Eksponencijalna distribucija i Poissonov proces

Aleksov, Doris

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike, smjer: Financijska matematika i statistika

Doris Aleksov

Eksponencijalna distribucija i Poissonov proces

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike, smjer: Financijska matematika i statistika

Doris Aleksov

Eksponencijalna distribucija i Poissonov proces

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2021.

Sadržaj

1 Uvod

U izradi matematičkog modela za fenomene iz stvarnog svijeta uvijek je potrebno iznijeti određene pojednostavljujuće pretpostavke kako bi provedba matematičkih izračuna bila izvediva. Međutim, ne možemo iznijeti previše pojednostavljujućih pretpostavki jer zaključci, dobiveni matematičkim modelima, ne bi bili primjenjivi na stvarne situacije. Dakle, moramo napraviti dovoljno pojednostavljujućih pretpostavki kako bi bili u mogućnosti baviti se matematičkim izračunima, ali ne i toliko pretpostavki da matematički model više ne podsjeća na fenomen iz stvarnog svijeta. Jedna česta pretpostavka je pretpostavka da su određene slučajne varijable eksponencijalno distribuirane. Razlozi tome su što je s eksponencijalnom distribucijom relativno lako raditi te je često vrlo dobra aproksimacija stvarne raspodjele, primjerice vremena čekanja između realizacije dvaju događaja.

Svojstvo eksponencijalne distribucije koje olakšava analizu je svojstvo zaboravljanja. Pod time podrazumijevamo da ako je životni vijek promatranog objekta eksponencijalno distribuiran, odnosno ako smo već čekali više od t jedinica vremena onda je vjerojatnost da moramo čekati još s jedinica vremena jednaka kao da u početku nismo uopće ni čekali. Formalno ćemo definirati ovakvo ponašanje kasnije gdje ćemo pokazati da je eksponencijalna distribucija jedina distribucija koja posjeduje navedeno svojstvo.

Također, proučit ćemo i procese brojanja s naglaskom na proces poznat kao Poissonov proces. Između ostaloga povezat ćemo Poissonov proces s eksponencijalnom distribucijom.

2 Eksponencijalna distribucija

Eksponencijalna distribucija često se javlja kod slučajnih varijabli koje imaju značenje čekanja do pojave nekog događaja ako se karakteristike ne mijenjaju tijekom vremena, primjerice vrijeme do pojave zelenog svjetla na semaforu. Definirajmo sada eksponencijalnu distribuciju i osnovna svojstva eksponencijalne distribucije.

Definicija 2.1. Za neprekidnu slučajnu varijablu kažemo da ima **eksponencijalnu distribuciju** s parametrom $\lambda > 0$, ako je funkcija gustoće dana izrazom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable dana je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}.$$

Ilustrirajmo primjerom neprekidnu slučajnu varijablu koja ima eksponencijalnu distribuciju.

Primjer 1. *Vrijeme u sekundama koje protekne od servisa do prvog udarca teniske loptice u tlo modelirano je eksponencijalnom slučajnom varijablom s parametrom $\lambda = 1/3$. Vjerojatnost da će od servisa do prvog udara teniske loptice u tlo proći više od dvije, ali najviše četiri sekunde, računamo na sljedeći način:*

$$P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = \frac{1}{3}\int_2^4 e^{-x/3}\,\mathrm{d}x \approx 0.249.$$

□

Pogledajmo sada kako izgledaju očekivanje i varijanca eksponencijalne slučajne varijable. Parcijalnom integracijom, pri čemu su $u = x$ i $dv = \lambda e^{-\lambda x}$, dobivamo očekivanje eksponencijalno distribuirane slučajne varijable:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Također, parcijalnom integracijom, pri čemu su $u = x^2$ i $dv = \lambda e^{-\lambda x}$, dobivamo

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi kako je varijanca eksponencijalno distribuirane slučajne varijable:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Do ovih smo rezultata mogli doći i na drugačiji način, primjerice korištenjem funkcije izvodnice momenata.

Definicija 2.2. Funkcija izvodnica momenata $\phi(t)$ slučajne varijable X definira se za sve vrijednosti t kao

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x), & \text{ako je } X \text{ diskretna slučajna varijabla} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{ako je } X \text{ neprekidna slučajna varijabla,} \end{cases} \end{aligned}$$

ako prethodna suma, odnosno prethodni integral, aposlutno konvergiraju.

U prethodnoj definiciji, ako je X diskretna slučajna varijabla označimo skup svih vrijednosti koje ona može primiti odnosno sliku slučajne varijable X kao $R(X) = \{x_i, i \in I\}, I \subseteq \mathbb{N}$, a pripadne vjerojatnosti nizom brojeva $(p(i), i \in I)$ za koje vrijedi $p(i) = P(X = x_i)$, za koji vrijede svojstva:

1) $0 \leq p(i) \leq 1,$ za svaki $i \in \mathbb{N}$,
2) $\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 1$.

Funkcija izvodnica momenata za eksponencijalnu distribuciju dana je izrazom

$$\phi(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad \text{za sve } t < \lambda.$$

Očekivanje eksponencijalne slučajne varijable sada možemo računati kao

$$E[X] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)\bigg|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{\lambda},$$

dok nam je za varijancu također potrebno i

$$E[X^2] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t)\bigg|_{t=0} = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\bigg|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Odavde slijedi kako je varijanca eksponencijalno distribuirane slučajne varijable

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

U nastavku ćemo iskazati i dokazati neka važna svojstva eksponencijale distribucije.

2.1 Svojstva eksponencijalne distribucije

2.1.1 Svojstvo odsustva memorije

Tradicionalno je formulirati ovo svojstvo na primjeru čekanja nepouzdanog vozača autobusa. Odnosno, "ako smo već čekali više od t jedinica vremena onda je vjerojatnost da moramo čekati još s jedinica vremena jednaka kao da u početku nismo uopće ni čekali". Zapišimo ovo matematički kao

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s).$$

Kako bismo ovo i dokazali prisjetimo se da ako je $B \subset A$ onda je $P(B|A) = P(B)/P(A)$ te je stoga

$$P(T > t + s | T > t) = \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(T > s),$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je $e^{s+t} = e^s e^t$.

Ne samo da eksponencijalna distribucija ima svojstvo odsustva memorije, već je jedinstvena distribucija koja posjeduje ovo svojstvo. Kako bismo to i dokazali, pretpostavimo da X posjeduje odsustvo memorije i neka je

$$\hat{F}(x) = P(X > x),$$

$$\hat{F}(s + t) = \hat{F}(s)\hat{F}(t).$$

Neka je g zdesna neprekidna funkcija za koju je

$$g(s + t) = g(s)g(t).$$

Tada je

$$g\left(\frac{2}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = g^2\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ponavljajući postupak dobivamo

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = g^m\left(\frac{1}{n}\right).$$

Također vrijedi i

$$g(1) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = g^n\left(\frac{1}{n}\right),$$

odnosno

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = (g(1))^{\frac{1}{n}}.$$

Stoga je

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = (g(1))^{\frac{m}{n}},$$

što implicira, kako je g neprekidna zdesna, da je

$$g(x) = (g(1))^x.$$

Kako je

$$g(1) = \left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \geq 0$$

zaključujemo da je

$$g(x) = e^{-\lambda x}$$

rješenje gornje jednadžbe, gdje je

$$\lambda = -\log(g(1)).$$

S obzirom na to da znamo da je funkcija distribucije uvijek neprekidna zdesna imamo

$$\hat{F}(x) = e^{-\lambda x},$$

odnosno

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

čime smo dokazali da je X eksponencijalno distribuirana slučajna varijabla.

Primjer 2. *Pretpostavimo da se vrijeme koje osoba provede u banci može opisati eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda = \frac{1}{10}$ (parametar predstavlja očekivano vrijeme čekanja). Kolika je vjerojatnost da osoba provede barem 15 minuta u banci? Kolika je vjerojatnost da će osoba provesti barem 15 minuta u banci ako znamo da je u banci i nakon 10 minuta?*

Neka X modelira slučajnu varijablu koja predstavlja vrijeme koje je osoba provela u banci. Tada je odgovor na prvo pitanje

$$P(X \geq 15) = e^{-15\lambda} = e^{-3/2} \approx 0.22.$$

U drugom pitanju traži se informacija kolika je vjerojatnost da osoba koja je u banci već 10 minuta, u banci provede još najmanje 5 minuta. Kako znamo da eksponencijalna distribucija ne pamti da je osoba već provela 10 minuta u banci, ova vjerojatnost jednaka je onoj da osoba koja ulazi u banku u njoj provede najmanje 5 minuta što je jednako

$$P(X \geq 5) = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \approx 0.604.$$

$\square$

2.1.2 Svojstvo eksponencijalne utrke

Neka su S i T nezavisne slučajne varijable s eksponencijalom distribucijom s parametrima λ i μ, redom. Kako bi minimum slučajnih varijabli S i T bio veći od t, obje slučajne varijable S i T moraju biti veće od t. Koristeći navedeno kao i pretpostavku o nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned} P(min\{S,T\} > t) &= P(S > t, T > t) = P(S > t)P(T > t) \\ &= e^{-\lambda t}e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t}. \end{aligned}$$

Vidimo da $min\{S,T\}$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda+\mu$. Općenito, ovo možemo primijeniti i na niz nezavisnih slučajnih varijabli $T_1, \cdots, T_n$ gdje je slučajna varijabla T_i eksponencijalna s parametrom λ_i

$$\begin{aligned} P(min\{T_1, ..., T_n\} > t) &= P(T_1 > t, ..., T_n > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} \\ &= e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}. \end{aligned}$$

Vidimo da $min\{T_1, ..., T_n\}$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Vratimo se na slučaj dvije slučajne varijable, raščlanjujemo prema vrijednosti S, a zatim pomoću nezavisnosti funkcije gustoće i funkcije distribucije zaključujemo:

$$\begin{aligned} P(S < T) &= \int_0^\infty P(S < T | S = s) f_S(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^\infty f_S(s) P(T > s)\, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} e^{-\mu s}\, \mathrm{d}s = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^\infty (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)s}\, \mathrm{d}s \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili činjenicu da je $(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)s}$ funkcija gustoće pa je stoga njezin integral jednak 1.

Primjer 3. *Pretpostavimo da imamo dva monitora (nezavisna): jedan u uredu životnog vijeka X_1, jedan kod kuće životnog vijeka X_2. X_1 i X_2 su eksponencijalno distribuirane s parametrima $\lambda_1 = 0.25$ i $\lambda_2 = 0.5$, redom. Kada se jedan od njih pokvari potrebno je odmah naručiti novi monitor. Koja je vjerojatnost da će se monitor u uredu prvi pokvariti?*

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{0.25}{0.25+0.5} = \frac{1}{3}.$$

□

Propozicija 2.1. *Ako su $T_1, ..., T_n$ nezavisne eksponencijalno distribuirane slučajne varijable gdje je slučajna varijabla T_i eksponencijalna s parametrom λ_i, onda je*

$$P(T_i = min\{T_1, ..., T_n\}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

Dokaz. Neka je $S = T_i$ i neka je U minimum od $\{T_j, j = 1, \ldots, n, j \neq i\}$. Znamo da je U eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\mu = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) - \lambda_i$, pa korištenjem rezultata o dvije slučajne varijable slijedi

$$P(T_i = min\{T_1, ..., T_n\}) = P(S < U) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n},$$

čime dokazujemo propoziciju. Q.E.D.

Primjer 4. *Pretpostavimo da osoba stigne u banku s dva službenika te su oba zauzeta, ali nitko drugi ne čeka u redu. Osoba dolazi na red kada jedan od službenika postane slobodan. Ako su vremena službenika banke za obradu klijenta eksponencijalno distribuirana s parametrima λ_1 i λ_2 redom za prvog i drugog službenika, odredimo $E[T]$ gdje T predstavlja količinu vremena koju je osoba provela u banci. Neka R_i modelira preostalo vrijeme potrebno da službenik banke i obradi klijenta, $i = 1, 2$. Valja napomenuti kako su zbog svojstva odsustva memorije R_1 i R_2 nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s pripadnim koeficijentima λ_1 i λ_2 (brzinama obrade klijenata). Slijedi:*

$$\begin{aligned} E[T] &= E[T|R_1 < R_2]P(R_1 < R_2) + E[T|R_2 \leq R_1]P(R_2 \leq R_1) \\ &= E[T|R_1 < R_2]\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + E[T|R_1 < R_2]\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Sada, neka S označava vrijeme čekanja osobe da dođe na red

$$\begin{aligned} E[T|R_1 < R_2] &= E[R_1 + S|R_1 < R_2] \\ &= E[R_1|R_1 < R_2] + E[S|R_1 < R_2] \\ &= E[R_1|R_1 < R_2] + \frac{1}{\lambda_1} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Kako je $R_1 < R_2$, slučajna varijabla R_1 je minimum od R_1 i R_2 pa je stoga eksponencijalna sa koeficijentom $\lambda_1 + \lambda_2$. U ovom slučaju klijent dolazi na red kod službenika 1. Slično,

$$E[T|R_2 < R_1] = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2}$$

pa dobivamo rezultat

$$E[T] = \frac{3}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Drugi način na koji bismo mogli izračunati $E[T]$ je da T zapišemo kao sumu.

$$\begin{aligned} E[T] &= E[min(R_1, R_2) + S] = E[min(R_1, R_2)] + E[S] \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + E[S] \end{aligned}$$

pri čemu je

$$E[S] = E[S|R_1 < R_2]\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + E[S|R_2 \leq R_1]\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

□

3 Poissonova distribucija

U ovom ćemo poglavlju definirat Poissonovu distribuciju, pokazati kako Poissonova distribucija proizlazi iz binomne distribucije te navesti osnovna svojstva.

Prije svega definirajmo binomnu distribuciju. Ona je vezana uz nezavisno ponavljanje uvijek istog pokusa. Ako nas pri svakom izvođenju pokusa zanima samo je li se neki događaj dogodio (uspjeh) ili nije (neuspjeh), onda svako izvođenje pokusa možemo modelirati Bernoullijevom distribucijom

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, p \in \langle 0, 1 \rangle, q = 1 - p,$$

gdje p predstavlja vjerojatnost uspjeha. Pretpostavljamo da pokus ponavljamo nezavisno n puta i pri tome nas zanima broj uspjeha. Za slučajnu varijablu X koja opisuje broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja slučajnog pokusa modeliranog Bernoullijevom slučajnom varijablom Y kažemo da ima binomnu distribuciju s parametrima n i p.

Definicija 3.1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Za slučajnu varijablu koja prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, ..., n\}$ s vjerojatnostima

$$p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$

kažemo da ima **binomnu distribuciju** s parametrima n i p.

Očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable X dani su s

$$E[X] = np,$$

$$Var(X) = np(1 - p).$$

Primjer 5. *Poznato je da će bilo koji proizvod proizveden od određenog stroja biti oštećen s vjerojatnošću* 0.1*, neovisno o bilo kojoj drugoj stavci. Kolika je vjerojatnost da u uzorku od tri proizvoda, najviše jedan bude neispravan?*

Neka je X *slučajna varijabla kojom modeliramo broj neispravnih proizvoda koje proizvodi određeni stroj.* X *je binomno distribuirana slučajna varijabla s parametrima* 3 *i* 0.1*. Stoga je željena vjerojatnost dana*

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{3}{0}(0.1)^0(0.9)^3 + \binom{3}{1}(0.1)^1(0.9)^2 = 0.972.$$

$\square$

Poissonova distribucija, slično kao i binomna, može se primijeniti kao distribucija slučajne varijable koja broji uspjehe, ali ne pri nezavisnom ponavljanju pokusa konačno mnogo puta, nego u jediničnom vremenskom intervalu ako pokus zadovoljava sljedeće uvijete:

- vjerojatnost da se pojavi uspjeh ne ovisi o tome u kojem će se jediničnom intervalu dogoditi,
- broj uspjeha u jednom intervalu neovisan je o broju uspjeha u drugom intervalu,
- očekivani broj uspjeha isti je za sve jedinične intervale i dan je pozitivnim realnim brojem λ.

Definicija 3.2. Slučajna varijabla X ima **Poissonovu distribuciju** s parametrom $\lambda > 0$ ako prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, ...\}$ s vjerojatnostima

$$p_i = P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}.$$

Očekivanje slučajne varijable X koja ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ računamo na sljedeći način

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ie^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(1-i)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili identitet $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$.

3.1 Svojstva Poissonove distribucije

Kako je ovo prvi puta da spominjemo Poissonovu distribuciju, sada ćemo iskazati i dokazati neka njezina svojstva.

Teorem 3.3. *Za proizvoljan $k \geq 1$ je*

$$E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = \lambda^k,$$

pa je $Var(X) = \lambda$.

Dokaz. Kako je $X(X-1)\cdots(X-k+1) = 0$ za $X \leq k$, slijedi da je

$$\begin{aligned} E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] &= \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} j(j-1)\cdots(j-k+1) \\ &= \lambda^k \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} = \lambda^k. \end{aligned}$$

Koristeći $Var(X) = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$ zaključujemo

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda.$$

Q.E.D.

Teorem 3.4. *Ako su X_i nezavisne Poissonove slučajne varijable s intenzitetom λ_i onda vrijedi da je $X_1 + \cdots + X_k$ Poissonova s intenzitetom $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati za $k = 2$, generalizacija slijedi induktivno.

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{m=0}^{n} P(X_1 = m)P(X_2 = n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{(\lambda_1)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda_2}\frac{(\lambda_2)^{n-m}}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

Zadnji izraz možemo zapisati na sljedeći način:

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{((\lambda_1)+\lambda_2)^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m}.$$

Zbog normiranosti binomne distribucije s parametrima n i p, gdje je $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Izraz koji prethodi sumi je željena tvrdnja. Q.E.D.

Aproksimirajmo sada Poissonovu distribuciju binomnom distribucijom.

Pretpostavimo da svaki student na Odjelu za matematiku baca simetričan novčić s vjerojatnošću λ/n, kako bi odlučio želi li otići do kantine između 12:15 i 12:16. Vjerojatnost da se točno k studenata odlučilo otići do kantine tijekom točno jedne minute dana je binomnom distribucijom s parametrima n i λ/n

$$p_k(n) = \frac{n(n-1)\cdots(k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Teorem 3.5. *Za fiksan $\lambda > 0$, binomna distribucija s parametrima n i λ/n konvergira prema Poissonovoj distribuciji s parametrom λ kada $n \to \infty$. Drugim riječima, vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} p_k(n) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

gdje je

$$p_k(n) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \tag{1}$$

pa je za veliki n

$$p_k(n) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Dokaz. Prilagodbom (1) dobivamo

$$\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \tag{2}$$

Ukoliko (2) rastavimo na četiri odvojena izraza imamo

i) $\lambda^{k!}/k!$ ne ovisi o n.

ii) Imamo k faktora u brojniku i k faktora u nazivniku pa drugi izraz u produktu (2) možemo zapisati na sljedeći način

$$\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}.$$

Za svaki j imamo $(n-j)/n \to 1$ kada $n \to \infty$, pa drugi izraz konvergira prema 1 kada $n \to \infty$.

iii) Pogledajmo sada:

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}, n \to \infty.$$

Prisjetimo se sada da je

$$\log(1-x) = -x + x^2/2 + \cdots,$$

pa imamo $n\log(1-\lambda/n) = -\lambda + \lambda^2/n + \cdots \to \lambda$ kada $n \to \infty$.

iv) Kako $\lambda/n \to 0$, pa $1-\lambda/n \to 1$. Slijedi

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1^{-k} = 1.$$

Sada vidimo da (2) konvergira prema

$$\frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot e^{-\lambda}\cdot 1,$$

što je upravo zakon razdiobe Poissonove distribucije s parametrom λ. Q.E.D.

4 Poissonov proces

4.1 Procesi brojanja

Stohastički proces $\{N(t), t \geq 0\}$ je proces brojanja (brojač) ako $N(t)$ reprezentira ukupan broj događaja koji se dogodio zaključno s vremenom t. Neki od primjera procesa brojanja su sljedeći:

Primjer 6.

a) *Neka je $N(t)$ broj osoba koje uđu u banku do trenutka t uključujući i njega. Tada je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces brojanja u kojemu događaj odgovara ulasku osobe u banku. Primijetimo da ako je $N(t)$ jednak broju osoba u banci u trenutku t, proces $\{N(t), t \geq 0\}$ nije proces brojanja.*

b) *Uzmimo da je svaki puta kada se dijete rodi promatrani događaj. Tada je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces brojanja kada god je $N(t)$ jednak ukupnom broju osoba koje su rođene do trenutka t.*

c) *Ako je $N(t)$ jednak broju ostvarenih golova rukometnog igrača do trenutka t, onda je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces brojanja. Primijetimo da se događaj u ovom slučaju realizira kada god je rukometni igrač zabio gol.*

$\square$

S obzirom na to kako je proces brojanja definiran logično je da $N(t)$ mora zadovoljavati sljedeće:

i) $N(t) \geq 0$

ii) $N(t)$ je cjelobrojna vrijednost

iii) Ako je $s < t$, onda je $N(s) \leq N(t)$

iv) Za $s < t$, razlika $N(t) - N(s)$ je jednaka broju događaja koji su se dogodili na intervalu $\langle s, t]$.

Proces brojanja posjeduje *svojstvo nezavisnosti prirasta* ako su događaji koji su se dogodili u međusobno disjunktnim intervalima međusobno nezavisni. Pretpostavka o nezavisnosti prirasta prirodna je u Primjeru 5. a), međutim u primjeru b) nije sasvim očita. Razlog tome je što ako je $N(t)$ velik moguće je da ima mnogo rođenih u trenutku t što bi vodilo do zaključka da je broj novih rođenja na intervalu $\langle t, t+s]$ također velik (ne čini se razumnim da je $N(t)$ nezavisan od $N(t+s)$, pa $\{N(t), t \geq 0\}$ ne bi imao nezavisne priraste). U primjeru c) pretpostavka o nezavisnosti prirasta bila bi opravdana ako razmislimo da broj zabijenih golova rukometaša u današnjoj utakmici ne ovisi o broju zabijenih golova u prethodnim utakmicama.

Proces brojanja posjeduje *svojstvo stacionarnosti prirasta* ako distribucija događaja koji su se dogodili u bilo kojem vremenskom intervalu ovisi samo o duljini vremenskog intervala. Drugim riječima, proces ima stacionarne priraste ako broj događaja koji su se dogodili u intervalu $(s, s+t)$ imaju istu distribuciju za svaki s. Pretpostavka o stacionarnosti prirasta u primjeru a) ima smisla jedino ako pretpostavimo da je jednako vjerojatno da osoba uđe u banku u svakom trenutku dana. Primjerice, da je gužva u banci svaki dan (npr. između 14 i 16 sati), pretpostavka o stacionarnosti prirasta ne bi imala smisla. Ako vjerujemo da je populacija planeta Zemlje podjednaka cijelo vrijeme (što nije podržano od većine znanstvenika), onda bi pretpostavka o stacionarnosti prirasta imala smisla u primjeru b). Stacionarnost prirasta nije smislena za pretpostaviti u primjeru c) jer, kao što bi se većina ljudi složila, prosječan igrač rukometa vjerojatno bi postigao više golova između svoje 20. i 25. godine života nego što bi ih postigao između svoje 35. i 40. godine života. Pretpostavka o stacionarnosti prirasta u ovom slučaju imala bi smisla kada bi promatrali manji period, primjerice od jedne godine.

4.2 Definicija Poissonovog procesa

Jedan od najvažnijih procesa brojanja je upravo Poissonov proces. Prije nego formalno damo definiciju Poissonovog procesa, definirajmo pojam funkcije $f(\cdot)$ koja je tipa $o(h)$.

Definicija 4.1. Funkcija $f(\cdot)$ je tipa $o(h)$ ako je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Primjer 7.

a) Funkcija $f(x) = x^3$ je tipa $o(h)$ obzirom da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \to 0} h^2 = 0.$$

b) Funkcija $f(x) = x$ nije tipa $o(h)$ obzirom da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 \neq 0.$$

c) Ako su f i g tipa $o(h)$, onda je i $f + g$ tipa $o(h)$ obzirom da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) + g(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0 + 0 = 0.$$

d) Ako je f tipa $o(h)$, onda je i $g = cf, c \in \mathbb{R}$, tipa $o(h)$ obzirom da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{cf(h)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = c \cdot 0 = 0.$$

e) Iz c) i d) slijedi da je svaka linearna kombinacija funkcija koje su tipa $o(h)$ također tipa $o(h)$.

Notacija $o(h)$ omogućava preciznije iznošenje tvrdnji. Primjerice, neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f i funkcijom intenziteta $\lambda(t)$. Aproksimirajuće tvrdnje

$$P(t < X < t + h) \approx f(t)h$$

$$P(t < X < t + h | X > t) \approx \lambda(t)h, h > 0$$

mogu biti preciznije izražene kao

$$P(t < X < t + h) = f(t)h + o(h)$$

$$P(t < X < t + h | X > t) = \lambda(t)h + o(h).$$

Sada možemo definirati Poissonov proces.

Definicija 4.2. Proces brojanja $\{N(t), t \geq 0\}$ je **Poissonov proces** s intenzitetom $\lambda > 0$ ako vrijedi:

i) $N(0) = 0$,

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ ima nezavisne priraste,

iii) $P(N(t + h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$,

iv) $P(N(t + h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

Interpretacija svojstava iz definicije Poissonovog procesa:

iii) Vjerojatnost jedne realizacije promatranog događaja u kratkom vremenskom intervalu (h) približno je proporcionalna duljini tog intervala.

iv) Kad duljina intervala h teži u nulu, vjerojatnost da se promatrani događaj realizira barem dva puta teži u nulu.

4.3 Međudolazna vremena i vremena čekanja

Promotrimo Poissonov proces i označimo vrijeme realizacije prvog događaja sa τ_1. Nadalje, za $n > 1$ neka τ_n označava proteklo vrijeme između $(n-1)$-og i n-tog događaja. Niz $\{\tau_n, n = 1, 2, ...\}$ zovemo *nizom međudolaznih vremena*. Primjerice, ako su $\tau_1 = 5$ i $\tau_2 = 10$, onda je prvi događaj koji bi Poissonov proces zabilježio bio u trenutku 5 a drugi u trenutku 15.

Odredimo sada distribuciju od τ_n. Kako bismo to napravili, uočimo da se događaj $\{\tau_1 > t\}$ dogodio ako i samo ako se ništa nije dogodio na intervalu $[0, t]$, te je

$$\begin{aligned} P(\tau_1 > t) &= P(0 \text{ događaja na } (0, t]) \\ &= P(N(t) - N(0) = 0) \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Stoga τ_1 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $1/\lambda$. Prema teoremu o dvostrukom očekivanju je

$$P(\tau_2 > t) = E[I_{\{\tau_2 > t\}}] = E[E[I_{\{\tau_2 > t\}} | \tau_1]].$$

Međutim,

$$\begin{aligned} P(\tau_2 > t | \tau_1 = s) &= P(0 \text{ događaja na } (s, s+t] | \tau_1 = s) \\ &= P(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1) \\ &= P(0 \text{ događaja na } (s, s+t]) \\ &= P(N(t+s) - N(s) = 0) \\ &= e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

gdje su jednakosti proizašle iz nezavisnosti i stacionarnosti prirasta. Zaključujemo da je τ_2 također eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $1/\lambda$. Štoviše, τ_2 je nezavisna od τ_1. Ponavljajući ovaj postupak dolazimo do sljedećeg rezultata.

Propozicija 4.1. *Slučajne varijable $\tau_n, n = 1, 2, ...$ su nezavisne jednako distribuirane eksponencijalne varijable s parametrom λ.*

Ova propozicija svakako nas ne iznenađuje. Pretpostavka o stacionarnosti i nezavisnosti prirasta zapravo je ekvivalentna tvrdnji da u bilo kojem trenutku proces vjerojatnosno ponovno kreće od početka. Odnosno, proces od bilo kojeg trenutka nadalje neovisan je o svemu što se prethodno dogodilo (zbog nezavisnosti prirasta), a također ima istu distribuciju kao i izvorni proces (zbog stacionarnosti prirasta).

Druga veličina od interesa je T_n, vrijeme realizacije n-tog događaja, koji se naziva *vrijeme čekanja* do n-tog događaja. Lako se vidi da je

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i, n \geq 1,$$

stoga slijedi da T_n ima gamma distribuciju s parametrima n i λ. Funkcija gustoće od T_n dana je izrazom

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \tag{3}$$

Ovu tvrdnju dokazali bismo indukcijom.
Kada je $n = 1$, T_1 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ. Znamo da je nulta potencija bilo kojeg pozitivnog broja jednaka 1, te korištenjem činjenice da je $0! = 1$ funkcija gustoće slučajne varijable T_1 reducira se na

$$f_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

čime smo pokazali da je formula točna u slučaju da je $n = 1$.
Pretpostavimo da formula vrijedi za n te pokažimo da vrijedi i za $n + 1$.
Budući da je $T_{n+1} = T_n + \tau_{n+1}$, svodimo se na T_n i činjenicu da su T_n i τ_{n+1} nezavisne imamo

$$f_{T_{n+1}}(t) = \int_0^t f_{T_n}(s) f_{t_{n+1}}(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

Korištenjem činjenice da je $e^a e^b = e^{a+b}$ te korištenjem supstitucije $a = -\lambda s$ i $b = -\lambda(t-s)$ dobivamo

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s = e^{-\lambda t} \lambda^n \int_0^t \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}s = \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}$$

čime smo dokazali tvrdnju.

Primjer 8. *Pretpostavimo da broj osoba koje uđu u banku možemo modelirati Poissonovim procesom s intenzitetom $\lambda = 10$ po satu.*

a) *Koje je očekivano vrijeme prije dolaska 100. osobe u banku?*
   $E[T_{100}] = 100/\lambda = 10$ *sati.*

b) *Koja je vjerojatnost da između dolaska 100. i 101. osobe koja uđe u banku prođe više od 1 sata?*
   $P(\tau_{101} > 1) = e^{-1\lambda} = e^{-10} = 0.000454.$

□

4.4 Svojstva Poissonovog procesa

Kako bismo što bolje objasnili zašto proces $\{N(t), t \geq 0\}$ zovemo Poissonovim, a ne eksponencijalnim pogledajmo neka njegova distribucijska svojstva. Neka su međudolazna vremena $\tau_1, \tau_2, ...,$ nezavisne eksponencijalno distribuirane slučajne varijable s parametrom λ, neka je vrijeme n-te realizacije $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$, za $n \geq 1$, $T_0 = 0$, te neka je broj realizacija do trenutka s, $N(s) = max\{n : T_n \leq s\}$.

Lema 4.1. $N(s)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom λs.

Dokaz. $N(s) = n$ ako i samo ako $T_n \leq s < T_{n+1}$, primjerice n-ta mušterija dolazi prije trenutka s ili u samom trenutku s, a $(n+1)$-a mušterija nakon trenutka s. U našem slučaju $T_n = t$ i $T_{n+1} > s$, a kako moramo zadovoljiti da je $\tau_{n+1} > s - t$ i da su τ_{n+1} i T_n međusobno nezavisne slijedi

$$P(N(s) = n) = \int_0^s f_{T_n}(t) P(\tau_{n+1} > s - t)\,\mathrm{d}t.$$

Odavde primjenom (3) slijedi da je

$$\begin{aligned} P(N(s) = n) &= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda(s-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda s} \int_0^s t^{n-1}\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 4.2. $\{N(t+s) - N(s), t \geq 0\}$ intenziteta λ je Poissonov proces nezavisan od slučajnih varijabli $N(r), 0 \leq r \leq s$.

Objasnimo prethodnu lemu. Pretpostavimo da su se do trenutka s dogodile četiri realizacije T_1, T_2, T_3, T_4 u trenucima t_1, t_2, t_3, t_4. Znamo da do realizacije T_5 mora proći $\tau_5 > s - t_4$ vremena, ali zbog svojstva odsustva memorije eksponencijalne distribucije vrijedi

$$P(\tau_5 > s - t_4 + t | \tau_5 > s - t_4) = P(\tau_5 > t) = e^{-\lambda t}.$$

Odavde vidimo kako je distribucija prve realizacije nakon s eksponencijalna s parametrom λ te da je ona nezavisana od T_1, T_2, T_3, T_4. Očito je da su $\tau_6, \tau_7, ...$ nezavisni od T_1, T_2, T_3, T_4 i T_5. Ovime smo pokazali da su međudolazna vremena nakon s nezavisna eksponencijalno distribuirana s intenzitetom λ obzirom da je $N(t+s) - N(s), t \geq 0$ Poissonov proces.

Iz prethodne leme dolazimo do sljedećeg.

Lema 4.3. $\{N(t), t \geq 0\}$ ima nezavisne priraste, odnosno ako su $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, onda su $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$ nezavisne slučajne varijable za svai izbor t-ova u gornjem poretku.

Dokaz. Lema 4.2 implicira kako su $N(t_n) - N(t_{n-1})$ nezavisni od $N(r), r \leq t_{n-1}$, stoga isto vrijedi i za $N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}), ..., N(t_1) - N(t_0)$. Željena tvrdnja slijedi induktivno. Q.E.D.

Sada smo spremi dati i drugu definiciju Poissonovog procesa u terminima procesa $\{N(s) : s \geq 0\}$ koji broji broj realizacija događaja u intervalu $[0, s]$.

Teorem 4.3. *Ako je $\{N(s) : s \geq 0\}$ Poissonov proces, onda*

i) $N(0) = 0$,

ii) $N(t + s) - N(s)$ *je Poissonova slučajna varijabla s parametrom* λt,

iii) Proces $\{N(t) : t \geq 0\}$ *ima nezavisne priraste.*

U suprotnom, ako vrijede i), ii), iii), onda je $\{N(s) : s \geq 0\}$ Poissonov proces s intenzitetom λ.

Dokaz. Očito *i)* vrijedi. Lema 4.1 i Lema 4.2 dokazuju *ii)* i *iii)*.
Pokažimo sada suprotan smjer. Neka je T_n vrijeme n-tog dolaska. Prvi dolazak događa se nakon t ako i samo ako nije bilo događaja u $[0, t]$. Korištenjem zakona razdiobe Poissonove distribucije slijedi da je

$$P(\tau_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},$$

pa vidimo da $\tau_1 = T_1$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ. Za $\tau_2 = T_2 - T_1$ je

$$\begin{aligned} P(\tau_2 > t | \tau_2 = s) &= P(\text{bez dolazaka na } (s, s + t] | \tau_1 = s) \\ &= P(N(t + s) - N(s) = 0 | N(r) = 0 r < s, N(s) = 1) \\ &= P(N(t + s) - N(s) = 0) = e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

zbog nezavisnosti prirasta u *iii)*, pa je τ_2 eksponencijalna s parametrom λ nezavisna od τ_1. Provodeći ovaj proces dolazimo do zaključka da su τ_1, τ_2 nezavisne eksponencijalne s parametrom λ. Q.E.D.

5 Generalizacije Poissonovog procesa

5.1 Nehomogeni Poissonov proces

U ovom poglavlju promotrit ćemo generalizacije Poissonovog procesa. Prva generalizacija o kojoj ćemo reći više je nehomogeni Poissonov proces često zvan i nestacionaran Poissonov proces, odnosno Poissonov proces koji dozvoljava da intenzitet u trenutku t postane funkcija od t.

Definicija 5.1. Za proces $\{N(t), t \geq 0\}$ kažemo da je **nehomogeni Poissonov proces** s funkcijom intenziteta $\lambda(t), t \geq 0$ ako

i) $N(0) = 0$.

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ ima nezavisne priraste.

iii) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

iv) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t) + o(h)$.

Funkcija $m(t)$ definirana izrazom

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y)\, \mathrm{d}y$$

zove se *funkcijom parametra* nehomogenog Poissonovog procesa. Napomenimo, ako je $\lambda(t) = \lambda$ onda se radi o homogenom Poissonovom procesu.

Teorem 5.2. *Ako je $\{N(t), t \geq 0\}$ nehomogeni Poissonov proces s funkcijom intenziteta $\lambda(t), t \geq 0$, onda je $N(t-s) - N(t)$ Poissonova slučajna varijabla s parametrom $m(t+s) - m(t) = \int_s^{t+s} \lambda(y)\, \mathrm{d}y$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je $N(t)$ Poissonova. Neka je $u > 0$ fiksan. Definiramo

$$g(t) = E[e^{-uN(t)}].$$

Dobit ćemo $g(t)$ pomoću

$$\begin{aligned} g(t+h) &= E[e^{-uN(t+h)}] \\ &= E[e^{-u(N(t)+N(t+h)-N(t))}] \\ &= E[e^{-uN(t)}e^{-u(N(t+h)-N(t))}] \\ &= E[e^{-uN(t)}]E[e^{-u(N(t+h)-N(t))}] \\ &= g(t)E[e^{-u(N(t+h)-N(t))}] \\ &= g(t)E[e^{-uN_t(h)}], \end{aligned}$$

gdje je $N_t(h) = N(t+h) - N(t)$. Koristeći činjenicu da je $P(N_t(h) = 0) = 1 - \lambda(t)h + o(h)$, iz svojstava $i), ii), iii), iv)$ definicije nehomogenog Poissonovog procesa uvjetovanjem u ovisnost je li $N(t)$ $0, 1$ ili ≥ 2 dobivamo

$$g(t+h) = g(t)(1 - \lambda(t)h + e^{-u}\lambda(t)h + o(h)).$$

Stoga,

$$g(t+h) - g(t) = g(t)\lambda(t)(e^{-u} - 1)h + o(h)$$

dijeljenjem sa h i puštanjem da $h \to 0$ dobivamo

$$g'(t) = g(t)\lambda(t)(e^{-u} - 1),$$

što može biti zapisano kao

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda(t)(e^{-u} - 1).$$

Integracijom obje strane dobivamo

$$\log(g(t)) - \log(g(0)) = (e^{-u} - 1)\int_0^t \lambda(t)\,\mathrm{d}t.$$

Koristeći činjenicu da je $g(0) = 1$ i da je $\int_0^t \lambda(t)\,\mathrm{d}t = m(t)$ dobivamo izraz oblika

$$g(t) = exp\{m(t)(e^{-u} - 1)\}.$$

Stoga $E[e^{-uN(t)}]$, Laplaceova transformacija od $N(t)$, je $exp\{m(t)(e^{-u}-1)\}$. Slijedi da je $N(t)$ Poissonova slučajna varijabla. Propozicija proizlazi iz $N_s(t) = N(s+t) - N(t)$, $\{N_s(t), t \geq 0\}$ nestacionaran proces s funkcijom intenziteta $\lambda_s(t) = \lambda(s+t), t > 0$. Zaključno, $N_s(t)$ je Poissonova slučajna varijabla s parametrom

$$\int_0^t \lambda_s(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^t \lambda(s+y)\,\mathrm{d}y = \int_s^{s+t} \lambda(x)\,\mathrm{d}x$$

čime smo dokazali propoziciju. Q.E.D.

Primjer 9. *Banka se otvara ujutro u 8 sati i zatvara u 17 sati. Od 8 do 11 klijenti dolaze u prosjeku s intenzitetom koji linearno raste od 5 klijenata po satu u 8 ujutro, do 20 klijenata po satu u 11 sati. Od 11 do 13 sati intenzitet je konstantan i jednak 20 klijenata po sati, a od 15 do 17 sati intenzitet linearno pada i u 17 sati jednak je 12 klijenata po satu. Pretpostavimo da je broj klijenata u disjunktnim vremenskim intervalima nezavisan.*

a) *Kolika je vjerojatnost da nema klijenata od 8:30 do 9:30?*

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t, & t \in [0,3] \\ 20, & t \in \langle 3,5] \\ 30 - 2t, & t \in \langle 5,9] \end{cases}$$

$$P(N_{3/2} - N_{1/2} = 0) = e^{-\int_{1/2}^{3/2} \lambda(u)\,\mathrm{d}u} = e^{-\int_{1/2}^{3/2}(5+5u)\,\mathrm{d}u} = e^{-10}.$$

b) *Koji je očekivani broj klijenata u periodu od 10 do 12 sati?*

Zanima nas $E[N_4 - N_2]$. Kako znamo da je $N_4 - N_2$ distribuirana Poissonovom distribucijom s parametrom $\int_2^4 \lambda(u)\,\mathrm{d}u = \int_2^4 (5+5u)\,\mathrm{d}u = 75/2$ očito je $E[N_4 - N_2]$ upravo $75/2$ obzirom da je očekivanje Poissonove slučajne varijable jednako njenom intenzitetu.

□

5.1.1 Hawkesov proces

Dok je funkcija intenziteta $\lambda(t)$ nehomogenog Poissonovog procesa deterministička funkcija, postoje procesi brojanja $\{N(t), t \geq 0\}$ čija je funkcija intenziteta u trenutku t, označimo je $R(t)$, slučajna varijabla koja ovisi o prošlosti procesa do trenutka t. *Hawkesov proces* je primjer procesa brojanja koji ima takvu, slučajnu funkciju intenziteta. Ovaj proces pretpostavlja da postoji osnovna vrijednost intenziteta $\lambda > 0$, te ako je bilo ukupno $N(t)$ događaja do trenutka t, pri čemu su $S_1 < S_2 < \cdots < S_{N(t)}$ dolazna vremena, onda je slučajna funkcija intenziteta jednaka

$$R(t) = \lambda + \sum_{i=1}^{N(t)} \mu(t - S_i).$$

Sama struktura funkcije $R(t)$ je prilično fleksibilna te je potrebna samo specifikacija osnovne vrijednosti intenziteta $\lambda > 0$ te oblik funkcije μ. Uobičajen izbor funkcije μ je eksponencijalna funkcija odnosno funkcija oblika $\mu(t) = \alpha e^{-\beta t}$, gdje su α i β pozitivne konstante. Sada vidimo da je slučajna funkcija intenziteta upravo jednaka

$$R(t) = \lambda + \sum_{i=1}^{N(t)} \alpha e^{-\beta(t - S_i)}.$$

Drugim riječima, Hawkesov proces je proces brojanja u kojemu

1. $R(0) = 0$,
2. kada god dođe do realizacije, slučajan intenzitet poveća se za konstnatu α,
3. ako nema novonastalih događaja od trenutka s do trenutka $s + t$, onda je $R(s + t) = \lambda + (R(s) - \lambda)e^{-\alpha t}$.

Drugi česti izbor funkcije μ daje slučajnu funkciju intenziteta oblika

$$R(t) = \lambda + \sum_{i=1}^{N(t)} \frac{k}{(c + (t - S_i))^p},$$

gdje su c, k i p nenegativne konstante. Slučajna funkcija intenziteta ovog oblika koristi se za modeliranje vremena i magnituda potresa zvanog *Omorijev zakon*. Međutim, nadalje ćemo se fokusirati na μ kao eksponencijalnu funkciju.

Izvest ćemo $E[N(t)]$, očekivani broj događaja koje zaključno s trenutkom t broji Hawkesov proces. Da bismo to učinili, trebat će nam sljedeća lema koja vrijedi za sve procese brojanja.

Lema 5.1. Neka je $R(t), t \geq 0$ slučajna funkcija intenziteta procesa brojanja $\{N(t), t \geq 0\}$ za koji je $N(0) = 0$. Tada je

$$m(t) = E[N(t)] = \int_0^t E[R(s)] \,\mathrm{d}s.$$

Dokaz.
$$E[N(t+h)|N(t), R(t)] = N(t) + R(t)h + o(h)$$
Očekivanje ovog izraza je
$$E[N(t+h)] = E[N(t)] + E[R(t)]h + o(h),$$
odnosno
$$m(t+h) = m(t) + hE[R(t)] + o(h)$$
ili
$$\frac{m(t+h) - m(t)}{h} = E[R(t)] + o(h).$$
Kada $h \to 0$ slijedi da je
$$m'(t) = E[R(t)].$$
Integrirajući obje strane slijedi
$$m(t) = \int_0^t E[R(s)]ds.$$
Q.E.D.

Sada možemo iznijeti sljedeću važnu propoziciju za Hawkesov proces. Dokaz ove propozicije može se vidjeti u [8].

Propozicija 5.1. *Ako je $E[R(t)] = \mu$, onda vrijedi*
$$E[N(t)] = \lambda + \frac{\lambda\mu}{(\mu-\alpha)^2}(e^{(\mu-\alpha)t} - 1 - (\mu-\alpha)t).$$

Primjer 10. *Hawkesovi procesi proučavani su u kontekstu seizmologije. Uvodimo model slijeda naknadnih udara potresa. Ovaj model je Hawkesov za modeliranje vremena i magnituda potresa. Neka $k_i \in [0, \infty\rangle$ označava magnitudu potresa koji se dogodio u trenutku T_i. U najjednostavnijoj formi model slijeda naknadnih potresa definiramo funkcijom intenziteta*
$$\lambda(t) = \lambda_0 + \alpha \sum_{T_i<t} e^{\beta k_i} e^{-\delta(t-T_i)},$$
gdje su $\alpha, \beta, \delta > 0$ parametri, te je
$$f(k|t) = \gamma e^{-\gamma t}$$
funkcija gustoće od k_i.
Ekvivalentno, kada bismo pri definiranju funkcije intenziteta koristili uvjetnu funkciju intenziteta i vremena imali bi model sljedećeg oblika
$$\lambda(t,k) = (\lambda_0 + \alpha \sum_{T_i<t} e^{\beta k_i} e^{-\delta(t-T_i)})\gamma e^{-\gamma t}.$$
Ideja koja stoji iza korištenja ovog modela je da potresi uzrokuju potresne udare što se reflektira u činjenici kako svaki novi potres povećava intenzitet za $\alpha e^{\beta k_i}$. Uočimo da jaki potresi više utječu od slabijih potresa. Također, napomenimo i to da intenzitet ovisi o prošlosti, pa znamo da ovaj model sigurno nema nezavisne komponente. □

5.2 Složeni Poissonov proces

Za slučajni proces $\{X(t), t \geq 0\}$ kažemo da je *složeni Poissonov proces* ako je

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0$$

gdje su $\{N(t), t \geq 0\}$ Poissonov proces te $\{Y_i, i \geq 1\}$ familija nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli nezavisnih od $\{N(t), t \geq 0\}$. Kako bismo bolje objasnili ove pretpostavke pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 11. *Promotrimo slanje poruka internetom. Poruka stiže na središnje računalo kako bi se prenijela preko interneta. Ako zamislimo velik broj korisnika koji koriste svoja računala za slanje poruka te su tim povezani na središnje računalo, tada se međudolazna vremena poruka na središnje računalo mogu modelirati Poissonovim procesom. Stavimo li da je Y_i veličina i-te poruke, razumno je pretpostaviti kako su $Y_1, Y_2, \ldots$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable te da su nezavisne od međudolaznih vremena poruka na središnje računalo koja su modelirana Poissonovim procesom.* □

Prirodno je razmotriti sumu Y_i-eva kojima smo svjedočili do trenutka t:

$$S(t) = Y_1 + \cdots + Y_{N(t)}$$

gdje je $S(t) = 0$ ako je $N(t) = 0$. U prethodnom primjeru, $S(t)$ predstavlja ukupnu broj bajtova svih poruka do vremena t. Zanimljivo je znati koliko iznose očekivanje i varijanca od $S(t)$.

Teorem 5.3. *Neka su $Y_1, Y_2, \ldots$ nezavisne i jednako distribuirane, te neka su N i $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ nezavisne slučajne varijable, gdje je $S_0 = 0$ kada je $N = 0$.*

i) Ako su $E|Y_i|, E[N] < \infty$, onda je $E[S_n] = E[N] \cdot E[Y_i]$.

ii) Ako su $E[Y_i^2], E[N^2] < \infty$, onda je $Var(S_n) = E[N]Var(Y_i) + Var(N)(E[Y_i])^2$.

iii) Ako je N Poissonova s parametrom λ, onda je $Var(S_n) = \lambda E[Y_i^2]$.

Dokaz.

i) Kada je $N = n, S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ima očekivanje $E[S_n] = nE[Y_i]$, pa je

$$\begin{aligned} E[S_n] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[S_n | N = n] \cdot P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nE[Y_i] \cdot P(N = n) = E[N] \cdot E[Y_i]. \end{aligned}$$

ii) Kada je $N = n, S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ima $Var(S_n) = nVar(Y_i)$, stoga je

$$E[S_n^2 | N = n] = nVar(Y_i) + (nE[Y_i])^2.$$

Sada dobivamo

$$\begin{aligned} E[S_n^2] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[S_n^2 | N = n] \cdot P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{nVar(Y_i) + n^2(E[Y_i])^2\} \cdot P(N = n) \\ &= (E[N]) \cdot Var(Y_i) + E[N]^2 \cdot (E[Y_i])^2. \end{aligned}$$

Primijetimo sada

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= E[S_n]^2 - (E[S_n])^2 \\ &= (E[N]) \cdot Var(Y_i) + E[N^2] \cdot (E[Y_i])^2 - (E[N] \cdot E[Y_i)^2] \\ &= (E[N]) \cdot Var(Y_i) + Var(N) \cdot (E[Y_i])^2, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili da je $Var(N) = E[N^2] - (E[N])^2$ kako bismo iskoristili drugu i treću jednakost.

iii) Primijetimo da u specijalnom slučaju kada imamo Poissonovu slučajnu varijablu imamo $E[N] = \lambda$ i $Var(N) = \lambda$, pa rezultat slijedi iz $Var(Y_i) + (E[Y_i])^2 = E[Y_i^2]$.

Q.E.D.

Primjer 12. *Pretpostavimo da obitelji migriraju na neko određeno područje Poissonovom distribucijom s parametrom $\lambda = 2$ po tjednu. Ako je broj ljudi u svakoj obitelji nezavisan i može iznositi $1, 2, 3$ ili 4 s vjerojatnostima $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, odredite očekivanu vrijednost i varijancu broja osoba koje su migrirale na određeno područje tijekom fiksnog vremena od 5 tjedana.*

Neka je Y_i broj ljudi koji pripadaju i-toj obitelji. Sada imamo

$$E[Y_i] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2},$$

$$(E[Y_i])^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{43}{6}.$$

Kako $X(5)$ predstavlja broj ljudi koji su migrirali tijekom 5 tjedana, slijedi

$$E[X(5)] = 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = 25,$$

$$Var(X(5)) = 2 \cdot 5 \cdot \frac{43}{6} = \frac{215}{3}.$$

□

5.2.1 Cramér-Lundbergov model

Rizik je širok pojam koji označava neizvjesnost, gubitak, nesigurnost. Često se umjesto rizika pogrešno koristi neizvjesnost, međutim oni nemaju isto značenje. Neizvjesnost je nesposobnost predviđanja ishoda i obično se temelji na nedovoljnom broju informacija što se sve može dogoditi u budućnosti. Ona je sastavni dio rizika koji je zapravo stanje u kojemu postoji mogućnost negativnog odstupanja od ishoda kojemu se nadamo. Ako vjerojatnost događaja nije poznata, govorimo o neizvjesnosti.

Osiguranjem prenosimo rizik koji okružuje pojedinca na osiguravatelja sklapanjem ugovora o osiguranju. Ugovorom o osiguranju se pojedinac nastoji zaštiti od rizika koji može ugroziti njegov život ili njegovu imovinu. Sklapanjem ugovora o osiguranju osiguranik varijabilne troškove pretvara u fiksne plaćanjem premije. Premija je iznos koji osiguranik plaća osiguravajućem društvu za zaštitu. Obično se premija skuplja od velikog broja osiguranika koji se osiguravaju od istog rizika. Ovdje je osnovna pretpostavka da će samo mali broj osiguranika zaista i imati štetu. U slučaju da do štete dođe, osiguravajuće društvo će osiguraniku isplatiti štetu. Osiguranja se mogu podijeliti na neživotna osiguranja i životna osiguranja, a nama će od interesa biti neživotna osiguranja.

Kako bi nešto bilo predmet osiguravajuće zaštite od štetnog događaja potrebno je da ispunjava sljedeće uvijete:

1. radi se o budućem događaju koji je neizvjestan i nezavisan od volje osiguranika,

2. rizik je procjenjiv,

3. šteta je procjenjiva.

Kako u štete najznačajnija veličina osiguravajućem društvu, a one su neizvjesne, potrebno je odrediti vjerojatnost nastanka štete. Model koji ćemo promatrati imat će mnoga poopćenja.

Broj šteta nastalih u vremenskom intervalu $[0, t]$ za sve $t \geq 0$ opisat ćemo procesom brojanja $\{N(t), t \geq 0\}$, dok ćemo iznos šteta opisati slučajnim procesom jednako distribuiranih slučajnih varijabli $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$, gdje je X_i slučajna varijabla koja modelira iznos i-te štete. Ukupne štete u vremenskom intervalu opisane su složenim Poissonovim procesom $\{S(t), t \geq 0\}$ pri čemu je

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Osiguravajuće društvo prima premiju neprekidno i po konstantnoj stopi c, pa je ukupna premija u vremenskom intervalu $[0, t]$ jednaka ct. Funkcija kojom modeliramo prihod od premija je zbog pretpostavki modela deterministička te ćemo ju označavati s

$$p(t) = ct, t \geq 0.$$

Pretpostavimo još i da je osiguravajuće društvo u trenutku $t = 0$ odvojilo iznos novca koji ćemo označavati s u, a zovemo ga početnim viškom. Dakle, proces viška prihoda $\{U(t), t \geq 0\}$, koji još nazivamo i procesom rizika, je oblika

$$U(t) = u + p(t) - S(t). \tag{4}$$

Napomenimo još jednom da je ovo pojednostavljen model u kojemu je zanemarena inflacija i druge determinističke promjene. Također, pretpostavit ćemo i da se štete rješavaju odmah kada nastanu te da su troškovi rješavanja šteta uračunati u premiju. U praksi to baš nije tako, štete se uobičajeno rješavaju uz malu odgodu, a ako su u pitanju štete koje se rješavaju na sudu postupak može potrajati i nekoliko godina.

Kako bismo mogli reći nešto više o riziku osiguravajućeg društva potrebno je poznavati distribuciju procesa viška prihoda $\{U(t), t \geq 0\}$. Filip Lundberg postavio je temelje moderne teorije rizika, a Harold Cramér usavršio je njegove ideje prema kojima je nazvan prvi model procesa rizika kojeg ćemo definirati u nastavku.

U daljnjem specificiranju modela (4) uvodimo pretpostavke na ukupne štete $\{S(t), t \geq 0\}$:

1. Štete stižu u trenutcima $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n$ koje nazivamo dolaznim vremenima.
2. Šteta koja stiže u trenutku T_i ima iznos X_i. Slučajni proces $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ čine nezavisne, nenegativne, jednako distribuirane slučajne varijable.
3. Slučajni procesi dolaznih vremena $\{T_i, i \in \mathbb{N}\}$ i iznosa šteta $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ su međusobno nezavisni.

Štete se događaju u vremenima $T_1, T_2, ...$ u iznosima $X_1, X_2, ...$ pa broj pristiglih šteta do trenutka t zapisujemo kao

$$N(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} = \#\{i \in \mathbb{N} : T_i \leq t\}, t \in [0, \infty\rangle$$

pri čemu je # broj elementa skupa.

Iznosi šteta ne utječu na broj šteta i iznos jedne štete ne utječe na iznos druge štete. Višak prihoda osiguravajućeg društva se u trenucima nastanka štete smanjuje za iznos štete, dok se tijekom trajanja osiguranja povećava za iznos premije po konstantnoj stopi.

Definicija 5.4. Cramér-Lundbergov proces rizika je proces $\{U(t), t \geq 0\}$ definiran sa

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

pri čemu je $u > 0$, $c > 0$, $\{N(t), t \geq 0\}$ je homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ, a slučajan proces $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ čine nezavisne, nenegativne, jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F.

Distribucije šteta gotovo nikada nisu poznate, međutim pretpostavlja se kako one dolaze iz neke parametarske familije distribucija. Parametri familije se procjenjuju na osnovu podataka o iznosima šteta u određenom periodu te se pri tome koriste razne statističke metode, kao što su metoda maksimalne vjerodostojnosti i metoda momenata. Distribucije šteta vrlo često imaju pozitivnu asimetričnost i dug rep, stoga je kod odabira važno da funkcija može modelirati i najveće štete. Naime, jedna velika šteta može svojim iznosom premašiti sumu svih ostalih šteta te time ugorziti poslovanje osiguravajućeg društva. Procjena prethodno opisanih ekstremnih događaja izuzetno je važna te se opisuje desnim repom distribucije, odnosno ponašanjem repne funkcije distribucije

$$\bar{F} = 1 - F(x) = P(X > x)$$

za velike vrijednosti x, gdje je $F(x)$ odabrana funkcija distribucije.

Definicija 5.5. Za slučajnu varijablu X s funkcijom distribucije F kažemo da ima **distribuciju s teškim repom** ako je

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = L(x) \cdot x^{-\alpha},$$

gdje $\alpha > 0$ nazivamo repni indeks, a funkcija L je takva da za svaki $x > 0$ vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Parametar α određuje težinu repa, odnosno što su vrijednosti niže veća je vjerojatnost ekstremnih vrijednosti.

Primjer 13. *Pretpostavimo da je u Cramér-Lundbergovom modelu iznosa šteta distribuiran eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda > 0$. Tada je*

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}, \text{ za } x \geq 0.$$

Rep distribucije eksponencijalno brzo pada u nulu, odnosno vjerojatnost uočavanja velikih šteta vrlo je mala. Ovakva situacija vrlo je rijetka u stvarnim primjerima jer njih bolje opisuju distribucije kod kojih repna funkcija sporije opada u nulu. □

5.3 Uvjetni Poissonov proces

Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ proces brojanja takav da postoji pozitivna slučajna varijabla L takva da je uvjetno na $L = \lambda$ proces brojanja Poissonov intenziteta λ. Ovako definiran proces zove se *uvjetni Poissonov proces.*

Pretpostavimo da je L neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće g. S obzirom na to da je

$$\begin{aligned} P(N(t+s)) - N(s) &= \int_0^\infty P(N(t+s) - N(s) = n | L = \lambda) g(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} g(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

vidimo da uvjetni Poissonov proces ima stacionarne priraste. Međutim, kako poznavanje broja događaja realiziranih u određenom intervalu daje informacije o mogućim vrijednostima slučajne varijable L koja utječe na raspodjelu broja događaja u bilo kojem drugom intervalu, proizlazi da uvjetni Poissonov proces općenito nema nezavisne priraste. Slijedom toga, uvjetni Poissonov proces u pravilu nije Poissonov proces.

Pogledajmo sada očekivanje i varijancu uvjetnog Poissonovog procesa. Kako je $N(t)$ uvjetno na $L = l$ Poissonov proces s očekivanjem lt zaključujemo kako su

$$E[N(t)|L = l] = lt,$$

$$Var(N(t)|L = l) = lt.$$

Posljedično, uvjetna varijanca je

$$Var(N(t)) = E[Lt] + Var(Lt) = tE[L] + t^2 Var(L).$$

Također, možemo izračunati distribuciju slučajne varijable L uz uvjet $N(t) = n$ na sljedeći način

$$\begin{aligned} P(L \leq x | N(t) = n) &= \frac{P(L \leq x, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\int_0^\infty P(L \leq x, N(t) = n | L = \lambda) g(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\int_0^x P(N(t) = n | L = \lambda) g(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda}. \end{aligned}$$

Drugim riječima, uvjetna funkcija gustoće slučajne varijable L uz uvjet $N(t) = n$ je

$$f_{L|N(t)}(\lambda | n) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda^n g(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda}, \lambda \geq 0. \tag{5}$$

Primjer 14. *Osiguravajuće društvo smatra da svaki od njegovih osiguranika ima rejting vrijednost i da će ugovaratelj osiguranja koji ima vrijednost rejtinga λ imati potraživanja koja pristižu prema Poissonovom procesu s intenzitetom λ, gdje se vrijeme mjeri u godinama. Društvo također vjeruje da se vrijednosti rejtinga razlikuju od ugovaratelja do ugovoritelja, gdje je rejting uniformno distribuiran na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. S obzirom na to da je u prvih t godina osiguranik podnio n zahtjeva, koja je uvjetna distribucija vremena do sljedećeg potraživanja osiguranika?*

Neka je T slučajna varijabla koja mjeri vrijeme do sljedećeg potraživanja osiguranika. Želimo izračunati $P(T > x|N(t) = n)$. Koristeći (5) dobivamo

$$
\begin{aligned}
P(T > x|N(t) = n) &= \int_0^\infty P(T > x|L = \lambda, N(t) = n) f_{L|N(t)}(\lambda|n)\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{\int_0^1 e^{-\lambda x} e^{-\lambda t}\lambda^n\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^1 e^{-\lambda t}\lambda^n\,\mathrm{d}\lambda}.
\end{aligned}
$$

□

Postoji lijepa formula za vjerojatnost da se u intervalu duljine t dogodi više od n događaja. U njegovom izvođenju poslužit ćemo se identitetom

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x$$

koji slijedi uz napomenu da izjednačava vjerojatnost realizacije događaja do trenutka t (koji ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ) s vjerojatnošću da je vrijeme realizacije $(n+1)$-og događaja ovog procesa (koje ima gama distribuciju s parametrima $n+1$ i λ) manje od t. Zamjenom λ i t u prethodnom izrazu daje ekvivalentni identitet

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = \int_0^\lambda t e^{-tx}\frac{(tx)^n}{n!}\,\mathrm{d}x.$$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
P(N(t) > n) &= \sum_{j=n+1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^\infty \sum_{j=n+1}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_0^\lambda t e^{-tx}\frac{(tx)^n}{n!}\,\mathrm{d}x g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda t e^{-tx}\frac{(tx)^n}{n!}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \hat{G}(x) t e^{-tx}\frac{(tx)^n}{n!}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

gdje je $\hat{G}(x) = \int_x^\infty g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$.

6 Literatura

[1] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK, *Uvod u vjerojatnost i statistiku,* Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[2] R. DURRETT, *Essentials of Stochastic Processes,* Springer, 2011. (javno dostupno: `www.researchgate.net/publication/310512925_Essentials_of_Stochastic_Processes`)

[3] D. GRAHOVAC, A. LEKO *Modeliranje rizika u osiguranju,* Osječki matematički list, 15 (2), 2015.

[4] J. F. C. KINGMAN, *Poisson Processes,* Oxford University Press, 1993. (javno dostupno: `www.researchgate.net/publication/228016755_Poisson_Processes`)

[5] Y. OGATA, *Statistical Models for Earthquake Occurrences and Residual Analysis for Point Processes,* Journal of the American Statistical Association, 83 (401), str. 9-27, 1988. (javno dostupno: `www.researchgate.net/publication/321061085`)

[6] P. J. LAUB, T. TAIMRE, P. K. POLLETT, *Hawkes Processes,* Cornell University arXiv, 2015. (javno dostupno: `https://www.researchgate.net/publication/280034116_Hawkes_Processes`)

[7] S. I. RESNICK, *Adventures in Stochastic Processes,* Birkhauser, Boston, 2002.

[8] S. M. ROSS, *Introduction to Probability Models,* Academic Press, 2014.

[9] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti,* Školska knjiga, Zagreb, 2002.

Sažetak

U ovom radu su opisane eksponencijalna i Poissonova distribucija, njihova osnovna svojstva kao i Poissonov proces te njegova svojstva. Uvodni dio daje detaljnije informacije o funkciji distribucije i funkciji gustoće eksponencijalne i Poissonove distribucije, dok su u glavnom dijelu rada navedene definicija te dokazana osnovna svojstva Poissonova procesa i njegovih transformacija. Posljednji dio rada opisuje primjenu Poissonovog procesa, odnosno Cramér-Lundbergov model za modeliranje procesa rizika kod osiguranja.

Ključne riječi: eksponencijalna distribucija, Poissonova distribucija, Poissonov proces, Cramér-Lundbergov model

Abstract

This paper describes the exponential and Poisson distributions, their basic properties, as well as the Poisson process and its properties. The introductory part provides more detailed information on the distribution function and the density function of the exponential and Poisson distributions, while in the main part of the paper the definitions of the basic properties of the Poisson process and its transformations are proved. The last part of the paper describes an example of the Poisson process, ie the Cramér-Lundberg model for modeling the insurance process.

Key words: exponential distribution, Poisson distribution, Poisson process, Cramér-Lundberg model

7 Životopis

Rođena sam 28. ožujka 1993. u Zagrebu. Završila sam OŠ Bogumila Tonija u Samoboru te Gimnaziju Lucijana Vranjanina u Zagrebu. Tijekom osnovne i srednje škole bavila sam se sinkroniziranim plivanjem na temelju kojeg sam ostvarila kategorizaciju Hrvatskog olimpijskog odbora prvim mjestom na Državnom seniorskom natjecanju u Zagrebu 2010. godine. Preddiplomski studij Matematike upisala sam 2012. na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, kojeg sam završila 2018. s temom završnog rada *"Dualni prostori"* pod mentorstvom doc. dr. sc. Ivane Kuzmanović Ivičić. Nakon završenog preddiplomskog studija upisala sam diplomski studij na Odjelu za matematiku, smjer: Financijska matematika i statistika. Tijekom studija radila sam kao asistent u nastavi u Centru za odgoj i obrazovanje Ivan Štark.