Strategije rješavanja problemskih zadataka

Filipović, Blaženka

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Blaženka Filipović

Strategije rješavanja problemskih zadataka

Diplomski rad

Osijek, 2016

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Blaženka Filipović

Strategije rješavanja problemskih zadataka

Diplomski rad

Mentorica:
doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016

Veliku zahvalnost dugujem svojoj mentorici doc.dr.sc. Ljerki Jukić Matić koja mi je omogućila sve potrebne materijale i pomogla svojim savjetima pri izradi ovog diplomskog rada.

Također, zahvaljujem se svim svojim prijateljima i prijateljicama, koji su uvijek bili uz mene i bez kojih cijeli ovaj tijek mog studiranja ne bi prošao tako lako i zabavno.

Veliku zahvalnost iskazujem cijeloj svojoj obitelji koja me je uvijek podržavala i upućivala na pravi put a posebno svom zaručniku Tomislavu koji je uvijek bio uz mene i što je uvijek imao strpljenja i vremena za sve moje upite tijekom studiranja. Također se zahvaljujem i njegovoj obitelji na podršci.

I na kraju, najveću zaslugu za ono što sam postigla pripisujem svojim roditeljima, koji su uvijek bili tu bez obzira da li se radilo o teškim ili sretnim trenutcima i bez kojih sve ovo što sam dosad postigla ne bi bilo moguće.

Veliko HVALA svima!

Sadržaj

Uvod

Prije nego što raspravimo rješavanje problema, trebamo ispitati pojam samog „problema“. Problem je situacija s kojom se učenik suočava, koja zahtijeva rješavanje te za koju ne možemo odmah reći rješenje. To je definicija problema koja mijenja pojam „problemski zadatak“ koje nastavnici obrađuju od „problema“ do više „vježbe“. Nastavnici često grupiraju probleme po vrstama te pokazuju na nastavi kako im se približiti.

Obično se učenicima pokaže jedan primjer a za ostale se kaže da su vrlo slični te da se rješavaju na isti način ali s različitim brojevima. To se odnosi na "vježbu" a ne na sam problem jer prepoznavanje problema daje učeniku put tj. metodu za pronalazak rješenja. Od učenika se traži vrlo malo razmišljanja o zadatku, a umjesto toga, oni se prisjećaju nastavničkog pristupa. Nažalost, ako specifična vrsta problema nije podučena na nastavi, onda učenici ostanu zbunjeni jer nisu naučili na nove i različite vrste zadataka.

Sada kada znamo što predstavlja problem, pogledajmo što je rješavanje problema. Rješavanje problema može se shvatiti na nekoliko načina. Kao prvo, rješavanje problema može se smatrati kao tema nastave, kao nastavna jedinica u nastavnom planu i programu matematike koja mora biti podučena na isti način kao množenje, dijeljenje itd. Ne može se naučiti lako, mora se naglasiti i pažljivo naučiti. Možemo podučavati matematiku pomoću rješavanja problema kao temeljnom niti da se ujedine svi pojmovi u matematici. Rješavanje problema pruža opravdanje za podučavanje vještine aritmetike. Rješavanje problema možemo shvatiti kao način razmišljanja. Učenici ne mogu očekivati da će naučiti rješavati problemske zadatke bez preciznog struktuiranog procesa. Iako neki učenici intuitivno mogu biti dobri u pronalasku rješenja, većina ih mora naučiti kako misliti, kako promišljati te kako riješiti problem.

Način na koji učenici pristupaju problemu varira od djeteta do djeteta. Međutim, jedna stvar je jasna. Oni će najčešće pristupiti problemu na temelju njihovih pozadina i iskustava. To može biti u rasponu od prepoznavanja sličnog problema koje su već vidjeli na nastavi ili rješavanje sličnih zadataka kao na satu. U većini slučajeva, učenici ne rade nikakvo rješavanje problema, niti promišljaju niti razmišljaju o zadatku. Učenik jednostavno opaža ili kopira vještine naučene do sad u nastavi. Ako ne prepoznaju tip problema, mogu ostati zbunjeni i neće znati što treba napraviti. Učenici moraju dobiti odgovarajuću pozadinu, uputu i podršku kako bi postali efikasni u rješavanju problema. Moraju naučiti kako riješiti probleme i uvježbati, ponekad nedostižnu, vještinu.

Nastavnici moraju biti svjesni da se različite strategije rješavanja problema mogu koristiti za pružanje elegantnog i učinkovitog rješenja problema. Nastavnici ponekad nesvjesno prenesu na učenike da postoji jedan i samo jedan način da se riješi neki problem. Isto tako, nastavnici mogu obeshrabiti učenike od pokušaja rješavanja problema na drugačiji način ili mogu pak inzistirati na jedinstvenoj strategiji. Učenici moraju biti slobodni izraziti svoje mišljenje i svoj stav te probati ono što misle da je način na koji žele riješiti problem, pa čak i ako taj pristup vodi u slijepu ulicu. Odgovor nije tako bitan kao postupak rješavanja koji se koristi za dobivanje rješenja.

U prvom poglavlju uvest ćemo pregled rješavanja problema, te ćemo proučiti faktore koji nam otežavaju rješavanje problema. Navest ćemo nekoliko primjera za svaki faktor te pojasniti ih. Nakon toga uvodimo korake Georga Polya kako bi pomogli učenicima rješavati probleme. Njih ćemo također pojasniti. Drugo poglavlje bavi se samom temom ovoga rada, strategijama rješavanja problemskih zadataka u kojemu ih navodimo 9 različitih te navodimo primjere svake od njih uz objašnjenje.

1 Pregled rješavanja problema

Dvije od najvažnijih vještina koje učenici trebaju su kritičko mišljenje i rješavanje problema. Učenici trebaju biti spremni primjeniti svoje znanje i traže prave informacije u cilju rješavanja problema. Međutim, ova sposobnost nije urođena. Učenici moraju biti poučeni kako postaviti pitanje te moraju naučiti strategije koje će im pomoću u rješavanju problema što dovodi do više pitanja, više problema i više rješenja. Djeca su prirodno znatiželjna i ta znatiželja mora biti usmjerena i oblikovana tako da učenici mogu pristupiti i riješiti probleme na kreativne i smislene načine.

Prema američkom vijeću nastavnika matematike (NTCM), učenici bi trebali moći:

- izgraditi nova matematička znanja kroz rješavanje problema,
- riješiti probleme koje se javljaju u matematici i drugim kontekstima,
- primjeniti i prilagoditi razine odgovarajućih strategija za rješavanje problema,
- pratiti i razmišljati o procesu matematičkog rješavanja problema.

Nastavnici moraju biti spremni voditi nastavu matematike kroz razgovor, kroz istraživanje i rješavanje problema. Drugim riječima, rješavanje problema je način poučavanja, a ne predstavljanje zadataka s riječima. Izlaganje učenika samo sa tradicionalnim zadacima nije dovoljna. Na taj način im je dana nerealna poruka o načinu kako će matematika poslužiti u svijetu odraslih. Većina problema s kojima se odrasli susreću zahtijevaju matematičko zaključivanje i vještine koje se ne riješavaju samo prevođenjem informacija u matematički zapis te izvršavanjem matematičkih operacija.

Da bi funkcionirali u složenom društvu koje se mijenja, potrebno je biti u mogućnosti riješiti širok niz problema. U stvarnom svijetu, problemi dolaze u raznim oblicima i formama od kojih mnogi uključuju matematičke koncepte i primjene. Često postoji više mogućih strategija kako bi se riješio jedan problem. Učenici trebaju iskoristiti sva sredstva koje su razvili, kao što su znanje, iskustvo i intuicija. Nakon toga potrebno je analizirati, predvidjeti, donositi odluke i procijeniti ishod njihovih rješenja. Zbog ovih razloga, izuzetno je važno da učenici pohađaju nastavu matematike koje ih priprema da postanu učinkoviti u pronalasku rješenja.

Često se veći naglasak stavlja na algoritamski postupak, poznato kao aritmetika jer je više povijesno priznata i cijenjena u društvu. Aritmetika je u konačnici potrebna za rješavanje mnogih problema, ali veći naglasak treba staviti na to kako je korištena u stvarnom životu a ne samo za računanje. Rješavanje problema je mnogo više nego traženje rješenja. To je, u biti, sposobnost da se kreativno pristupi i odrede informacije o problemu te provede rješenje za taj problem.

Postoje mnoge situacije u učionici pomoću kojih se mogu ilustrirati problemi stvarnoga života. Na primjer, prikupljanje novca za izlet, računanje koliko je autobusa potrebno za taj izlet, računanje prosjeka ocjena i sl. To su važni i relevantni načini podučavanja učenika strategijama rješavanja problema. Osim toga, predstavljanje učenicima neprirodne probleme je također korisno u izgradnji njihovih sposobnosti u rješavanju problema, jer to podupire njihovo razumijevanje specifične strategije rješavanja problema. Vrlo je zahtjevno ali i iznimno važno da nudimo motivirajuće probleme koje potiču dječju prirodnu znatiželju, omogućujući korištenje vještina koje će im trebati kasnije.

1.1 Faktori koji otežavaju rješavanje problema

Dodatno, u strategijama rješavanja problema, važno je da djeca prepoznaju da sama struktura može predstavljati problem u problemu. Postoji sedam faktora koji učenici moraju biti u stanju prepoznati. Ti faktori su:

1. Pogrešan redoslijed
2. Ključne riječi
3. Dodatni brojevi
4. Riječima skriveni brojevi
5. Brojevi koji se podrazumijevaju
6. Više koraka
7. Točan matematički rječnik

Učenici moraju biti upoznati sa svakim od tih faktora, te im moramo dati vremena da unutar problema otkriju te faktore. Prepoznavanjem prije pokušavanja rješavanja problema, učenik je sposoban suočiti se s problemom te će manje biti zbunjen. Faktore moraju naučiti, a popis bi trebao biti prikazan u razredu tako da ih svi učenici mogu vidjeti u bilo kojem trenutku.

U nastavku je navedeno sedam faktora koji otežavaju rješavanje problema i neke preporuke kod poučavanja učenika.

1. **Pogrešni redoslijed**

   Redoslijed brojeva važan je kada se radi o oduzimanju i dijeljenju brojeva. Najraniji otežavajući faktor učenik susreće u poretku u kojem se brojevi pojavljuju u različitim problemima. Prikažimo to primjerima.

   Razred: 6
   Anin mlađi brat teži 17 *kg, a njezin pas teži* 24 *kg. Za koliko je pas teži od njezinog brata?*
   U ovom problemu učenik ne samo da se bavi pogrešnim redoslijedom, nego mora

prepoznati da ovaj problem uključuje usporedbu oduzimanja. Učenik pretpostavlja da se radi o operaciji zbrajanja zbog redoslijeda brojeva i riječi u zadatku. Umjesto da prepoznaju potrebu za oduzimanjem, učenik može lako biti zaveden da je ovo problem gdje se nešto povećava, a usporedba težina postaje otežavajući faktor za učenika.

Razred: 7

Nogometna ekipa je na treningu popila $9\frac{3}{4}$ *litara vode. Spremnik može sadržavati* 15 *litara vode. Koliko vode je ostalo u spremniku?*

U ovom problemu, učeniku su dane informacije u suprotnom redoslijedu u kojemu treba izračunati zadatak. Učenik mora koristiti prvo veći broj kako bi postavio točan problem kojeg treba riješiti.

Pogrešan redoslijed - savjet za nastavu: Neka učenici prvo analiziraju pitanje, tj. ono što se traži u zadatku. Moramo naučiti učenike da napišu jednadžbu nakon što shvate koji tip rješavanja im je potreban.

2. Ključne riječi

Ključne riječi se uče u ranoj osnovnoj školi. Učenici koji ovise o ovoj strategiji lako se mogu prevariti. Sljedeći primjer daje dvije različite situacije koje učenicima predstavljaju problem koji uče rješavati probleme s riječima samo u potrazi za ključnim riječima.

Razred: 3

Ivan je planirao silazak s vrha tornja spuštajući se užetom od 1000 *metara. Toranj se uzdiže* 865 *metara ravno prema gore. Koliko Ivan ima viška užeta?*

U ovoj situaciji, ne postoji ključna riječ koja bi pomogla učeniku da prepozna operaciju potrebnu za rješavanje ovog problema.

Razred: 5

Marko je platio Luki 20.75 *kn za kombinaciju* 13 *nogometnih kartica i neke košarkaške kartice. Svaku nogometnu karticu je platio* 1.25 *kn a svaku košarkašku* 0.75 *kn. Koliko kartica je Marko sveukupno kupio?*

U ovoj situaciji ključna je riječ na riječi *sveukupno*, što ne mora značiti da je samo riječ o zbrajanju, nego i o množenju i dijeljenju.

Ključne riječi - savjet za nastavu: Pokazati kako ključne riječi mogu biti varljive i naglasiti važnost čitanja cijelog problema prije rješavanja. Najbolji savjet je da su ključne riječi najkorisnije kada se pojavljuju neposredno prije upitnika. Također, treba istaknuti kako neke ključne riječi mogu imati više od jedne operacije. Na primjer, riječ *sveukupno*. U nižim razredima osnovne škole se uči da je to zbrajanje, a može se koristiti i za množenje.

3. Dodatni brojevi

Problemi s previše brojeva mogu biti vrlo teški za učenike. Nesigurni su prilikom odabira pravih brojeva. U nastavku su prikazani primjeri ovog otežavajućeg faktora.

Razred: 6

Lea, Ana i Helena skupljaju klikere. Lea ima 152 *klikera u svojoj kolekciji, Ana ima* 149 *klikera, a Helena* 126*. Koliko klikera Lea ima više od Ane?*
U ovom problemu, postoje tri seta brojeva, ali jedan set nam nije potreban da bi se problem riješio.

Razred: 5

Alen se natjecao u skoku u dalj u kojem je dobio tri pokušaja. Na prvom skoku postigao je rezultat od 3 *metra i* $8\frac{3}{4}$ *centimetara. U drugom skoku, postigao je rezultat od* 3 *metra i* $11\frac{1}{2}$ *centimetara, a u poslijednjem* 3 *metra i* $8\frac{1}{4}$ *centimetara. Za koliko je bio dulji njegov najduži skok od najkraćeg?*

Dodatni brojevi - savjet za nastavu: Naučiti učenike da se bave ovim otežavajućim faktorom tako da rasprave o brojevima i njihovim odnosima u priči. Treba raspraviti o tome zašto dodatni broj ili brojeve treba eliminirati.

4. Riječima skriveni brojevi

Učenici često traže ključne riječi u problemu. Tako ne daju problemu puno pažnje. Pisanje jednog od tih brojeva u obliku riječi komplicira ovu strategiju. Pogledajmo primjere.

Razred: 7

Tisuću gledatelja došlo je gledati planinara Davida. Ako je prosječan gledatelj potrošio 20 *kn za putovanje na planinu, koliko je novca potrošeno na putovanje?*

Razred: 7

Julia ima novčanicu od 100 *kn za kupnju majice, a majicu koju je pronašla košta* 80 *kn. Na blagajni joj je prodavač rekao da je ta majica na sniženju dvadeset posto. Koliko joj je ostatak novca blagajnik vratio?*

Riječima skriveni brojevi – savjet za nastavu: Naučite učenike prvo da pronađu broj skriven riječima. Kada učenici nauče prepoznati takav broj, dajte im da vježbaju pronalaženje tih brojeva. Kada ih pronađu, neka istaknu tu riječ u zadatku.

5. Brojevi koji se podrazumijevaju

Ovi problemi su često povezani s problemima koji sadrže još jedan otežavajući faktor. Problem ne bi mogao predstaviti dovoljno informacija ili jedan od nužnih brojeva za rješavanje problema koji se podrazumijevaju u izrazu, kao što je mjerenje pojma. Pogledajmo primjere.

Razred: 5

Ani je potrebno mlijeko za kolač kojeg peče za prodaju. Otišla je u trgovinu i kupila jednu litru mlijeka te je iskoristila jednu šalicu mlijeka za kolač. Koliko joj je mlijeka ostalo nakon što je napravila kolač?

U ovom problemu, učenici mogu usporediti jednu šalicu sa jednom litrom i pretpostaviti da je potrošila cijelo mlijeko. Ovdje učenik mora znati koliko šalica ima u jednoj litri.

Razred: 5

Na satu biologije učenici trebaju sagraditi vrt za leptire koji ima površinu od $157\frac{1}{2}$ *kvadratnih metara. Duljina područja je* 5 *kilometara. Kolika je širina područja?*

Brojevi koji se podrazumijevaju – savjet za nastavu: Naučite učenike da traže riječi koje se podrazumijevaju. Vježbanjem neka naglase te riječi i neka ih pretvore u odgovarajući kontekst brojeva. Također, neka provjere da li su ti brojevi potrebni u zadatku ili su navedeni kao dodatna informacija.

6. Više koraka

Problemi s više koraka su izuzetno teški za učenike. Oni će često izvršiti samo jedan korak ili će izvršiti oba koraka ispravno, ali će njihovi izračuni biti krivi već u prvom koraku koji u konačnici daje netočno rješenje.

Razred: 3

Goran je ubrao 24 *jabuke ujutro i* 30 *poslijepodne. Njegova baka ima nekoliko vrećica i zamolila ga je da u svaku vrećicu stavi po* 6 *jabuka. Koliko vrećica Goran može popuniti?*

Nakon što učenik prepoznaje da se radi o problemu s više koraka, mora odrediti koje operacije je potrebno izvršiti. U ovom problemu učenik može prvo zbrojiti sve jabuke pa ih podijeliti u grupe po 6 jabuka ili će podijeliti oba broja u grupe po šest i zbrojiti ta dva količnika. Obje strategije daju isti rezultat.

Razred: 7

Gospodin Jan kupio je 3 *okvira za slike za* 64.50 *kn. Ako je pojedini okvir koštao* 20 *kn bez poreza, koliko poreza je platio za* 3 *okvira?*

Više koraka – savjet za nastavu: Uvedite ovaj otežavajući faktor nakon što savladaju sve druge faktore. Predstavite problem demonstracijom i pokazivanjem uobičajenih koraka koje su potrebne za rješavanje ovakvih tipova problema.

7. Točan matematički rječnik

Koristeći točnu terminologiju povećavamo poteškoće u problemu. Učenici moraju biti u stanju interpretirati matematički riječnik da razumiju situaciju. Također, moraju biti u mogućnosti identificirati moguće jednadžbe povezane s pojmovima kako bi riješili problem. Pogledajmo primjere.

Razred: 7

Četiri razreda skupljala su novac za dobrotvorne svrhe. 7. razred skupio je 320 *kn, 8. razred je skupio* 180 *kn, a 5. razred* 165 *kn. Kolika je srednja vrijednost prikupljenog novca?*

Razred: 8

Koliki je volumen sfere koja ima radijus od 8 metara?

Točan matematički rječnik – savjet za nastavu: Utvrdite uobičajene matematičke pojmove. Često se problemi s riječima koriste za mjerne jedinice i geometrijske pojmove. Primjeri ovog faktora su za opseg, obujam i površina.

1.2 Poučavanje otežavajućih faktora

Svaki otežavajući faktor treba podučavati odvojeno, a učenici trebaju vremena za otkrivanje tih faktora u zadacima. Sljedeći postupak je način na koji to možemo postići.

- Predstaviti otežavajući faktor.
- Dati učenicima nekoliko zadataka s riječima, neke sa otežavajućim faktorima a neke bez njih.
- Postoje dvije opcije uvježbavanja:
  1. Neka učenici pronađu sve zadatke s otežavajućim faktorima koje su naučili i neka naznače dio u zadatku gdje je naveden taj faktor. To im pomaže da usmjere pozornost na otežavajući faktor a ne nužno na operaciju koju trebaju izračunati.
  2. Neka učenici riješe problem s otežavajućim faktorom samo nakon što utvrde o kojem se faktoru radi.
- Uvesti novi otežavajući faktor nakon što savladaju trenutni faktor.

- Nakon što se svaki novi otežavajući faktor uvede i učenici uvježbaju prepoznati ih u problemu, onda su učenici u mogućnosti da obrade probleme koje sadrže više od jednog otežavajućeg faktora. Kada učenici prepoznaju koji je otežavajući faktor u zadatku, neka ga naznače i ispišu koji je faktor u pitanju.
- Za nastavak vježbanja, kako učenici ulaze u učionicu, dajte im po jedan problem na papiriću koji sadrži otežavajući faktor. Neka učenici označe ili identificiraju o kojem se otežavajućem faktoru radi u problemu i neka riješe problem. Ova vježba je dobra za motivaciju sata.

1.3 Proces rješavanja problema

Kada u nastavi govorimo o rješavanju problema, važno je da ih predstavimo učenicima kao metodu pristupanja svih problema. Za mnoge učenike je najteži dio rješavanja problema pronaći polaznu točku. George Polya (1973) predložio je četiri koraka kako bi pomogli djeci riješiti problem:

1. Razumijevanje problema
2. Stvaranje plana
3. Provođenje osmišljenog plana
4. Osvrt na rješenje

Njegova metoda je sistematski pristup rješavanju problema koji pruža smjernice pomoću kojih se prolazi kroz proces rješavanja mnogih vrsta problema.

1. **Razumijevanje problema**

   Razumijevanje problema uključuje tumačenje značenja problema i na koja pitanja treba odgovoriti da se riješi problem. Učenici trebaju temeljito razumjeti problem kako bi mogli utvrditi koje je pitanje postavljeno kako bi riješili problem te ga ponoviti svojim riječima.

   Kako to izgleda u razredu?

   - Učenici trebaju pročitati problem pažljivo dok ne shvate što se događa u zadatku i koje su informacije potrebne za rješavanje problema.
   - Učenici trebaju naglasiti ili istaknuti nepoznate riječi, a zatim utvrditi značenje tih riječi.
   - Učenici trebaju pronaći i odbaciti nepotrebne informacije. Također trebaju otkriti podatke koji nedostaju kako bi riješili problem.

- Učenici bi trebali postavljati pitanja kao *Što se traži u zadatku?* i *Koje su informacije bitne za rješavanje problema?*
- Dozvolite da učenici raspravljaju o problemu s drugim učenicima, jer ponavljanjem problema njihovim riječima je nužno.
- Ako učenici imaju poteškoća s čitanjem ili razumijevanjem problema, trebali bi raščlaniti rečenicu po rečenicu.

Smiješno je odgovarati na pitanja na koje ne znate odgovor. To se često događa, u školi i izvan škole ali nastavnici trebaju nastojati spriječiti takve stvari na satu. Učenici trebaju razumjeti problem, i ne samo razumjeti nego i priželjkivati rješenje. Zadatak treba biti pomno odabran, ne pretežak i ne prelagan. Da bude prirodan i zanimljiv.

Prije svega, verbalni iskaz problema treba biti razumljiv. Nastavnik može pregledati zadatke prije nego što ih zada na satu. Nakon što nastavnik prezentira zadatak, treba zadati učenicima da ponove zadatak, a oni bi trebali tečno iskazati problem. Učenici bi trebali moći istaknuti ključne dijelove problema, tj, nepoznanicu, podatke i uvjete. Ako nisu u mogućnosti to napraviti, onda ih nastavnik pitanjima treba dovesti do tih podataka.

Ako postoji slika vezana za zadatak, učenici bi trebali skicirati sliku i istaknuti nepoznate dijelove. Nužno je da uvedu prikladne oznake za sve objekte, posvetivši pažnju na prikladan odabir znaka. Postoji pitanje koje možemo iskoristiti s tim da ne očekujemo točan odgovor nego pogađanje: *Je li moguće zadovoljiti uvjet?*

2. Stvaranje plana

Stvaranje plana znači da učenik mora odabrati strategiju koja će mu pomoći pri rješavanju problema. U mnogim problemima postoji više od jedne primjenjive strategije. Učenik mora izabrati jednu koja ima smisla za njega te koja će mu pomoći oko rješavanja problema.

Kako to izgleda u razredu?

- Učenici bi trebali napraviti popis mogućih načina rješavanja problema.
- Učenici bi trebali analizirati svoj popis te izabrati jednu strategiju za koju smatraju da će im pomoći riješiti problem vrlo učinkovito.
- Učenici bi trebali raspraviti s drugim učenicima o mogućim načinima rješavanja problema ako imaju problema pri odabiru najbolje strategije.

Plan često imamo kada znamo (ili ako znamo barem skicu) koje računske operacije, računanje ili konstrukciju trebamo koristiti da bi dobili nepoznanicu. Put od razumjevanja problema do stvaranja plana može biti dug i vijugav. Zapravo, glavni zgoditak rješavanja problema je osmisliti plan. Ideja može rasti postepeno ili može sinuti nakon nekoliko neuspješnih pokušaja. Najbolje što nastavnik može učinuti je nametnuti neku ideju. Štoviše, pitanja i prijedlozi tijekom rasprave mogu nametnuti ideju. Da bi razumjeli učenikovu poziciju, trebamo se prisjetiti kako je nama bilo kada smo rješavali takve probleme.

Znamo da je teško dobiti ideju ako imamo malo znanja o temi, a nemoguće ako nemamo nikakva saznanja. Dobre ideje su bazirane na prijašnja iskustva i prije stečena znanja. Čisto prisjećanje nije dovoljno za ideju, ali isto tako ne možemo imati dobru ideju bez prisjećanja nekih relevantnih činjenica. Materijali potrebni za rješavanje matematičkog problema su određene relevantne stavke našeg nekada stečenog znanja iz matematike kao ranije rješeni problemi ili ranije dokazani teoremi. Stoga je često prikladno započeti rad pitanjem: *Znate li neki srodan problem?*

Poteškoća je u tome što postoji previše problema koje su nekako povezani s našim trenutnim problemom, tj. da imaju nešto zajedničko. Kako možemo odabrati jedan ili više, koji su nam korisni? Postoji ideja koje stavlja prst na bitnu zajedničku točku. *Pogledaj nepoznanicu! I pokušaj se sjetiti njemu sličnog problema koji ima istu ili sličnu nepoznanicu.* Ako uspijemo u pronalasku nekada riješenog problema koji je usko povezan s našim problemom, imamo sreće.

3. Provođenje osmišljenog plana

Provođenje plana znači da se zapravo riješi problem. Učenicima treba osigurati jasnu uputu o strategiji rješavanja problema koju oni mogu pratiti tijekom rješavanja. Oni trebaju raditi na svakom dijelu problema koristeći strategije koje su odabrali sve dok ne pronađu rješenje zadanog problema.

Kako to izgleda u razredu?

- Učenici bi trebali organizirano zabilježiti svoje korake rješavanja problema tako da mogu vidjeti svoj rad i odlučiti da li strategija koju su odabrali daje potrebne rezultate.
- Ako učenik negdje zapne kod rješavanja, mogu pregledati svoj rad kako bi bili sigurni da nisu napravili bilo kakvu pogrešku prilikom računanja.
- Ako odabrana strategija nije dobra za zadani problem, učenici bi se trebali vratiti na svoj popis strategija i odabrati drugačiji pristup za rješavanje problema.

Smisliti plan i osmisliti ideju za rješavanje nije lako. Puno toga treba da bi uspjeli: stečena prijašnja znanja, dobre mentalne navike, koncentraciju i dobru sreću. Provesti plan je puno lakše, ono što trebamo jest samo strpljenje.

Plan nam daje generalnu skicu, mi se trebamo uvjeriti da detalji stanu u našu skicu, te trebamo provjeriti detalje jedan po jedan, strpljivo, dok sve nejasnoće ne razjasnimo. Glavna opasnost je da učenik zaboravi svoj plan što se vrlo lako događa.

Trebamo se uvjeriti u ispravnost koraka u našem rasuđivanju "intuitivno" ili "formalno". Možemo se koncentrirati na točku u pitanju sve dok ne vidimo da nam je sve jasno i razgovjetno te da nemamo sumnje da je korak ispravan. U nekim slučajevima, nastavnik može istaknuti razliku između "vidjeti" i "dokazati": *Da li jasno vidite da je korak ispravan? Da li možeš dokazati da je korak ispravan?*

4. **Osvrt na rješenje**

Osvrt na rješenje znači da trebamo ispitati rješenje dobivene odabranom strategijom rješavanja problema. Ovaj korak u procesu rješavanja problema potiče učenike da razmišljaju o strategijama koje su izabrali te generalizirati problem kako bi bio primjenjiv za buduće probleme.

Kako to izgleda u razredu?

- Učenici moraju ponovno pročitati problem i provjeriti da li rješenje zadovoljava uvjete navedene u problemu te odgovoriti na pitanje na odgovarajući način.
- Učenici se sami moraju pitati pitanja kao *Da li moje rješenje ima smisla?* i *Je li moje rješenje logično i razumno?*
- Učenici trebaju ilustrirati ili napisati svoje misaone procese, procjene i pristupe. To će im pomoći da vizualiziraju korake koje su uzeli za rješavanje problema te kod generalizacije svoga rada.
- Trebamo omogućiti učenicima priliku da rasprave s drugim učenicima o rješenjima te kako su došli do njih.
- Učenici trebaju uzeti u obzir da li je moguće da riješe problem na jednostavniji način.

Kada učenici dobiju rješenje problema i kada ga zapišu, čak i oni dobri učenici spakiraju knjige u torbu i čekaju kraj sata. Ako im dopustite, propuštate bitan i poučan dio posla. Osvrtom na izračunato rješenje možete učvrstiti njihovo znanje i razviti sposobnost rješavanja problema. Dobar nastavnik mora shvatiti i utisnuti učenicima stav da nema problema koji je u potpunosti iscrpljen. Uvijek ostaje nešto za napraviti. S dovoljno znanja i vještine, uvijek možemo unaprijediti svako rješenje, i u svakom slučaju, poboljšati naše razumijevanje rješenja.

2 Strategije rješavanja problemskih zadataka

Problemski zadaci mogu se riješiti primjenom različitih heurističkih strategija. Nastavnici trebaju učenike upoznati s tim specifičnim strategijama koje mogu primijeniti Polyn pristup rješavanja problema. Sljedećih 9 strategija mogu se primjeniti na veliki izbor rješavanja problemskih zadataka:

- Ispisivanje sustavnih listi
- Metoda pokušaja i promašaja
- Rješavanje srodnog jednostavnijeg problema
- Metoda oponašanja i simulacije
- Metoda rješavanja unatrag
- Pronalaženje uzorka
- Logičko zaključivanje
- Crtanje dijagrama
- Promjena fokusa

U narednim podnaslovima pružit ćemo osnovne informacije o svakoj strategiji, postupke za podučavanje svake strategije te modele problema i rješenja za različite uzraste viših razreda osnovne škole.

2.1 Ispisivanje sustavnih listi

Ispisivanje sustavnih listi ili organiziranje podataka je važan korak u analizi bilo kojeg skupa podataka. Ponekad su podaci brojevi (kao što se i očekuje), a ponekad bi to moglo biti vizualne prirode. Na primjer, trebamo razmotriti problem određivanja najkraćeg puta od određene točke do odredišta. Organizirali bi i ispisali rute prema neposrednoj blizini te bi prema toj listi dobili značajan faktor u odabiru najbolje rute. Neki problemi u matematici predstavljaju veliku količinu podataka. Način na koji se ti podaci organiziraju može uvrditi da li se problem može riješiti ili ne. Jedan način organiziranja podataka u problemu je tablica. Na primjer, u mnogim problemima koji uključuju strategiju pogađanja rješenja, tablica pruža izvrstan način praćenja podataka i određivanja da li će iduće pogađanje biti veće ili manje. Organizirana lista se često koristi umjesto tablica a može biti i malo manje formalna. Oba načina obavljaju istu funkciju, to jest, oni se koriste da pratimo podatke u problemu i vode ka putu prema svom rješenju. U nekim problemima, sama lista može biti odgovor na pitanje u zadatku.

2.1.1 Primjena ispisivanja sustavnih listi

Razmotrimo sljedeći problem:

David i Lea sudjeluju u humanitarnom teniskom turniru. Prvi igrač koji je osvojio ili dvija uzastopna meča ili ukupno tri meča osvaja susret. Na koliko načina se može njihov susret odigrati?

Rješenje: Ovaj problem možemo početi rješavati ispisivanjem svih mogućih scenarija. Pretpostavimo da je Lea osvojila prvi meč, drugi gubi i pobjeđuje u trećem i četvrtom meču. Isto tako, David može pobijediti prvi meč, drugi gubi i pobjeđuje u trećem i četvrtom meču itd. Očito da imamo previše načina da obuhvatimo sve. U početku se čini da postoje previše različitih načina za računanje. Međutim, organiziramo li podatke na poman način čineći popis svih mogućnosti. Prva polovica popisa sadrži sve dobitne situacije kada Lea osvaja prvi meč a druga polovica popisa sadrži sve pobjede kada David osvaja prvi meč.

Lea - prvi meč	David - prvi meč
LL	DD
LDD	DLL
LDLL	DLDD
LDLDL	DLDLD
LDLDD	DLDLL

Dakle, postoji deset mogućih načina na koje se turnir može odigrati.

Učenici ne moraju nužno imati sposobnost učinkovitog organiziranja podataka kao način za rješavanje problema. Velika većina takvih učenika u početku može biti zbunjena ali isto tako mogu biti zbunjena kada se suoče s mnogim drugim problemima u ovom radu. Ne znajući gdje i kako započeti zadatak, prije će se odlučiti na metodu pogađanja nego na organiziranje liste ili tablice. Iako ih to može dovesti do rješenja, nažalost nedostatak sustavnog razmišljanja daje malo sigurnosti. Sposobnost da organiziraju podatke za rješavanje problema je nešto što nastavnici trebaju podučiti a učenici uvježbati i naučiti. Ovi problemi trebaju pružiti adekvatnu vježbu. Učenici moraju znati kako čitati tablice, kako prepoznati i interpretirati pravilnost i odnose, te kako izabrati točan odgovor imajući na vidu prirodu rješavanja problema, sve dok je organiziranje podataka odgovarajuća tehnika za točno rješenje.

2.1.2 Primjeri

Primjer 1. ***(Razred:*** 6***)*** *Josipa ima* 55 *blokova koje treba složiti u trokut u izlog trgovine. Ona želi da na vrhu trokuta stoji jedan blok, red ispod njega dva bloka, pa onda tri bloka i tako dalje. Je li moguće napraviti trokut od svih* 55 *blokova, i ako je tako, koliko redova će trokut imati?*

Rješenje: Počnimo s vrhom našeg trokuta s jednim blokom te nastavljamo sve dok ne iskoristimo svih 55 blokova. To se najbolje može učiniti kreiranjem tablice za praćenje obrnutog postavljanja blokova.

Broj retka	Broj blokova u retku	Ukupan broj blokova
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
6	6	21
7	7	28
8	8	36
9	9	45
10	10	55

Iz tablice vidimo da ćemo u desetom retku iskoristiti svih 55 blokova.

Odgovor: Moguće je složiti trokut od 55 blokova u 10 redaka.

Primjer 2. ***(Razred:*** 5***)*** *Prosinac je dvanaesti mjesec u godini i ima dva zanimljiva datuma,* 12. *prosinac i* 24. *prosinac jer su to višekratnici broja* 12. *Koliko dana u neprijestupnoj godini su višekratnici od njegovog broja mjeseca?*

Rješenje: Za traženje datuma koji su višekratnici od njegovog broja mjeseca možemo organizirati popis da bi imali bolji uvid u problem. Kako bi riješili problem, potrebno je navesti mjesec, njegov broj i onda datume koji su višekratnici tog broja.

Mjesec	Redni broj mjeseca	Višekratnici	Ukupan broj višekratnika
Siječanj	1	svi	31
Veljača	2	parni datumi	14
Ožujak	3	$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30$	10
Travanj	4	$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28$	7
Svibanj	5	$5, 10, 15, 20, 25, 30$	6
Lipanj	6	$6, 12, 18, 24, 30$	5
Srpanj	7	$7, 14, 21, 28$	4
Kolovoz	8	$8, 16, 24$	3
Rujan	9	$9, 18, 27$	3
Listopad	10	$10, 20, 30$	3
Studeni	11	$11, 22$	2
Prosinac	12	$12, 24$	2

Zbrajanjem ukupnog broja višekratnika za svaki mjesec dobit ćemo naš odgovor.

Odgovor: Ima 90 dana koji su višekratnici od svog broja mjeseca.

Primjer 3. ***(Razred:*** 4***)*** *Sutra je prvi dan škole i Lana bira odjevnu kombinaciju. Ima crne i zelene hlače,* 3 *bluze (crvenu, šarenu i kariranu) te* 2 *veste (bež i bijelu). Koliko različitih kombinacija može napraviti ako pri tome koristi jedan par hlača, jednu bluzu i jednu vestu?*

Rješenje: Postoji mnogo mogućnosti. Sastavimo listu svih kombinacija koje Lana može odabrati. Pripazimo samo da lista bude organizirana tako da obuhvatimo sve mogućnosti.

Hlače	Bluza	Vesta
Crne	Crvena	Bež
Crne	Crvena	Bijela
Crne	Šarena	Bež
Crne	Šarena	Bijela
Crne	Karirana	Bež
Crne	Karirana	Bijela
Zelene	Crvena	Bež
Zelene	Crvena	Bijela
Zelene	Šarena	Bež
Zelene	Šarena	Bijela
Zelene	Karirana	Bež
Zelene	Karirana	Bijela

Organizirana lista uključuje sve moguće odjevne kombinacije koje Lana može odabrati te nam daje drugačiji princip rješavanja problema iz kojeg učenici mogu imati koristi. Oni iz ove liste mogu vidjeti da postoje tri mogućnosti za odabrati bluzu, a dvije mogućnosti za izabrati vestu. To znači da postoje $3 \times 2 = 6$ mogućih kombinacija za crne hlače. Budući da postoje dvije vrste hlača (crne i zelene), možemo udvostručiti broj kombinacija pa dobijemo 12.

Odgovor: Lana može kombinirati odjeću na 12 mogućih načina.

2.2 Metoda pokušaja i promašaja

Metodu pokušaja i promašaja koristimo u svakodnevnom životu i često nismo ni svjesni toga. Na primjer, kada miješamo boje kako bi dobili onu odgovarajuću, pokušavamo i miješamo boju sve dok ne dobijemo željeni rezultat. Iako ova strategija ne zvuči vrlo matematički, često je korištena metoda. Ova strategija je izuzetno snažna i vrlo korisna. Učenik pogađa rezultat (i to mora biti inteligentan pogodak, a ne samo slučajan ubod u problem), a zatim nastavlja testirati taj pogodak prema uvjetima problema. Ako pogađanje nije točno, onda učenik opet pogađa. Svaki pogodak slijedi na temelju rezultata dobivenih u prethodnim ispitivanjem. Ako je rezultat ispitivanja premalan, sljedeći pogodak bi trebao biti malo veći, odnosno ako je rezultat prevelik, sljedeći pogodak bi trebao biti manji. Obično, tablica ili lista služe za organiziranje podataka iz svakog uzastopnog pogotka i rezultata tog pogotka. Proces se nastavlja sve dok učenik ne dođe do pogotka koji rješava problem.

2.2.1 Primjena metode pokušaja i promašaja

Razmotrimo sljedeći problem:

Barbara rješava test višestrukog izbora od 20 *pitanja. Test je ocjenjen sa* $+5$ *ako je odgovor točan a sa* -2 *u slučaju netočnog odgovora te* 0 *ako je pitanje izostavljeno. Ona je postigla* 44 *boda iako je izostavila neka pitanja. Koliko pitanja je Barbara izostavila?*

Rješenje: Ovaj problem možemo riješiti algebarski. Neka je

x = broj pitanja s točnim odgovorom
y = broj pitanja s netočnim odgovorom
z = broj izostavljenih pitanja

Zatim, uvjeti zadatka bi dali

$$x + y + z = 20$$
$$5x - 2y + 0z = 44$$

Sada imamo dvije jednadžbe s tri nepoznanice. Takav sustav jednadžbi može se riješiti strategijom Diophantove analize. Međutim, ona također ima jednostavno rješenje pomoću metode pokušaja i promašaja. Ispitajmo broj pitanja na koje je Barbara odgovorila točno. Mora ih biti barem 10, jer ako je odgovorila na 9 ispravno, dobila bi $9 \times 5 = 45$, i oduzimanjem parnog broja, nikada ne bi mogla završiti s 44 bodova.

Točno (+5)	Netočno (-2)	Izostavljeno	Bodovi (44)	Ukupan broj pitanja
8	Nemoguće		$40 - 2\times$ (broj pogrešaka)	
9	Nemoguće	0	$45 - 2\times$ (broj pogrešaka)	
10	3	7	44	20
11	Nemoguće			
12	8	0	44	20
13	Nemoguće			
14	13	0	44	21

Sa 10 točnih rješenja, Barbara bi imala 3 pogrešna odgovora i rezultat od 44 boda. Dakle, ona bi izostavila 7 pitanja. To je točan odgovor, ali je li to jedini odgovor? Pretpostavimo da je Barbara odgovorila na 11 pitanja točno. Ne postoji način na koji je mogla ostvariti 44 boda oduzimanjem parnog broja od 55. Dakle, 11 točnih odgovora je nemoguće. Pretpostavimo da je točno odgovorila na 12 pitanja. $12 \times 5 = 60$ i $60 - 16 = 44$, što znači da je imala 12 točnih, 8 netočnih odgovora te ni jedno izostavljeno pitanje. Međutim, to nam je u kontradikciji s uvjetom problema. Ako je Barbara odgovorila na 13 pitanja točno, nikako ne bi mogla ostvariti 44 boda kao i kod slučaja s 11 točno odgovorenih pitanja. Ako je, pak, na 14 pitanja odgovorila točno, mogla bi doći do 44 boda ako bi imala 13 netočnih odgovora što bi premašilo broj pitanja u testu. Nastavljajući ovim postupkom, vidimo da za 16 i 18 točno odgovorena pitanja ne postoje rješenja. Dakle, rezultat od 'izostavljenih 7' je jedino moguće rješenje. Ovom metodom smo stigli do odgovora na učinkovit način sa sigurnošću u jedinstvenost rješenja.

Kao što smo već naglasili, važnost ove strategije je da učenik iznese niz pogađanja. Postupak počinje informiranim pogotkom. Ovaj korak je bitan i počiva na učenikovom predznanju matematike te kako se problem mora kontekstualizirati. Na primjer, u našem navedenom problemu moramo razumjeti da negativan broj bodova može biti posljedica oduzimanja, te da su za ocjenu određeni pravi ili krivi odgovori dobiveni množenjem. Iako se sve to može činiti očigledno, učenicima nije ugodno kad su takvi problemi u pitanju i kao posljedica njihovih nesporazuma čine neuspješna nagađanja. Velik dio njihove zbunjenosti i frustracija može biti od kratke diskusije određenog problema s cijelim razredom prije nego što učenici započnu samostalno ili grupno rješavati problem. Sa mlađim učenicima bi možda bilo dobro da se slažu u inicijalnom pogotku koje donese zajedno cijeli razred.

Sljedeći korak nije od manje važnosti. Zanimljivi matematički problemi su oni u kojima se rješenje ne nadzire lako. Dakle, naše početno pretpostavljeno rješenje često nije među odgovorima. U ovom slučaju, učenici trebaju promijeniti svoj početni pokušaj u odnosu na isti. Na primjer, ako se pretpostavlja da rješenje jednadžbe

$$25 + x = 35$$

iznosi 5, provjera pokazuje da je $25 + 5 = 30$. Dakle, bolji bi pogodak bio 6 jer nam daje 31. Naknadna pogađanja bi mogla biti 8 i 11, dajući sume 33 i 36 za redom. Ako smo zabilježili ove pretpostavke i njihove posljedice, možemo vidjeti da odgovor vjerojatno leži između 8 i 11. Kao što smo već rekli, učenike treba poticati da bi njihova nagađanja i njihove posljedice svrstali u neku organiziranu formu. Takvi zapisi bit će od neprocjenjive vrijednosti za naknadna pogađanja.

2.2.2 Primjeri

Primjer 4. ***(Razred:*** 6***)*** *Otac ima na raspolaganju* 1600 *kn koje treba podijeliti svojim tima sinovima. Najstariji će dobiti* 200 *kn više nego srednji sin. Srednji sin dobit će* 100 *kn više od najmlađeg sina. Koliko je novca dobio svaki sin?*

Rješenje: Možemo koristi metodu pokušaja i pogrešaka. Napravimo tablicu kako bi imali pregled svih nagađanja i njihova testiranja.

Broj pogađanja	Najmlađi sin	Srednji sin	Najstariji sin	Ukupno
1	100kn	200kn	400kn	700kn (premalo)
2	200kn	300kn	500kn	1000kn (i dalje premalo)
3	300kn	400kn	600kn	1300kn (i dalje premalo)
4	400kn	500kn	700kn	1600kn (pogodak!)

Dobivamo odgovor iz tablice.

Odgovor: Najmlađi sin dobit će 400 kn, srednji 500 kn a najstariji 700 kn.

Primjer 5. ***(Razred:*** 6***)*** *Marija je ispekla* 37 *muffina za svoj tulum te ih je stavljala u vrećice. Muffine od borovnice je stavljala po* 5 *u svaku vrećicu, a čokoladne muffine po* 3*. Koliko je Marija ispekla svake vrste kolača?*

Rješenje: Organizirat ćemo naša nagađanja u jednu tablicu. Stavit ćemo muffine od borovnice u grupe po 5 te možemo vidjeti koliko ih je ostalo od njih 37.

Borovnica	Ukupno	Čokolada	
5	37	32	(Ne. 32 nije djeljiv s 3)
10	37	27	**(Da. 27 je djeljiv s 3)**
15	37	22	(Ne. 22 nije djeljiv s 3)
20	37	17	(Ne. 17 nije djeljiv s 3)
25	37	12	**(Da. 12 je djeljiv s 3)**
30	37	7	(Ne. 7 nije djeljiv s 3)
35	37	2	(Ne. 2 nije djeljiv s 3)

Tablica nam prikazuje da više nema mogućnosti u kojima dobivamo sumu 37.

Odgovor: Moguća su dva odgovora. Ili je ispekla 10 muffina od borovnice i 27 čokoladnih ili je ispekla 25 muffina od borovnice i 12 čokoladnih muffina.

Primjer 6. ***(Razred:*** 5*) Jedan zološki vrt posjeduje dvije bebe pande. Zovu se Cezar i Donat. Ukupno je* 105 *posjetioca zološkog vrta glasovalo za svog favorita. Cezar je dobio* $2\frac{1}{2}$ *manje glasova nego Donat. Koliko je glasova dobila svaka panda?*

Rješenje: Tablica će nam pomoći da imamo pregled svih pogađanja. Počnimo sa 50 glasova za Cezara te ćemo izračunati $2\frac{1}{2}$ više glasova za Donata.

Cezar	Donat	Ukupno glasova
50	125	175 (previše)
40	100	140 (i dalje previše)
30	75	105 (Da!)

Odgovor: Cezar je dobio 30 glasova, a Donat 75.

2.3 Rješavanje srodnog jednostavnijeg problema

Trebalo bi biti očito da se neki problem obično može riješiti na više načina. Jedan jednostavniji način da se problem bolje izvede i koji obično daje dobre rezultate je da promijenimo zadani problem u njemu ekvivalentni problem kojeg je lakše riješiti, tj. pojednostavljivanje brojeva u zadanom problemu. To može učenicima dati uvid u to kako riješiti izvorni problem. U nekim slučajevima, jednostavniji problem može uključiti samo jednostavnije brojeve, ali se može pojednostaviti obzirom na jednostavniji slučaj problema. Nakon što učenici riješe jednostavniju verziju, mogu nastaviti na originalan (možda i složeniji) problem.

2.3.1 Primjena metode rješavanja srodnog jednostavnijeg problema

Razmotrimo sljedeći problem:

Djelitelji broja 360 *u sumi daju* 1170*. Koliki je zbroj svih recipročnih djelitelja broja* 360*?*

Rješenje: Najočitije rješenje bi bilo pronaći sve djelitelje broja 360, uzeti njihove recipročne vrijednosti te ih zbrojiti. Djelitelji broja 360 su $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, \ldots, 120, 180$ i 360. Njihove recipročne vrijednosti su $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{120}, \frac{1}{180}, \frac{1}{360}$. Zatim pronađemo njihov zajednički nazivnik (na primjer, 360) te pretvorimo sve razlomke u njihove ekvivalentne razlomke te ih zbrojimo. Nažalost, vrlo je lako napraviti računsku pogrešku kao i eventualno propustiti jedan ili više djelitelja.

Ispitajmo jednostavniji ekvivalentni problem. Nađimo sumu recipročnih vrijednosti djelitelja broja 12 i pogledajmo da li nam to pomaže. Djelitelji broja 12 su $1, 2, 3, 4, 6$ i 12. Njihov zbroj je $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. Pronađimo sada zbroj recipročnih vrijednosti ovih faktora:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{12}{12}+\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{28}{12}$$

Dobili smo da je zbroj svih recipročnih vrijednosti djelitelja broja 12 jednak zbroju djeljitelja i da je nazivnik zapravo broj od kojeg smo uzeli sve djelitelje. Sada možemo riješiti naš originalni problem.

Zbroj svih djelitelja broja 360 je 1170. Dakle, zbroj svih recipročnih vrijednosti mora biti $\frac{1170}{360}$.

Ovo je nešto vještiji pristup rješavanja problema. Učenici moraju ispitati strukturu problema i pokušati svesti problem na jednostavniji. Na primjer, to smo postigli gledajući na zbroj svih djelitelja broja 12, a ne 360. Učenici će tada eksperimentirati s onim što opaze u strukturi problema. U prijašnjem primjeru, možda želimo provjeriti je li zbroj recipročnih vrijednosti faktora 24 očekivan i umjesto generaliziranja rješenja, potrebno je generalizirati postupak rješenja. Učenici će ovu metodu teško naučiti. Oni će, razumljivo, pokušati koristiti pristup koji su pronašli u prethodnim metodama - možda napraviti tablicu ili pokušati pogoditi rješenje. U teoriji će takvi pristupi dati odgovore na probleme koje smo postavili, ali su vrlo dosadni. Moramo potaknuti učenike na razmišljanje, tražiti alternativne i efektivne strategije. Nakon što učenici osjete eleganciju i snagu matematike, dobit će i motivaciju za rad.

2.3.2 Primjeri

Primjer 7. ***(Razred:*** 7*) Vlasnik zološkog vrta ima nojeve i slonove u jednom dijelu zološkog vrta. Ukupan broj njihovih glava je* 60 *a nogu* 180*. Koliko svake vrste životinja ima?*

Rješenje: Možemo smanjiti složenost problema i raditi s jednostavnijim ali i ekvivalentnim skupom brojeva. Podijelimo sve brojeve sa 10. Pokušajmo riješiti problem s 6 glava i 18 nogu. Ovdje ćemo raditi s manjim brojevima pa ćemo se onda vratiti na izvorni problem.

Nojevi imaju po dvije noge a slonovi po 4. Napravimo crtež u kojem 0 predstavlja glavu.

0	0	0	0	0	0

Sada, bilo da je u pitanju slon ili noj, ima najmanje dvije noge. Idemo označiti s "//" dvije noge kod svake glave.

0	0	0	0	0	0
//	//	//	//	//	//

Ova računica nam daje 12 nogu. Ostatak ide u paru na 3 glave.

//	//	//			
0	0	0	0	0	0
//	//	//	//	//	//

Znači, postoje 3 slona i 3 noja. Pomnožimo to sa 10 i pronašli smo odgovor na naš početni problem. (Prisjetimo se da smo podijelili sve brojeve sa 10 da bi radili s jednostavnijim brojevima)

Odgovor: Vlasnik ima 30 nojeva i isto toliko slonova.

Primjer 8. ***(Razred:*** *7)* *Upitali su Mariju kako bi pronašla tri uzastopna parna broja čija je suma* 60*. Koji su to brojevi?*

Rješenje: Koristit ćemo metodu rješavanja srodnog jednostavnijeg problema. Počet ćemo s najmanjom parnom trojkom brojeva, pa ćemo probati iduću i tako sve dok ne dođemo do nečega što možemo iskoristiti.

$2 + 4 + 6 = 12$	Trojka počinje s brojem 2 (što je 1×2)
$4 + 6 + 8 = 18$	Trojka počinje s brojem 4 (što je 2×2)
$6 + 8 + 10 = 24$	Trojka počinje s brojem 6 (što je 3×2)
$8 + 10 + 12 = 30$	Trojka počinje s brojem 8 (što je 4×2)

Vidimo da se zbroj povećava za 6. Iznos će biti $12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54$ i 60. Mi želimo devetu sumu, tj. kad je zbroj 60. Tri uzastupna parna broja daju sumu koja počinje s 9×2 ili 18. Mi ćemo uzeti $18 + 20 + 22 = 60$.

Odgovor: Tri uzastopna parna broja čiji je zbroj 60 su 18, 20 i 22.

Napomena za nastavu: Učenici mogu nastaviti dodavati sljedove tiju uzastopnih brojeva sve dok ne pronađu sve sume i dok ne dođu do zbroja 60. Također, možemo pokazati učenicima da je zbroj tri uzastopna parna broja zapravo tri puta uvećan srednji broj. Stoga, $60/3 = 20$ što je srednji broj te dobijemo preostala dva broja $18+20+22 = 60$.

Primjer 9. ***(Razred:*** *7)* *Ako* 3 *kokoši nesu* 4 *jaja u* 5 *dana, koliko će dana trebati* 12 *kokoši da snesu* 48 *jaja?*

Rješenje: Umjesto da razmotrimo ovaj primjer u cijelosti, možemo ga riješiti kao par jednostavnijih problema. Ako 3 kokoši nesu 4 jaja u 5 dana (tj. 3 kokoši = 4 jaja u 5 dana), onda množenjem broja jaja i kokoši dobijemo: 12 kokoši nesu 16 jaja u isto 5 dana (odnosno 12 kokoši = 16 jaja u 5 dana). Da bismo dobili 48 jaja, moramo pomnožiti 16 jaja s 3. Pomnožimo broj dana i broj jaja s 3 da bi dobili 12 kokoši da nesu 48 jaja u 15 dana.

Odgovor: Bit će potrebno 15 dana da kokoške snesu 48 jaja.

Napomena za nastavu: Problem uključuje neke algebarske manipulacije 'odnosa'. 3 kokoši = 4 jaja (u 5 dana), pomnožimo obje strane "jednadžbe" sa 3 i dobijemo 12 kokoši = 16 jaja (u 5 dana). Na sličan način sada imamo 16 jaja = 5 dana, pomnožimo obje strane "jednadžbe" sa 3 i dobijemo 48 jaja = 15 dana.

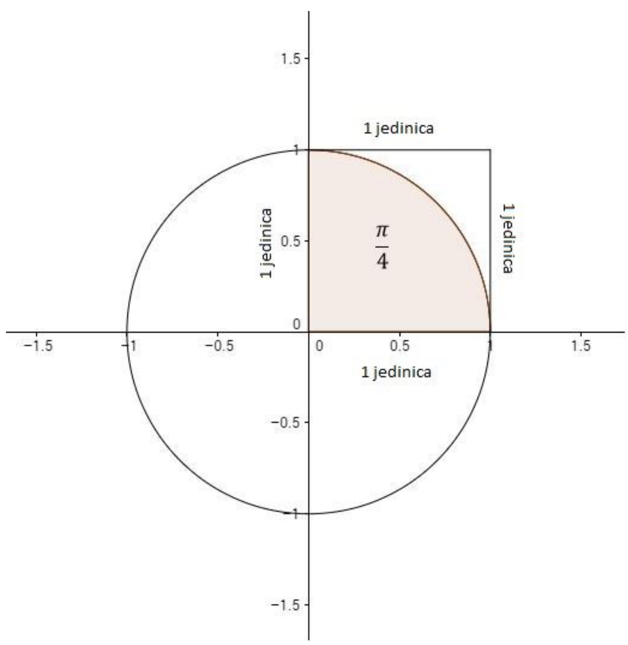
2.4 Metoda oponašanja i simulacije

Ova strategija je korisna u nižim razredima osnovne škole. Ovdje djeca preuzimaju ulogu problema i izvode neke akcije. Također, mogu koristiti materijale kao što su žetoni, čepovi, itd. za simuliranje akcija u problemu. Krajnja simulacija je da se koriste brojevi.

2.4.1 Primjena metode oponašanja i simulacije

Problem procjene broja π kao omjer opsega kružnice i njegovg promjera se često razmatra u višim razredima osnovne škole. Jedno od rješenja je mjerenje opsega i promjera kruga, a zatim izračunati približnu vrijednost za π. Takva aproksimacija je, naravno, ograničena na preciznost instrumenata za mjerenje. Međutim, u teoriji pomoću simulacije možemo izračunati π za proizvoljan stupanj točnosti.

Promotrimo krug radijusa 1. (*Slika 1*)



Slika 1: Krug radijusa 1

Površina kruga (πr^2) prikazanog na slici je π (imajte na umu da su površine izražene u centimetrima kvadratnim). Osjenčano područje (četvrtina kruga unutar kvadrata) ima površinu $\frac{\pi}{4}$. Dakle, omjer površine osjenčanog dijela kruga i površine kvadrata je $\frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$. Ovo možemo zapisati u obliku:

$$\pi = \frac{4 \cdot (\text{Površina osjenčanog dijela})}{\text{Površina kvadrata}}$$

Da bi procijenili te površine, a time i taj omjer, možemo izračunati površinu pomoću milimetarskog papira. Učenici mogu procjeniti površinu osjenčanog dijela i usporediti ga sa površinom kvadrata. Točnost će ovisiti o veličini kruga u odnosu na veličinu malih kvadrata na milimetarskom papiru.

Učenici mogu koristiti i softiciraniji pristup, tj. realizaciju točke (x, y) na krugu radijusa jedan. Dobivamo $x^2+y^2 = 1$. Sve točke unutar kruga zadovoljavaju uvjet $x^2+y^2 < 1$. Ako uzmemo relativno mali broj slučajno odabranih točaka (x, y) od kojih je svaki manji od 1 kako bi bili sigurni da su i dalje u kvadratu, onda nam $x^2 + y^2$ govori da li je točka unutar ili izvan četvrtine kruga. U donjoj tablici su tri vrijednosti $x^2 + y^2$ naznačene sa zvjezdicom te se one nalaze izvan kruga, ostavljajući tako 17 točaka unutar kruga. Iz ovog malog skupa od 20 nasumično odabranih točaka možemo aproksimirati broj $\pi \approx \frac{4\times17}{20} = 3.4$.

Ovakva aproksimacija broja π temelji se na relativno malom uzorku točaka, ali to će omogućiti učenicima da simuliraju postupak koji može dati solidan uvid u matematički koncept.

(x, y)	$x^2 + y^2$
$(0.75, 0.64)$	0.9721
$(0.24, 0.05)$	0.0601
$(0.63, 0.18)$	0.4293
$(0.38, 0.81)$	0.8005
$(0.25, 0.59)$	0.4106
$(0.12, 0.28)$	0.0928
$(0.36, 0.59)$	0.4777
$(0.91, 0.72)$	1.34650*
$(0.86, 0.04)$	0.7412
$(0.01, 0.05)$	0.0026
$(0.26, 0.95)$	0.9701
$(0.45, 0.27)$	0.2754
$(0.74, 0.07)$	0.5525
$(0.77, 0.99)$	1.57300*
$(0.45, 0.65)$	0.6250

$(0.77, 0.53)$	0.0293
$(0.95, 0.11)$	0.9140
$(0.29, 0.40)$	0.2441
$(0.79, 0.14)$	0.9050
$(0.75, 0.73)$	1.09540*

Ova strategija simulacije je srodna onome što u stvarnom svijetu označavamo kao rješavanje problema. Učenici potiču razvijanje matematičkih vještina za rješavanje problema u kontekstu situacije koje smatraju poznatim. Međutim, takvu povezanost ne možemo uzeti zdravo za gotovo kao što i učenici izražavaju drugačija iskustva u učionicu. Prema tome, to je nedostatak za sve probleme u stvarnom životu za što je potrebno vremena da se nauči. Problemi u ovoj strategiji su odabrani tako da često postoji nekoliko jednakih valjanih i učinkovitih rješenja. Učenike bi trebali poticati da međusobno podijele i rasprave o rješenjima. Trebali bi ostvariti komunikaciju s individualnim ili grupnim izlaganjima. U svakom slučaju, kao što smo već i rekli, treba potaknuti kreativnost i eleganciju, a istodobno zahtijevati da učenici sustavno pristupe problemu. To nisu problemi koji se rješavaju teškim aritmetičkim izračunom, nego kroz ostvarivanjem dobroga plana i odabirom učinkovite strategije.

2.4.2 Primjeri

Primjer 10. ***(Razred:*** *7****)*** *Uzmimo LEGO kockice za ovaj problem. Kockice predstavljaju automobile u trajektu. Svaka kockica (automobil) ima onoliko broj ljudi koliko je i njezina dužina. Dakle:*

1 = ***B****ijela kockica*	2 = ***C****rvena*	3 = ***Z****elena*	4 = ***P****lava*	5 = ***Ž****uta*

Imate jednu kockicu svake boje i dužine. Prikažite kako možete izgraditi trajekt dužine od 1 *do* 15*.*

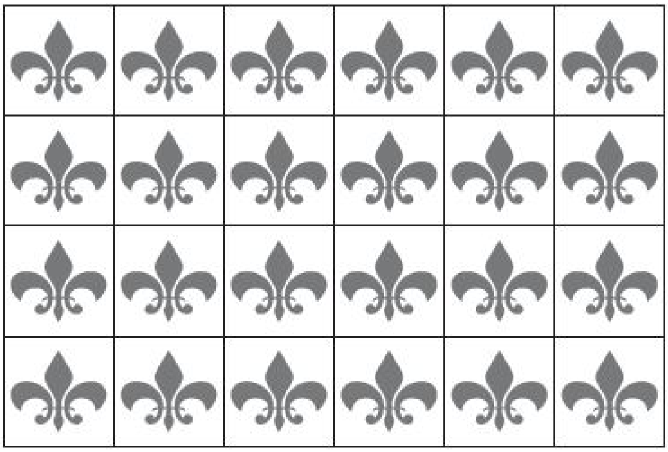
Rješenje: Neki se trajekti mogu napraviti na više načina. Prikazani su samo neki.

1 =B	6 = B+Ž ili C+P	11 = Ž+P+C
2 =C	7 = P+Z ili Ž+C	12 = Ž+P+Z
3 =Z	8 = Ž+Z ili P+Z+B	13 = Ž+P+Z+B
4 =P	9 = Ž+P	14 = Ž+P+Z+C
5 =Ž	10 = Ž+P+B	15 = Ž+P+Z+C+B

Učenike bi trebali poticati kako bi pronašli alternativne načine za zastupanje različitih dužina. One učenike koji su pronašli ovaj jednostavan način možemo upitati na koliko se načina svaki od tih duljina može prikazati.

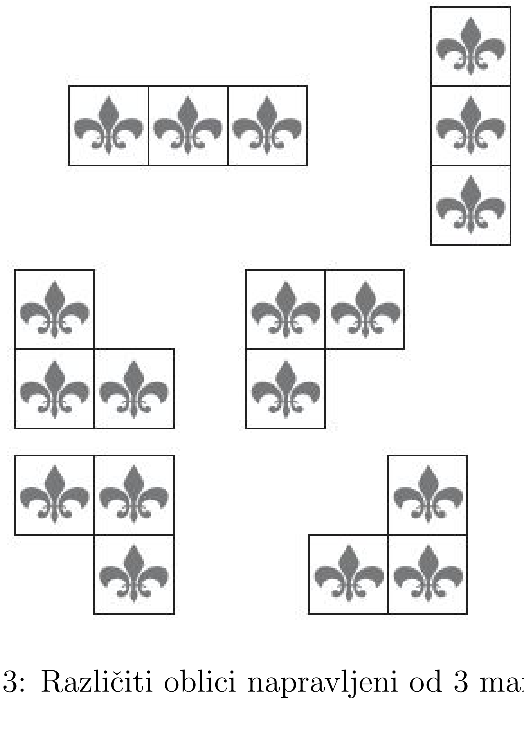
Odgovor: Prikazano u tablici.

Primjer 11. ***(Razred:*** *5) Markova majka kući je donijela list od 24 poštanskih markica (Slika 2). Marku su potrebne tri markice, pa je otkinuo tri povezane markice. Koliko je mogućih različitih skupova oblika od tri povezane markice?*



Slika 2: List od 24 markice

Rješenje: Učenike treba potaknuti da uzmu 3 pločice oblika kvadrata da bi simulirali problem te da vide koliko različitih oblika mogu dobiti od 3 povezane markice (*Slika 3*).

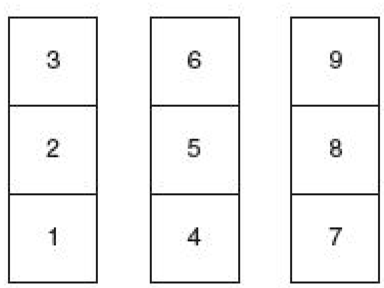


Slika 3: Različiti oblici napravljeni od 3 markice

Odgovor: Postoje 6 različitih skupova od 3 markice koje Marko može otkinuti.

Napomena za nastavu: Upitajte učenike kako znaju da su napravili sve moguće razmještaje od 3 markice. Trebali bi vidjeti da su razmjestili kvadrate na sve moguće načine.

Primjer 12. ***(Razred:*** 6***)*** *Darko ima tri hrpe blokova s brojevima kao što je prikazano na Slici 4. On tvrdi da može složiti brojeve tako da suma po blokovima bude jednaka, pomicanjem samo jednog bloka. Kako Darko to može učiniti?*



Slika 4: Tri hrpe blokova s brojevima

Rješenje: Uzmite 9 blokova i zalijepite komadić papira na svaki te zapišite brojeve kao na slici. Učenici sada mogu fizički premjestiti blokove da vide kada je suma po blokovima jednaka. Malo logičkog zaključivanja može pomoći. Budući da je zbroj svih 9 brojeva 45, a tu su i tri jednake hrpe, svaki stupac mora iznositi $45 \div 3 = 15$. Srednji stupac već ima zbroj 15, tako da moramo gledati druga dva stupca za premještanje. Zbog toga što suma u prvom stupcu iznosi 6, očito je da blok mora doći iz zadnjeg stupca. Zapravo, pomicanjem blokova iz trećeg stupca jedan po jedan u prvi stupac otkrit će točan odgovor.

Odgovor: Darko će pomaknuti blok s brojem 9 iz trećeg stupca u prvi da bi dobio u svakom stupcu zbroj 15.

2.5 Metoda rješavanja unatrag

Ovu strategiju učenici mogu teško savladati. Većinom su u matematici naučeni da krenu rješavati problem od početka korak po korak. Ova metoda ima suprotan red. Učenici počinju od kraja problema i provode postupak unatrag da bi dobili uvjete na početku. Matematičke se operacije invertiraju tj., množenje u problemu postaje dijeljenje a zbrajanje postaje oduzimanje. Nakon što pronađemo rješenje problema, možemo ga provjeriti na način da krenemo od početka i provodimo ga do kraja.

Iako se postupak može činiti neprirodan, često se koristi u svakodnevnom donošenju odluka. Na primjer, pronalaženje najboljeg puta do nepoznatog odredišta na karti. Prvo što pokušamo je pronaći odredište točke, a zatim se postupno vraćati unatrag kroz mrežu prometnice sve dok ne dođemo do poznatog okruženja. Međutim, kada je riječ o matematičkoj primjeni ove tehnike, moramo potaknuti učenike da ovu metodu svrstaju u svoje načine rješavanja problema.

2.5.1 Primjena metode rješavanja unatrag

Promotrimo sljedeći problem:

Eva, Hrvoje i Antonio igraju određenu igru. Igrač koji izgubi rundu mora svakom igraču dati onoliko novca koliko je svaki od njih imao u to vrijeme. U prvoj rundi je Eva izgubila i daje Hrvoju i Antoniu onoliko novca koliko je imao svaki. U drugoj rundi Hrvoje gubi te daje Evi i Antoniu onoliko novca koliko svatko ima. Antonio gubi u trećoj rundi te daje Evi i Hrvoju onoliko novca koliko ima svatko od njih. Odlučili su prestati igrati igru u onom trenutku kada je svatko imao 24 *kn. Koliko je svatko od njih imao novca na početku igre?*

Rješenje: Možda ste počeli ovaj problem rješavati postavljanjem sustava s tri jednadžbe i tri nepoznanice. Može li se to učiniti? Naravno da može. Međutim, kako naš problem zahtijeva puno oduzimanja i pojednostavljivanja izraza u zagradi, konačni skup jednadžbi može biti netočan. Čak i ako se dobije točan skup jednadžbi, moraju se riješiti istovremeno:

Runda	Eva	Hrvoje	Antonio
Početak	x	y	z
1	$x-y-z$	$2y$	$2z$
2	$2x-2y-2z$	$3y-x-z$	$4z$
3	$4x-4y-4z$	$6y-2x-2z$	$7z-x-y$

To nas dovodi do sljedećeg sustava jednadžbi:

$$4x-4y-4z=24$$
$$-2x+6y-2z=24$$

$$-x - y + 7z = 24$$

Rješavanje ovog sustava nam daje $x = 39$, $y = 21$ i $z = 12$. Znači, Eva je na početku imala 39 kn, Hrvoje 21 kn, dok je Antonio imao 21 kn.

Kada problem navodi svoju situaciju na kraju priče ("Svaki od njih je imao 24 kn") i kada se pitamo za početnu situaciju ("Koliko je svatko od njih imao novca na početku igre?") tada sigurno znamo da se radi o metodi rješavanja unatrag.

Pogledajmo kako bi olakšali ovaj postupak. Počinjemo s kraja, tj. kada je svatko od njih imao 24 kn:

	Eva	Hrvoje	Antonio
Kraj treće runde	24	24	24
Kraj druge runde	12	12	48
Kraj prve runde	6	42	24
Početak	39	21	12

Kraj druge runde: Zbog toga što je Antonio izgubio u trećoj rundi, Eva i Hrvoje udvostručuju ono što su imali u drugoj rundi. Pa tako na kraju druge runde Eva i Hrvoje imaju po 12 kn dok je Antonio imao 48 kn= 24 kn+12 kn+12 kn.

Kraj prve runde: Zbog toga što je Hrvoje izgubio u drugoj rundi, Eva i Antonio udvostručuju ono što su imali u prvoj rundi. Pa tako je na kraju prve runde Eva imala 6 kn, Antonio 24 kn, dok je Hrvoje imao 12 kn+6 kn+24 kn= 42 kn.

Početak: Zbog toga što Eva gubi u prvoj rundi, Hrvoje i Antonio udvostručuju ono što su imali na početku. Dakle, na početku, Hrvoje je imao 21 kn, Antonio 12 kn dok je Eva imala 6 kn+21 kn+12 kn= 39 kn.

Dobili smo ista rješenja kao što smo postigli s algebarskim načinom rješavanja.

Kao što smo već rekli, važno je da pružite sebi i učenicima priliku da raspravite o tome što učenici misle o problemu prije nego što ga krenu oni sami rješavati. To je temelj za korištenje ove strategije. Učenici moraju razumjeti strukturu problema da bi mogli pratiti problem od kraja do početka. Konkretno, nakon što odrede skup početnih uvjeta, oni mogu provjeriti svoj odgovor.

Takva rasprava može uključiti sva naučena znanja računanja zadataka. Kao i uvijek, učenici bi trebali biti potaknuti da razgrađuju svoje matematičke napore te tražiti elegantna i efikasna rješenja.

2.5.2 Primjeri

Primjer 13. ***(Razred:*** 5*) Ivana, Jelena, Karlo i Leon skupljaju poštanske markice te su se prošli tjedan mijenjali. Nakon toga je Ivana imala* 28 *markica. Svojih* 10 *markica je dala Jeleni, a Jelena je dobila još* 12 *markica od Karla i* 7 *od Leona. Koliko je markica Ivana imala na početku?*

Rješenje: Budući da znamo s koliko je markica Ivana završila (krajnje stanje) možemo doznati koliko je imala markica na početku (početno stanje) korištenjem metode rješavanja unatrag.

Ivana na kraju ima 28 markica.	Imala je 28 markica.
Dobila je 7 od Leona.	Prije toga je morala imati 21 markicu.
Dobila je 12 od Karla.	Prije toga je morala imati 9.
Jeleni je dala 10 markica.	Na početku je morala imati 19 markica.

Odgovor: Ivana je na početku imala 19 poštanskih markica.

Primjer 14. ***(Razred:*** 5*) Majka je prije odlaska na posao pripremila košaricu šljiva za svoje tri kćeri. Prva se probudila najstarija kći koja je pojela trećinu šljiva iz košarice. Druga se probudila srednja kći i, misleći da se probudila prva, pojela trećinu šljiva iz košarice. Zadnja se probudila najmlađa kći i, smatrajući da se probudila prva, uzela je iz košarice trećinu šljiva. Tada je u košarici preostalo* 8 *šljiva. Koliko je šljiva majka stavila u košaricu?*

Rješenje: Riješimo ovaj zadatak polazeći od posljednjeg podatka. Najmlađa je kći uzela iz košarice trećinu šljiva i preostalo ih je 8. To znači da je tih 8 šljiva jednako dvijema trećinama šljiva koje su bile u košarici prije nego što je šljive uzela najmlađa kći. Odatle lako izračunamo da trećina šljiva iznosi 4, tj. da je u košarici bilo $3 \times 4 = 12$ šljiva prije nego je najmlađa kći uzela svoj dio.

Srednja kći pojela je trećinu šljiva iz košarice u kojoj je nakon toga preostalo 12 šljiva. Dakle, srednja kći je u košarici zatekla $3 \cdot \frac{12}{2} = 18$ šljiva.

Na sličan način promotrimo konačno i događaj koji se dogodio prvi. Najstarija je kći pojela trećinu šljiva iz košarice u kojoj je potom preostalo 18 šljiva. To znači da 18 šljiva odgovara dvijema trećinama ukupnoga broja šljiva, tj. majka je pripremila košaricu s $3 \cdot \frac{18}{2} = 27$ šljiva.

Kada učenik u višim razredima osnovne škole savlada tehniku rješavanja jednadžbi, ovaj zadatak može riješiti i algebarski:

Označimo s x ukupan broj šljiva koje je majka ostavila u košarici. Tada je najstarija kći pojela $\frac{1}{3}x$ šljiva, a u košarici je ostalo $\frac{2}{3}x$ šljiva. Srednja kći pojela je trećinu preostalih šljiva, tj. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{2}{9}x$ šljiva. U košarici je ostalo $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{4}{9}x$ šljiva. Najmlađa kći pojela je trećinu preostalih šljiva, tj. $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{4}{27}x$ šljiva, a ostalo je $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{8}{27}x$ šljiva. Prema uvjetu zadatka postavljamo jednadžbu:

$$\frac{8}{27}x = 8$$

Rješenje te jednadžbe je $x = 27$. Dakle, majka je u košarici ostavila 27 šljiva, tj. dobili smo isto rješenje kao što smo dobili rješavanjem metodom unatrag.

Odgovor: Majka je u košarici ostavila 27 šljiva.

Primjer 15. ***(Razred:*** 6*) Radijski voditelj planira svoj subotnji program. U sat vremena, mora odvojiti* 5 *minuta za vijesti,* 4 *minute za vrijeme,* 3 *minute za lokalne najave te* 27 *minuta za reklame. Ako svaka pjesma u prosjeku svira* 3 *minute, koliko pjesama on može pustiti u svom subotnjem programu?*

Rješenje: Budući da znamo kraj problema (jedan sat) da bismo pronašli prijašnje informacije moramo koristiti metodu unatrag.

Ukupno vrijeme	60 minuta
Vijesti	−5 minuta
	55 minuta
Vrijeme	−4 minute
	51 minuta
Lokalne najave	−3 minute
	48 minuta
Reklame	−27 minuta
Pjesme	21 minuta

Zbog toga što svaka pjesma u prosjeku svira 3 minute, on može pustiti $21 \div 3 = 7$ pjesama.

Odgovor: Radijski voditelj može pustiti 7 pjesama u jednome satu.

2.6 Pronalaženje uzorka

Uzorci se javljaju u mnogim situacijama. Učenici trebaju uvježbati ispitivanje podataka da pronađu da li uzorak postoji. Neki problemi će navoditi da uzorak postoji u slijedu brojeva a učenik treba pronaći taj uzorak i/ili nastaviti slijed za nekoliko dodatnih uvjeta. Ostali problemi mogu zahtijevati tablicu ili listu za organiziranje podataka da bi uvidjeli nastajanje uzorka.

U svakodnevnom životu se često pozivamo na pronalaženje uzorka kako bi riješili neki problem, ali nikad nismo to učinili izravno. Na primjer, trebamo pronaći određenu adresu u susjedstvu s kojom niste poznati. Ako ste u potrazi za Vukovarkom 270, prvo što utvrdite je s koje strane su parni odnosno neparni brojevi. Zatim gledamo u kojem su oni poretku, uzlazno ili silazno. Ovaj problem uključuje pronalaženje uzorka pomoću kojeg ćemo doći do cilja. Pronalaženje uzorka ponekad može biti izazovno. Najbolji način da učenici nauče pronaći uzorak je da uvježbaju pronalaženje uzorka u različitim problemskim situacijama.

2.6.1 Primjena pronalaženja uzorka

Promotrimo sljedeći problem:

Imamo stroj koji radi samo na dane brojeve. Dakle, ako smo unijeli broj 3*, stroj može raditi samo s brojem* 3*. Stroj koristi četiri temeljne operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) ili same ili u kombinaciji. Evo prvih šest izlaza za ulaze* $x = 1$ *do* 6*:*

Ulaz	Izlaz
1	1
2	9
3	29
4	67
5	129
6	221

Kolika je vrijednost za ulaz $x = 9$*?*

Rješenje: Možda bi započeli riješiti ovaj problem s pogađanjem pravila po kojem stroj radi. To je vrlo težak i dugotrajan posao. Međutim, problem se može riješiti pomoću strategije pronalaska uzorka zajedno s nekim obrazloženjem kako bi se utvrdilo što stroj zapravo radi kada mi unesemo neki broj. Njegov izlaz se čini da je blizu kubnog unesenog broja. Imamo:

Ulaz	Izlaz	x^3	Razlika (od x^3)
1	1	1	0
2	9	8	$+1$ ili $(2-1)$
3	29	27	$+2$ ili $(3-1)$
4	67	64	$+3$ ili $(4-1)$
5	129	125	$+4$ ili $(5-1)$
6	221	216	$+5$ ili $(6-1)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x		x^3	$+(x-1)$

Međutim, budući da naš izlaz može sadržavati samo broj ulaza, moramo izraziti x^3 kao $x \cdot x \cdot x$, te $(x-1)$ kao $(x-\frac{x}{x})$. Dakle, naše izlazno pravilo za neki ulaz x mora biti $x \cdot x \cdot x + (x - \frac{x}{x})$, pa rješenje našeg problema iznosi $9 \cdot 9 \cdot 9 + (9 - \frac{9}{9}) = 9^3 + 8 = 729 + 8 = 737$.

Kako bi se učinkovito iskoristili geometrijski i brojčani uzorci u rješavanju problema, učenici moraju:

1. Razumjeti svrhu i kontekst uzorka. *Primjer:* U navedenom problemu, treba razumjeti da tražimo uzorak koji opisuje matematički odnos između ulaza i izlaza.

2. Utvrditi ponavljajuće elemente u uzorku. *Primjer:* U navedenom problemu, treba primijetiti da su izlazne vrijednosti blizu kubne vrijednosti ulaza.

3. Proširiti uočen uzorak. *Primjer:* U navedenom problemu, pretpostaviti da ulaz x daje izlaz $x^3 + (x-1)$.

Učenici moraju naučiti najprije uočiti uzorak pa tek onda sustavno organizirati svoja razmatranja. Mnogo toga se može riješiti raspravom u razredu prije nego učenici krenu na rješavanje problema. Opis nekih učenika može postaviti temelje za istraživanje kako se uzorak može nastaviti. Rješenja nekih učenika nam mogu omogućiti učinkovitost problema. Imajte na umu da uočavanje i proširenje mogu dati skicu za rješavanje problema. Učenici moraju i dalje koristiti svoja konceptualna shvaćanja i računske vještine kako bi stvorili rješenje.

2.6.2 Primjeri

Primjer 16. ***(Razred: 7,8)*** *Pronađite sljedeća sva člana sljedećeg niza* $5, 11, 23, 47, \ldots$

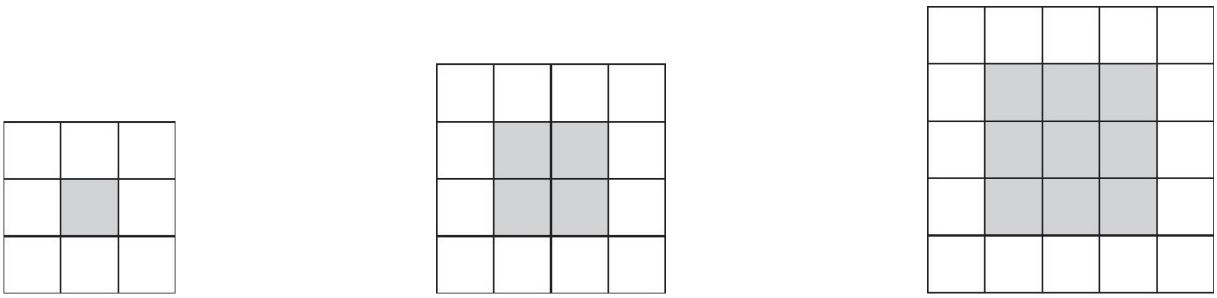
Rješenje: Uzorak za svaki sljedeći član u nizu je dvostruki prethodni s dodatkom broja 1.

$5 = 5$
$2(5) + 1 = 10 + 1 = 11$
$2(11) + 1 = 22 + 1 = 23$
$2(23) + 1 = 46 + 1 = 47$
$2(47) + 1 = 94 + 1 = 95$
$2(95) + 1 = 190 + 1 = 191$
(Algebarski, uzorak nam je formula $2n + 1$, gdje je n prethodni član.)

Neki učenici mogu prepoznati uzorak dodavanja brojeva 6, 12, 24 itd. Dakle, peti član možemo pronaći dodavanjem broja 48: $48 + 47 = 95$. Idući član bi pronašli dodavanjem broja 96: $96 + 95 = 191$. Oba načina pravilno rješavaju problem.

Zapamtite, mnogi problemi u matematici imaju više od jednog rješenja. Dobro je da pružimo učenicima alternativna rješenja jer na taj način učenici povećavaju svoju tečnost u rješavanju problema.

Primjer 17. ***(Razred:*** 5***)*** *Gospodin Marko dizajnira kvadratne bazene. Svaki bazen ima kvadratni centar što predstavlja površinu vode. On koristi sive pločice da prikaže vodu. Oko kvadratnog bazena podstavlja granicu sa bijelim pločicama. Slika 5 prikazuje tri najmanja bazena koje on može dizajnirati:*



(a) Bazen 1 (b) Bazen 2 (c) Bazen 3

Slika 5: Prikaz tri najmanje dizajniranih bazena

Koliko će biti bijelih pločica ako imamo 25 *sivih pločica u bazenu?*

Rješenje: Idemo organizirati podatke da vidimo da li će se pojaviti uzorak.

Bazen	Sive pločice	Bijele pločice
1	$1 \times 1 = 1$	8
2	$2 \times 2 = 4$	12
3	$3 \times 3 = 9$	16

Vidimo da svaki puta kada se broj sivih pločica povećava na sljedeći kvadrat, broj bijelih pločica se povećava za 4. Nastavimo tablicu.

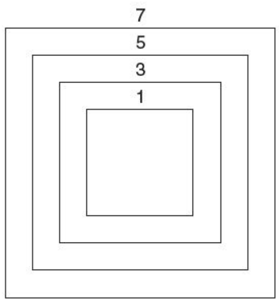
4	$4 \times 4 = 16$	20
5	$5 \times 5 = 25$	24

To nas dovodi do rješenja.

Neki učenici mogu primjetiti da je broj bijelih pločica isti kao površina kvadrata od sivih pločica u zbroju sa 4 pločice za svaki kut.

Odgovor: Postoje 24 bijelih pločica oko bazena sa 25 sivih pločica.

Primjer 18. ***(Razred:*** 8*) David radi u umjetničkoj galeriji. On dizajnira pokriće velikog zida za klijenta. Cijela konstrukcija je sastavljena od* 50 *koncentričnih kvadrata (kvadrata s jednakim centrom i paralelnim stranama). Slika 6 nam prikazuje prvih četiri kvadrata njegovog dizajna u kojem nam daje dužinu jedne strane svakog kvadrata u centimentrima. David će obcrtati rub svakog kvadrata vunom. Koliko centimetara vune mu treba da naznači svih* 50 *kvadrata?*



Slika 6: Prva četiri kvadrata Davidovog dizajna

Rješenje: Istražimo podatke i pogledajmo da li možemo naći uzorak koji nam može pomoći. Budući da kvadrat ima četiri jednake strane, možemo pronaći sumu jedne strane svakog kvadrata a zatim pomnožiti s četiri. Ovo će nam omogućiti da koristimo manje brojeve. Krenuvši od najmanjeg kvadrata prema van, duljine strana čini slijed od prvih 50 neparnih brojeva: $1, 3, 5, 7, \ldots, 99$. Moramo izračunati njihov zbroj: $1+3+5+7+\cdots+99$.

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Primjetimo kako su svi iznosi zapravo kvadrati brojeva.

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

Koristeći ovaj uzorak, zbroj svih 50 koncentričnih kvadrata bit će 50^2, odnosno 2500. Sada to pomnožimo sa 4 da bi dobili površinu te dolazimo do 10000 centimetara vune.

Također možemo riješiti ovaj problem s drugog gledišta, tj. pomoću drugačijeg uzorka (ili ako želite, organiziranjem podataka). Moramo izračunati zbroj $1+3+5+7+\cdots+99$. Umjesto dodavanja brojeva u redoslijedu kako su ovdje napisani, uzmimo u obzir parcijalne sume: $1+99=100$, $3+97=100$, $5+95=100$, $\ldots$, $49+51=100$. Ukupan iznos ovih zbrojeva je $25\times 100=2500$. Kao i prije, moramo ovaj izraz pomnožiti sa 4 da bismo dobili 10000.

Odgovor: Davidu će trebati 10000 centimetara vune da naznači svih 50 kvadrata.

2.7 Logičko zaključivanje

Iako rješavanje bilo kojeg problema zahtijeva logičko zaključivanje, nekim problemima je ovo primarna strategija za rješavanje. To može biti u rasponu od jednostavne logike do problema koji se sastoje od logičkog lanca zaključivanja. Jedan zaključak dovodi do drugog. Logički proces nastavlja se sve dok se problem ne riješi.

2.7.1 Primjena logičkog zaključivanja

Promotrimo sljedeći problem:

Rebeka, Sara, Tin, Una, Vesna i Dino idu na večeru da proslave to što su Vesna i Dino maturirali. Obrok svake osobe koštao je jednako. Vesni i Dini će društvo platiti obroke ali svatko od slavljenika mora dati doprinos u cijeni jela drugog slavljenika. Koliko je svaki od njih platio ako je ukupan račun bio 108.00 *kn?*

Rješenje: Jedan od prvih načina za riješiti ovaj problem bi bio algebarski.

$108 \div 6 = 18$ kn za jedan obrok

Neka $2x$ predstavlja količinu koju je svatko dao za Vesnu i Dina. Tada je

Rebeka je platila 18 kn$+2x$
Sara je platila 18 kn$+2x$
Tin je platio 18 kn$+2x$
Una je platila 18 kn$+2x$
Vesna je platila x
Dino je platio x

Dakle,

72 kn$+10x = 108$ kn
$10x = 36$ kn
$x = 3.60$ kn

Vesna i Dino su svoje obroke platili 3.60 kn dok su svi drugi platili 18 kn$+2 \times 3.60$ kn$=$ 25.20 kn.

Pokušajmo riješiti ovaj problem koristeći logičko zaključivanje. Znamo da je Vesna platila $\frac{1}{5}$ Dininog obroka ili $\frac{1}{5}$ od 18kn je 3.60 kn. Istovremeno, Dino plaća $\frac{1}{5}$ Vesninog obroka ili 3.60 kn, ukupno 7.20 kn. Ako oduzmemo 7.20 kn od ukupnog iznosa 108 kn, dobit ćemo još 100.80 kn koje trebamo podijeliti na preostale četiri osobe. Dijeljenjem 100.80 kn sa 4 dobivamo 25.20 kn po osobi tj. iznos koji su Rebeka, Sara, Tin i Una platili. Vesna i Dino su platili po 3.60 kn.

Problemi koji uključuju logičko zaključivanje često uključuju znatnu količinu podataka koje se na prvi pogled čine zbunjujućima. Strategija rješenja, kao što je već rečeno, je izvući logičke zaključke iz danih podataka, tj. da iskoristimo zaključak. Međutim, to zahtijeva da učenici nauče razumno i sustavno organizirati podatke. Ovo uključuje učenje kako analizirati tragove, na primjer, kako koristiti proces eliminacije, popise, Vennove dijagrame ili tablice.

Također je važno da učenici u razredu raspravljaju o svojim mišljenjima. Kada od učenika tražimo da riješe problem s logičkim zaključivanjem, to nije samo skakanje s jednog pojma na drugi, ono često zahtijeva čitanje između redaka. Na primjer, u našem problemu ne piše da je Vesna platila $\frac{1}{5}$ Dininog obroka. Za većinu učenika će ovo biti novo iskustvo te će morati raspraviti i istražiti niz problema da bi stekli učinkovitost i eleganciju koja logičko zaključivanje dovodi do rješavanja problema.

2.7.2 Primjeri

Primjer 19. ***(Razred:*** *7) Odredite vrijednosti za A, B, C i D ako su oni svi pozitivni cijeli brojevi te vrijedi*

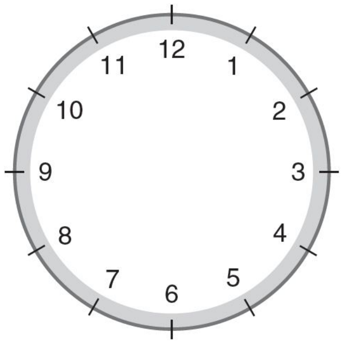
$A \times B = 24$
$A + B = 14$
$C \times D = 48$
$A \times D = 192$
$B \times C = 6$

Rješenje: Iskoristit ćemo logičko zaključivanje zajedno sa znanjem aritmetike. Zbog toga što je $A \times B = 24$, možemo ispitati faktore broja 24. A i B mogu biti samo 1 i 24, 2 i 12, 3 i 8 ili 4 i 6. Nadalje, zbog $A + B = 14$, A i B mogu biti samo 12 i 2. Primjetimo da nam zadnja jednakost $B \times C = 6$ govori da B mora biti 2, a A mora biti 12. Nadalje, ako je $B = 2$, C mora biti 3. Budući je $C \times D = 48$, D mora biti 16.

Strategija logičkog zaključivanja mora biti korištena od strane učenika u načinu otvorenog razmišljanja, i sve dok učenici mogu opravdati svoje korake logično, ovi koraci bi trebali biti prihvaćeni. To može biti lijepa grupna aktivnost.

Odgovor: $A = 12, B = 2, C = 3$ i $D = 16$.

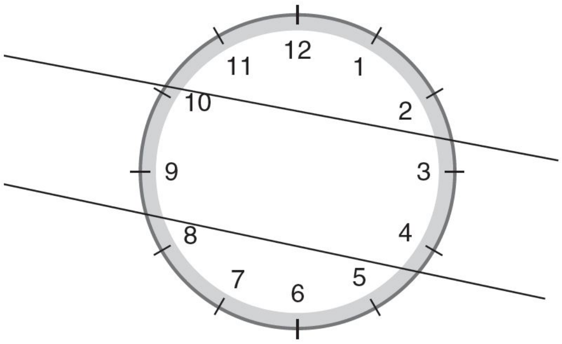
Primjer 20. ***(Razred:*** *7) Nacrtaj dvije ravne linije kroz lice sata (Slika 7) tako da zbroj brojeva u svakom odjeljku bude jednak.*



Slika 7: Lice sata

Rješenje: Malo logičkog zaključivanja može pomoći. Ako nacrtamo dvije linije koje se sijeku da dobijemo četiri dijela, dobit ćemo grupiranje malih brojeva međusobno odnosno velikih brojeva međusobno. To će biti neuravnoteženo odmah na početku.

Idemo ispitati problem logično. Ako zbrojimo svih 12 brojeva na satu, dobivamo $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78$. Zbog toga što zbroj unutar svakog dijela mora biti isti, podijelimo taj broj s 3, $78 \div 3 = 26$. To čini posao lakšim. Odgovor je prikazan na *Slici 8*.



Slika 8: Podjela sata u tri dijela

Odgovor: Zbroj jednog dijela sata iznosi $11 + 12 + 1 + 2 = 26$, zbroj drugog dijela $10 + 9 + 3 + 4 = 26$ te zbroj zadnjeg $8 + 7 + 6 + 5 = 26$.

Primjer 21. ***(Razred:*** 5***)*** *Na dnu jezera nalaze se šalica, staklenka, cipela i stara guma. Riba, žaba, rak i zmija se nalaze u okolini tog smeća. Zmija uđe u staklenku i zaspi. Rak se uvukao u cipelu a riba ne želi biti u blizini gume. U koji predmet je ošla svaka životinja?*

Rješenje: Napravimo tablicu i popunimo tragove. Zapamtimo da "Da" u bilo kojem stupcu znači "X" ili "ne" na svim drugim stavkama u tom stupcu (gore i prema dolje) i redu (horizontalno). Dakle, prvi trag nam govori da je zmija ušla u staklenku. To znači "Da" u tom elementu tablice. Također znači da nitko drugi ne može biti u staklenci i da zmija ne može biti u nekom drugom predmetu. Dalje idemo na sličan način, pomoću tragova, jedan po jedan.

	Šalica	Staklenka	Cipela	Guma
Riba	Da	X	X	X
Žaba	X	X	X	Da
Rak	X	X	Da	X
Zmija	X	Da	X	X

Tablica nam govori gdje se koja životinja sakrila.

Odgovor: Riba je otišla u šalicu, žaba je u gumi, rak se nalazi u cipeli a zmija u staklenci.

2.8 Crtanje dijagrama

Da bismo pokušali riješiti geometrijski problem bez crtanja skice bi bilo nezamislivo. Ipak skica može biti veoma korisna i u rješavanju negeometrijskih problema. Zapravo, postoje slučajevi kada je skica neophodna za rješavanje negeometrijskih problema. Ipak, određivanje kada je problem bolje riješiti uz pomoć skice je nešto što dolazi s iskustvom. Prikazat ćemo nekoliko ilustracija za usmjeravanje misli u tom smijeru. Pogledat ćemo neke probleme koje koriste skicu da razjasne situaciju ili da nam pomognu pri zaključivanju problema.

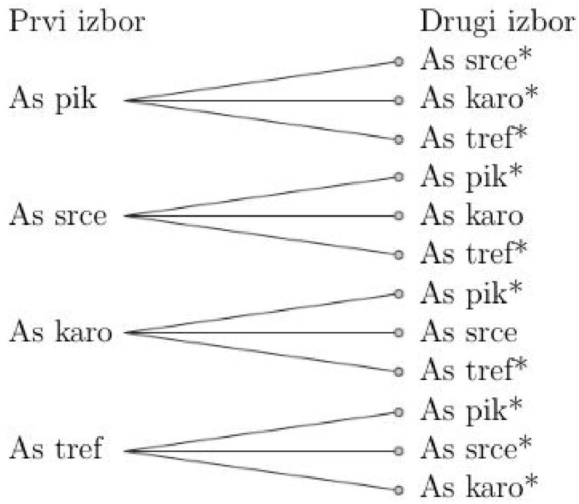
2.8.1 Primjena metode crtanja dijagrama

Pogledajmo sljedeći problem:

Ana drži četiri karte u ruci: asa, pik, asa srce, asa tref i asa karo. Ivan vuče dvije karte iz Anine ruke bez gledanja. Kolika je vjerojatnost da je Ivan izvukao barem jednog crnog asa?

Napomena: Pik i karo su crne karte.

Rješenje: Možemo pretpostaviti da je vjerojatnost $\frac{2}{4}$, tj.$\frac{1}{2}$. Međutim, ako ćemo napraviti skicu mogućih ishoda, vidjet ćemo da ovo nije točno. (*Slika* 9.)



Slika 9: Sve moguće kombinacije izvlačenja karata, gdje * predstavlja uspješnu kombinaciju

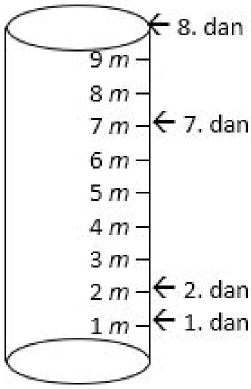
Naša skica nam otkriva da postoji 12 mogućih ishoda, od kojih su 10 uspješni (barem jedan as je crni). Točan odgovor je $\frac{10}{12}$ ili $\frac{5}{6}$, što je drugačije od pretpostavke $\frac{1}{2}$. Izrada pažljive skice problema brzo otkriva točan odgovor.

Kao što smo rekli, snaga u skici leži u tome kako organizira i pojašnjava podatke. Pravilno napravljena skica pruža smisleno objašnjenje strukture problema. Nekim učenicima u početku neće biti lako napraviti takve skice. U raspravi s učenicima treba ilustrirati kako se dijagrami i skice mogu učinkovito koristiti za praćenje svih mogućih događaja i rezultata. Takva rasprava će podržati eksperimentiranje i istraživanje učenika da pronađu vještinu u korištenju ove strategije.

2.8.2 Primjeri

Primjer 22. ***(Razred:*** 5***)*** *Puž se penje po stupu visokom* 10 *metara. Danju se popne* 3 *metra a noću se spusti* 2 *metra. Koliko mu dana treba da se popne na vrh stupa?*

Rješenje: Pogledajmo skicu stupa (*Slika 10*) te pažljivo obilježimo položaj puža na kraju svake noći. Na kraju svakog dana, puž će napredovati za 1 metar. Dakle, na kraju prvih 7 dana, popet će se za 7 metara. Osmi dan ujutro će se ponovno penjati za 3 metra i tada će biti na vrhu stupa. Stoga, potrebno mu je $7\frac{1}{2}$ dana da se popne na vrh stupa.



Slika 10: Stup po kojem se puž penje

Odgovor: Puž će se popeti na vrh stupa osmi dan.

Primjer 23. ***(Razred:*** 8***)*** *Jednoga dana* 5 *je učenika požurilo u red za ručak. Josip je bio ispred Katarine a iza Lore. Lora je bila ispred Sare i iza Nikole. Sara je bila ispred Josipa. Tko je bio zadnji u redu a tko prvi?*

Rješenje: Skicirat ćemo si dijagram od situacije kako je opisano pa si tako možemo vizualizirati raspored učenika. Poredat ćemo imena u određene pozicije prema uvjetima navedenim u problemu. Problem će se onda riješiti kako postavljamo učenike na odgovarajuće položaje. Ovdje možemo vidjeti kako je skiciranje dijagrama korisna strategija.

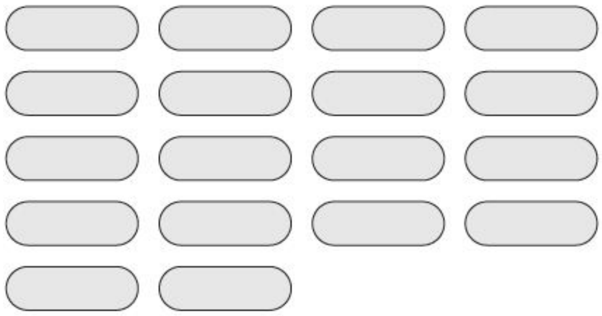
Prednji dio reda
Nikola
Lora
Sara
Josip
Katarina

Imamo informaciju da je Josip ispred Katarine a iza Lore pa ćemo to zabilježiti u stupac. Znamo da je Lora ispred Sare i iza Nikole, te ih ubacujemo u stupac kako je navedeno. Postupno gledajući na tekst zadatka smo došli do rješenja našeg problema.

Odgovor: Katarina se nalazila na kraju reda a Nikola na početku.

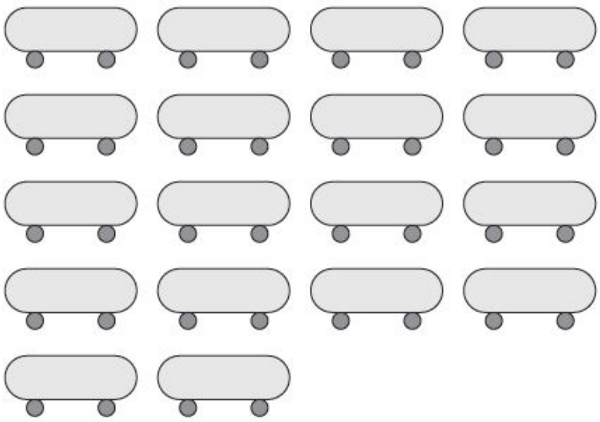
Primjer 24. ***(Razred:*** 8***)*** *Izložba vozila na auto sajmu sastoji se od motocikala, kombija i automobila. Ukupno ima* 18 *vozila i* 60 *kotača. Ako postoji četiri automobila više od kombija, koliko je svaki od njih izložen na sajmu?*

Rješenje: Skicirajmo prvo 18 vozila. (*Slika 11*)



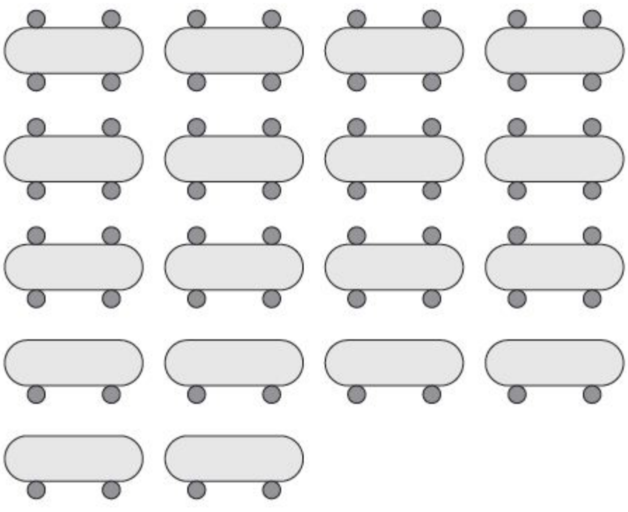
Slika 11: Skica 18 vozila

Svako vozilo mora imati barem 2 kotača, stoga dodajmo na svako vozilo dva kotača. (*Slika 12*)



Slika 12: Skica 18 vozila sa dva kotača

Iskoristili smo ukupno 36 kotača. Preostaje nam još $60 - 36 = 24$. Oni dolaze u parovima pa ćemo ih rasporediti kao na *Slici 13*.



Slika 13: Skica 18 vozila sa preostalim kotačima

Skica nam sada pokazuje da postoji 12 vozila sa 4 kotača i 6 na dva kotača. Vozila sa dva kotača su motocikli. Zbog toga što postoji 4 automobila više od kombija, izloženi su 8 automobila i 4 kombija.

Odgovor: Izložena su 6 motocikla, 8 automobila i 4 kombija.

2.9 Promjena fokusa

Ponekad se problem može riješiti na učinkovitiji i zanimljiviji način ako joj pristupimo s različitog gledišta. Umjesto da se problem riješi na izravan i očigledan način, drugačiji pristup može dati odgovor brže i učinkovitije. Na taj način mogu se otkriti neke zanimljve činjenice. To ne znači da je originalna ili očita situacija netočna nego da je savršeno valjana. Međutim, ponekad ispitujući problem iz drugog aspekta može realizirati odlična matematička diskusija. Većina se matematičkih problema može riješiti na različite načine. Neki načini će očito biti elegantniji od drugih i to bi moglo biti predmet rasprave u razredu. Trebali bi potaknuti učenike da koriste svoju genijalnost a zatim da usporede rješenja. Mnogo bi više stekli rješavanjem problema na više načina nego rješavanje nekoliko primjera svaki na samo jedan način.

2.9.1 Primjena metode promjene fokusa

Promotrimo sljedeći problem:

Zaokružujući na dvije decimale, nađite vrijednost izraza

$$3.1416 \times 2.7831 + 3.1415 \times 12.27 - 5.0531 \times 3.1416.$$

Rješenje: Najčešća i najočitija metoda za rješavanje ovog problema je pronaći tri odvojena umnoška, a zatim ih zbrojiti ili oduzeti ako je potrebno. Korištenjem kalkulatora, dobivamo

$3.1416 \times 2.7831 = 8.743387$
$3.1416 \times 12.27 = 38.547432$
$5.0531 \times 3.1416 = 15.874818$
$\Rightarrow 8.743387 + 38.547432 - 15.874818 = 31.416001 = 31.42$

Uočite da se sve to moglo pažljivo organizirati i pratiti sa parcijalnim umnošcima. Osim toga, ako smo koristili kalkulkator za rješavanje problema, moguće je da krivo utipkamo znamenku a da nismo ni svjesni toga. Idemo ispitati ovaj problem s drugog gledišta. Imamo zajednički faktor u svakom izrazu, broj 3.1416. Ako ga izlučimo iz svakog izraza, dobivamo

$$
\begin{aligned}
3.1416 \times (2.7831 + 12.27 - 5.0531) &= 3.1416 \times 10 \\
&= 31.41600 \\
&= 31.42
\end{aligned}
$$

Dobili smo isto rješenje puno jednostavnijim načinom. Primjetimo da ovo rješenje uključuje uzorak, tj. prepoznavanje zajedničkog faktora. Ovu vrstu uzorka je vrijedno istaknuti.

Ovi problemi imaju potencijal da budu među zanimljivijim problemima u ovom radu. Od učenika ne tražimo da nađu samo rješenje problema, nego da nađu ono najelegantnije i najefikasnije. Svi mi imamo različite ukuse. Iz tog razloga je važno da se rješenja objasne, ilustriraju i raspravljaju. Učenici nisu svjesni da postoje učinkoviti načini rješavanja problema, a mnogi su doživjeli žar prilikom pronalaska rješenja složenijeg problema.

2.9.2 Primjeri

Primjer 25. ***(Razred:*** 5***)*** *Toranj se sastoji od* 4 *bloka. Koliko tornjeva možemo izgraditi od blokova dviju različitih boja?*

Rješenje: Promotrimo ovaj problem iz drugog gledišta. Neka su blokovi crvene i zelene boje. Svaka boja može biti ili korištena ili ne korištena u bilo kojem slučaju. Prvi blok ima dvije mogućnosti, crveni ili zeleni blok. Za drugi blok, postoje isto dvije mogućnosti, crveni ili zeleni blok. Slično tome, za svaki treći i četvrti blok postoje dvije mogućnosti. Koristeći temeljni princip brojanja u matematici, to je zajedno $2 \times 2 \times 2 \times 2$ ili 16 mogućih načina za postavljanje blokova.

Odgovor: Postoji 16 mogućih načina izrade tornja od 4 bloka s dvije različite boje blokova.

Primjer 26. ***(Razred:*** 6***)*** *Koliko iznosi zbroj prvih* 20 *parnih brojeva?*

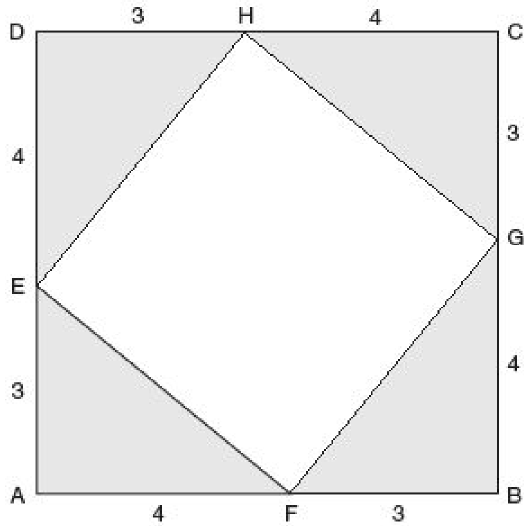
Rješenje: Neki učenici mogu ispisati prvih 20 brojeva pa ih zbrojiti. Pokušajmo dobiti rješenje s drugačijeg gledišta na zadatak. Možemo primjetiti da sa parcijalnim sumama dobijemo uzorak kojeg možemo dopustiti učenicima da otkriju.

2	$= 2$	$= 1 \cdot 2$
$2 + 4$	$= 6$	$= 2 \cdot 3$
$2 + 4 + 6$	$= 12$	$= 3 \cdot 4$
$2 + 4 + 6 + 8$	$= 20$	$= 4 \cdot 5$
$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$		$= n(n+1)$

Dakle, suma prvih 20 parnih brojeva je $20 \cdot 21 = 420$.

Odgovor: Suma prvih 20 parnih brojeva iznosi 420.

Primjer 27. ***(Razred:** 8)* *Kvadrat EFGH formiran je spajanjem točaka koje se nalaze na kvadratu ABCD.* $|AF| = |BG| = |CH| = |DE| = 4$ *cm i* $|FB| = |CG| = |DH| = |EA| = 3$ *cm. Koliko iznosi površina osjenčanog dijela slike?*



Slika 14: Skica zadatka

Rješenje: Neki učenici mogu pokušati riješiti ovaj zadatak tako da pronađu površinu manjeg kvadrata te ga oduzeti od površine većeg kvadrata. Međutim, to zahtijeva poznavanje Pitagorinog poučka:

$a^2 + b^2 = c^2$
$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$c^2 = 25$
$c = 5$

Sada možemo izračunati obje površine. Površina većeg kvadrata je $7 \times 7 = 49$, a površina manjeg kvadrata iznosi $5 \times 5 = 25$. Oduzimanjem tih dviju površina dobivamo traženu površinu našeg problema, tj. $49 - 25 = 24$.

Promotrimo problem s drugačijeg gledišta. Osjenčano područje se sastoji od četiri sukladna pravokutna trokuta, svaki s katetama 3 i 4. Dakle, površina jednog trokuta iznosi $\frac{3 \times 4}{2} = 6$. Kako postoje 4 takva trokuta, vrijedi $4 \times 6 = 24$, te dobivamo površinu osjenčanog dijela.

Odgovor: Površina osjenčanog dijela iznosi 24 centimetara kvadratnih.

Zaključak

Rješavanje problema sastavni je dio matematike kao znanstvene discipline i školskog predmeta. Ono je prihvaćeno od većine nastavnika kao sastavni dio kurikuluma matematike koji mora biti poučen zajedno sa aritmetičkim vještinama potrebnima za uspjeh u školi i u stvarnom životu. Zapravo, rješavanje problema daje razlog za poduku vještine aritmetike.

Učenici trebaju razviti svoje kritičko mišljenje te trebaju biti spremni primjeniti svoja znanja u cilju rješavanja problema. Također, moramo ih podučiti strategijama koje će im pomoći za rješavanje problema te kako postaviti pitanja vezana za problem. Nastavnici trebaju biti spremni voditi nastavu kroz razgovor jer je rješavanje problema način podučavanja i isto tako treba naglasiti da postoji više mogućih strategija za rješavanje jednog problema.

Također, učenike trebamo podučiti faktorima koji otežavaju rješavanje problema. Kako se već s nekima susreću u nižim razredima osnovne škole, trebalo bi ponoviti s njima naučene otežavajuće faktore te uvesti novi otežavajući faktor samo nakon što savladavaju trenutni. Bitno je da se faktori podučavaju odvojeno te treba učenicima dati vremena za otkrivanje tih faktora u zadacima.

Kako je za mnoge učenike najteži dio rješavanja problema pronaći polaznu točku, tako je bitno da im prikažemo četiri koraka Georga Polya za rješavanje problema: razumijevanje problema, stvaranje plana, provođenje osmišljenog plana te osvrt na rješenje. Svaki korak je bitan, od razumijevanja što se traži u zadatku do analiziranja da li rješenje zadovoljava uvjetima problema. Ključno je naglasiti raspravu u svakom koraku rješavanja problema. Bitno je da učenici ponove problem svojim riječima, da prepričaju što se traži u zadatku, isto tako je bitno prilikom odabira najbolje strategije te prilikom rasprave o rješenjima i kako su došli do njih. Popis koraka Georga Polya možemo staviti negdje u učionici kako bi ih učenici mogli vidjeti u svakom trenutku.

Nastavnici trebaju upoznati učenike strategijama na koje mogu primjeniti Polyn pristup rješavanja problema. Pomoću tih strategija, na različite načine možemo doći do rješenja problema. Preko sustavnih listi ako se radi o nekom skupu podataka ili pogađanjem doći do rješenja te sve pogotke organizirati u tablicu, rješavanjem srodnog jednostavnijeg problema, pronalaskom nekog uzorka i slično. Svaka strategija je dobra za određen tip zadatka. Najbitnije u strategijama je da zapravo riješimo zadatak na neklasičan način, razmišljanjem i analiziranjem dobivenih rješenja te na taj način razvijamo učenikovo kreativno razmišljanje i kritičko mišljenje koje je važno za svakodnevni život te će na taj način dobiti motivaciju za daljnje proučavanje matematike.

Literatura

[1] A. S. POSAMENTIER, S. KRULIK, *Problem Solving in Mathematics*, Corwin, California, 2009.

[2] D. V. MINK, *Strategies for Teaching Mathematics*, Shell Education, California, 2004.

[3] G. POLYA, *How To Solve It*, Princeton University Press, New Jersey, 1973.

[4] S. VAROŠANEC, *Neke metode rješavanja problemskih zadataka*, Poučak, 1 (2002), 32-38.

Sažetak

U ovom radu objašnjene su strategije rješavanja problemskih zadataka u matematici koje nisu standardne za nastavu matematike. Učenici bi trebali moći izgraditi nova matematička znanja kroz rješavanje zadataka, primjeniti stečeno znanje te razmišljati i diskutirati o rješenjima. Postoje faktori koji otežavaju rješavanje problema koje trebamo proučiti i naučiti učenike prepoznati ih. Sam proces rješavanja problema se bazira na koracima Georga Polya koji daju smjernice pomoću kojih možemo riješiti problem. Od strategija za rješavanje problemskih zadataka ću spomenuti njih 9 u kojima ću opisati svaku od njih te dati nekoliko primjera koje možemo kao nastavnici koristi u nastavi. Napomenut ću da se jedan problem može riješiti na više načina što ću i istaknuti u ovome radu.

Title and summary

Problem-solving strategies. In this paper, I will explain the problem-solving strategies in mathematics that are not standard for the teaching mathematics. Students should be able to build new mathematical knowledge through problem solving, to apply their knowledge, think and discuss solutions. There are factors that make it difficult to solve the problem that we should study and teach students to recognize them. Process of solving problem is based on the steps of George Polya which provide guidelines by which we can solve the problem. From all problem-solving strategies I will mention 9 of them in which I will describe each of them and give few examples that can be used in teaching. I will notice that one problem can be solved in several ways, which I will point out in this paper.

Životopis

Zovem se Blaženka Filipović i dolazim iz Velike Kopanice. Rođena sam 11. ožujka 1992. godine u Slavonskom brodu kao četvrti član obitelji. Otac mi se zove Blaž a majka Ankica. Imam četiri sestre i jednoga brata. Osnovnu školu pohađala sam u OŠ "Ivan Filipović" u mjestu stanovanja gdje mi se pojavila želja za podučavanjem matematike, a prirodoslovno-matematičku gimnaziju "Matija Mesić" sam završila u Slavonskom Brodu gdje sam tijekom školovanja išla na županijsko natjecanje iz računarstva s osvojenim sedmim mjestom. Nakon toga upisujem integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studiranja sam radila nekoliko studentskih poslova, ali najljepše je bilo, i bit će, raditi kao nastavnik u školi.