ skup indeksa} \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Kako je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X, vrijedi $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$. Nadalje, kako je $X \in \mathcal{T}$ i $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$, X se može prikazati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$, pa je $X \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Dakle, vrijedi prvo svojstvo.

Ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, jer je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$, vrijedi $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$, pa je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ (jer je topologija zatvorena na konačne presjeke). Kako je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$, vrijedi $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, pri čemu je $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Stoga se proizvoljna točka $x \in B_1 \cap B_2$ sigurno nalazi u barem jednom od skupova B_α; neka je to baš skup B_α. Za $B \coloneqq B_\alpha$ vrijedi drugo svojstvo.

Obratno, treba pokazati da je tako definirana familija $\mathcal{T}$ topologija na X, tj. da zadovoljava svojstva *(T1)-(T3)*. Zbog prvog svojstva je $X \in \mathcal{T}$. Također, vrijedi $\emptyset \in \mathcal{T}$, pa je ispunjeno svojstvo *(T1)*.

Svaki element familije $\mathcal{T}$ može se prikazati kao unija elemenata familije $\mathcal{B}$, pa se i unija elemenata iz $\mathcal{T}$ može prikazati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$. Svaki skup koji se može prikazati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$ sadržan je u $\mathcal{T}$, pa vrijedi svojstvo *(T2)*.

Kako bismo dokazali da je familija $\mathcal{T}$ zatvorena na konačne presjeke, dovoljno je dokazati da je presjek dva elementa te familije također element te familije (tvrdnja onda induktivno slijedi za proizvoljne konačne presjeke). Neka su $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ i neka je $x \in T_1 \cap T_2$. Vrijedi:

$$T_1 = \bigcup_{i \in I} B_i, \quad T_2 = \bigcup_{j \in J} B_j, \quad B_i, B_j \in \mathcal{B}.$$

Tada $\exists i_0 \in I$ i $\exists j_0 \in J$ takvi da je $x \in B_{i_0} \cap B_{j_0}$. Prema drugom svojstvu navedenom u ovom teoremu, $\exists S_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in S_x \subseteq B_{i_0} \cap B_{j_0} \subseteq B_1 \cap B_2$. Zato je $B_1 \cap B_2 \subseteq \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} S_x \subseteq B_1 \cap B_2$, odnosno $B_1 \cap B_2$ može se prikazati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$, pa je to element iz $\mathcal{T}$, te vrijedi svojstvo *(T3)*. ■

Literatura

[1] C. Alabiso, I. Weiss, *A Primer on Hilbert Space Theory: Linear Spaces, Topological Spaces, Metric Spaces, Normed Spaces, and Topological Groups*, Springer International Publishing, Cham, 2015.

[2] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Springer Basel AG, Basel-Boston, 1986.

[3] R. G. Bartle, D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2011.

[4] L. Debnath, P. Mikusinski, *Hilbert Spaces with Applications*, Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2005.

[5] B. K. Driver, *Analysis Tools with Examples*, Springer Inernational Publishing, 2004.

[6] M. Einsiedler, T. Ward, *Functional Analysis, Spectral Theory, and Applications*, Springer International Publishing, Cham, 2017.

[7] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[8] D. J. H. Garling, *A Course in Mathematical Analysis, Volume II: Metric and Topological Spaces, Functions of a Vector Variable*, Cambridge University Press, New York, 2013.

[9] B. Guljaš, *Metrički prostori, predavanja*, Osijek, 2010.

[10] B. Guljaš, *Normirani prostori i operatori, predavanja*, Zagreb, 2010.

[11] P. Jordan, J. von Neumann, *On inner products in linear, metric spaces*, Annals of Mathematics, Vol. 36, No. 3, str. 719-723, 1935.

[12] D. Jukić, *Realna analiza*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[13] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1 (prepravljeno izdanje)*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[14] H. Kraljević, *Algebra, predavanja održana na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku*, Osijek, 2007.

[15] H. Kraljević, *Vektorski prostori, predavanja na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku*, Osijek, 2007.

[16] B. F. R. Ribeiro, *Proof of Jordan–von Neumann theorem for vector spaces over* $\mathbb{R}$, FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia, Brasil, 2017.
dostupno na:
https://oitofelix.github.io/academic/Jordan-von%20Neumann%20Theorem.pdf

[17] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis, Fourth Edition*, Pearson Education, Inc., Boston, 2010.

[18] R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press, New York, 2005.

Naslov: **Specijalni realni vektorski prostori**

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s pojmom realnog vektorskog prostora i nekim specijalnim realnim vektorskim prostorima. Definirat ćemo preslikavanja uz koja realan vektorski prostor postaje unitaran, normiran i metrički te familiju skupova uz koju on postaje topološki prostor. Ilustrirat ćemo način na koji se unitaran prostor može proširiti do normiranog, normiran do metričkog i metrički do topološkog prostora. Također, upoznat ćemo se s Banachovim i Hilbertovim prostorom. Navest ćemo primjere, svojstva i tvrdnje koje vrijede u pojedinom prostoru.

Ključne riječi: vektorski prostor, unitaran prostor, normiran prostor, metrički prostor, topološki prostor, Banachov prostor, Hilbertov prostor

Title: **Special real vector spaces**

Abstract

In this paper, we will get familiar with the term real vector space and some special real vector spaces. We will define mappings that make a real vector space into an inner product space, normed space and metric space, and a family of sets that makes it into a topological space. We will illustrate the way in which an inner product space can be extended to a normed space, normed to a metric, and metric to a topological space. We will also get familiar with Banach and Hilbert spaces. We will list examples, properties and statements that are valid in each of the mentioned spaces.

Keywords: vector space, inner product space, normed space, metric space, topological space, Banach space, Hilbert space

Životopis

Rođena sam 29. srpnja 1997. u Vinkovcima. Osnovnu školu Ivan Kozarac Nijemci pohađala sam od 2004. do 2011. godine kada sam završila sedmi razred. Osmi razred upisala sam 2011. godine u školi Walworth Barbour American International School u Even Yehudi u Državi Izrael. Nakon završetka osmog razreda 2012. godine dobila sam nagradu "President's Award for Educational Excellence" dodijeljenu od strane predsjednika Sjedinjenih Američkih Država Baracka Obame i državnog tajnika za obrazovanje Arnea Duncana za izvanrednu akademsku izvrsnost. Srednju školu upisala sam 2012. godine također u školi Walworth Barbour American International School, gdje sam završila prvi i drugi razred. Treći razred srednje škole upisala sam 2014. godine u Gimnaziji Matije Antuna Reljkovića Vinkovci, smjer opća gimnazija, u kojoj sam 2016. godine završila srednjoškolsko obrazovanje. Iste godine upisala sam Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Tijekom studiranja dobila sam pohvalu Vijeća Odjela za matematiku za uspješnost u studiranju po godinama studija u akademskoj 2018./2019., 2019./2020. i 2020./2021. godini. Akademske godine 2018./2019. primala sam STEM stipendiju. U razdoblju od lipnja 2019. do lipnja 2020. bila sam zamjenica predsjednika, a od lipnja 2020. do srpnja 2021. predsjednica Studentskog zbora Odjela za matematiku.