Strategije rješavanja problemskih zadataka

Filipović, Blaženka

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:235150

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: 2023-12-14

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science
Blaženka Filipović

Strategije rješavanja problemskih zadataka

Diplomski rad

Osijek, 2016
SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Blaženka Filipović

Strategije rješavanja problemskih zadataka

Diplomski rad

Mentorica:
doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016
Veliku zahvalnost dugujem svojoj mentorici doc.dr.sc. Ljerki Jukić Matić koja mi je omogućila sve potrebne materijale i pomogla svojim savjetima pri izradi ovog diplomskog rada.

Također, zahvaljujem se svim svojim prijateljima i prijateljicama, koji su uvijek bili uz mene i bez kojih cijeli ovaj tijek mog studiranja ne bi prošao tako lako i zabavno.

Veliku zahvalnost iskazujem cijeloj svojoj obitelji koja me je uvijek podržavala i upućivala na pravi put a posebno svom zaručniku Tomislavu koji je uvijek bio uz mene i što je uvijek imao strpljenja i vremena za sve moje upite tijekom studiranja. Također se zahvaljujem i njegovoj obitelji na podršci.

I na kraju, najveću zaslugu za ono što sam postigla pripisujem svojim roditeljima, koji su uvijek bili tu bez obzira da li se radilo o teškim ili sretnim trenutcima i bez kojih sve ovo što sam dosad postigla ne bi bilo moguće.

Veliko HVALA svima!
# Sadržaj

## Uvod

### 1 Pregled rješavanja problema

1.1 Faktori koji otežavaju rješavanje problema ........................................... 4
1.2 Poucavanje otežavajućih faktora .......................................................... 8
1.3 Proces rješavanja problema ..................................................................... 9

## 2 Strategije rješavanja problemskih zadataka

2.1 Ispisivanje sustavnih listi ................................................................. 13
   2.1.1 Primjena ispisivanja sustavnih listi ........................................... 14
   2.1.2 Primjeri ......................................................................................... 14
2.2 Metoda pokušaja i promašaja ............................................................ 17
   2.2.1 Primjena metode pokušaja i promašaja ....................................... 17
   2.2.2 Primjeri ......................................................................................... 19
2.3 Rješavanje srodnog jednostavnijeg problema ....................................... 20
   2.3.1 Primjena metode rješavanja srodnog jednostavnijeg problema ...... 20
   2.3.2 Primjeri ......................................................................................... 21
2.4 Metoda oponašanja i simulacije ........................................................... 23
   2.4.1 Primjena metode oponašanja i simulacije ..................................... 23
   2.4.2 Primjeri ......................................................................................... 25
2.5 Metoda rješavanja unatrag ................................................................. 28
   2.5.1 Primjena metode rješavanja unatrag ........................................... 28
   2.5.2 Primjeri ......................................................................................... 30
2.6 Pronalaženje uzorka ............................................................................. 32
   2.6.1 Primjena pronalaženja uzorka ...................................................... 32
   2.6.2 Primjeri ......................................................................................... 33
2.7 Logičko zaključivanje .......................................................................... 36
   2.7.1 Primjena logičkog zaključivanja ...................................................... 36
   2.7.2 Primjeri ......................................................................................... 37
2.8 Crtanje dijagrama .................................................................................. 39
   2.8.1 Primjena metode crtanja dijagrama .............................................. 39
   2.8.2 Primjeri ......................................................................................... 40
2.9 Promjena fokusa ................................................................................... 43
   2.9.1 Primjena metode promjene fokusa ............................................... 43
   2.9.2 Primjeri ......................................................................................... 44

## Zaključak

### Literatura

47
Uvod

Prije nego što raspravimo rješavanje problema, trebamo ispitati pojam samog „problema“ć. Problem je situacija s kojom se učenik suočava, koja zahtijeva rješavanje te za koju ne možemo odmah reći rješenje. To je definicija problema koja mijenja pojam „problemski zadatak“ koje nastavnici obrađuju od „problema“ do više „vježbe“. Nastavnici često grupiraju probleme po vrstama te pokazuju na nastavi kako im se približiti.

Obično se učenicima pokaže jedan primjer a za ostale se kaže da su vrlo slični te da se rješavaju na isti način ali s različitim brojevima. To se odnosi na „vježbu“ a ne na sam problem jer prepoznavanje problema daje učeniku put tj. metodu za pronalazak rješenja. Od učenika se traži vrlo malo razmišljanja o zadatku, a umjesto toga, oni se prisjećaju nastavničkog pristupa. Nažalost, ako specifična vrsta problema nije podučena na nastavi, onda učenici ostanu zbunjeni jer nisu naučili na nove i različite vrste zadataka.


Način na koji učenici pristupaju problemu varira od djeteta do djeteta. Međutim, jedna stvar je jasna. Oni će najčešće pristupiti problemu na temelju njihovih pozadina i iskustava. To može biti u rasponu od prepoznavanja sličnog problema koje su već vidjeli na nastavi ili rješavanje sličnih zadataka kao na satu. U većini slučajeva, učenici ne rade nikakvo rješavanje problema, niti promišljaju niti razmišljaju o zadatku. Učenik jednostavno opaža ili kopira vještine naučene do sad u nastavi. Ako ne prepoznaju tip problema, mogu ostati zbumjeni i neće znati što treba napraviti. Učenici moraju dobiti odgovarajuću pozadinu, uputu i podršku kako bi postali efikasni u rješavanju problema. Moraju naučiti kako riješiti probleme i uvježbati, ponekad nedostiznu, vježtinu.

Nastavnici moraju biti svjesni da se različite strategije rješavanja problema mogu koristiti za pružanje elegantnog i učinkovitog rješenja problema. Nastavnici ponekad nesvjesno prenesu na učenike da postoji jedan i samo jedan način da se riješi neki problem. Isto tako, nastavnici mogu obeshrabiti učenike od pokušaja rješavanja problema na drugačiji način ili mogu pak inzistirati na jedinstvenoj strategiji. Učenici moraju biti slobodni izraziti svoje mišljenje i svoj stav te probati ono što misle da je način na koji žele riješiti pro-
blem, pa čak i ako taj pristup vodi u slijepu ulicu. Odgovor nije tako bitan kao postupak rješavanja koji se koristi za dobivanje rješenja.

1 Pregled rješavanja problema

Dvije od najvažnijih vještina koje učenici trebaju su kritičko mišljenje i rješavanje problema. Učenici trebaju biti spremni primjeniti svoje znanje i traži prave informacije u cilju rješavanja problema. Međutim, ova sposobnost nije urođena. Učenici moraju biti poučeni kako postaviti pitanje te moraju naučiti strategije koje će im pomoću u rješavanju problema što dovodi do više pitanja, više problema i više rješenja. Djeca su prirodno znatiželjna i ta znatiželja mora biti usmjeren i oblikovana tako da učenici mogu pristupiti i riješiti probleme na kreativne i smislene načine.

Prema američkom vijeću nastavnika matematike (NTCM), učenici bi trebali moći:

• izgraditi nova matematička znanja kroz rješavanje problema,
• riješiti probleme koje se javljaju u matematičci i drugim kontekstima,
• primjeniti i prilagoditi razine odgovarajućih strategija za rješavanje problema,
• pratiti i razmišljati o procesu matematičkog rješavanja problema.

Nastavnici moraju biti spremni voditi nastavu matematike kroz razgovor, kroz istraživanje i rješavanje problema. Drugim riječima, rješavanje problema je način poučavanja, a ne predstavljanje. Izlaganje učenika samo sa tradicionalnim zadacima nije dovoljno. Na taj način im je dana nerealna poruka o načinu kako će matematika poslužiti u svijetu odraslih. Većina problema s kojima se odrasli susreću zahtijevaju matematičko zaključivanje i vještine koje se ne riješavaju samo prevođenjem informacija u matematički zapis te izvršavanjem matematičkih operacija.


Često se veći naglasak stavlja na algoritamski postupak, poznato kao aritmetika jer je više povijesno priznata i cijenjena u društvu. Aritmetika je u konačnici potrebna za rješavanje mnogih problema, ali veći naglasak treba staviti na to kako je korištena u stvarnom životu a ne samo za računanje. Rješavanje problema je mnogo više nego traženje rješenja. To je, u biti, sposobnost da se kreativno pristupi i odredite informacije o problemu te provede rješenje za taj problem.

Postoje mnoge situacije u učionici pomoću kojih se mogu ilustrirati problemi stvarnoga života. Na primjer, prikupljanje novca za izlet, računanje koliko je autobusa potrebno za
taj izlet, računanje prosjeka ocjena i sl. To su važni i relevantni načini podučavanja učenika strategijama rješavanja problema. Osim toga, predstavljanje učenicima neprirodne probleme je također korisno u izgradnji njihovih sposobnosti u rješavanju problema, jer to podupire njihovo razumijevanje specifične strategije rješavanja problema. Vrlo je zahvaljeno ali i iznimno važno da nudimo motivirajuće probleme koje potiču dječju prirodnu zнатиželju, omogućujući korištenje vještina koje će im trebati kasnije.

1.1 Faktori koji otežavaju rješavanje problema

Dodatno, u strategijama rješavanja problema, važno je da djeca prepoznaju da sama struktura može predstavljati problem u problemu. Postoji sedam faktora koji učenici moraju biti u stanju prepoznati. Ti faktori su:

1. Pogrešan redoslijed
2. Ključne riječi
3. Dodatni brojevi
4. Riječima skriveni brojevi
5. Brojevi koji se podrazumijevaju
6. Više koraka
7. Točan matematički rječnik

Učenici moraju biti upoznati sa svakim od tih faktora, te im moramo dati vremena da unutar problema otkriju te faktore. Prepoznavanjem prije pokušavanja rješavanja problema, učenik je sposoban suočiti se s problemom te će manje biti zbužen. Faktore moraju naučiti, a popis bi trebao biti prikazan u razredu tako da ih svi učenici mogu vidjeti u bilo kojem trenutku.

U nastavku je navedeno sedam faktora koji otežavaju rješavanje problema i neke poruke kod poučavanja učenika.

1. Pogrešni redoslijed

Redoslijed brojeva važan je kada se radi o oduzimanju i dijeljenju brojeva. Najraniji otežavajući faktor učenik susreće u poretku u kojem se brojevi pojavljaju u različitim problemima. Prikažimo to primjerima.

Razred: 6

Anin mladi brat teži 17 kg, a njegov pas teži 24 kg. Za koliko je pas teži od njegovog brata?

U ovom problemu učenik ne samo da se bavi pogrešnim redoslijedom, nego mora
prepoznati da ovaj problem uključuje usporedbu oduzimanja. Učenik pretpostavlja da se radi o operaciji zbrajanja zbog redoslijeda brojeva i riječi u zadatku. Umjesto da prepoznaju potrebu za oduzimanjem, učenik može lako biti zaveden da je ovo problem gdje se nešto povećava, a usporedba težina postaje otežavajući faktor za učenika.

Razred: 7

*Nogometna ekipa je na treningu popila $9\frac{3}{4}$ litara vode. Spremnik može sadržavati 15 litara vode. Koliko vode je ostalo u spremniku?*

U ovom problemu, učeniku su dane informacije u suprotnom redoslijedu u kojemu treba izračunati zadatak. Učenik mora koristiti prvo veći broj kako bi postavio točan problem kojeg treba riješiti.

**Pogrešan redoslijed - savjet za nastavu:** Neka učenici prvo analiziraju pitanje, tj. ono što se traži u zadatku. Moramo naučiti učenike da napišu jednadžbu nakon što shvate koji tip rješavanja im je potreban.

2. Ključne riječi

Ključne riječi se uče u ranoj osnovnoj školi. Učenici koji ovise o ovoj strategiji lako se mogu prevratio. Sljedeći primjer daje dvije različite situacije koje učenicima predstavljaju problem koji uče rješavati probleme s riječima samo u potrazi za ključnim riječima.

Razred: 3

*Ivan je planirao silazak s vrha tornja spustajući se užetom od 1000 metara. Toranj se uzdiže 865 metara ravno prema gore. Koliko Ivan ima viška užeta?*

U ovoj situaciji, ne postoji ključna riječ koja bi pomogla učeniku da prepozna operaciju potrebnu za rješavanje ovog problema.

Razred: 5

*Marko je platio Luki 20.75 kn za kombinaciju 13 nogometnih kartica i neke košarkaške kartice. Svaku nogometnu karticu je platio 1.25 kn a svaku košarkašku 0.75 kn. Koliko kartica je Marko sveukupno kupio?*

U ovoj situaciji ključna je riječ na riječi *sveukupno*, što ne mora značiti da je samo riječ o zbrajanju, nego i o množenju i dijeljenju.

**Ključne riječi - savjet za nastavu:** Pokazati kako ključne riječi mogu biti varljive i naglasiti važnost čitanja cijelog problema prije rješavanja. Najbolji savjet je da su ključne riječi najkorisnije kada se pojavljuju neposredno prije upitnika. Također, treba istaknuti kako neke ključne riječi mogu imati više od jedne operacije. Na primjer, riječ *sveukupno*. U nižim razredima osnovne škole se uči da je to zbrajanje, a može se koristiti i za množenje.
3. Dodatni brojevi

Problemi s previše brojeva mogu biti vrlo teški za učenike. Nesigurni su prilikom odabira pravih brojeva. U nastavku su prikazani primjeri ovog otežavajućeg faktora.

Razred: 6

Lea, Ana i Helena skupljaju klikere. Lea ima 152 klikera u svojoj kolekciji, Ana ima 149 klikera, a Helena 126. Koliko klikera Lea ima više od Ane?

U ovom problemu, postoje tri seta brojeva, ali jedan set nam nije potreban da bi se problem riješio.

Razred: 5

Alen se natjecao u skoku u dalj u kojem je dobio tri pokušaja. Na prvom skoku postigao je rezultat od 3 metra i $8\frac{3}{4}$ centimetara. U drugom skoku, postigao je rezultat od 3 metra i $11\frac{1}{2}$ centimetara, a u posljednjem 3 metra i $8\frac{1}{4}$ centimetara. Za koliko je bio dulji njegov najduži skok od najkraćeg?

Dodatni brojevi - savjet za nastavu: Naučiti učenike da se bave ovim otežavajućim faktorom tako da rasprave o brojevima i njihovim odnosima u priči. Treba raspraviti o tome zašto dodatni broj ili brojeve treba eliminirati.

4. Riječima skriveni brojevi

Učenici često traže ključne riječi u problemu. Tako ne daju problemu puno pažnje. Pisanje jednog od tih brojeva u obliku riječi komplicira ovu strategiju. Pogledajmo primjere.

Razred: 7

Tisuću gledatelja došlo je gledati planinara Davida. Ako je prosječan gledatelj potrošio 20 kn za putovanje na planinu, koliko je novca potrošeno na putovanje?

Razred: 7

Julia ima novčanicu od 100 kn za kupnju majice, a majicu koju je pronašla košta 80 kn. Na blagajni joj je prodavač rekao da je ta majica na sniženju dvadeset posto. Koliko joj je ostatak novca blagajnik vratio?

5. Brojevi koji se podrazumijevaju

Ovi problemi su često povezani s problemima koji sadrže još jedan otežavajući faktor. Problem ne bi mogao predstaviti dovoljno informacija ili jedan od mužnih brojeva za rješavanje problema koji se podrazumijevaju u izrazu, kao što je mjerenje pojma. Pogledajmo primjere.

Razred: 5

***Ani je potrebno mlijeko za kolač kojeg peče za prodaju. Otišla je u trgovinu i kupila jednu litru mlijeka te je iskoristila jednu šalicu mlijeka za kolač. Koliko joj je mlijeka ostalo nakon što je napravila kolač?***

U ovom problemu, učenici mogu usporediti jednu šalicu sa jednom litrom i pretpostaviti da je potrošila cijelo mlijeko. Ovdje učenik mora znati koliko šalica ima u jednoj litri.

Razred: 5

***Na satu biologije učenici trebaju sagraditi vrt za leptire koji ima površinu od $157\frac{1}{2}$ kvadratnih metara. Duljina područja je 5 kilometara. Kolika je širina područja?***

Brojevi koji se podrazumijevaju – savjet za nastavu: Naučite učenike da traže riječi koje se podrazumijevaju. Vježbanjem neka naglase te riječi i neka ih pretvore u odgovarajući kontekst brojeva. Također, neka provjere da li su ti brojevi potrebni u zadatku ili su navedeni kao dodatna informacija.

6. Više koraka

Problem s više koraka su izuzetno teški za učenike. Oni će često izvršiti samo jedan korak ili će izvršiti oba koraka ispravno, ali će njihovi izračuni biti krivi već u prvom koraku koji u konačnici daje netočno rješenje.

Razred: 3

***Goran je ubrao 24 jabuke ujutro i 30 poslijepodne. Njegova baka ima nekoliko vrećica i zamolila ga je da u svaku vrećicu stavi po 6 jabuka. Koliko vrećica Goran može popuniti?***

Nakon što učenik prepoznaje da se radi o problemu s više koraka, mora odrediti koje operacije je potrebno izvršiti. U ovom problemu učenik može prvo zbrojiti sve jabuke pa ih podijeliti u grupe po 6 jabuka ili će podijeliti oba broja u grupe po šest i zbrojiti ta dva količnika. Obje strategije daju isti rezultat.

Razred: 7

***Gospodin Jan kupio je 3 okvira za slike za 64.50 kn. Ako je pojedini okvir koštao 20 kn bez poreza, koliko poreza je platio za 3 okvira?***

7. Točan matematički rječnik


Razred: 7

Četiri razreda skupljala su novac za dobrotvorne svrhe. 7. razred skupio je 320 kn, 8. razred je skupio 180 kn, a 5. razred 165 kn. Kolika je srednja vrijednost prikupljenog novca?

Razred: 8

Koliki je volumen sfere koja ima radijus od 8 metara?

Točan matematički rječnik – savjet za nastavu: Utvrdite uobičajene matematičke pojmove. Često se problemi s riječima koriste za mjerne jedinice i geometrijske pojmove. Primjeri ovog faktora su za opseg, obujam i površina.

1.2 Poučavanje otežavajućih faktora

Svaki otežavajući faktor treba podučavati odvojeno, a učenici trebaju vremena za otkrivanje tih faktora u zadacima. Sljedeći postupak je način na koji to možemo postići.

- Predstaviti otežavajući faktor.
- Dati učenicima nekoliko zadataka s riječima, neke sa otežavajućim faktorima a neke bez njih.
- Postoje dvije opcije uvježbavanja:
  1. Neka učenici pronađu sve zadatke s otežavajućim faktorima koje su naučili i neka naznače dio u zadatku gdje je naveden taj faktor. To im pomaže da usmjeru pozornost na otežavajući faktor a ne nužno na operaciju koju trebaju izračunati.
  2. Neka učenici riješe problem s otežavajućim faktorom samo nakon što utvrde o kojem se faktoru radi.
- Uvesti novi otežavajući faktor nakon što savladaju trenutni faktor.
• Nakon što se svaki novi otežavajući faktor uveže i učenici uvježbaju prepoznati ih u problemu, onda su učenici u mogućnosti da obrade probleme koje sadrže više od jednog otežavajućeg faktora. Kada učenici prepoznaju koji je otežavajući faktor u zadatku, neka ga naznače i ispišu koji je faktor u pitanju.

• Za nastavak vježbanja, kako učenici ulaze u učionicu, dajte im po jedan problem na papiricu koji sadrži otežavajući faktor. Neka učenici označe ili identificiraju o kojem se otežavajućem faktoru radi u problemu i neka riješe problem. Ova vježba je dobra za motivaciju sata.

1.3 Proces rješavanja problema

Kada u nastavi govorimo o rješavanju problema, važno je da ih predstavimo učenicima kao metodu pristupanja svih problema. Za mnoge učenike je najteži dio rješavanja problema pronaći polaznu točku. George Polya (1973) predložio je četiri koraka kako bi pomogli djeci riješiti problem:

1. Razumijevanje problema
2. Stvaranje plana
3. Provodenje osmišljenog plana
4. Osvrt na rješenje

Njegova metoda je sistematski pristup rješavanju problema koji pruža smjernice pomoću kojih se prolazi kroz proces rješavanja mnogih vrsta problema.

1. Razumijevanje problema

Razumijevanje problema uključuje tumačenje značenja problema i na koja pitanja treba odgovoriti da se riješi problem. Učenici trebaju temeljito razumjeti problem kako bi mogli utvrditi koje je pitanje postavljeno kako bi riješili problem te ga ponoviti svojim riječima.

Kako to izgleda u razredu?

• Učenici trebaju pročitati problem pažljivo dok ne shvate što se događa u zadatku i koje su informacije potrebne za rješavanje problema.
• Učenici trebaju naglasiti ili istaknuti nepoznate riječi, a zatim utvrditi značenje tih riječi.
• Učenici trebaju pronaći i odbaciti nepotrebne informacije. Također trebaju otkriti podatke koji nedostaju kako bi riješili problem.
Učenici bi trebali postavljati pitanja kao Što se traži u zadatku? i Koje su informacije bitne za rješavanje problema?

Dozvolite da učenici raspravljaju o problemu s drugim učenicima, jer ponavljanjem problema njihovim riječima je nužno.

Ako učenici imaju poteškoća s čitanjem ili razumijevanjem problema, trebali bi raščlaniti rečenicu po rečenicu.

Smiješno je odgovarati na pitanja na koje ne znate odgovor. To se često događa, u školi i izvan škole ali nastavnici trebaju nastojati spriječiti takve stvari na satu. Učenici trebaju razumjeti problem, i ne samo razumjeti nego i priželjkivati rješenje. Zadatak treba biti pomno odabran, ne pretežak i ne prelagan. Da bude prirodnog i zanimljiv.


Ako postoji slika vezana za zadatak, učenici bi trebali skicirati sliku i istaknuti nepoznate dijelove. Nužno je da uvedu prikladne oznake za sve objekte, posvetivši pažnju na prikladan odabir znaka. Postoji pitanje koje možemo iskoristiti s tim da ne očekujemo točan odgovor nego pogođanje: J e li moguće zadovoljiti uvjet?

2. Stvaranje plana

Stvaranje plana znači da učenik mora odabrati strategiju koja će mu pomoći pri rješavanju problema. U mnogim problemima postoji više od jedne primjenjive strategije. Učenik mora izabrati jednu koja ima smisla za njega te koja će mu pomoći oko rješavanja problema.

Kako to izgleda u razredu?

- Učenici bi trebali napraviti popis mogućih načina rješavanja problema.
- Učenici bi trebali analizirati svoj popis te izabrati jednu strategiju za koju smatraju da će im pomoći riješiti problem vrlo učinkovito.
- Učenici bi trebali raspraviti s drugim učenicima o mogućim načinima rješavanja problema ako imaju problema pri odabiru najbolje strategije.

Plan često imamo kada znamo (ili ako znamo barem skicu) koje računske operacije, računanje ili konstrukciju trebamo koristiti da bi dobili nepoznanicu. Put od razumijevanja problema do stvaranja plana može biti dug i vijugav. Zapravo, glavni
zgoditak rješavanja problema je osmisliti plan. Ideja može rasti postepeno ili može sinuti nakon nekoliko neuspješnih pokušaja. Najbolje što nastavnik može učiniti je nametnuti neku ideju. Štoviše, pitanja i prijedlozi tijekom rasprave mogu nametnuti ideju. Da bi razumjeli učenikovu poziciju, trebalo se prisjetiti kako je nama bilo kada smo rješavali takve probleme.

Znamo da je teško dobiti ideju ako imamo malo znanja o temi, a nemoguće ako nemamo nikakva saznanja. Dobre ideje su bazirane na prijašnjima iskustvima i prije stećena znanja. Čisto prisjećanje nije dovoljno za ideju, ali isto tako ne možemo imati dobru ideju bez prisjećanja nekih relevantnih činjenica. Materijali potrebni za rješavanje matematičkog problema su određene relevantne stavke našeg nekada stećenog znanja iz matematike kao ranije rješeni problemi ili ranije dokazani teoremi. Stoga je često prikladno započeti rad pitanjem: Znate li neki srodan problem?


3. Provodenje osmišljenog plana

Provodenje plana znači da se zapravo riješi problem. Učenicima treba osigurati jasnu uputu o strategiji rješavanja problema koju oni mogu pratiti tijekom rješavanja. Oni trebaju raditi na svakom dijelu problema koristeći strategije koje su odabrali sve dok ne pronađu rješenje zadanog problema.

Kako to izgleda u razredu?

- Učenici bi trebali organizirano zabilježiti svoje korake rješavanja problema tako da mogu vidjeti svoj rad i odlučiti da li strategija koju su odabrali daje potrebne rezultate.
- Ako učenik negdje zapne kod rješavanja, mogu pregledati svoj rad kako bi bili sigurni da nisu napravili bilo kakvu pogrešku prilikom računanja.
- Ako odabrana strategija nije dobra za zadani problem, učenici bi se trebali vratiti na svoj popis strategija i odabrati drugačiji pristup za rješavanje problema.

Smisliti plan i osmislić ideju za rješavanje nije lako. Puno toga treba da bi uspjeli: stečena prijašnja znanja, dobre mentalne navike, koncentraciju i dobru sreću. Provesti plan je puno lakše, ono što trebamo jest samo strpljenje.
Plan nam daje generalnu skicu, mi se trebamo uvjeriti da detalji stanu u našu skicu, te trebamo provjeriti detalje jedan po jedan, strpljivo, dok sve nejasnoće ne razjasnimo. Glavna opasnost je da učenik zaboravi svoj plan što se vrlo lako događa.

Trebamo se uvjeriti u ispravnost koraka u našem rasuđivanju "intuitivno" ili "formalno". Možemo se koncentrirati na točku u pitanju sve dok ne vidimo da nam je sve jasno i razgovjetno te da nemamo sumnje da je korak ispravan. U nekim slučajevima, nastavnik može istaknuti razliku između "vidjeti" i "dokazati": *Da li jasno vidite da je korak ispravan? Da li možete dokazati da je korak ispravan?*

4. **Osvrt na rješenje**

Osvrt na rješenje znači da trebamo ispitiši rješenje dobivene odabranom strategijom rješavanja problema. Ovaj korak u procesu rješavanja problema potiče učenike da razmišljaju o strategijama koje su izabrali te generalizirati problem kako bi bio primjenjiv za buduće probleme.

**Kako to izgleda u razredu?**

- Učenici moraju ponovno pročitati problem i provjeriti da li rješenje zadovoljava uvjete navedene u problemu te odgovoriti na pitanje na odgovarajući način.
- Učenici se sami moraju pitati pitanja kao *Da li moje rješenje ima smisla?* i *Je li moje rješenje logično i razumno?*
- Učenici trebaju ilustrirati ili napisati svoje misaone procese, procjene i pristupe. To će im pomoći da vizualiziraju korake koje su uzeli za rješavanje problema te kod generalizacije svoga rada.
- Trebamo omogućiti učenicima priliku da rasprave s drugim učenicima o rješenjima te kako su došli do njih.
- Učenici trebaju uzeti i obzir kako se može riješiti problem na jednostavniji način.

Kada učenici dobiju rješenje problema i kada ga zapišu, čak i oni dobri učenici spakiraju knjige u torbu i čekaju kraj sata. Ako im dopustite, propuštate bitan i poučan dio posla. Osvrtom na izračunato rješenje možete učvrstiti njihovo znanje i razviti sposobnost rješavanja problema. Dobar nastavnik mora shvatiti i utisknuti učenicima stav da nema problema koji je u potpunosti iscrpljen. Uvijek ostaje nešto za napraviti. S dovoljno znanja i vještine, uvijek možemo unaprijediti svako rješenje, i u svakom slučaju, poboljšati naše razumijevanje rješenja.
2 Strategije rješavanja problemskih zadataka

Problemski zadaci mogu se riješiti primjenom različitih heurističkih strategija. Nastavnici trebaju učenike upoznati s tim specifičnim strategijama koje mogu primijeniti Polyn pristup rješavanja problema. Sljedećih 9 strategija mogu se primjeniti na veliki izbor rješavanja problemskih zadataka:

- Ispisivanje sustavnih listi
- Metoda pokušaja i promašaja
- Rješavanje srodnog jednostavnijeg problema
- Metoda oponašanja i simulacije
- Metoda rješavanja unatrag
- Pronalaženje uzorka
- Logičko zaključivanje
- Crtanje dijagrama
- Promjena fokusa

U narednim podnaslovima pružit ćemo osnovne informacije o svakoj strategiji, postupke za podučavanje svake strategije te modele problema i rješenja za različite uzraste viših razreda osnovne škole.

2.1 Ispisivanje sustavnih listi

2.1.1 Primjena ispisivanja sustavnih listi

Razmotrimo sljedeći problem:

*David i Lea sudjeluju u humanitarnom teniskom turniru. Prvi igrač koji je osvojio ili dvija uzastopna meča ili ukupno tri meča osvaja susret. Na koliko načina se može njihov susret odigrati?*


<table>
<thead>
<tr>
<th>Lea - prvi meč</th>
<th>David - prvi meč</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>LL</td>
<td>DD</td>
</tr>
<tr>
<td>LDD</td>
<td>DLL</td>
</tr>
<tr>
<td>LDLLL</td>
<td>DLDD</td>
</tr>
<tr>
<td>LDDL</td>
<td>DLDLD</td>
</tr>
<tr>
<td>LDDLD</td>
<td>DLDLL</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Dakle, postoji deset mogućih načina na koje se turnir može odigrati.

Učenici ne moraju nužno imati sposobnost učinkovitog organiziranja podataka kao način za rješavanje problema. Velika većina takvih učenika u početku može biti zbunjena ali isto tako mogu biti zbunjena kada se suoče s mnogim drugim problemima u ovom radu. Ne znajući gdje i kako započeti zadatak, prije će se odlučiti na metodu pogađanja nego na organiziranje liste ili tablice. Iako ih to može dovesti do rješenja, nažalost nedostatak sustavnog razmišljanja daje malo sigurnosti. Sposobnost da organiziraju podatke za rješavanje problema je nešto što nastavnici trebaju podučiti učenici uvježbati i naučiti. Ovi problemi trebaju pružiti adekvatnu vježbu. Učenici trebaju znati kako citati tablice, kako prepoznati i interpretirati pravilnost i odnose, te kako izabrati točan odgovor imajući na vidu prirodu rješavanja problema, sve dok je organiziranje podataka odgovarajuća tehnika za točno rješenje.

2.1.2 Primjeri

**Primjer 1.** *(Razred: 6)* Josipa ima 55 blokova koje treba složiti u trokut u izlog trgovine. Ona želi da na vrhu trokuta stoji jedan blok, red ispod njega dva bloka, pa onda tri bloka i tako dalje. Je li moguće napraviti trokut od svih 55 blokova, i ako je tako, koliko redova će trokut imati?
**Rješenje:** Počnimo s vrhom našeg trokuta s jednim blokom te nastavljamo sve dok ne iskoristimo svih 55 blokova. To se najbolje može učiniti kreiranjem tablice za praćenje obrnutog postavljanja blokova.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Broj retka</th>
<th>Broj blokova u retku</th>
<th>Ukupan broj blokova</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>2</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>3</td>
<td>6</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>4</td>
<td>10</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>5</td>
<td>15</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>6</td>
<td>21</td>
</tr>
<tr>
<td>7</td>
<td>7</td>
<td>28</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td>8</td>
<td>36</td>
</tr>
<tr>
<td>9</td>
<td>9</td>
<td>45</td>
</tr>
<tr>
<td>10</td>
<td>10</td>
<td>55</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Iz tablice vidimo da ćemo u desetom retku iskoristiti svih 55 blokova.

**Odgovor:** Moguće je složiti trokut od 55 blokova u 10 redaka.

**Primjer 2. (Razred: 5)** Prosinac je dvanaesti mjesec u godini i ima dva zanimljiva datuma, 12. prosinac i 24. prosinac jer su to višekratnici broja 12. Koliko dana u neprijestupnoj godini su višekratnici od njegovog broja mjeseca?

**Rješenje:** Za traženje datuma koji su višekratnici od njegovog broja mjeseca možemo organizirati popis da bi imali bolji uvid u problem. Kako bi riješili problem, potrebno je navesti mjesec, njegov broj i onda datume koji su višekratnici tog broja.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Mjesec</th>
<th>Redni broj mjeseca</th>
<th>Višekratnici</th>
<th>Ukupan broj višekratnika</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Siječanj</td>
<td>1</td>
<td>svi</td>
<td>31</td>
</tr>
<tr>
<td>Veljača</td>
<td>2</td>
<td>parni datumi</td>
<td>14</td>
</tr>
<tr>
<td>Ožujak</td>
<td>3</td>
<td>3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30</td>
<td>10</td>
</tr>
<tr>
<td>Travanj</td>
<td>4</td>
<td>4, 8, 12, 16, 20, 24, 28</td>
<td>7</td>
</tr>
<tr>
<td>Svibanj</td>
<td>5</td>
<td>5, 10, 15, 20, 25, 30</td>
<td>6</td>
</tr>
<tr>
<td>Lipanj</td>
<td>6</td>
<td>6, 12, 18, 24, 30</td>
<td>5</td>
</tr>
<tr>
<td>Srpanj</td>
<td>7</td>
<td>7, 14, 21, 28</td>
<td>4</td>
</tr>
<tr>
<td>Kolovoz</td>
<td>8</td>
<td>8, 16, 24</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>Rujan</td>
<td>9</td>
<td>9, 18, 27</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>Listopad</td>
<td>10</td>
<td>10, 20, 30</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>Studeni</td>
<td>11</td>
<td>11, 22</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>Prosinac</td>
<td>12</td>
<td>12, 24</td>
<td>2</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Zbrajanjem ukupnog broja višekratnika za svaki mjesec dobit ćemo naš odgovor.

Odgovor: Ima 90 dana koji su višekratnici od svog broja mjeseca.

Primjer 3. (Razred: 4) Sutra je prvi dan škole i Lana bira odjevnu kombinaciju. Ima crne i zelene hlače, 3 bluze (crvenu, šarenu i kariranu) te 2 veste (bež i bijelu). Koliko različitih kombinacija može napraviti ako pri tome koristi jedan par hlača, jednu bluzu i jednu vestu?


<table>
<thead>
<tr>
<th>Hlače</th>
<th>Bluza</th>
<th>Vesta</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Crne</td>
<td>Crvena</td>
<td>Bež</td>
</tr>
<tr>
<td>Crne</td>
<td>Crvena</td>
<td>Bijela</td>
</tr>
<tr>
<td>Crne</td>
<td>Šarena</td>
<td>Bež</td>
</tr>
<tr>
<td>Crne</td>
<td>Šarena</td>
<td>Bijela</td>
</tr>
<tr>
<td>Crne</td>
<td>Karirana</td>
<td>Bež</td>
</tr>
<tr>
<td>Crne</td>
<td>Karirana</td>
<td>Bijela</td>
</tr>
<tr>
<td>Zelene</td>
<td>Crvena</td>
<td>Bež</td>
</tr>
<tr>
<td>Zelene</td>
<td>Crvena</td>
<td>Bijela</td>
</tr>
<tr>
<td>Zelene</td>
<td>Šarena</td>
<td>Bež</td>
</tr>
<tr>
<td>Zelene</td>
<td>Šarena</td>
<td>Bijela</td>
</tr>
<tr>
<td>Zelene</td>
<td>Karirana</td>
<td>Bež</td>
</tr>
<tr>
<td>Zelene</td>
<td>Karirana</td>
<td>Bijela</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Organizirana lista uključuje sve moguće odjevne kombinacije koje Lana može odabrati te nam daje drugačiji princip rješavanja problema iz kojeg učenici mogu imati koristi. Oni iz ove liste mogu vidjeti da postoje tri mogućnosti za odabrati bluzu, a dvije mogućnosti za izabrati vestu. To znači da postoje $3 \times 2 = 6$ mogućih kombinacija za crne hlače. Budući da postoje dvije vrste hlača (crne i zelene), možemo udvostručiti broj kombinacija pa dobijemo 12.

Odgovor: Lana može kombinirati odjeću na 12 mogućih načina.
2.2 Metoda pokušaja i promašaja


2.2.1 Primjena metode pokušaja i promašaja

Razmotrimo sljedeći problem:

Barbara rješava test višestrukog izbora od 20 pitanja. Test je ocjenjen sa +5 ako je odgovor točan a sa −2 u slučaju netočnog odgovora te 0 ako je pitanje izostavljeno. Ona je postigla 44 boda iako je izostavila neka pitanja. Koliko pitanja je Barbara izostavila?

Rješenje: Ovaj problem možemo riješiti algebarski. Neka je

\[ x \text{ = broj pitanja s točnim odgovorom} \]
\[ y \text{ = broj pitanja s netočnim odgovorom} \]
\[ z \text{ = broj izostavljenih pitanja} \]

Zatim, uvjeti zadatka bi dali

\[ x + y + z = 20 \]
\[ 5x - 2y + 0z = 44 \]

Sada imamo dvije jednadžbe s tri nepoznanice. Takav sustav jednadžbi može se riješiti strategijom Diophantove analize. Međutim, ona također ima jednostavno rješenje pomoću metode pokušaja i promašaja. Ispitajmo broj pitanja na koje je Barbara odgovorila točno. Mora ih biti barem 10, jer ako je odgovorila na 9 ispravno, dobila bi \(9 \times 5 = 45\), i oduzimanjem parnog broja, nikada ne bi mogla završiti s 44 bodova.


Sljedeći korak nije od manje važnosti. Zanimljivi matematički problemi su oni u kojima se rješenje ne nadzire lako. Dakle, naše početno pretpostavljeno rješenje često nije među odgovorima. U ovom slučaju, učenici trebaju promijeniti svoj početni pokušaj u odnosu na isti. Na primjer, ako se pretpostavlja da rješenje jednadžbe

$$25 + x = 35$$

zabilježili ove pretpostavke i njihove posljedice, možemo vidjeti da odgovor vjerojatno leži između 8 i 11. Kao što smo već rekli, učenike treba poticati da bi njihova nagađanja i njihove posljedice svrstali u neku organiziranu formu. Takvi zapisi bit će od neprocjenjive vrijednosti za naknadna pogađanja.

2.2.2 Primjeri

**Primjer 4. (Razred: 6)** Otac ima na raspolaganju 1600 kn koje treba podijeliti svojim tima sinovima. Najstariji će dobiti 200 kn više nego srednji sin. Srednji sin dobit će 100 kn više od najmlađeg sina. Koliko je novca dobio svaki sin?

**Rješenje:** Možemo koristiti metodu pokušaja i pogrešaka. Napravimo tablicu kako bi imali pregled svih nagađanja i njihova testiranja.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Broj pogađanja</th>
<th>Najmlađi sin</th>
<th>Srednji sin</th>
<th>Najstariji sin</th>
<th>Ukupno</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>100kn</td>
<td>200kn</td>
<td>400kn</td>
<td>700kn (premalo)</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>200kn</td>
<td>300kn</td>
<td>500kn</td>
<td>1000kn (i dalje premalo)</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>300kn</td>
<td>400kn</td>
<td>600kn</td>
<td>1300kn (i dalje premalo)</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>400kn</td>
<td>500kn</td>
<td>700kn</td>
<td>1600kn (pogodak!)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Dobivamo odgovor iz tablice.

**Odgovor:** Najmlađi sin dobit će 400 kn, srednji 500 kn a najstariji 700 kn.

**Primjer 5. (Razred: 6)** Marija je ispekla 37 muffina za svoj tulum te ih je stavljala u vrećice. Muffine od borovnice je stavljala po 5 u svaku vrećicu, a čokoladne muffine po 3. Koliko je Marija ispekla svake vrste kolača?

**Rješenje:** Organizirat ćemo naša nagađanja u jednu tablicu. Stavit ćemo muffine od borovnice u grupe po 5 te možemo vidjeti koliko ih je ostalo od njih 37.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Borovnica</th>
<th>Ukupno</th>
<th>Čokolada</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>5</td>
<td>37</td>
<td>32 (Ne. 32 nije djeljiv s 3)</td>
</tr>
<tr>
<td>10</td>
<td>37</td>
<td>27 (Da. 27 je djeljiv s 3)</td>
</tr>
<tr>
<td>15</td>
<td>37</td>
<td>22 (Ne. 22 nije djeljiv s 3)</td>
</tr>
<tr>
<td>20</td>
<td>37</td>
<td>17 (Ne. 17 nije djeljiv s 3)</td>
</tr>
<tr>
<td>25</td>
<td>37</td>
<td>12 (Da. 12 je djeljiv s 3)</td>
</tr>
<tr>
<td>30</td>
<td>37</td>
<td>7 (Ne. 7 nije djeljiv s 3)</td>
</tr>
<tr>
<td>35</td>
<td>37</td>
<td>2 (Ne. 2 nije djeljiv s 3)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Tablica nam prikazuje da više nema mogućnosti u kojima dobivamo sumu 37.

**Odgovor:** Moguća su dva odgovora. Ili je ispekla 10 muffina od borovnice i 27 čokoladnih ili je ispekla 25 muffina od borovnice i 12 čokoladnih muffina.
Primjer 6. (Razred: 5) Jedan zološki vrt posjeduje dvije bebe pande. Zovu se Cezar i Donat. Ukupno je 105 posjetioca zološkog vrta glasovalo za svog favorita. Cezar je dobio $2 \frac{1}{2}$ manje glasova nego Donat. Koliko je glasova dobila svaka panda?

Rješenje: Tablica će nam pomoći da imamo pregled svih pogađanja. Počnimo sa 50 glasova za Cezara te ćemo izračunati $2 \frac{1}{2}$ više glasova za Donata.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Cezar</th>
<th>Donat</th>
<th>Ukupno glasova</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>50</td>
<td>125</td>
<td>175 (previše)</td>
</tr>
<tr>
<td>40</td>
<td>100</td>
<td>140 (i dalje previše)</td>
</tr>
<tr>
<td>30</td>
<td>75</td>
<td>105 (Da!)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Odgovor: Cezar je dobio 30 glasova, a Donat 75.

2.3 Rješavanje srodnog jednostavnijeg problema


2.3.1 Primjena metode rješavanja srodnog jednostavnijeg problema

Razmotrimo sljedeći problem:

Djelitelji broja 360 u sumi daju 1170. Koliki je zbroj svih recipročnih djelitelja broja 360?

Rješenje: Najočitije rješenje bi bilo pronaći sve djelitelje broja 360, uzeti njihove recipročne vrijednosti te ih zbrojiti. Djelitelji broja 360 su 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, ..., 120, 180 i 360. Njihove recipročne vrijednosti su $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, ..., $\frac{1}{120}$, $\frac{1}{180}$, $\frac{1}{360}$. Zatim pronađemo njihov zajednički nazivnik (na primjer, 360) te pretvorimo sve razlomke u njihove ekvivalentne razlomke te ih zbrojimo. Nažalost, vrlo je lako napraviti računsku pogrešku kao i eventualno propustiti jedan ili više djelitelja.

Ispitajmo jednostavniji ekvivalentni problem. Nađimo sumu recipročnih vrijednosti djelitelja broja 12 i pogledajmo da li nam to pomaže. Djelitelji broja 12 su 1, 2, 3, 4, 6 i 12. Njihov zbroj je $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. Pronađimo sada zbroj recipročnih vrijednosti ovih faktora:
\[
\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} \quad \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{28}{12}
\]

Dobili smo da je zbroj svih recipročnih vrijednosti djelitelja broja 12 jednak zbroju djeljitelja i da je nazivnik zapravo broj od kojeg smo uzeli sve djelitelje. Sada možemo riješiti naš originalni problem.

Zbroj svih djelitelja broja 360 je 1170. Dakle, zbroj svih recipročnih vrijednosti mora biti \( \frac{1170}{360} \).


2.3.2 Primjeri

**Primjer 7. (Razred: 7)** Vlasnik zoološkog vrtla ima nojeve i slonove u jednom dijelu zoološkog vrtla. Ukupan broj njihovih glava je 60 a nogu 180. Koliko svake vrste životinja ima?

**Rješenje:** Možemo smanjiti složenost problema i raditi s jednostavnijim ali i ekvivalentnim skupom brojeva. Podijelimo sve brojeve sa 10. Pokušajmo riješiti problem s 6 glava i 18 nogu. Ovdje ćemo raditi s manjim brojevima pa ćemo se onda vratiti na izvorni problem.

Nojevi imaju po dvije noge a slonovi po 4. Napravimo crtež u kojem 0 predstavlja glavu.

| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Sada, bilo da je u pitanju slon ili noj, ima najmanje dvije noge. Idemo označiti s “//” dvije noge kod svake glave.

| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| // | // | // | // | // | // |

Ova računica nam daje 12 nogu. Ostatak ide u paru na 3 glave.
Znači, postoje 3 slona i 3 noja. Pomnožimo to sa 10 i pronašli smo odgovor na naš početni problem. (Prisjetimo se da smo podijelili sve brojeve sa 10 da bi radili s jednostavnijim brojevima)

Odgovor: Vlasnik ima 30 nojeva i isto toliko slonova.

Primjer 8. (Razred: 7) Upitali su Mariju kako bi pronašla tri uzastopna parna broja čija je suma 60. Koji su to brojevi?

Rješenje: Koristiti ćemo metodu rješavanja srodnog jednostavnijeg problema. Počet ćemo s najmanjom parnom trojkom brojeva, pa ćemo probati iduću i tako sve dok ne dođemo do nečega što možemo iskoristiti.

\[
\begin{align*}
2 + 4 + 6 &= 12 &\text{Trojka počinje s brojem 2 (što je } 1 \times 2) \\
4 + 6 + 8 &= 18 &\text{Trojka počinje s brojem 4 (što je } 2 \times 2) \\
6 + 8 + 10 &= 24 &\text{Trojka počinje s brojem 6 (što je } 3 \times 2) \\
8 + 10 + 12 &= 30 &\text{Trojka počinje s brojem 8 (što je } 4 \times 2) \\
\end{align*}
\]

Vidimo da se zbroj povećava za 6. Iznos će biti 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 i 60. Mi želimo devetu sumu, tj. kad je zbroj 60. Tri uzastupna parna broja daju sumu koja počinje s 9 × 2 ili 18. Mi ćemo uzeti 18 + 20 + 22 = 60.

Odgovor: Tri uzastopna parna broja čiji je zbroj 60 su 18, 20 i 22.

Napomena za nastavu: Učenici mogu nastaviti dodavati sljedeće tiju uzastopnih brojeva sve dok ne pronađu sve sume i dok ne dođu do zbroja 60. Također, možemo pokazati učenicima da je zbroj tri uzastopna parna broja zapravo tri puta uvećan srednji broj. Stoga, 60/3 = 20 što je srednji broj te dobijamo preostala dva broja 18 + 20 + 22 = 60.

Primjer 9. (Razred: 7) Ako 3 kokoši nesu 4 jaja u 5 dana, koliko će dana trebati 12 kokoši da nesu 48 jaja?

Rješenje: Umjesto da razmotrimo ovaj primjer u cijelosti, možemo ga riješiti kao par jednostavnijih problema. Ako 3 kokoši nesu 4 jaja u 5 dana (tj. 3 kokoši = 4 jaja u 5 dana), onda množenjem broja jaja i kokoši dobijamo: 12 kokoši nesu 16 jaja u isto 5 dana (odnosno 12 kokoši = 16 jaja u 5 dana). Da bismo dobili 48 jaja, moramo pomnožiti 16 jaja s 3. Pomnožimo broj dana i broj jaja s 3 da bi dobili 12 kokoši da nesu 48 jaja u 15 dana.
dana.

**Odgovor:** Bit će potrebno 15 dana da kokoške snesu 48 jaja.

**Napomena za nastavu:** Problem uključuje neke algebarske manipulacije ‘odnosa’. 
3 kokoši = 4 jaja (u 5 dana), pomnožimo obje strane ”jednadžbe” sa 3 i dobijemo 12 kokoši = 16 jaja (u 5 dana). Na sličan način sada imamo 16 jaja = 5 dana, pomnožimo obje strane ”jednadžbe” sa 3 i dobijemo 48 jaja = 15 dana.

### 2.4 Metoda oponašanja i simulacije


#### 2.4.1 Primjena metode oponašanja i simulacije

Problem procjene broja π kao omjer opsega kružnice i njegovog promjera se često razmatra u višim razredima osnovne škole. Jedno od rješenja je mjerenje opsega i promjera kruga, a zatim izračunati približnu vrijednost za π. Takva aproksimacija je, naravno, ograničena na preciznost instrumenata za mjerenje. Međutim, u teoriji pomoću simulacije možemo izračunati π za proizvoljan stupanj točnosti.

Promotrimo krug radijusa 1. (Slika 1)

![Slika 1: Krug radijusa 1](image)
Površina kruga ($\pi r^2$) prikazanog na slici je $\pi$ (imajte na umu da su površine izražene u centimetrima kvadratnim). Osjenčano područje (četvrtina kruga unutar kvadrata) ima površinu $\pi \cdot \frac{1}{4}$. Dakle, omjer površine osjenčanog dijela kruga i površine kvadrata je $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Ovo možemo zapisati u obliku:

$$
\pi = 4 \cdot \frac{\text{Površina osjenčanog dijela}}{\text{Površina kvadrata}}
$$

Da bi procijenili te površine, a time i taj omjer, možemo izračunati površinu pomoću milimetarskog papira. Učenici mogu procijeniti površinu osjenčanog dijela i usporediti ga sa površinom kvadrata. Točnost će ovisiti o veličini kruga u odnosu na veličinu malih kvadrata na milimetarskom papiru.

Učenici mogu koristiti i softiciraniji pristup, tj. realizaciju točke $(x, y)$ na krugu radijusa jedan. Dobivamo $x^2 + y^2 = 1$. Sve točke unutar kruga zadovoljavaju uvjet $x^2 + y^2 < 1$. Ako uzmemo relativno mali broj slučajno odabranih točaka $(x, y)$ od kojih je svaki manji od 1 kako bi bili sigurni da su i dalje u kvadratu, onda nam $x^2 + y^2$ govori da li je točka unutar ili izvan četvrtine kruga. U donjoj tablici su tri vrijednosti $x^2 + y^2$ naznačene sa zvjezdicom te se one nalaze izvan kruga, ostavljajući tako 17 točaka unutar kruga. Iz ovog malog skupa od 20 nasumično odabranih točaka možemo aproksimirati broj $\pi \approx \frac{4 \times 17}{20} = 3.4$.

Ovakva aproksimacija broja $\pi$ temelji se na relativno malom uzorku točaka, ali to će omogućiti učenicima da simuliraju postupak koji može dati solidan uvid u matematički koncept.

<table>
<thead>
<tr>
<th>$(x, y)$</th>
<th>$x^2 + y^2$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>(0.75, 0.64)</td>
<td>0.9721</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.24, 0.05)</td>
<td>0.0601</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.63, 0.18)</td>
<td>0.4293</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.38, 0.81)</td>
<td>0.8005</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.25, 0.59)</td>
<td>0.4106</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.12, 0.28)</td>
<td>0.0928</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.36, 0.59)</td>
<td>0.4777</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.91, 0.72)</td>
<td>1.34650*</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.86, 0.04)</td>
<td>0.7412</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.01, 0.05)</td>
<td>0.0026</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.26, 0.95)</td>
<td>0.9701</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.45, 0.27)</td>
<td>0.2754</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.74, 0.07)</td>
<td>0.5525</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.77, 0.99)</td>
<td>1.57300*</td>
</tr>
<tr>
<td>(0.45, 0.65)</td>
<td>0.6250</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Ova strategija simulacije je srodna onome što u stvarnom svijetu označavamo kao rješavanje problema. Učenici potiču razvijanje matematičkih vještina za rješavanje problema u kontekstu situacije koje smatraju poznatim. Međutim, takvu povezanost ne možemo uzeti zdravo za gotovo kao što i učenici izražavaju drugačija iskustva u učionicu. Prema tome, to je nedostatak za sve probleme u stvarnom životu za što je potrebno vremena da se nauči. Problemi u ovoj strategiji su odabrani tako da često postoji nekoliko jednakih valjanih i učinkovitih rješenja. Učenike bi trebali poticati da međusobno podijele i rasprave o rješenjima. Trebali bi ostvariti komunikaciju s individualnim ili grupnim izlaganjima. U svakom slučaju, kao što smo već i rekli, treba potaknuti kreativnost i eleganciju, a istodobno zahtijevati da učenici sustavno pristupe problemu. To nisu problemi koji se rješavaju teškim aritmetičkim izračunom, nego kroz ostvarivanjem dobrog plana i odabirom učinkovite strategije.

2.4.2 Primjeri

**Primjer 10. (Razred: 7)** Uzmimo LEGO kockice za ovaj problem. Kockice predstavljaju automobile u trajektu. Svaka kockica (automobil) ima onoliko broj ljudi koliko je i njezina dužina. Dakle:

\[\begin{array}{l}
1 = \text{Bijela kockica} \\
2 = \text{Crvena} \\
3 = \text{Zelena} \\
4 = \text{Plava} \\
5 = \text{Žuta}
\end{array}\]

Imate jednu kockicu svake boje i dužine. Prikazite kako možete izgraditi trajekt dužine od 1 do 15.

**Rješenje:** Neki se trajekti mogu napraviti na više načina. Prikazani su samo neki.

\[\begin{array}{ccc}
1 = B & 6 = B + Ž ili C + P & 11 = Ž + P + C \\
2 = C & 7 = P + Z ili Ž + C & 12 = Ž + P + Z \\
3 = Z & 8 = Ž + Z ili P + Z + B & 13 = Ž + P + Z + B \\
4 = P & 9 = Ž + P & 14 = Ž + P + Z + C \\
5 = Ž & 10 = Ž + P + B & 15 = Ž + P + Z + C + B
\end{array}\]

Učenike bi trebali poticati kako bi pronašli alternativne načine za zastupanje različitih dužina. One učenike koji su pronašli ovaj jednostavan način možemo upitati na koliko se
načina svaki od tih duljina može prikazati.

Odgovor: Prikazano u tablici.

**Primjer 11. (Razred: 5) **Markova majka kući je donijela list od 24 poštanskih markica (Slika 2). Marku su potrebne tri markice, pa je otkinuo tri povezane markice. Koliko je mogućih različitih skupova oblika od tri povezane markice?

![Slika 2: List od 24 markice](image2)

**Rješenje:** Učenike treba potaknuti da uzmu 3 pločice oblika kvadrata da bi simulirali problem te da vide koliko različitih oblika mogu dobiti od 3 povezane markice (Slika 3).

![Slika 3: Različiti oblici napravljeni od 3 markice](image3)
Odgovor: Postoje 6 različitih skupova od 3 markice koje Marko može otkinuti.

Napomena za nastavu: Upitajte učenike kako znaju da su napravili sve moguće razmještaje od 3 markice. Trebali bi vidjeti da su razmjestili kvadrate na sve moguće načine.

Primjer 12. (Razred: 6) Darko ima tri hrpe blokova s brojevima kao što je prikazano na Slici 4. On tvrdi da može složiti brojeve tako da suma po blokovima bude jednaka, pomicanjem samo jednog bloka. Kako Darko to može učiniti?

\[
\begin{array}{ccc}
3 & 6 & 9 \\
2 & 5 & 8 \\
1 & 4 & 7 \\
\end{array}
\]

Slika 4: Tri hrpe blokova s brojevima


Odgovor: Darko će pomaknuti blok s brojem 9 iz trećeg stupca u prvi da bi dobio u svakom stupcu zbroj 15.
2.5 Metoda rješavanja unatrag


Iako se postupak može činiti neprirodan, često se koristi u svakodnevnom donošenju odluka. Na primjer, pronalaženje najboljeg puta do nepoznatog odredišta na karti. Prvo što pokušamo je pronaći odredište točke, a zatim se postupno vraćati unatrag kroz mrežu prometnice sve dok ne dođemo do poznatog okruženja. Međutim, kada je riječ o matematičkoj primjeni ove tehnike, moramo potaknuti učenike da ovu metodu svrstaju u svoje načine rješavanja problema.

2.5.1 Primjena metode rješavanja unatrag

Promotrimo sljedeći problem:


**Rješenje:** Možda ste počeli ovaj problem rješavati postavljanjem sustava s tri jednadžbe i tri nepoznanice. Može li se to učiniti? Naravno da može. Međutim, kako naš problem zahtijeva puno oduzimanja i pojednostavljanja izraza u zagradi, konačni skup jednadžbi može biti netočan. Čak i ako se dobije točan skup jednadžbi, moraju se riješiti istovremeno:

<table>
<thead>
<tr>
<th>Runda</th>
<th>Eva</th>
<th>Hrvoje</th>
<th>Antonio</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Početak</td>
<td>$x$</td>
<td>$y$</td>
<td>$z$</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>$x - y - z$</td>
<td>$2y$</td>
<td>$2z$</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>$2x - 2y - 2z$</td>
<td>$3y - x - z$</td>
<td>$4z$</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>$4x - 4y - 4z$</td>
<td>$6y - 2x - 2z$</td>
<td>$7z - x - y$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

To nas dovodi do sljedećeg sustava jednadžbi:

\[
4x - 4y - 4z = 24
\]
\[
-2x + 6y - 2z = 24
\]
Rješavanje ovog sustava nam daje \( x = 39, \ y = 21 \) i \( z = 12 \). Znači, Eva je na početku imala 39 kn, Hrvoje 21 kn, dok je Antonio imao 21 kn.

Kada problem navodi svoju situaciju na kraju priče (“Svaki od njih je imao 24 kn”) i kada se pitamo za početnu situaciju (“Koliko je svatko od njih imao novca na početku igre?”) tada sigurno znamo da se radi o metodi rješavanja unatrag.

Pogledajmo kako bi olakšali ovaj postupak. Počinjemo s kraja, tj. kada je svatko od njih imao 24 kn:

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>Eva</th>
<th>Hrvoje</th>
<th>Antonio</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Kraj treće runde</td>
<td>24</td>
<td>24</td>
<td>24</td>
</tr>
<tr>
<td>Kraj druge runde</td>
<td>12</td>
<td>12</td>
<td>48</td>
</tr>
<tr>
<td>Kraj prve runde</td>
<td>6</td>
<td>42</td>
<td>24</td>
</tr>
<tr>
<td>Početak</td>
<td>39</td>
<td>21</td>
<td>12</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Kraj druge runde:** Zbog toga što je Antonio izgubio u trećoj rundi, Eva i Hrvoje udvostručuju ono što su imali u drugoj rundi. Pa tako na kraju druge runde Eva i Hrvoje imaju po 12 kn dok je Antonio imao 48 kn= 24 kn+12 kn+12 kn.

**Kraj prve runde:** Zbog toga što je Hrvoje izgubio u drugoj rundi, Eva i Antonio udvostručuju ono što su imali u prvoj rundi. Pa tako je na kraju prve runde Eva imala 6 kn, Antonio 24 kn, dok je Hrvoje imao 12 kn+6 kn+24 kn= 42 kn.

**Početak:** Zbog toga što Eva gubi u prvoj rundi, Hrvoje i Antonio udvostručuju ono što su imali na početku. Dakle, na početku, Hrvoje je imao 21 kn, Antonio 12 kn dok je Eva imala 6 kn+21 kn+12 kn= 39 kn.

Dobili smo ista rješenja kao što smo postigli s algebarskim načinom rješavanja.


Takva rasprava može uključiti sva naučena znanja računanja zadataka. Kao i uvijek, učenici bi trebali biti potaknuti da razgrađuju svoje matematičke napore te tražiti elegantna i efikasna rješenja.
2.5.2 Primjeri

Primjer 13. (Razred: 5) Ivana, Jelena, Karlo i Leon skupljaju poštanske markice te su se prošli tjedan mijenjali. Nakon toga je Ivana imala 28 markica. Svojih 10 markica je dala Jeleni, a Jelena je dobila još 12 markica od Karla i 7 od Leona. Koliko je markica Ivana imala na početku?

**Rješenje:** Budući da znamo s koliko je markica Ivana završila (krajnje stanje) možemo doznati koliko je imala markica na početku (početno stanje) korištenjem metode rješavanja unatrag.

Ivana na kraju ima 28 markica. Imala je 28 markica.
Dobila je 7 od Leona. Prije toga je morala imati 21 markicu.
Jeleni je dala 10 markica. Na početku je morala imati 19 markica.

**Odgovor:** Ivana je na početku imala 19 poštanskih markica.


**Rješenje:** Riješimo ovaj zadatak polazeći od posljednjeg podatka. Najmlađa je kćer uzela iz košarice trećinu šljiva i preostalo ih je 8. To znači da je tih 8 šljiva jednako dvijama trećinama šljiva koje su bile u košarici prije nego što je šljive uzela najmlađa kćer. Odatle lako izračunamo da trećina šljiva iznosi 4, tj. da je u košarici bilo $3 \times 4 = 12$ šljiva prije nego je najmlađa kćer uzela svoj dio.

Srednja kćer pojela je trećinu šljiva iz košarice u kojoj je nakon toga preostalo 12 šljiva. Dakle, srednja kćer je u košarici zatekla $3 \cdot \frac{12}{2} = 18$ šljiva.

Na sličan način promotrimo konačno i događaj koji se dogodio prvi. Najstarija je kćer pojela trećinu šljiva iz košarice u kojoj je potom preostalo 18 šljiva. To znači da 18 šljiva odgovara dvijama trećinama ukupnoga broja šljiva, tj. majka je pripremila košaricu s $3 \cdot \frac{18}{2} = 27$ šljiva.

Kada učenik u višim razredima osnovne škole savlada tehniku rješavanja jednadžbi, ovaj zadatak može riješiti i algebarski:

Označimo s $x$ ukupan broj šljiva koje je majka ostavila u košarici. Tada je najstarija kćer pojela $\frac{1}{3}x$ šljiva, a u košarici je ostalo $\frac{2}{3}x$ šljiva. Srednja kćer pojela je trećinu preostalih
šljiva, tj. \( \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} x = \frac{2}{9} x \) šljiva. U košarici je ostalo \( \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} x = \frac{4}{27} x \) šljiva. Najmlađa kći pojela je trećinu preostalih šljiva, tj. \( \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27} x = \frac{4}{27} x \) šljiva, a ostalo je \( \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{27} x = \frac{8}{27} x \) šljiva. Prema uvjetu zadatka postavljamo jednadžbu:

\[
\frac{8}{27} x = 8
\]

Rješenje te jednadžbe je \( x = 27 \). Dakle, majka je u košarici ostavila 27 šljiva, tj. dobili smo isto rješenje kao što smo dobili rješavanjem metodom unatrag.

**Odgovor:** Majka je u košarici ostavila 27 šljiva.

**Primjer 15. (Razred: 6) Radijski voditelj planira svoj subotni program. U sat vremena, mora odvojiti 5 minuta za vijesti, 4 minute za vrijeme, 3 minute za lokalne najave te 27 minuta za reklame. Ako svaka pjesma u prosjeku svira 3 minute, koliko pjesama on može pustiti u svom subotnjem programu?**

**Rješenje:** Budući da znamo kraj problema (jedan sat) da bismo pronašli prijašnje informacije moramo koristiti metodu unatrag.

<table>
<thead>
<tr>
<th></th>
<th>Ukupno vrijeme</th>
<th>Vijesti</th>
<th>Vrijeme</th>
<th>Lokalne najave</th>
<th>Reklame</th>
<th>Pjesme</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Minuta</td>
<td>60 minuta</td>
<td>−5 minuta</td>
<td>−4 minute</td>
<td>−3 minute</td>
<td>−27 minuta</td>
<td>21 minuta</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Zbog toga što svaka pjesma u prosjeku svira 3 minute, on može pustiti \( 21 \div 3 = 7 \) pjesama.

**Odgovor:** Radijski voditelj može pustiti 7 pjesama u jednome satu.
2.6 Pronalaženje uzorka


2.6.1 Primjena pronalaženja uzorka

Promotrimo sljedeći problem:

Imamo stroj koji radi samo na dane brojeve. Dakle, ako smo unijeli broj 3, stroj može raditi samo s brojem 3. Stroj koristi četiri temeljne operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) ili same ili u kombinaciji. Evo prvih šest izlaza za ulaze $x = 1$ do 6:

<table>
<thead>
<tr>
<th>Ulaz</th>
<th>Izlaz</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>9</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>29</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>67</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>129</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>221</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Kolika je vrijednost za ulaz $x = 9$?

Rješenje: Možda bi započeli riješiti ovaj problem s pogađanjem pravila po kojem stroj radi. To je vrlo težak i dugotrajno posao. Međutim, problem se može riješiti pomoću strategije pronalaska uzorka zajedno s nekim obrazloženjem kako bi se utvrdilo što stroj zapravo radi kada mi unesemo neki broj. Njegov izlaz se čini da je blizu kubnog unesenog broja. Imamo:
<table>
<thead>
<tr>
<th>Ulaz</th>
<th>Izlaz</th>
<th>$x^3$</th>
<th>Razlika (od $x^3$)</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>9</td>
<td>8</td>
<td>+1 ili (2−1)</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>29</td>
<td>27</td>
<td>+2 ili (3−1)</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>67</td>
<td>64</td>
<td>+3 ili (4−1)</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>129</td>
<td>125</td>
<td>+4 ili (5−1)</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>221</td>
<td>216</td>
<td>+5 ili (6−1)</td>
</tr>
<tr>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
<td>$\cdot$</td>
</tr>
<tr>
<td>$x$</td>
<td>$x^3$</td>
<td>+($x-1$)</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

Međutim, budući da naš izlaz može sadržavati samo broj ulaza, moramo izraziti $x^3$ kao $x \cdot x \cdot x$, te $(x-1)$ kao $(x - \frac{x}{2})$. Dakle, naše izlazno pravilo za neki ulaz $x$ mora biti $x \cdot x \cdot x + (x - \frac{x}{2})$, pa rješenje našeg problema iznosi $9 \cdot 9 \cdot 9 + (9 - \frac{9}{2}) = 9^3 + 8 = 729 + 8 = 737$.

Kako bi se učinkovito iskoristili geometrijski i brojčani uzorci u rješavanju problema, učenici moraju:

1. Razumjeti svrhu i kontekst uzorka. **Primjer:** U navedenom problemu, treba razumjeti da tražimo uzorak koji opisuje matematički odnos između ulaza i izlaza.

2. Utvrditi ponavljajuće elemente u uzorku. **Primjer:** U navedenom problemu, treba primijetiti da su izlazne vrijednosti blizu kubne vrijednosti ulaza.

3. Proširiti uočeni uzorak. **Primjer:** U navedenom problemu, pretpostaviti da ulaz $x$ daje izlaz $x^3 + (x-1)$.


2.6.2 Primjeri

**Primjer 16. (Razred: 7,8)** Pronađite sljedeća sva člana sljedećeg niza 5, 11, 23, 47, ... 

**Rješenje:** Uzorak za svaki sljedeći član u nizu je dvostruki prethodni s dodatkom broja 1.
5 = 5
2(5) + 1 = 10 + 1 = 11
2(11) + 1 = 22 + 1 = 23
2(23) + 1 = 46 + 1 = 47
2(47) + 1 = 94 + 1 = 95
2(95) + 1 = 190 + 1 = 191

(Algebarski, uzorak nam je formula 2n + 1, gdje je n prethodni član.)


Zapamtite, mnogi problemi u matematici imaju više od jednog rješenja. Dobro je da pružimo učenicima alternativna rješenja jer na taj način učenici povećavaju svoju tečnost u rješavanju problema.

**Primjer 17. (Razred: 5) Gospodin Marko dizajnira kvadratne bazene. Svaki bazen ima kvadratni centar što predstavlja površinu vode. On koristi sive pločice da prikaze vodu. Oko kvadratnog bazena podstavlja granicu sa bijelim pločicama. Slika 5 prikazuje tri najmanja bazena koje on može dizajnirati:**

![Slika 5: Prikaz tri najmanje dizajniranih bazena](image)

---

**Koliko će biti bijelih pločica ako imamo 25 sivih pločica u bazenu?**

**Rješenje:** Idemo organizirati podatke da vidimo da li će se pojaviti uzorak.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Bazen</th>
<th>Sive pločice</th>
<th>Bijele pločice</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>1</td>
<td>1 × 1 = 1</td>
<td>8</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>2 × 2 = 4</td>
<td>12</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>3 × 3 = 9</td>
<td>16</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Vidimo da svaki puta kada se broj sivih pločica povećava na sljedeći kvadrat, broj bijelih pločica se povećava za 4. Nastavimo tablicu.

34
To nas dovodi do rješenja.
Neki učenici mogu primjetiti da je broj bijelih pločica isti kao površina kvadrata od sivih pločica u zbroju sa 4 pločice za svaki kut.

**Odgovor:** Postoje 24 bijelih pločica oko bazena sa 25 sivih pločica.


![Slika 6: Prva četiri kvadrata Davidovog dizajna](image)


\[
1 = 1 \\
1 + 3 = 4 \\
1 + 3 + 5 = 9 \\
1 + 3 + 5 + 7 = 16 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
\]

Primijetimo kako su svi iznosi zapravo kvadrati brojeva.

\[
1 = 1 = 1^2 \\
1 + 3 = 4 = 2^2 \\
1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \\
1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2
\]
Koristeći ovaj uzorak, zbroj svih 50 koncentričnih kvadrata bit će $50^2$, odnosno 2500. Sada to pomnožimo sa 4 da bi dobili površinu te dolazimo do 10000 centimetara vune.

Također možemo riješiti ovaj problem s drugog gledišta, tj. pomoću drugačijeg uzorka (ili ako želite, organiziranjem podataka). Moramo izračunati zbroj $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99$. Umjesto dodavanja brojeva u redoslijedu kako su ovdje napisani, uzmimo u obzir parcijalne sume: $1 + 99 = 100$, $3 + 97 = 100$, $5 + 95 = 100$, $\ldots$, $49 + 51 = 100$. Ukupan iznos ovih zbrojeva je $25 \times 100 = 2500$. Kao i prije, moramo ovaj izraz pomnožiti sa 4 da bismo dobili 10000.

Odgovor: Davidu će trebati 10000 centimetara vune da naznači svih 50 kvadrata.

2.7 Logičko zaključivanje

Iako rješavanje bilo kojeg problema zahtijeva logičko zaključivanje, nekim problemima je ovo primarna strategija za rješavanje. To može biti u rasponu od jednostavne logike do problema koji se sastoje od logičkog lanca zaključivanja. Jedan zaključak dovodi do drugog. Logički proces nastavlja se sve dok se problem ne riješi.

2.7.1 Primjena logičkog zaključivanja

Promotrimo sljedeći problem:

Rebeka, Sara, Tin, Una, Vesna i Dino idu na večeru da proslave to što su Vesna i Dino maturirali. Obrok svake osobe koštao je jednako. Vesni i Dini će društvo platiti obroke ali svatko od slavljenika mora dati doprinos u cijeni jela drugog slavljenika. Koliko je svaki od njih platio ako je ukupan račun bio 108,00 kn?

Rješenje: Jedan od prvih načina za rješiti ovaj problem bi bio algebarski.

$108 \div 6 = 18$ kn za jedan obrok

Neka $2x$ predstavlja količinu koju je svatko dao za Vesnu i Dina. Tada je

Rebeka je platila $18 + 2x$
Sara je platila $18 + 2x$
Tin je platio $18 + 2x$
Una je platila $18 + 2x$
Vesna je platila $x$
Dino je platio $x$
Dakle,

\[72 \text{ kn} + 10x = 108 \text{ kn}\]
\[10x = 36 \text{ kn}\]
\[x = 3.60 \text{ kn}\]

Vesna i Dino su svoje obroke platili 3.60 kn dok su svi drugi platili 18 kn + 2 × 3.60 kn = 25.20 kn.

Pokušajmo riješiti ovaj problem koristeći logičko zaključivanje. Znamo da je Vesna platila 1/5 Dininog obroka ili 1/5 od 18 kn je 3.60 kn. Istovremeno, Dino plaća 1/5 Vesninog obroka ili 3.60 kn, ukupno 7.20 kn. Ako oduzmemo 7.20 kn od ukupnog iznosa 108 kn, dobit ćemo još 100.80 kn koje trebamo podijeliti na preostale četiri osobe. Dijeljenjem 100.80 kn sa 4 dobivamo 25.20 kn po osobi tj. iznos koji su Rebeka, Sara, Tin i Una platili. Vesna i Dino su platili po 3.60 kn.

Problemi koji uključuju logičko zaključivanje često uključuju znatnu količinu podataka koje se na prvi pogled čine zbunjujućima. Strategija rješenja, kao što je već rečeno, je izvući logičke zaključke iz danih podataka, tj. da iskoristimo zaključak. Međutim, to zahtijeva da učenici nauču razumno i sustavno organizirati podatke. Ovo uključuje učenje kako analizirati tragove, na primjer, kako koristiti proces eliminacije, popise, Vennove dijagrame ili tablice.

Također je važno da učenici u razredu raspravljaju o svojim misljenjima. Kada od učenika tražimo da riješe problem s logičkim zaključivanjem, to nije samo skakanje s jednog pojma na drugi, ono često zahtijeva čitanje između redaka. Na primjer, u našem problemu ne piše da je Vesna platila 1/5 Dininog obroka. Za većinu učenika će ovo biti novo iskustvo te će morati raspraviti i istražiti niz problema da bi stekli učinkovitost i eleganciju koja logičko zaključivanje dovodi do rješavanja problema.

2.7.2 Primjeri

**Primjer 19. (Razred: 7)** Odredite vrijednosti za A, B, C i D ako su oni svi pozitivni cijeli brojevi te vrijedi

\[A \times B = 24\]
\[A + B = 14\]
\[C \times D = 48\]
\[A \times D = 192\]
\[B \times C = 6\]

**Rješenje:** Iskoristit ćemo logičko zaključivanje zajedno sa znanjem aritmetike. Zbog toga što je \(A \times B = 24\), možemo ispitati faktore broja 24. A i B mogu biti samo 1 i 24, 2

Strategija logičkog zaključivanja mora biti korištena od strane učenika u načinu otvorenog razmišljanja, i sve dok učenici mogu opravdati svoje korake logično, ovi koraci bi trebali biti prihvaćeni. To može biti lijepa grupna aktivnost.

**Odgovor:** \( A = 12, B = 2, C = 3 i D = 16. \)

**Primjer 20. (Razred: 7)** Nacrtaj dvije ravne linije kroz lice sata (Slika 7) tako da zbroj brojeva u svakom odjeljku bude jednak.

![Slika 7: Lice sata](image)

**Rješenje:** Malo logičkog zaključivanja može pomoći. Ako nacrtamo dvije linije koje se sijeku da dobijemo četiri dijela, dobit ćemo grupiranje malih brojeva međusobno odnosno velikih brojeva međusobno. To će biti neuravnoteženo odmah na početku.

Idemo ispitati problem logično. Ako zbrojimo svih 12 brojeva na satu, dobivamo \( 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78 \). Zbog toga što zbroj unutar svakog dijela mora biti isti, podijelimo taj broj s 3, \( 78 \div 3 = 26 \). To čini posao lakšim. Odgovor je prikazan na **Slici 8**.

![Slika 8: Podjela sata u tri dijela](image)
Odgovor: Zbroj jednog dijela sata iznosi 11 + 12 + 1 + 2 = 26, zbroj drugog dijela 10 + 9 + 3 + 4 = 26 te zbroj zadnjeg 8 + 7 + 6 + 5 = 26.

Primjer 21. (Razred: 5) Na dnu jezera nalaze se šalica, staklenka, cipela i stara guma. Riba, žaba, rak i zmija se nalaze u okolini tog smeća. Zmija uđe u staklenku i zaspi. Rak se uvukao u cipelu a riba ne želi biti u blizini gume. U koji predmet je ošla svaka životinja?

Rješenje: Napravimo tablicu i popunimo tragove. Zapamtimo da "Da" u bilo kojem stupcu znači "X" ili "ne" na svim drugim stavkama u tom stupcu (gore i prema dolje) i redu (horizontalno). Dakle, prvi trag nam govori da je zmija ušla u staklenku. To znači "Da" u tom elementu tablice. Također znači da nitko drugi ne može biti u staklenci i da zmija ne može biti u nekom drugom predmetu. Dalje idemo na sličan način, pomoću tragova, jedan po jedan.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Šalica</th>
<th>Staklenka</th>
<th>Cipela</th>
<th>Guma</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Riba</td>
<td>Da</td>
<td>X</td>
<td>X</td>
</tr>
<tr>
<td>Žaba</td>
<td>X</td>
<td>X</td>
<td>Da</td>
</tr>
<tr>
<td>Rak</td>
<td>X</td>
<td>X</td>
<td>X</td>
</tr>
<tr>
<td>Zmija</td>
<td>X</td>
<td>Da</td>
<td>X</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Tablica nam govori gdje se koja životinja sakrila.

Odgovor: Riba je otišla u šalicu, žaba je u gumi, rak se nalazi u cipeli a zmija u staklenci.

2.8 Crtanje dijagrama


2.8.1 Primjena metode crtanja dijagrama

Pogledajmo sljedeći problem:

Ana drži četiri karte u ruci: asa, pik, asa srce, asa tref i asa karo. Ivan vuče dvije karte iz Anine ruke bez gledanja. Kolika je vjerojatnost da je Ivan izvukao barem jednog crnog asa?
Napomena: Pik i karo su crne karte.

Rješenje: Možemo pretpostaviti da je vjerojatnost $\frac{2}{4}$, tj. $\frac{1}{2}$. Međutim, ako ćemo napraviti skicu mogućih ishoda, vidjet ćemo da ovo nije točno. (Slika 9.)

![Prvi izbor - Drugi izbor]

Prvi izbor
- As pik
  - As srce*
  - As karo*
  - As tref*
  - As pik*

As srce
- As karo
  - As tref*
  - As pik*

As karo
- As srce
  - As tref*
  - As pik*

As tref
- As srce*
  - As karo*

Slika 9: Sve moguće kombinacije izvlačenja karata, gdje * predstavlja uspješnu kombinaciju

Naša skica nam otkriva da postoji 12 mogućih ishoda, od kojih su 10 uspješni (barem jedan as je crni). Točan odgovor je $\frac{10}{12}$ ili $\frac{5}{6}$, što je drugačije od pretpostavke $\frac{1}{2}$. Izrada pažljive skice problema brzo otkriva točan odgovor.

Kao što smo rekli, snaga u skici leži u tome kako organizira i pojašnjava podatke. Pравilno napravljena skica pruža smisleno objašnjenje strukture problema. Nekim učenicima u početku neće biti lako napraviti takve skice. U raspravi s učenicima treba ilustrirati kako se dijagrami i skice mogu učinkovito koristiti za praćenje svih mogućih dođagaja i rezultata. Takva rasprava će podržati eksperimentiranje i istraživanje učenika da pronadju vještinu u korištenju ove strategije.

2.8.2 Primjeri

Primjer 22. (Razred: 5) Puž se penje po stupu visokom 10 metara. Danju se popne 3 metra a noću se spusti 2 metra. Koliko mu dana treba da se popne na vrh stupa?

Rješenje: Pogledajmo skicu stupa (Slika 10) te pažljivo obilježimo položaj puža na kraju svake noći. Na kraju svakog dana, puž će napredovati za 1 metar. Dakle, na kraju prvih 7 dana, popet će se za 7 metara. Osim dan ujutro će se ponovno penjati za 3 metra i tada će biti na vrhu stupa. Stoga, potrebno mu je $7\frac{1}{2}$ dana da se popne na vrh stupa.
Slika 10: Stup po kojem se puž penje

Odgovor: Puž će se popeti na vrh stupa osmi dan.

Primjer 23. (Razred: 8) Jednoga dana 5 je učenika požurilo u red za ručak. Josip je bio ispred Katarine a iza Lore. Lora je bila ispred Sare i iza Nikole. Sara je bila ispred Josipa. Tko je bio zadnji u redu a tko prvi?

Rješenje: Skicirat ćemo si dijagram od situacije kako je opisano pa si tako možemo vizualizirati raspored učenika. Poredat ćemo imena u određene pozicije prema uvjetima navedenim u problemu. Problem će se onda riješiti kako postavljamo učenike na odgovarajuće položaje. Ovdje možemo vidjeti kako je skiciranje dijagrama korisna strategija.

<table>
<thead>
<tr>
<th>Prednji dio reda</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Nikola</td>
</tr>
<tr>
<td>Lora</td>
</tr>
<tr>
<td>Sara</td>
</tr>
<tr>
<td>Josip</td>
</tr>
<tr>
<td>Katarina</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Imamo informaciju da je Josip ispred Katarine a iza Lore pa ćemo to zabilježiti u stupac. Znamo da je Lora ispred Sare i iza Nikole, te ih ubacujemo u stupac kako je navedeno. Postupno gledajući na tekst zadatka smo došli do rješenja našeg problema.

Odgovor: Katarina se nalazila na kraju reda a Nikola na početku.

Primjer 24. (Razred: 8) Izložba vozila na auto sajmu sastoji se od motocikala, kombija i automobila. Ukupno ima 18 vozila i 60 kotača. Ako postoji četiri automobila više od kombija, koliko je svaki od njih izložen na sajmu?

Rješenje: Skicirajmo prvo 18 vozila. (Slika 11)
Svako vozilo mora imati barem 2 kotača, stoga dodajmo na svako vozilo dva kotača. (Slika 12)


Skica nam sada pokazuje da postoji 12 vozila sa 4 kotača i 6 na dva kotača. Vozila sa
dva kotača su motocikli. Zbog toga što postoji 4 automobila više od kombija, izloženi su 8 automobila i 4 kombija.

Odgovor: Izložena su 6 motocikla, 8 automobila i 4 kombija.

2.9 Promjena fokusa


2.9.1 Primjena metode promjene fokusa

Promotrimo sljedeći problem:

\[3.1416 \times 2.7831 + 3.1415 \times 12.27 - 5.0531 \times 3.1416\]

Rješenje: Najčešća i najočitija metoda za rješavanje ovog problema je pronaći tri odvojena umnoška, a zatim ih zbrojiti ili oduzeti ako je potrebno. Korištenjem kalkulatora, dobivamo

\[
3.1416 \times 2.7831 = 8.743387 \\
3.1416 \times 12.27 = 38.547432 \\
5.0531 \times 3.1416 = 15.874818 \\
\Rightarrow 8.743387 + 38.547432 - 15.874818 = 31.416001 = 31.42
\]

Uočite da se sve to moglo pažljivo organizirati i pratiti sa parcijalnim umnošcima. Osim toga, ako smo koristili kalkulator za rješavanje problema, moguće je da krivo utipkamo znamenku a da nismo ni svjesni toga. Idemo ispitati ovaj problem s drugog gledišta. Imamo zajednički faktor u svakom izrazu, broj 3.1416. Ako ga izlučimo iz svakog izraza, dobivamo
3.1416 \times (2.7831 + 12.27 - 5.0531) = 3.1416 \times 10
= 31.41600
= 31.42


2.9.2 Primjeri

Primjer 25. (Razred: 5) Toranj se sastoji od 4 bloka. Koliko tornjeva možemo izgraditi od blokova dviju različitih boja?


Odgovor: Postoji 16 mogućih načina izrade tornja od 4 bloka s dvije različite boje blokova.

Primjer 26. (Razred: 6) Koliko iznosi zbroj prvih 20 parnih brojeva?


<table>
<thead>
<tr>
<th>(2+4)</th>
<th>(2+4+6)</th>
<th>(2+4+6+8)</th>
<th>[2+4+6+8+\cdots+2n]</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2</td>
<td>6</td>
<td>20</td>
<td>(n(n+1))</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Dakle, suma prvih 20 parnih brojeva je \(20 \cdot 21 = 420\).

**Odgovor:** Suma prvih 20 parnih brojeva iznosi 420.

**Primjer 27. (Razred: 8)** Kvadrat EFGH formiran je spojivanjem točaka koje se nalaze na kvadratu ABCD. \(|AF| = |BG| = |CH| = |DE| = 4\ cm i |FB| = |CG| = |DH| = |EA| = 3\ cm. Koliko iznosi površina osjenčanog dijela slike?

![Slika 14: Skica zadatka](image)

**Rješenje:** Neki učenici mogu pokušati riješiti ovaj zadatak tako da pronađu površinu manjeg kvadrata te ga oduzeti od površine većeg kvadrata. Međutim, to zahtijeva poznavanje Pitagorinog poučka:

\[
a^2 + b^2 = c^2
\]
\[
3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25
\]
\[
c^2 = 25
\]
\[
c = 5
\]

Sada možemo izračunati obje površine. Površina većeg kvadrata je \(7 \times 7 = 49\), a površina manjeg kvadrata iznosi \(5 \times 5 = 25\). Oduzimanjem tih dviju površina dobivamo traženu površinu našeg problema, tj. \(49 - 25 = 24\).

Promotrimo problem s drugačijeg gledišta. Osjenčano područje se sastoji od četiri sukladna pravokutna trokuta, svaki s katetama 3 i 4. Dakle, površina jednog trokuta iznosi \(\frac{3 \times 4}{2} = 6\). Kako postoje 4 takva trokuta, vrijedi \(4 \times 6 = 24\), te dobivamo površinu osjenčanog dijela.

**Odgovor:** Površina osjenčanog dijela iznosi 24 centimetara kvadratnih.
Zaključak

Rješavanje problema sastavni je dio matematike kao znanstvene discipline i školskog predmeta. Ono je prihvaćeno od većine nastavnika kao sastavni dio kurikuluma matematike koji mora biti poučen zajedno sa aritmetičkim vještinama potrebнима za uspjeh u školi i u stvarnom životu. Zapravo, rješavanje problema daje razlog za poduku vještine aritmetike.


Također, učenike trebamo podučiti faktorima koji otežavaju rješavanje problema. Kako se već s nekimima susrećemo u nižim razredima osnovne škole, trebalo bi ponoviti s njima naučene otežavajuće faktore te uvesti novi otežavajući faktor samo nakon što savladavaju trenutni. Bitno je da se faktori podučavaju odvojeno te treba učenicima dati vremena za otkrivanje tih faktora u zadacima.


46
Literatura


**Sažetak**

Title and summary

Problem-solving strategies. In this paper, I will explain the problem-solving strategies in mathematics that are not standard for the teaching mathematics. Students should be able to build new mathematical knowledge through problem solving, to apply their knowledge, think and discuss solutions. There are factors that make it difficult to solve the problem that we should study and teach students to recognize them. Process of solving problem is based on the steps of George Polya which provide guidelines by which we can solve the problem. From all problem-solving strategies I will mention 9 of them in which I will describe each of them and give few examples that can be used in teaching. I will notice that one problem can be solved in several ways, which I will point out in this paper.
Životopis