Primjena derivacije funkcije jedne varijable u geometriji

Jelačić, Ivana

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivana Jelačić

Primjena derivacije funkcije jedne varijable u geometriji

Diplomski rad

Osijek, 2021

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivana Jelačić

Primjena derivacije funkcije jedne varijable u geometriji

Diplomski rad

Mentorica: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2021

Sadržaj

Uvod

U matematičkoj analizi derivacija označava brzinu promjene vrijednosti funkcije s obzirom na promjenu varijable. Mnogi problemi u prirodnim, tehničkim i društvenim znanostima rješavaju se primjenom derivacija. Geometrijski se derivacija funkcije može protumačiti kao nagib tangente na graf funkcije. U ovom radu pobliže će biti opisan pojam derivacije funkcije jedne varijable te primjene derivacija funkcije u geometriji. Rad se sastoji od tri poglavlja.

U prvom poglavlju bavimo se povijesnim razvojem diferencijalnog računa, navest ćemo najvažnije matematičare i njihov doprinos razvoju diferencijalnog računa. Na samom početku potrebno je naglasiti da se diferencijalni račun razvijao pod pojmom infinitezimalni račun, koji je podrazumijevao diferencijalni i integralni račun. Osnovni pojmovi infinitezimalnog računa bili su pojam derivacije, antiderivacije i pojam određenog integrala. Početke infinitezimalnog računa nalazimo već u antičkoj Grčkoj. Samo otkriće infinitezimalnog računa pripisuje se Isaacu Newtonu i Gottfriedu Wilhelmu Leibnizu, ali na razvoj diferencijalnog računa utjecali su i mnogi drugi poznati matematičari, poput Pierre de Fermata, braće Bernoulli, Leonharda Eulera te Augustina Louisa Cauchyja koji su svi predstavljeni u ovom poglavlju. Također, ukratko je opisan i sukob između Isaaca Newtona i Gottfrieda Wilhelma Leibniza o prvenstvu u otkriću infinitezimalnog računa.

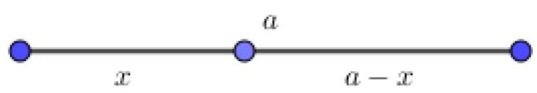
U drugom poglavlju predstavljen je pojam derivacije funkcije i osnovni teoremi diferencijalnog računa. Pojam derivacije funkcije uveli smo pomoću problema linearne aproksimacije, a zatim dajemo definiciju derivacije funkcije u točki te njezinu geometrijsku interpretaciju. Također su navedena pravila za deriviranje funkcija, derivacije elementarnih funkcija, složene i inverzne funkcije. Uveden je pojam vektorske funkcije i njezine derivacije. Osnovni teoremi diferencijalnog računa dani su sljedećim redoslijedom: Fermatov teorem, Rolleov teorem, Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti, Cauchyjev teorem o srednjoj vrijednosti. Svaki teorem je dokazan i geometrijski interpretiran.

Primjenom derivacije funkcije u geometriji bavimo se u trećem poglavlju. U ovom dijelu predstavljena je lokalna teorija ravninskih, odnosno prostornih krivulja, gdje za definiranje pojmova koristimo derivaciju funkcije kojom je krivulja zadana te opisujemo kako se određuje tangenta na ravninsku krivulju. Potom definiramo zakrivljenosti i torziju prostornih krivulja, te iskazujemo fundamentalni teorem za krivulje. Poglavlje završavamo primjerima optimizacijskih problema u geometriji, koji se rješavaju primjenom derivacije.

1 Povijesni razvoj diferencijalnog računa

Infinitezimalni račun zajednički je naziv za diferencijalni i integralni račun, a njegovi osnovni pojmovi su pojam derivacije, antiderivacije i pojam određenog integrala. Već u antičkoj Grčkoj možemo pronaći početke infinitezimalnog računa. Naime, Zenon iz Eleje je u 5. st. pr. Kr. promatrao pitanja beskonačno malih veličina, a Eudoksova metoda ekshaustije, koja potječe iz 4. st. pr. Kr., bila je vrlo precizan oblik integralnog računa. U infinitezimalnom računu razmatraju se dva problema: problem tangente (deriviranje - diferencijalni račun) i problem površine (integriranje - integralni račun). Iako se njegovo otkriće pripisuje Isaacu Newtonu i Gottfriedu Wilhelmu Leibnizu, sam put razvitka diferencijalnog računa omogućili su tijekom 17. stoljeća R. Descartes, B. F. Cavalieri, P. de Fermat, G. P. Roberval, E. Torricelli, J. Wallis, I. Barrow, dok su tijekom 18. stoljeću za to zaslužni J.Gregory, braća Jacob i Johann Bernoulli, a potom L.Euler, J d'Alembert, J. L. Lagrange i P. S. Laplace. U 19. i 20. stoljeću za razvoj diferencijalnog računa i srodnih disciplina važni su J. Fourier, C. F. Gauss, A. Cauchy, C. Jacobi, P. L. Dirichlet, K. Weierstrass, B. Riemann, R. Dedekind te G. Cantor.
Iako su se diferencijalni i integralni račun zajednički razvijali pod pojmom infinitezimalnog računa, u nastavku ovog poglavlja pokušat ćemo izdvojiti bitne matematičare i događaje koji su izravno utjecali na razvoj samog diferencijalnog računa.

Pierre de Fermat (1601. – 1665.) bavio se problemima minimuma i maksimuma te određivanjem jednadžbe tangente na krivulju. Metoda određivanja tangente na krivulju koju je osmislio de Fermat svodi se na današnju, ali bez deriviranja. Lagrange je de Fermata smatrao ocem diferencijalnog računa, upravo zbog prethodno navedenih rezultata. De Fermatova metoda određivanja maksimuma svodi se na zamjenu varijable x malo većom varijablom $x+E$, izjednačavanjem nove i polazne ovisnosti te kraćenjem članova koji sadrže E. Kako bismo pojasnili ovu metodu, promotrimo sljedeći primjer: na dužini čija duljina iznosi a tražimo točku za koju je umnožak njezinih udaljenosti od oba kraja dužine maksimalan. Ukoliko s x označimo udaljenost tražene točke od jednog kraja, tada je udaljenost do drugog kraja jednaka $a-x$. Dakle, funkcija čiji se maksimum traži određena je formulom $f(x) = x(a-x)$ čija je domena $[0, a]$.



Slika 1: De Fermatova metoda određivanja maksimuma

De Fermatova metoda tada daje:

$$
\begin{aligned}
x(a-x) &= (x+E)(a-(x+E)),\\
ax - x^2 &= ax - x^2 - Ex + Ea - Ex - E^2,\\
E^2 + 2Ex &= aE
\end{aligned}
$$

iz čega dijeljenjem s E, koji je malen, ali nije jednak nuli slijedi $E + 2x = a$.
Budući da je $E \approx 0$, de Fermat je zaključio kako je rješenje problema $x = \frac{a}{2}$, odnosno tražena točka je polovište dužine. Uočimo kako se ovdje radi o eksplicitnom određivanju stacionarne točke funkcije, odnosno o traženju varijable x za koju vrijedi

$$\lim_{E\to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E} = 0.$$

Evangelista Torricelli (1608. – 1647.) i Isaac Barrow (1630. – 1667.) su proučavali probleme kretanja promjenjivom brzinom te vezu brzine i puta. Tijekom svojih istraživanja uočili su da se brzina može odrediti iz puta, ali i put iz brzine, što je dovelo do razvijanja svijesti o međusobnoj inverznosti deriviranja i integriranja. U to vrijeme dolazi i do Barrowovog otkrića metode za određivanje tangente na krivulju u kojoj se tangenta promatra kao granična vrijednost sekanti kojima se krajevi približavaju.

Krajem 17. stoljeća dolazi do samog vrhunca u razvoju infinitezimalnog računa. Tada neovisno jedan o drugome, Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz, otkrivaju moderni infinitezimalni račun - deriviranje, integriranje i njihovu međusobnu inverznost. Iako su došli do istih spoznaja, njihovi rezultati su i pojmovno i notacijski bili različiti. Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz su prvotno odvojeno promatrali problem određivanja tangente (deriviranje) i problem određivanja površine (integriranje), a potom su ih povezali i na taj način uočili njihovu međusobnu inverznost koja je danas iskazana poznatom Newton - Leibnizovom formulom kao osnovnim teoremom infinitezimalnog računa. U nastavku ćemo pobliže opisati rad i otkriće svakoga od njih.

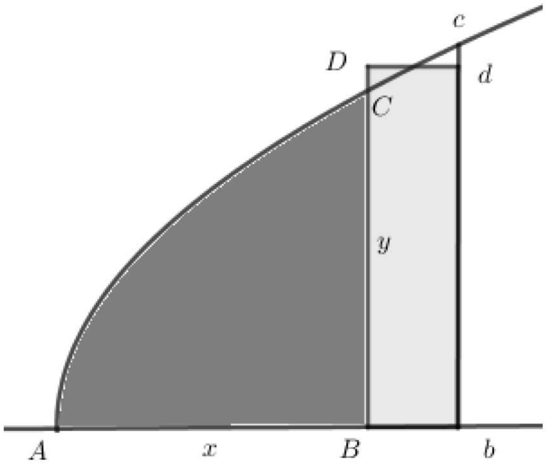
Isaac Newton (1642. – 1727.) u svom tekstu „*De Methodis Serierum et Fluxionum*", iz 1671. godine, piše o fluksijama - određivanju brzine iz puta i obrnuto. Newton zamišlja česticu koja se giba po krivulji u pravokutnom koordinatnom sustavu, a brzine koje ona postiže naziva fluksijama tekućih veličina x i y pridruženih fluksu vremena. Čestica ima dvije brzine - horizontalnu $\dot{x}$ i vertikalnu $\dot{y}$. Ako je putanja opisana krivuljom $f(x, y) = 0$, onda je omjer vertikalne i horizontalne brzine, koji označavamo izrazom $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, koeficijent smjera tangente na tu krivulju putanje. Kako bi odredio tu tangentu, Newton koristi Barrowovu ideju o tangenti kao limesu sekanti. Inverzni problem, koji se sastoji u određivanju ordinate y iz poznavanja veze između apscise x i omjera vertikalne i horizontalne brzine $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, Newton je riješio koristeći razvoj funkcije u redove potencija i na taj način uz deriviranje otkrio i antideriviranje - neodređeni integral i njihovu međusobnu inverznost. Iako je svoj rad o fluksijama, pod nazivom „*Method of fluxions and infinite series*", napisao 1671., on je objavljen tek 1736. godine na engleskom i nekoliko godina kasnije na latinskom jeziku. Newton je često u svojim radovima mijenjao oznake, ali najčešće je koristio $\dot{x}$ za $\frac{dx}{dy}$, x' za antiderivaciju od x, o za dt te $\dot{x}o$ za dx.
Kako odrediti veze između integrala i derivacija Newtonovom metodom, odnosno kako odrediti odnos između površine ispod krivulje i njezine ordinate, možemo objasniti na sljedećem primjeru: neka je dana krivulja u (x, y)-ravnini i neka je sa z označena površina ispod krivulje koja se nalazi iznad x-osi i prolazi kroz ishodište (krivulja je u granicama od $x = 0$ do x). Uzmimo da je $z^2 = \frac{4}{9}x^3$. Ukoliko desnu granicu pomaknemo za mali iznos o, površina se povećava i postaje pravokutnik s bazom $o = |Bb|$ i visinom $v = |bd|$ čija je površina jednaka povećanju površine.
Tada je

$$(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3,$$

odnosno sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2).$$

Ako je o beskonačno mali, onda je $v \approx y$ pa je $2zy \approx \frac{4}{3}x^2$ odnosno $y \approx \sqrt{x}$. Iz prethodnog postupka možemo primijetiti kako se radi o računanju derivacije z po varijabli x te uočiti



Slika 2: Newtonova metoda za računanje derivacije

inverznost integriranja i deriviranja. Dakle, ključni korak u Newtonovom deriviranju i integriranju je dodavanje malog prirasta o varijabli x i pripadnog malog prirasta ov površini z, poništavanje prirasta o te prijelaz s v na y. Omjer koeficijenta smjera tangente na krivulju, odnosno omjer fluksija, Newton je otkrio na sljedeći način. Uzmimo da je zadana krivulja

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$$

Promjena x u $x + o\dot{x}$ i y u $y + o\dot{y}$ daje

$$\begin{aligned}&(x^3 - ax^2 + axy - y^3) + o(3x^2\dot{x} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - 2ax\dot{x}\\&- ao\dot{x}^2 + ax\dot{y} + ay\dot{x} + ao\dot{x}\dot{y} - 3y^2\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3) = 0.\end{aligned}$$

Stoga s obzirom na jednadžbu krivulje slijedi

$$o(3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3) = 0,$$

te dijeljenjem s $o \neq 0$ slijedi

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3 = 0.$$

Zanemarimo li članove s o koji su vrlo mali imamo

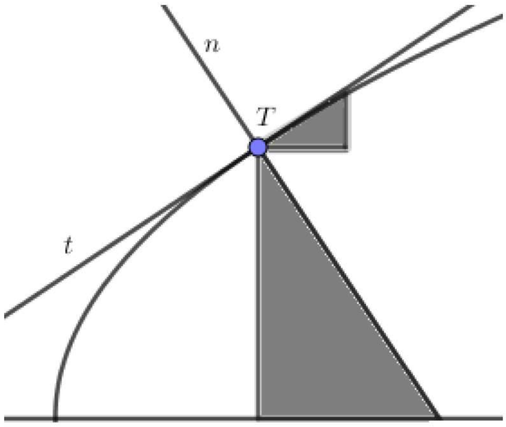
$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} = 0$$

pa je

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

Napomenimo kako su već Newtonovi suvremenici primijetili nedostatke ovog pristupa jer se dodaju prirasti koji su skoro nula, ali nisu nula, i tokom istog računa se ponekad tretiraju kao brojevi koji nisu nula (u slučajevima kada se s njima dijeli), a nekad kao nula (u slučajevima kada neke članove koji ih sadrže zanemarujemo). Jedan od najpoznatijih kritičara Newtonovog predstavljanja infinitezimalnih veličina bio je biskup George Berkeley, koji je postavio niz pitanja vezanih za logičku opravdanost Newtonovog pristupa. S obzirom na ta pitanja nastavak razvoja teorije derivacija i integrala bit će usmjeren na opravdanje rezultata koji funkcioniraju, a to će se postići početkom 19. stoljeća kada će limesi biti egzaktno definirani.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. – 1716.) pisao je stilom koji je dosta sličan suvremenom matematičkom zapisu. Uveo je pojmove „diferencijalni i integralni račun" te oznake $\frac{dy}{dx}$ i $\int y\ dx$. Njegova želja bila je razvijanje formalne metode za infinitezimalni račun, a motivaciju je pronašao u razmatranju nizova diferencija i Pascalova karakterističnog trokuta. Karakteristični trokut je trokut kojega u nekoj točki T dane krivulje zatvaraju tangenta, horizontala povučena točkom T i vertikala povučena u nekoj točki krivulje koja je u blizini točke T. Karakteristični trokut je sličan trokutu kojega za danu točku T na krivulji određuju njezina ordinata, odsječak normale između T i osi apscisa te dobiveni odsječak na osi apscisa.



Slika 3: Karakteristični trokut

Koristeći taj trokut Leibniz dolazi do raznih relacija među površinama, odnosno do raznih formula za integriranje.
Nakon što mu je 1672. godine Huygens postavio zadatak beskonačne sumacije recipročnih vrijednosti trokutnih brojeva, Leibniz je uočio da postoji međusobna inverznost niza suma i formiranja niza diferencija. Zadatak je izgledao ovako:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = ?$$

Iz toga zapisa Leibniz je uočio kako se članovi reda mogu zapisati kao:

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1},$$

te sumacija ima oblik:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \cdots = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} + \cdots$$

a svaki konačni početni dio te sume jednak je

$$2 - \frac{2}{n+1}.$$

Leibniz zaključuje kako je suma ovog reda jednaka 2. Budući da je ideja bila zapisati član reda kao diferenciju dva susjedna člana nekog niza, Leibniz počinje promatrati sume nizova i njihovih diferencija. Dakle, ako je dan niz a_n i ako je pripadni niz diferencija definiran kao $d_n = a_{n+1} - a_n$, onda je suma

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = a_{n+1} - a_1$$

te je na taj način dokazana međusobna inverznost formiranja niza diferencija i niza suma. Leibniz je promatrao problem određivanja površine ispod krivulje te uočio kako i dalje vrijedi teza: ako na krivulji odredimo točke s jednako udaljenim apscisama (uzmimo da je njihov razmak 1), one će definirani niz ordinata $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i suma svih tih ordinata aproksimirati površinu ispod krivulje, a diferencija dviju susjednih ordinata aproksimira nagib tangente u odgovarajućoj točki krivulje. Ako je odabrana jedinica 1 što manja, to će aproksimacije biti točnije. Ukoliko je odabrana beskonačno mala jedinica, aproksimacija će biti egzaktna i tada su određivanje površine i određivanje nagiba tangente međusobno inverzne operacije. U svojim zapisima iz 1675. godine Leibniz je koristio Cavalierijevu oznaku $omn.$ za površinu (integral) te je sa $omn.w$ označavao sumu svih w, a sa $omn.\overline{omn.w}$ sumu suma w-ova. Iste godine uvodi i znak $\int$, što je današnji znak $\int_a^b$. Uveo je i simbol d za deriviranje čije je uvođenje opravdao inverznošću integriranja i deriviranja. Jedno vrijeme je koristio zapis $\int x$, ali kasnije uočava kako je zapis $\int x\ dx$ konzistentniji. Također, možemo mu zahvaliti i na pojmu transcendentnih brojeva. On za množenje koristi točku, a za dijeljenje dvotočku. Njegove ideje i način razmišljanja dosta su slični Newtonovima. Newton je koristio mali prirast o i ov, a Leibniz koristi infinitezimalne priraste dx i dy. Dakle, kod Leibniza nagib tangente nije omjer brzina već omjer infinitezimalnih prirasta $\frac{dy}{dx}$.

U nastavku ćemo spomenuti sukob Newtona i Leibniza oko prvenstva u otkriću infinitezimalnog računa. Newtonovi rezultati su stariji od Leibnizovih, ali nisu bilo objavljeni dugo vremena pa tako Leibnizovi rezultati potječu iz doba kada Newtonovi rezultati još nisu bili objavljeni. Budući da je Leibniz svoje rezultate objavio 1684. godine, a Newton svoje tek 1687. godine, postoji mogućnost da je Newtonove rukopise Leibniz vidio tijekom svog posjeta Londonu. Leibnizovi rezultati su i konceptualno i notacijski različiti od Newtonovih jer Leibniz problemima pristupa više geometrijski, a Newtonov pristup je više orijentiran prema fizici. Newton je 1676. uputio pismo Leibnizu u kojem navodi mnoge od svojih rezultata, no bez opisa metode. Iako je Leibniz odgovorio odmah po primitku pisma, Newton je smatrao kako je Leibniz namjerno otezao s odgovorom. Newton je nakon toga još jednom pisao Leibnizu te iako je ovo pismo bilo pristojno sročeno, moglo se naslutiti da je Newton uvjeren kako je Leibniz ukrao njegove metode. U svom odgovoru Leibniz je opisao neke detalje svojih metoda, a na to Newton odgovora kako Leibniz nije riješio nijedan od ranije neriješenih problema. Iako je to bilo točno, kasnije se Leibnizov formalni pristup pokazao temeljem daljnjeg razvoja matematičke analize. Kroz 1684. i 1686. godinu Leibniz je objavljivao radove u kojima detaljno opisuje svoj diferencijalni i integralni račun. Newtonova metoda fluksija koja je napisana 1671., zbog problema s objavljivanjem, objavljena je tek 1736. godine. Leibniz je 1711. godine pročitao članak Johna Keilla u *Transactions of the Royal Society of London* u kojemu ga Keill optužuje za plagijat. Leibniz je zatražio povlačenje toga članka i naveo je da za račun fluksija nije znao dok nije pročitao Wallisova djela, no Keill uzvraća spominjanjem Newtonovih dvaju pisama te navodi da je iz njih Leibniz mogao uočiti Newtonove rezultate. Leibniz se potom pismom obraća društvu *Royal Society* s molbom da isprave nepravdu koju su mu nanijele Keillove tvrdnje. Društvo *Royal Society* postavilo je komisiju koja je trebala utvrditi prvenstvo u otkriću infinitezimalnog računa. Pritom Leibniza nisu pitali za njegovu verziju događaja, a komisijin izvještaj, koji je išao u korist Newtona, napisao je sam Newton. Izvještaj je objavljen 1713. godine, a Leibniz je saznao za njega iz pisma koje mu je uputio Johann Bernoulli. Leibniz, kao odgovor na sve to, objavljuje anonimni manifest naslova *Charta volans* u kojemu u svoju korist navodi jednu Newtonovu grešku vezanu za više derivacije, na koju mu je ukazao Johann Bernoulli. Rasprava o prvenstvu nastavljena je i nakon Leibnizove smrti 1716. godine, ali možemo reći da je s vremenom prihvaćena ideja podjednake zasluge obojice od njih.

Neposredni nastavljači Leibnizova djela bila su braća Jacob (1654. – 1705.) i Johann Bernoulli (1667. – 1748.). Braća su bila u komunikaciji s Leibnizom, osobito Johann koji je zaslužan za naziv integriranje te su se obojica bavila diferencijalnim jednadžbama i redovima. Bernoullijeva diferencijalna jednadžba $y' = p(x)y + q(x)y^n$ nazvana je po Jacobu koji ju je riješio 1696. godine. Johann je poznat po uvođenju pojma separacije varijabli. Jacob je dao moderni oblik rezultatima iz teorije vjerojatnosti, po kojima je osobito poznat. Za razliku od Jacoba, Johanna je više zanimala matematička analiza, a posebice posljedice Leibnizovog diferencijalnog i integralnog računa. Johann je 1692. godine u Parizu susreo Guillaume Francois Antonie Marquis de l'Hopitala (1661. – 1704.) kojeg je podučio Newton-Leibnizovom infinitezimalnom računu. Prvi udžbenik infinitezimalnog računa de l'Hopital je objavio 1696. godine, a u njemu se nalazilo pravilo koje olakšava izračunavanje limesa, koje je danas poznato kao l'Hopitalovo pravilo.

U 18. stoljeću počinje se formulirati pojam funkcije kojeg prvi kao temeljni matematički pojam postavlja Leonhard Euler (1707. – 1783.). Euler je bio jedan od prvih matematičara koji su se bavili parcijalnim diferencijalnim jednadžbama te se smatra začetnikom opće teorije diferencijalnih jednadžbi. Također, Euler je prvi matematičar koji se bavio pitanjem ekstrema funkcija više varijabli, a poznat je i po uvođenju oznake i za imaginarnu jedinicu, oznake e za bazu prirodnog logaritma te $f(x)$ za formulu funkcije.

Jean le Rond d'Alembert (1717. – 1783.) se bavio običnim i parcijalnim diferencijalnim jednadžbama te njihovom primjenom u fizici. On je jedan od prvih matematičara koji je pokušao postići jasnoću u pojmu limesa i derivacija, a pri tome je derivaciju definirao kao limes kvocijenta prirasta, ali pojam limesa je ostao nedorečen.

Joseph - Louis Lagrange (1736. – 1813.) je 1755. godine dobio mjesto profesora matematike u Kraljevskoj artiljerijskoj školi u Torinu, a njegovi matematički interesi su u to vrijeme bili usmjereni na infinitezimalni račun i njegovu primjenu na matematičku fiziku. Lagrange je 1766. godine naslijedio Eulera kao direktor matematike na berlinskoj Akademiji znanosti. Na mjesto člana Akademije znanosti u Parizu dolazi 1787. godine te ovdje ostaje do kraja svoje karijere. Svoje najznamenitije djelo, *Mecanique analytique*, objavio je 1788. godine. U tom djelu je sažeta sva mehanika nakon Newtona koju je opisao koristeći diferencijalne jednadžbe te je tako klasična Newtonova mehanika preoblikovana u više matematičku Lagrengeovu mehaniku. Lagrange je razvio sustavnu teoriju diferencijalnih jednadžbi i to posebno radi potreba fizike, a pri tome su posebno važni njegovi pokušaji preciziranja pojma derivacije. On je pretpostavio da se svaka funkcija može razviti u Taylorov red te je derivacije definirao pomoću koeficijenta tog razvoja. Osnovna relacija koju je izdvojio bila je oblika

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + hd$$

koja vrijedi u slučaju da su h i d blizu nule. Na temelju te relacije je dokazao da funkcija s pozitivnom prvom derivacijom u x raste na nekom intervalu oko x, dokazao je Lagrangeov teorem srednje vrijednosti kao i Lagrangeov oblik ostatka Taylorovog reda. Iako su svi njegovi dokazi bili točni, nije opravdao prethodno navedenu osnovnu relaciju. On je zaslužan za oznake za deriviranje funkcija $f'(x)$, $f''(x)$, itd.

Augustin Louis Cauchy (1789. – 1857.) je postigao konačnu formalizaciju diferencijalnog računa. Njegova zasluga je postavljanje općeprihvaćenih temelja matematičke analize dosljednima korištenjem teorije nejednakosti. Također, njemu možemo zahvaliti za suvremene $\varepsilon - \delta$ formulacije u matematičkoj analizi, mada je on suvremene $\varepsilon - \delta$ definicije limesa izrazio riječima. Cauchy je definirao pojam neprekidnosti funkcije: funkcija f je neprekidna na nekom intervalu ako za sve x iz tog intervala $f(x+\alpha) - f(x)$ neograničeno opada s α (prema nuli). Derivaciju je definirao na sljedeći način: ako su ε i δ vrlo mali i ako je δ takav da je za sve $h < \delta$ i za svaki promatrani x

$$f'(x) + \varepsilon > \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > f'(x) - \varepsilon,$$

onda je broj $f'(x)$ derivacija funkcije f u x. Također, bavio se i preciziranjem pojma integrala.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815. – 1897.) je 1872. godine dao primjer neprekidne funkcije koja nigdje nije derivabilna i koja je danas poznata kao Weierstrassova funkcija. Weierstrass je dokazao da je svaka neprekidna funkcija definirana na segmentu limes uniformno konvergentnog niza polinoma, što je danas poznato kao Stone-Weierstrassov teorem. Spomenuli smo da je Cauchy zaslužan za $\varepsilon - \delta$ definicije limesa funkcija, a suvremeni oblik te definicije dao je Weierstrass koji je uveo i oznake lim i $\lim_{x \to x_0}$. Engleski matematičar G. H. Hardy (1877. – 1947.) je 1908. godine uveo oznaku $\displaystyle\lim_{x \to x_0}$.

2 Pojam derivacije funkcije i osnovni teoremi diferencijalnog računa

Unutar ovog poglavlja objasnit ćemo kako uvodimo pojam derivacije funkcije pomoću problema linearne aproksimacije, navest ćemo definiciju derivacije funkcije u točki te ju geometrijski interpretirati. Objasnit ćemo pravila za deriviranje funkcija: derivacije elementarnih funkcija, složene i inverzne funkcije. Spomenut ćemo vektorsku funkciju i derivaciju vektorske funkcije, a potom ćemo iskazati osnovne teoreme diferencijalnog računa, dokazati ih i dati njihov geometrijski smisao.

2.1 Pojam derivacije funkcije

U rješavanju matematičkih problema često se upotrebljava metoda aproksimacije ili približnog određivanja nekog složenijeg matematičkog objekta uz pomoć jednostavnijih objekata. Pojam derivacije funkcije u točki, koja je jedan od osnovnih pojmova diferencijalnog računa, uvest ćemo pomoću problema linearne aproksimacije - aproksimacije linearnom funkcijom. To je problem koji se koristi kada je teško izračunati vrijednost neke funkcije, kada nultočke funkcije nije moguće precizno odrediti ili kada je traženje lokalnih, odnosno globalnih ekstrema neke funkcije složeno. Tada se dana funkcije aproksimira nekom jednostavnijom funkcijom, odnosno odredi se nova funkcija koja zamjenjuje danu funkciju na nekom skupu, a ta nova funkcija je najčešće polinom prvog stupnja - linearna funkcija.
Kada kažemo da ćemo funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u okolini neke točke x_0 aproksimirati linearnom funkcijom $l(x) = ax+b,\ x \in \mathbb{R}$, mislimo na to da se funkcijske vrijednosti $f(x)$ i $l(x)$ trebaju što manje razlikovati u okolini točke x_0. U ovom slučaju je prirodno zahtijevati da se funkcije f i l podudaraju u točki oko koje lokalno aproksimiramo funkciju, tj. $f(x_0) = ax_0 + b$. Ako sada odredimo slobodni koeficijent b i uvrstimo ga u izraz $l(x) = ax + b$, dobit ćemo $l(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$. Primijetimo da nam koeficijent a i dalje nije poznat, a odabrat ćemo ga tako da se funkcije f i l u okolini točke x_0 što manje razlikuju. Na osnovu toga promatramo pad i rast funkcije f u točki x_0 i dolazimo do sljedećih definicija, odnosno teorema, [3].

Definicija 2.1. *Neka je $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f diferencijabilna u točki $x_0 \in (a,b)$, ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$, takav da je*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Pri tome funkciju $(x - x_0) \mapsto \alpha(x - x_0)$ zovemo diferencijal funkcije f u točki x_0, a funkciju $l(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$ zovemo linearni aproksimant od f u okolini točke x_0.

Teorem 2.1. *Realan broj α iz Definicije 2.1 postoji onda i samo onda ako postoji limes $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Pri tome takav α je jedinstven i vrijedi*

$$\alpha = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dokaz. Iz jednakosti

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha \right) = 0$$

slijedi da broj $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji onda i samo onda ako postoji $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ i ako je pri tome $\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, a jedinstvenost broja α slijedi iz jedinstvenosti limesa funkcije. $\square$

Definicija 2.2. *Ako je funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki $x_0 \in (a,b)$, onda jednoznačno određeni realan broj α za koji vrijedi*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

zovemo derivacija funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$. Dakle,

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zato se za funkciju f diferencijabilnu u točki x_0 kaže još da je derivabilna u točki x_0.

Napomena 2.1. *Funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je, prema Teoremu 2.1, derivabilna u točki $x_0 \in (a,b)$ onda i samo onda ako postoji*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pri tome je linearni aproksimant funkcije f u okolini točke x_0 zadan formulom

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Napomena 2.2. *Ako uvedemo supstituciju $\Delta x := x - x_0$ i $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, onda formula*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

prelazi u ekvivalentnu formulu

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Veličinu Δx nazivamo prirast nezavisne varijable x u točki x_0, a Δf prirast funkcije f u točki x_0. Dakle, derivacija je mjera brzine promjene funkcije f u točki x_0.

Neprekidnost je jedno od važnih svojstava derivabilnih funkcija u točki pa ćemo u nastavku ponoviti definiciju neprekidnosti funkcije, a potom prikazati vezu između derivabilnih i neprekidnih funkcija, [3].

Definicija 2.3. *Kažemo da je funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in (a,b)$ ako ona ima limes u točki x_0 koji je jednak $f(x_0)$, odnosno ako je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je neprekidna na intervalu (a,b) ako je ona neprekidna u svakoj točki intervala.

Teorem 2.2. *Ako je funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in (a,b)$, onda je ona i neprekidna u toj točki.*

Dokaz. Prema definiciji neprekidne funkcije trebamo pokazati da je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Primjenom pravila za limes produkta dviju funkcija imamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

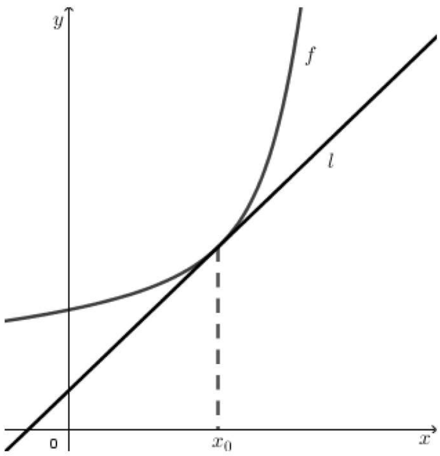
pa slijedi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

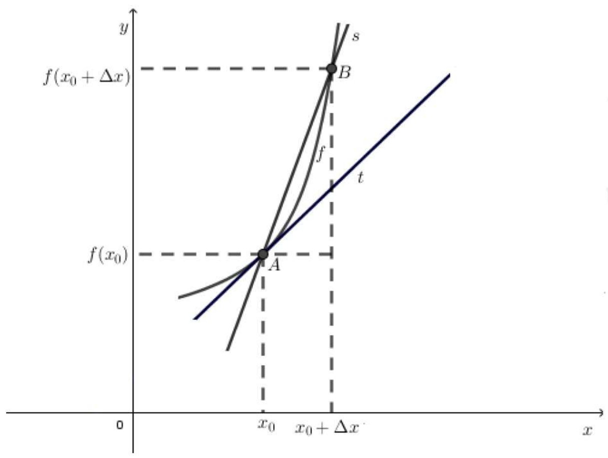
□

Definicija 2.4. *Kažemo da je realna funkcija $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilna ili diferencijabilna na intervalu (a,b) ako je derivabilna u svakoj točki $x_0\in(a,b)$. Funkciju $f'\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ definiranu s $x\mapsto f'(x)$ nazivamo derivacija od f.*

U nastavku ćemo navesti geometrijsku interpretaciju pojma derivacije funkcije.
Graf linearne aproksimacije $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, kojom smo aproksimirali funkciju $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ u okolini točke x_0, tangenta je u točki x_0 na Γ_f (vidi Sliku 4).



Slika 4: Graf funkcije f i graf njezine linearne aproksimacije l



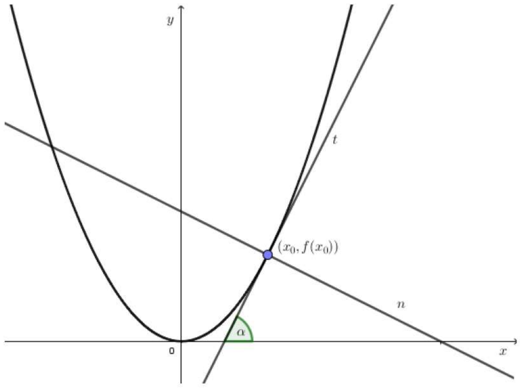
Slika 5: Tangenta i sekanta

Dakle, kao što možemo vidjeti na Slici 5, ukoliko promatramo neku krivulju koja je dana jednadžbom $y = f(x)$ i na nju, u proizvoljnoj točki $A = (x_0, f(x_0))$ povučemo tangentu, a potom i sekantu koja prolazi točkom A te točkom $B = (x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ vrijedi sljedeće:

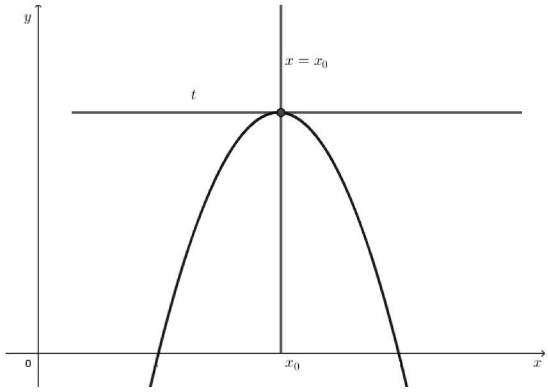
- koeficijent smjera sekante jednak je $k(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- ako $x\to x_0$, onda se točka B približava točki A
- koeficijent smjera sekante prelazi u koeficijent smjera tangente

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} k(x)$$

Na slikama 6 i 7 vidimo da je koeficijent smjera tangente u točki s apscisom x_0 derivacija $f'(x_0)$ funkcije f u točki x_0 te možemo pisati $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$, gdje je α_0 kut što ga tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ zatvara s pozitivnim dijelom osi apscise.



Slika 6: $f'(x_0) \neq 0$



Slika 7: $f'(x_0) = 0$

U nastavku ćemo prikazati razliku u pristupu Newtona i Leibniza pri određivanju jednadžbe tangente. Newton je razmatrao problem određivanja trenutne brzine nekog tijela koje se kreće po pravcu. Funkciju koja u svakom vremenskom trenutku pokazuje prijeđeni put označimo s $t \mapsto s(t), t \geq 0$. Ukoliko je s linearna funkcija $s(t) = vt + b$, gibanje je jednoliko. Dakle, u svakom intervalu $[t_1, t_2]$ prijeđeni put je proporcionalan duljini intervala $t_2 - t_1$, odnosno vrijedi

$$s(t_2) - s(t_1) = v(t_2 - t_1),$$

a brzina ima konstantnu vrijednost

$$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Ukoliko gibanje nije jednoliko, tj. funkcija s nije linearna, tada ćemo brzinu u trenutku t_0 odrediti tako da pretpostavimo da je gibanje jednoliko u okolini trenutka t_0, odnosno funkciju s u okolini točke t_0 aproksimirat ćemo linearnom funkcijom. Kako je to moguće samo ako postoji v takav da vrijedi

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0) - v(t - t_0)}{t - t_0} = 0,$$

aproksimacija je dana s

$$t \mapsto s(t_0) + v(t - t_0),$$

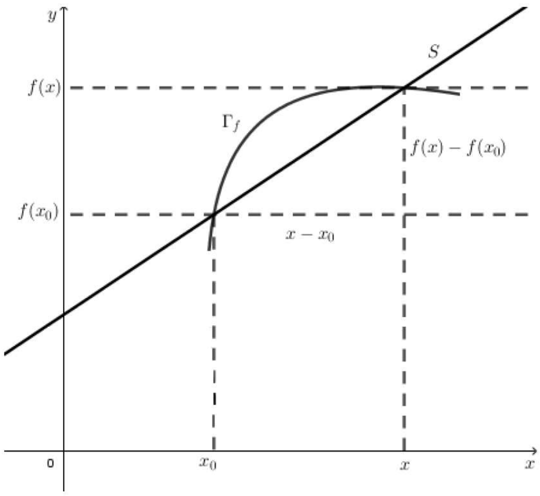
pri čemu je brzina u trenutku t_0 jednaka

$$v(t_0) = v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0).$$

Za razliku od Newtona, Leibniz je proučavao problem određivanja tangente u točki $T_0 = (x_0, f(x_0))$ grafa Γ_f neke funkcije f. Kako bi odredili tangentu, najprije moramo odrediti koeficijent smjera tangente. Ukoliko u blizini točke x_0 izaberemo neku drugu točku x, tada je koeficijent smjera sekante s kroz točke T_0 i $T = (x, f(x))$ dan formulom

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Kada x teži prema x_0, koeficijent smjera sekante teži prema koeficijentu smjera tangente i pri tome promatramo egzistenciju granične vrijednosti $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, odnosno derivabilnost funkcije f u točki x_0.



Slika 8: Leibnizov problem određivanja tangente

2.1.1 Pravila za deriviranje funkcija

Navest ćemo pravila za derivaciju zbroja, razlike, umnoška i kvocijenta funkcija čiji se dokaz može pronaći u [3], te ćemo definirati derivacije višeg reda.

Teorem 2.3. *Neka su $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki $x \in I$. Tada vrijedi:*

1) funkcija $f+g$ je derivabilna u x i vrijedi

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2) funkcija $f-g$ je derivabilna u x i vrijedi

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

3) funkcija $f \cdot g$ je derivabilna u x i vrijedi

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

4) ako je $g(x) \neq 0$, onda je funkcija $\frac{f}{g}$ derivabilna u x i vrijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ukoliko je funkcija f derivabilna na intervalu I, onda je i njezina derivacija derivabilna na tom intervalu. Ako je prva derivacija f' derivabilna na $I \subseteq \mathbb{R}$, onda njezinu derivaciju nazivamo drugom derivacijom funkcije f i označavamo s f'' ili $f^{(2)}$. Općenito, derivacije višeg reda definiraju se na sljedeći način:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $f^{(n)}$ oznaka za n-tu derivaciju funkcije f. Dogovorno je $f^{(0)} = f$.

Derivabilnu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R},\ I \subseteq \mathbb{R}$ kojoj je derivacija $f'\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nazivamo neprekidno derivabilna funkcija ili glatka funkcija. Za neprekidno diferencijabilne funkcije često se kaže da u klase C^1. Funkcija je klase C^2 ako prva i druga derivacija funkcije postoje i neprekidne su. Općenito, za funkciju se kaže da je klase C^n ako prvih n derivacija $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ postoji i sve su neprekidne. Ako derivacije $f^{(k)}$ postoje za sve pozitivne cijele brojeve k i sve su neprekidne, funkcija je klase C^∞.

Derivacije elementarnih funkcija prikazane su u Tablici 1.

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	$ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e, \quad x > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}, \quad x > 0$
a^x	$a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x, \quad x > 0$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{ch^2 x}, \quad x \neq 0$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \lvert x\rvert > 1$
$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$

Tablica 1: Derivacije elementarnih funkcija

Navest ćemo teorem za derivaciju složene funkcije, a potom i teorem o derivaciji inverzne funkcije. Dokazi ovih teorema mogu se pogledati u [3].

Teorem 2.4. *Neka su f i g realne funkcije, takve da je kompozicija $f \circ g$ definirana. Neka je g derivabilna u x_0, a f u točki $g(x_0)$. Tada vrijedi*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Teorem 2.5. *Neka je $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija. Nadalje, neka je f derivabilna u $x_0 \in (a,b)$, tako da je $f'(x_0) \neq 0$. Tada postoji $f^{-1}\colon f((a,b)) \to \mathbb{R}$, koja je derivabilna u $y_0 := f(x_0)$ i vrijedi*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

2.1.2 Derivacija vektorske funkcije

Funkcija koja za domenu ima neki podskup I skupa realnih brojeva, a za kodomenu skup $\mathbb{R}^d$, za neki prirodan broj $d \geq 2$ zove se vektorska funkcija jedne varijable. Općenito, vektorska funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}^d$ jedinstveno je određena s d realnih funkcija $f_i\colon I \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, d$, koje su njezine komponente $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_d(t)), \quad t \in I$.
Derivacija vektorske funkcije definira se na sljedeći način:

$$f'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

u točkama $t_0 \in I$ za koje prethodni limes ima smisla i postoji.
Vektorska funkcija je derivabilna u točki t_0 ako i samo ako su sve njezine komponente derivabilne u toj točki i tada je

$$f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \ldots, f_d'(t_0)).$$

2.2 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Osnovni teoremi diferencijalnog računa su Fermatov teorem, Rolleov teorem, Lagrangeov teorem i Cauchyjev teorem. U nastavku ćemo iskazati, dokazati i geometrijski interpretirati svaki od njih, [3].

2.2.1 Fermatov teorem

Teorem 2.6. *Neka funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in (a,b)$ ima lokalni ekstrem. Ako je f derivabilna u točki x_0, onda je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f u točki $x_0 \in (a,b)$ postiže lokalni maksimum. To znači da postoji $\delta > 0$ takav da

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Derivacija funkcije f u točki x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ako je $|x - x_0| < \delta$, onda je $f(x) \leq f(x_0)$. Budući da je to unutrašnja točka intervala, onda $x - x_0$ može biti pozitivan ili negativan. Ako je $x - x_0 > 0$, onda je

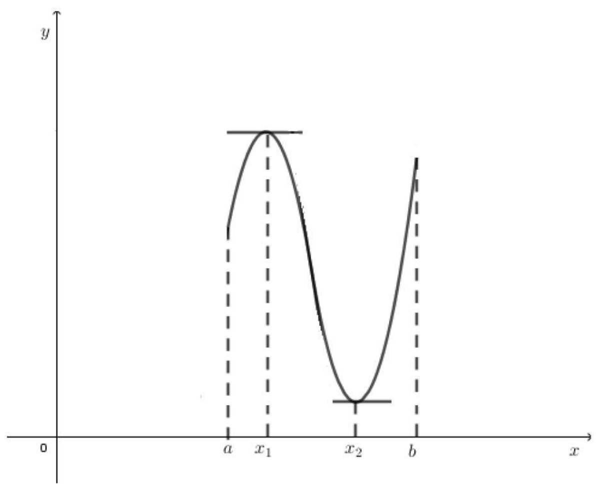
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \text{te je} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

a ako je $x - x_0 < 0$, onda je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \text{te je} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Kako je funkcija f derivabilna u točki x_0, ta su dva limesa jednaka te je $f'(x_0) = 0$. □

Napomena 2.3 (Geometrijska interpretacija Fermatovog teorema). *Tangenta na graf derivabilne funkcije u točki lokalnog ekstrema paralelna je s osi x, odnosno koeficijent smjera tangente jednak je nuli.*



Slika 9: Fermatov teorem

2.2.2 Rolleov teorem

Teorem 2.7. *Ako je funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$, derivabilna na (a,b) i vrijedi $f(a) = f(b)$, onda postoji točka $x_0 \in (a,b)$, takva da je $f'(x_0) = 0$.*

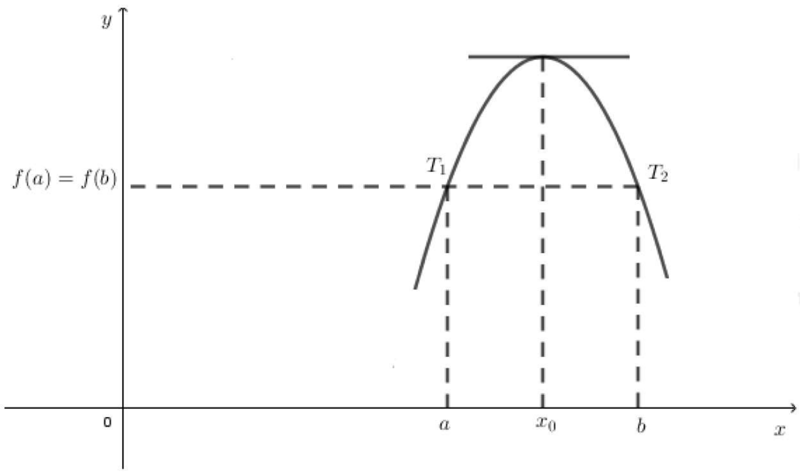
Dokaz. U dokazu promatramo dva slučaja:

a) Ako je funkcija f konstanta, to znači da je $f(x) = f(a) = f(b)$, $\forall x \in [a,b]$ i onda je $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.

b) Ako funkcija f nije konstanta, onda zbog neprekidnosti ona na intervalu $[a,b]$ poprima svoju najmanju i najveću vrijednost. Te vrijednosti se ne mogu postići na rubovima intervala (a ili b) jer bi u tom slučaju funkcije f bila konstanta. Dakle, postoji točka $x_0 \in (a,b)$ u kojoj funkcija f poprima svoju najmanju ili najveću vrijednost. Kako je funkcija f derivabilna, prema Fermatovom teoremu, mora biti $f'(x_0) = 0$.

□

Napomena 2.4 (**Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema**). *Ako graf neprekidne funkcije siječe pravac $y = f(a)$ u dvije točke $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ i ako ima tangentu u svakoj točki između točaka A i B, onda postoji barem jedna točka između točaka A i B u kojoj je tangenta na graf funkcije paralelna s osi x.*



Slika 10: Rolleov teorem

2.2.3 Lagrangeov teorem

Teorem 2.8 (Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti)**.** *Ako je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$ i derivabilna na (a,b), onda postoji barem jedna točka $x_0 \in (a,b)$ takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju g na segmentu $[a,b]$ formulom

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Nakon deriviranja po varijabli x imamo

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Kako funkcija g na segmentu $[a, b]$ ispunjava sve uvjete Rolleova teorema, to postoji točka $x_0 \in (a, b)$ takva da je $g'(x_0) = 0$, odnosno

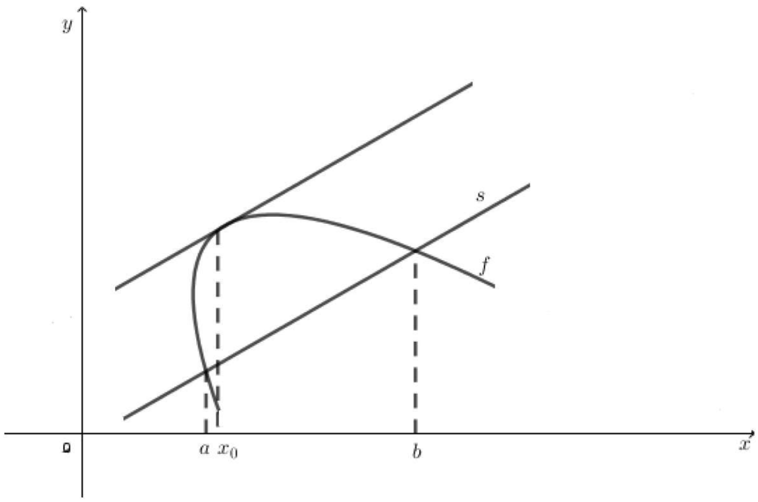
$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

a iz toga slijedi

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Napomena 2.5 (**Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema**). *Neka je zadana sekanta s funkcije f određena točkama $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$. Ukoliko sekantu s pomičemo paralelno, ona u jednom trenutku postaje tangenta u nekoj točki $(x_0, f(x_0))$ i pri tome su koeficijenti smjera sekante i tangente jednaki.*



Slika 11: Lagrangeov teorem

2.2.4 Cauchyjev teorem

Teorem 2.9 (Cauchyjev teorem o srednjoj vrijednosti). *Ako su funkcije f, $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne na $[a, b]$ i derivabilne na (a, b) te $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, b)$, onda je $g(a) \neq g(b)$ i osim toga postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dokaz. Budući da je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, b)$, to je $g(b) \neq g(a)$. U suprotnom bi funkcija $\hat{g}$ definirana formulom $\hat{g} = g(x) - g(b)$ na segmentu $[a, b]$ ispunjavala sve uvjete Rolleova

teorema pa bi postojala točka $x_0 \in (a,b)$ takva da je $\hat{g}'(x_0) = g(x_0) = 0$.
Ako definiramo funkciju h formulom:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right),$$

ona na segmentu $[a,b]$ ispunjava sve uvjete Rolleovog teorema te postoji točka $x_0 \in (a,b)$ takva da je $h'(x_0) = 0$, odnosno

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0,$$

a to je ekvivalentno tvrdnji teorema. □

Napomena 2.6 (**Geometrijska interpretacija Cauchyjevog teorema**)**.** *Geometrijska interpretacija Cauchyjevog teorema analogna je geometrijskoj interpretaciji Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti jer ako stavimo $g(x) = x$, onda je Cauchyjev teorem poopćenje Lagrangeovog teorema.*

3 Primjena derivacije funkcije u geometriji

Primjene derivacija su raznolike, od primjena u prirodnim i društvenim znanostima (kemija, fizika, biologija, ekonomija) do primjena na kvalitativna svojstva funkcija $y = f(x)$ poput monotonosti, konveksnosti i konkavnosti, određivanja ekstrema i točke infleksije. U ovom poglavlju bazirat ćemo se na primjenama derivacija u geometriji. Poglavlje smo podijelili na dva dijela. U prvom dijelu bavimo se proučavanjem svojstava krivulja primjenom derivacija funkcije kojom je krivulja zadana, a u drugom dijelu dajemo primjere optimizacijskih problema u geometriji.

3.1 Lokalna teorija krivulja

Ranije smo naveli geometrijsku interpretaciju derivacije realne funkcije jedne realne varijable, tj. njezinu vezu s tangentom na graf funkcije. U ovom dijelu ćemo detaljnije predstaviti lokalnu teoriju ravninskih, odnosno prostornih krivulja, gdje za definiranje pojmova koristimo derivaciju funkcije kojom je krivulja zadana, tj. njezine parametrizacije. Definirajmo najprije pojam krivulje, a potom i pojam regularne krivulje u $\mathbb{R}^n$, [4].

Definicija 3.1. *Krivulja c u $\mathbb{R}^n$ je glatko preslikavanje s otvorenog intervala $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^n$*

$$c\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n.$$

U diferencijalnoj geometriji, za derivaciju krivulje $c(t) = (x(t), y(t))$ u $\mathbb{R}^2$ uobičajeno je pisati

$$\frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$

Definicija 3.2. *Krivulju $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ nazivamo regularnom ako je $\dot{c}(t) \neq \mathbf{0}$, $t \in I$. Točku krivulje za koju je $\dot{c}(t) = \mathbf{0}$ nazivamo singularnom.*

Uočimo da iz uvjeta regularnosti krivulje $\mathcal{C}$, zadane parametrizacijom $c\colon I \to \mathbb{R}^2$, slijedi $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0)$, $\forall t \in I$.
Pokazat ćemo da je jedinični tangencijalni vektor na regularnu ravninsku krivulju c u točki $c(t)$, dan izrazom

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}.$$

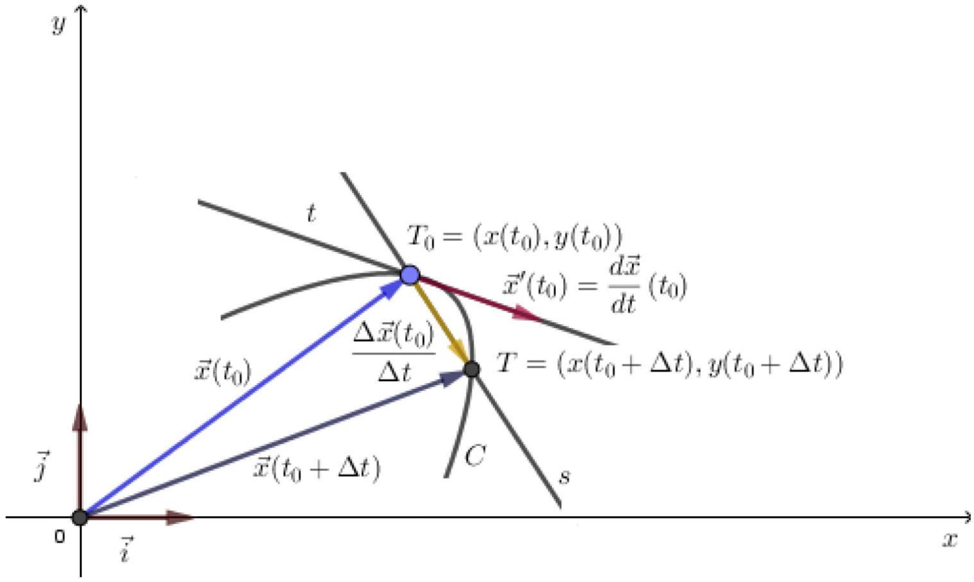
Kako je derivacija funkcije koeficijent smjera tangente na graf funkcije, to je u proizvoljnoj točki $T_0 = (x(t_0), y(t_0))$ vektor tangente na regularnu kivulju c dan sa

$$\dot{c}(t_0) = \frac{dc}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta c(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t_0 + \Delta t) - c(t_0)}{\Delta t},$$

gdje je $\Delta c(t_0) = c(t_0 + \Delta t) - c(t_0)$ prirast vektorske funkcije u točki $T_0 = (x(t_0), y(t_0))$.
Iz $\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ slijedi

$$\dot{x}(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},$$

$$\dot{y}(t_0) = \frac{dy}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}.$$



Slika 12: Tangenta krivulje

Dakle, jedinični tangencijalni vektor na regularnu krivulju $\mathcal{C}$ u točki dirališta $T_0 = (x(t_0), y(t_0))$ dan je jednadžbom

$$\mathbf{T}(t_0) = \frac{\dot{c}(t_0)}{\|\dot{c}(t_0)\|} = \frac{(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))}{\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}}.$$

Na analogan način definiramo tangencijalni vektor krivulje u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.3. *Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ regularna krivulja. Tada vektor $\dot{c}(t)$ nazivamo tangencijalnim vektorom ili vektorom brzine krivulje c u točki $c(t)$. Funkciju $\|\dot{c}(t)\|$ nazivamo brzinom krivulje c u točki $c(t)$. Za krivulju c kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je*

$$\|\dot{c}(t)\| = 1,\ t \in I.$$

Pravac koji prolazi točkom $c(t)$ i kojemu je $\dot{c}(t)$ vektor smjera nazivamo tangentom krivulje c u točki $c(t)$.

Primijetimo da smo derivaciju krivulje c označavali s $\dot{c}$, umjesto s c' kako smo naviknuli. Razlog tomu je što derivaciju krivulje parametrizirane općim parametrom označavamo s $\dot{c}$, dok derivaciju krivulje parametrizirane parametrom duljine luka označavamo s c'.
U nastavku navodimo primjer određivanja jednadžbe tangente krivulje, preuzet iz [2].

Primjer 3.1. *Odredi jednadžbu tangente na cikloidu parametarski zadanu s*

$$x(\varphi) = r(\varphi - \sin\varphi),\ y(\varphi) = r(1 - \cos\varphi),\ \varphi \in \mathbb{R},\ r > 0$$

u točki za koju je $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

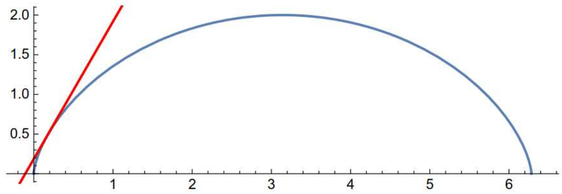
Rješenje. Tangenta je pravac čiji je vektor smjera tangencijalni vektor cikloide. Odredimo stoga najprije tangencijalni vektor u točki za koju je $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Njegove komponente su

$$x'(\frac{\pi}{3}) = r(1 - \cos\frac{\pi}{3}) = \frac{r}{2},\quad y'(\frac{\pi}{3}) = r\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

Jednadžba tangente zadane vektorom smjera (x', y') koja prolazi točkom (x_0, y_0) glasi $\dfrac{y-y_0}{y'} = \dfrac{x-x_0}{x'}$, tj. $y - y_0 = \dfrac{y'}{x'}(x - x_0)$ pa uvrštavanjem danih podataka slijedi

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}(x - \frac{r\pi}{3} - \frac{r\sqrt{3}}{2}),$$

odnosno jednadžba tangente na cikloidu je $y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}r\pi}{3} + 2r$.



Slika 13: Tangenta na cikloidu $c(\varphi) = (\varphi - \sin\varphi, 1 - \cos\varphi)$ u točki $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Dalje ćemo definirati zakrivljenost i torziju prostornih krivulja, veličine kojima je krivulja jednoznačno zadana. Kako smo vidjeli, krivulja c može biti zadana općim parametrom, ali i parametrom duljine luka, tj. parametrom t za koji vrijedi $\|\dot{c}(t)\| = 1$. Navest ćemo izraze za zakrivljenost i torziju krivulje za obje vrste parametara, no najprije utvrdimo da se svaka krivulja može zadati parametrom duljine luka, [4].

Definicija 3.4. *Krivulja $\tilde{c}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ naziva se reparametrizacijom krivulje $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ ako postoji glatki difeomorfizam $\varphi\colon \tilde{I} \to I$ za koji vrijedi $\tilde{c} = c \circ \varphi$, tj.*

$$\tilde{c}(\tilde{t}) = c(\varphi(\tilde{t})) = c(t),\ \tilde{t} \in \tilde{I},\ t \in I.$$

Teorem 3.1. *Svaka se regularna krivulja c može parametrizirati parametrom duljine luka.*

Dokaz. Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^n$, $c = c(t)$, te neka je $s = s(t)$ funkcija duljine luka od c, $s(t) = \int_a^t \|\dot{c}(u)\| du$. Vrijedi

$$\frac{ds(t)}{dt} = \|\dot{c}(t)\| > 0,$$

pa je $s = s(t)$ strogo rastuća funkcija. Nadalje, $s = s(t)$ je glatka funkcija. Inverzna funkcija $t = t(s)$ strogo rastuće funkcije s postoji i glatka je. Definirajmo sada

$$\tilde{c}(s) = c(t(s)).$$

Dakle, krivulju c smo reparametrizirali funkcijom $t = t(s)$ ili, drugačije zapisano, funkcijom $\varphi(s) = t$. Sada je

$$\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = \|\dot{c}(t(s))t'(s)\| = \|\dot{c}(t)\|\frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} = 1$$

te je $\tilde{c}$ jedinične brzine. □

Definirajmo sada zakrivljenost krivulje parametrizirane duljinom luka, [4].

Definicija 3.5. *Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana duljinom luka s. Funkciju $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ definiranu formulom*

$$\kappa(s) = \|c''(s)\|$$

nazivamo zakrivljenošću (fleksijom) krivulje c u točki $c(s)$.

Pravac je očito ravna krivulja, tj. nije zakrivljena krivulja i možemo ga karakterizirati s $\kappa = 0$.

Propozicija 3.1. *Regularna krivulja je pravac (dio pravca) ako i samo ako je $\kappa = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je krivulja pravac, tj. krivulja je dana parametrizacijom $c(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$. Tada je $c'(s) = a$, odnosno $c''(s) = \mathbf{0}$, pa slijedi $\kappa = 0$.
Obratno, pretpostavimo da je $\kappa = 0$. Tada slijedi $c''(s) = \mathbf{0}$, odnosno $c'(s) = a$, $a \in \mathbb{R}^n$ i integriranjem po varijabli s dobivamo $c(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Izraz za zakrivljenost krivulje zadane općim parametrom dan je sljedećom propozicijom, [4].

Propozicija 3.2. *Neka je c regularna krivulja u $\mathbb{R}^3$ parametrizirana općim parametrom t. Tada je njezina zakrivljenost*

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

Dokaz. Zakrivljenost krivulje c parametrizirane općim parametrom t definira se kao zakrivljenost njezine reparametrizacije $\tilde{c}$ duljinom luka s,

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s).$$

Za derivacije vrijedi

$$\tilde{c}' = \dot{c}\frac{dt}{ds}$$

$$\tilde{c}'' = \ddot{c}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{c}\frac{d^2t}{ds^2}.$$

Također,

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{c}\|, \ \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{c}\|}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\dot{c} \cdot \ddot{c}}{\|\dot{c}\|^4}.$$

Sada je

$$\tilde{c}'' = \ddot{c}\frac{1}{\|\dot{c}\|^2} + \dot{c}\left(-\frac{\dot{c} \cdot \ddot{c}}{\|\dot{c}\|^4}\right) = \frac{1}{\|\dot{c}\|^4}\left(\ddot{c}(\dot{c} \cdot \dot{c}) - \dot{c}(\dot{c} \cdot \ddot{c})\right).$$

Koristeći formulu $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$, uz $a = c = \dot{c}$, $b = \ddot{c}$ i činjenicu da su vektori $\dot{c}$ i $\dot{c} \times \ddot{c}$ okomiti, pa je $\|\dot{c} \times (\dot{c} \times \ddot{c})\| = \|\dot{c}\|\|\dot{c} \times \ddot{c}\|$ dobivamo sljedeće

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s) = \|\tilde{c}''(s)\| = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^4}\|\dot{c}(t) \times (\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t))\| = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3}$$

što smo i tvrdili. $\square$

Primjer 3.2. *Odredite zakrivljenost prostorne kubne parabole $c(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ u točki $(0, 0, 0)$.*

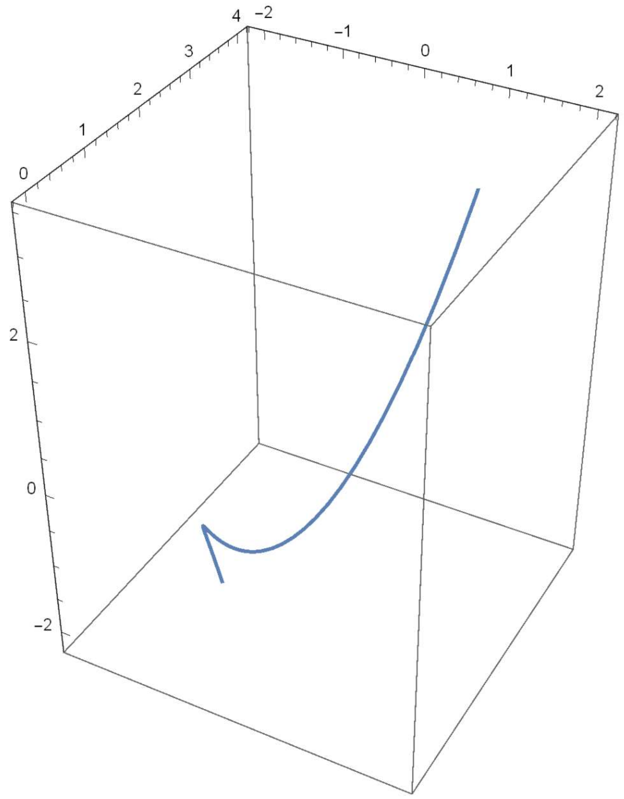
Rješenje. Odredimo najprije izraz za zakrivljenost prostorne kubne parabole. Deriviranjem krivulje $c(t) = (t, t^2, t^3)$ dobivamo $\dot{c}(t) = (1, 2t, 3t^2)$ te je $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$. Kako je $\ddot{c}(t) = (0, 2, 6t)$, to je

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = (6t^2, -6t, 2),$$

pa imamo da je $\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$. Prema Propoziciji 3.2, zakrivljenost krivulje je dana s

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}},$$

a u točki $(0, 0, 0)$ (koju dobivamo za $t = 0$) je $\kappa(0) = 2$.



Slika 14: Prostorna kubna parabola

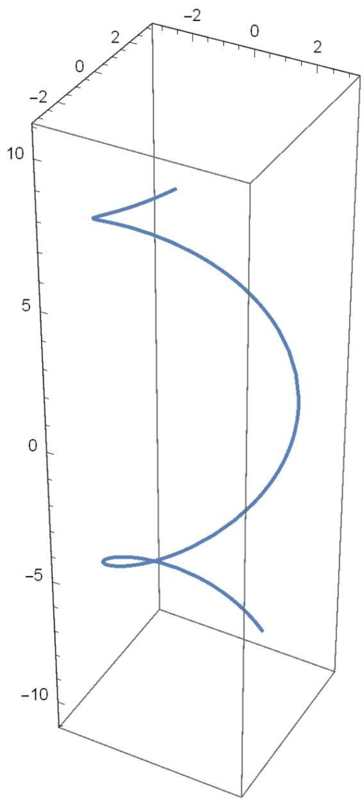
Primjer 3.3. *Obična cilindrična spirala* $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ *primjer je krivulje konstantne zakrivljenosti.*

Rješenje. Deriviranjem krivulje $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ dobivamo $\dot{c}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ te $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Nadalje imamo $\ddot{c}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$, što daje

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2),$$

pa je $\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\| = a^2\sqrt{a^2 + b^2}$. Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u izraz za zakrivljenost, dobivamo

$$\kappa(t) = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$



Slika 15: Obična cilindrična spirala za $a = 3,\ b = 2$

U nastavku ćemo definirati vektorska polja vezana uz krivulju koja čine tzv. ortonormirani trobrid (reper), tj. desnu ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3_{c(s)}$ u svakoj točki krivulje. Vektorski prostor $\mathbb{R}^3_{c(s)}$ jest prostor svih vektora u točki $c(s)$.
Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana duljinom luka. Polje $T(s) = c'(s)$ je jedinično tangencijalno polje od c. Polje vektora glavnih normala definiramo kao

$$N(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}, \quad c''(s) \neq 0,$$

a polje binormala

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Tada je $(T(s), N(s), B(s))$ desna ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3_{c(s)}$. Nazivamo je *Frenet-ovim (Frenet-Serret-ovim) trobridom (reperom, okvirom)* krivulje c.

Definicija 3.6. *Funkcija $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

naziva se torzijom (sukanjem) krivulje c parametrizirane duljinom luka u točki $c(s)$.

Uočimo da Frenetov trobrid možemo definirati samo za krivulje c za koje vrijedi $c'' \neq 0$. Takve krivulje nazivamo dopustivim krivuljama. Uočimo i da pravac nije dopustiva krivulja. Izraz za torziju dopustive krivulje zadane općim parametrom dan je sljedećom propozicijom.

Propozicija 3.3. *Neka je c dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom t. Tada vrijedi*

$$\tau = \frac{(\dot{c} \times \ddot{c}) \cdot \dddot{c}}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2} = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2}.$$

Dokaz. Neka je $\tilde{c}$ reparametrizacija od c duljinom luka, $\tilde{c} = c(t)$. Pokažimo najprije da navedena formula vrijedi za torziju krivulje parametrizirane duljinom luka.
Neka je $(\widetilde{T}(s), \widetilde{N}(s), \widetilde{B}(s))$ Frenetov trobrid od $\tilde{c}$. Tada je torzija $\tilde{\tau}$ od $\tilde{c}$ jednaka

$$\tilde{\tau} = -\widetilde{N} \cdot \widetilde{B}' = -\widetilde{N} \cdot (\widetilde{T} \times \widetilde{N})' = -\widetilde{N} \cdot (\widetilde{T}' \times \widetilde{N} + \widetilde{T} \times \widetilde{N}') = -\widetilde{N} \cdot (\widetilde{T} \times \widetilde{N}').$$

Iz definicije slijedi

$$\widetilde{N} = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \widetilde{T}' = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \tilde{c}'',$$

a onda imamo da je

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau} &= -\frac{1}{\tilde{\kappa}} \tilde{c}'' \cdot (\tilde{c}' \times \frac{d}{ds}(\frac{1}{\tilde{\kappa}} \tilde{c}'')) \\
&= -\frac{1}{\tilde{\kappa}} \tilde{c}'' \cdot (\tilde{c}' \times (\frac{1}{\tilde{\kappa}} \tilde{c}''' - \frac{\tilde{\kappa}'}{\tilde{\kappa}^2} \tilde{c}'')) \\
&= -\frac{1}{\tilde{\kappa}^2} \tilde{c}'' \cdot (\tilde{c}' \times \tilde{c}''') + \frac{\tilde{\kappa}'}{\tilde{\kappa}^3} \tilde{c}'' \cdot (\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \\
&= \frac{1}{\tilde{\kappa}^2} (\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''.
\end{aligned}$$

Preostaje pokazati da je za krivulje parametrizirane duljinom luka zakrivljenost dana i sljedećom formulom

$$\tilde{\kappa}^2(s) = \|\tilde{c}'(s) \times \tilde{c}''(s)\|^2.$$

Zaista,

$$\|\tilde{c}'(s) \times \tilde{c}''(s)\|^2 = \|\tilde{c}'(s)\|^2 \|\tilde{c}''(s)\|^2 \sin^2 \angle(\tilde{c}'(s), \tilde{c}''(s)) = \|\tilde{c}''(s)\|^2,$$

te je formula opravdana za krivulje parametrizirane duljinom luka.
Nadalje, za parametrizacije $\tilde{c} = \tilde{c}(s)$ i $c = c(t)$ vrijedi

$$\tilde{c}' = \dot{c} \frac{dt}{ds}$$

$$\tilde{c}'' = \ddot{c} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{c} \frac{d^2 t}{ds^2}$$

$$\tilde{c}''' = \dddot{c} \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\ddot{c} \frac{dt}{ds} \frac{d^2 t}{ds^2} + \dot{c} \frac{d^3 t}{ds^3}.$$

Torziju od c definiramo kao torziju od njezine reparametrizacije $\tilde{c}$ duljinom luka u odgovarajućoj točki

$$\tau(t) = \tilde{\tau}(s).$$

Vrijedi

$$\tilde{c}' \times \tilde{c}'' = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \dot{c} \times \ddot{c},$$

$$(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}''' = \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 (\dot{c} \times \ddot{c}) \cdot \dddot{c}.$$

Prema tome je

$$\frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\|^2} = \frac{(\dot{c} \times \dddot{c}) \cdot \dddot{c}}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2}.$$

$\square$

Primjer 3.4. *Odredite Frenetov trobrid obične cilindrične spirale* $c(s) = (\cos\frac{\sqrt{2}s}{2}, \sin\frac{\sqrt{2}s}{2}, \frac{\sqrt{2}s}{2})$ *parametrizirane duljinom luka.*

Rješenje. Frenetov trobrid krivulje čine tangencijalno polje, polje normala i polje binormala. Najprije odredimo tangencijalno vektorsko polje krivulje

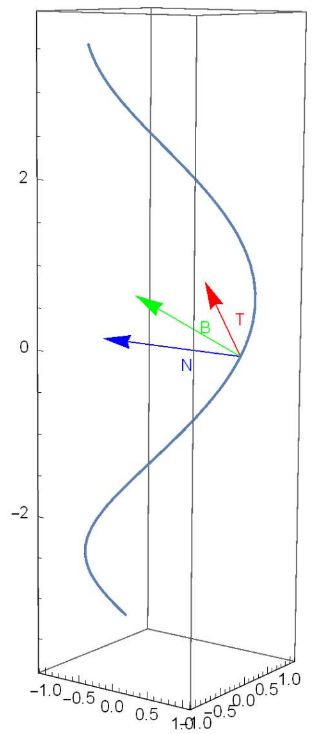
$$T(s) = c'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin\frac{\sqrt{2}}{2}s, \cos\frac{\sqrt{2}}{2}s, 1).$$

Polje normala je dano s

$$N(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} = (-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}s, -\sin\frac{\sqrt{2}}{2}s, 0),$$

a polje binormala s

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}s, -\cos\frac{\sqrt{2}}{2}s, 1).$$



Slika 16: Tangencijalni vektor T, vektor normale N i vektor binormale B u točki krivulje $c(s) = (\cos\frac{\sqrt{2}s}{2}, \sin\frac{\sqrt{2}s}{2}, \frac{\sqrt{2}s}{2})$ za $s = 0$

Sada ćemo promatrati specijalne klase krivulja i njihovu diferencijalno-geometrijsku karakterizaciju pomoću fleksije i torzije te ćemo navesti fundamentalni teorem za krivulje, [4].

Definicija 3.7. *Za krivulju* $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ *kažemo da je ravninska ako postoji ravnina* $\pi \subset \mathbb{R}^3$ *takva da je* $c(I) \subset \pi$.

Propozicija 3.4. *Neka je* $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ *dopustiva krivulja. Krivulja* c *je ravninska ako i samo ako je* $\tau = 0$.

Propozicija 3.5. *Neka je* $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ *dopustiva krivulja. Tada je* $c(I)$ *kružnica (dio kružnice) radijusa* $r > 0$ *ako i samo ako je* $\kappa = konst. = \frac{1}{r} > 0,\ \tau = 0$.

Definicija 3.8. *Za krivulju* $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ *kažemo da je opća cilindrična spirala ako duž* c *postoji jedinično i konstantno vektorsko polje* E *koje s krivuljom* c *zatvara konstantni kut, odnosno*

$$T(s) \cdot E = \cos\varphi = konst.,$$

gdje je $T(s)$ *jedinično tangencijalno polje od* c.

Propozicija 3.6. *Dopustiva krivulja* $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ *je opća cilindrična spirala ako i samo ako je*

$$\frac{\tau}{\kappa} = konst.$$

Dokazi navedenih propozicija mogu se pogledati u [4].

Primjer 3.5. *Pokažimo da je krivulja zadana parametrizacijom* $c(t) = (2t, \ln t, t^2)$, $t > 0$ *opća cilindrična spirala.*

Rješenje. Pokazat ćemo da je krivulja opća cilindrična spirala tako što ćemo pokazati da vrijedi $\dfrac{\tau(t)}{\kappa(t)} = konst.$ Kako je

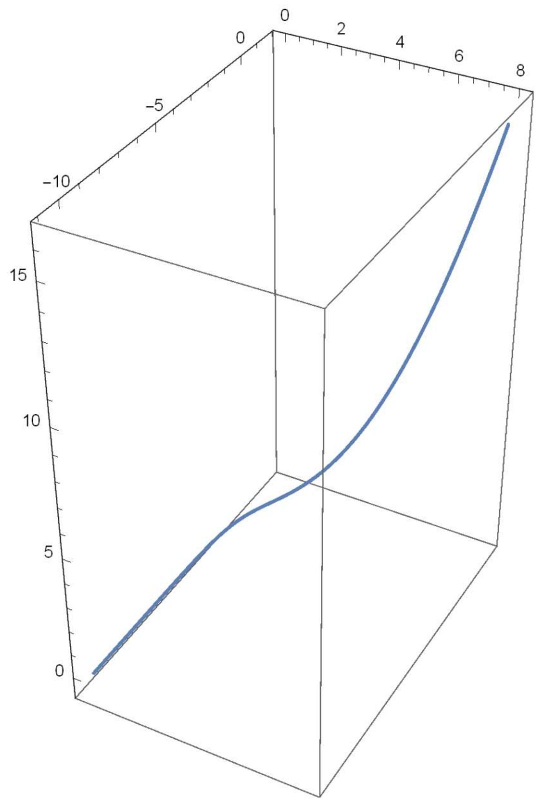
$$\dot{c}(t) = (2, \frac{1}{t}, 2t), \quad \ddot{c}(t) = (0, -\frac{1}{t^2}, 2), \quad \dddot{c}(t) = (0, \frac{2}{t^3}, 0),$$

uvrštavanjem u izraze za zakrivljenost, odnosno torziju dobivamo

$$\kappa(t) = \frac{2t}{(1+2t^2)^2}, \quad \tau(t) = -\frac{2t}{(1+2t^2)^2}.$$

Očito je $\dfrac{\tau(t)}{\kappa(t)} = -1$.
Prema fundamentalnom teoremu za krivulje, svaka krivulja je na jedinstven način (do na položaj u prostoru) zadana zakrivljenošću i torzijom, [4].

Teorem 3.2 (Fundamentalni teorem za krivulje)**.** *Neka su* $\kappa, \tau\colon I \to \mathbb{R}$ *glatke funkcije,* $\kappa(s) > 0,\ s \in I$. *Tada postoji krivulja* $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ *kojoj je* s *parametar duljine luka, a funkcije* $\kappa(s)$ *i* $\tau(s)$ *fleksija i torzija.*
Nadalje, ako je $\bar{c}\colon I \to \mathbb{R}^3$ *neka druga krivulja s tim svojstvima, tada postoji pozitivna izometrija prostora* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f = t \circ r$, *gdje je* t *translacija,* $t(x) = x + a$, r *rotacija (tj. ortogonalni operator determinante 1) tako da je* $\bar{c} = f(c) = r(c) + a$.



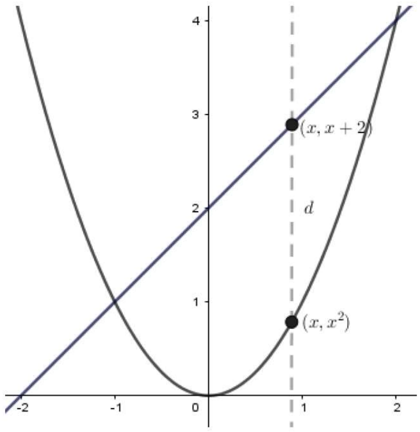
Slika 17: Opća cilindrična spirala $c(t) = (2t, \ln t, t^2)$

3.2 Optimizacijski problemi u geometriji

Pojam optimizacijski problem podrazumijeva odabir najboljeg elementa, iz nekog skupa dopustivih vrijednosti, s obzirom na neki kriterij. Najčešće se problem optimizacije svodi na minimizaciju ili maksimizaciju neke funkcije, koju obično zovemo funkcija troška, te izračunavanje vrijednosti te funkcije. U geometriji postoji mnogo problema u kojima želimo pronaći najveću ili najmanju vrijednost funkcije. Kao funkciju možemo promatrati opseg ili površinu lika ili volumen tijela, a kao nezavisnu varijablu funkcije možemo uzeti neki parametar danog lika, odnosno tijela, kao što je duljina stranice, kut između dviju stranica i slično. Napomenimo da ekstremne vrijednosti funkcije, odnosno minimum i/ili maksimum, tražimo uz pomoć derivacija. U nastavku ćemo promotriti nekoliko općenitih primjera optimizacijskog problema, preuzetih iz [2] i [5].

Primjer 3.6. *Odredite najveću vertikalnu udaljenost između pravca $y = x + 2$ i parabole $y = x^2$ na segmentu $[-1, 2]$.*

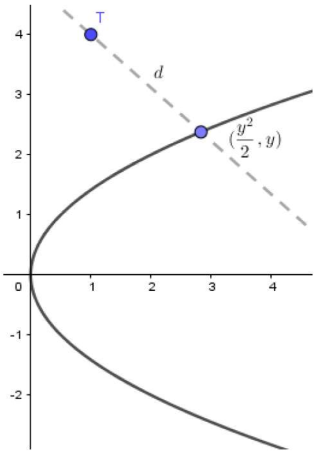
Rješenje. Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 2 = 0$ dobivamo da točke presjeka danog pravca i parabole imaju apscise -1 i 2. Prema navedenom, dani segment $[-1, 2]$ odgovara dijelu grafa na kojem je pravac iznad parabole. Vertikalna udaljenost pravca i parabole na danom segmentu $[-1, 2]$ iznosi $d(x) = x + 2 - x^2$. Budući da je $d'(x) = -2x + 1$, to je $x_0 = \frac{1}{2}$ jedina stacionarna točka. Iz $d(-1) = d(2) = 0$ i $d(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$ slijedi da je $x_0 = \frac{1}{2}$ točka u kojoj se postiže najveća udaljenost, a ona iznosi $d(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$.



Slika 18: Vertikalna udaljenost između pravca $y = x + 2$ i parabole $y = x^2$ na segmentu $[-1, 2]$

Primjer 3.7. *Odredite točku na paraboli $y^2 = 2x$ koja je najbliža točki $T(1, 4)$.*

Rješenje. Točke koje pripadaju danoj paraboli imaju oblik $(\frac{y^2}{2}, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Stoga je udaljenost točke $T(1, 4)$ do točke na paraboli dana formulom $d(y) = \sqrt{(\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2}$. Budući da funkcije d i $f := d^2$ postižu minimum u istim točkama, u nastavku ćemo tražiti točku minimuma funkcije $f(y) = (\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2$, $y \in \mathbb{R}$. Kako je prva derivacija funkcije f jednaka $f'(y) = y^3 - 8$, to je stacionarna točka $y_0 = 2$. Budući da je druga derivacija funkcije f jednaka $f''(y) = 3y^2$, uvrštavanjem točke $y_0 = 2$ dobivamo $f''(2) = 12 > 0$ te se u stacionarnoj točki postiže minimum funkcija f i d. Dakle, točka na paraboli koja je najbliža točki $T(1, 4)$ je točka $(2, 2)$, a udaljenost iznosi $d(2) = \sqrt{5}$.



Slika 19: Točka na paraboli $y^2 = 2x$ koja je najbliža točki $T(1, 4)$

Primjer 3.8. *Dostupno je $12m^2$ materijala za izradu kutije kvadratnog dna i otvorenog vrha. Odredite dimenzije kutije koja se može napraviti od dostupnog materijala, a koja ima najveći volumen.*

Rješenje. Uzmimo da je a duljina stranice baze kutije i h visina kutije. Tada je volumen kutije dan izrazom $V = a^2h$. Oplošje kutije je jednako $O = a^2 + 4ah$, a dostupno je $12m^2$ materijala pa imamo da je $h = \frac{12-a^2}{4a}$. Dakle, trebamo maksimizirati funkciju

$V(a) = a^2 \cdot \frac{12-a^2}{4a} = 3a - \frac{1}{4}a^3,\ a \in \langle 0, +\infty \rangle$. S obzirom da je $V'(a) = 3 - \frac{3}{4}a^2$, stacionarna točka je $a_0 = 2$. Kako je $V''(a) = -\frac{3}{2}a$ i $V''(2) < 0$, to je a_0 točka lokalnog maksimuma. Sada iz $\lim\limits_{a \to 0^+} V(a) = 0$ i $\lim\limits_{a \to +\infty} V(a) = -\infty$ slijedi da je a_0 i točka globalnog maksimuma. Volumen je maksimalan za bazu s duljinom stranice $a = 2$ i visinom $h = 1$ te iznosi $V(2) = 4m^3$.

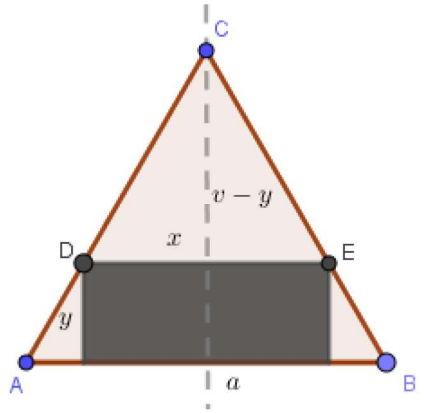
U geometriji možemo promatrati i tzv. **izoperimetrijski problem**. Tim pojmom opisan je problem određivanja geometrijskog lika najveće površine među likovima jednakog opsega, odnosno geometrijskog lika najmanjeg opsega među likovima jednake površine. U pozadini izoperimetrijskih problema je određivanje ekstrema funkcije, odnosno određivanje minimuma i maksimuma funkcije primjenom derivacija.

Primjer 3.9. *Između svih pravokutnika zadanog opsega $2s$, odredite onaj s najvećom površinom.*

Rješenje. Označimo li duljine stranica traženog pravokutnika slovima a i b, tada je opseg toga pravokutnika dan formulom $O = 2a + 2b$. Iz uvjeta zadatka znamo da je $O = 2s$. Izjednačavanjem ovih jednakosti imamo $2s = 2a + 2b$, tj. $s = a + b$. Dakle, $a = s - b$ te smo duljinu jedne stranice izrazili pomoću s koji je konstantan i poznat te duljine druge stranice koju trebamo odrediti uz uvjet da površina pravokutnika bude maksimalna. Znamo da je površina pravokutnika dana formulom $P = a \cdot b$ pa uvrštavanjem izraza za a imamo $P(b) = (s-b) \cdot b$. Ukoliko dodatno raspišemo ovaj izraz, dobivamo $P(b) = (s-b) \cdot b = sb - b^2$. Deriviranjem tog izraza slijedi $P'(b) = s - 2b$ te primjenom nužnog uvjeta ekstrema imamo $b = \frac{1}{2}s$. Kako je $P''(b) = -2 < 0$, to se u točki b postiže maksimum funkcije P. Nadalje, $a = s - b = s - \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}s$. Dakle, između svih pravokutnika zadanog opsega $2s$, najveću površinu ima kvadrat sa stranicom duljine $a = \frac{1}{2}s$.

Primjer 3.10. *Odredite duljinu stranice pravokutnika maksimalne površine koji se može upisati u jednakostranični trokut duljine stranica a ako jedna stranica pravokutnika leži na bazi trokuta.*

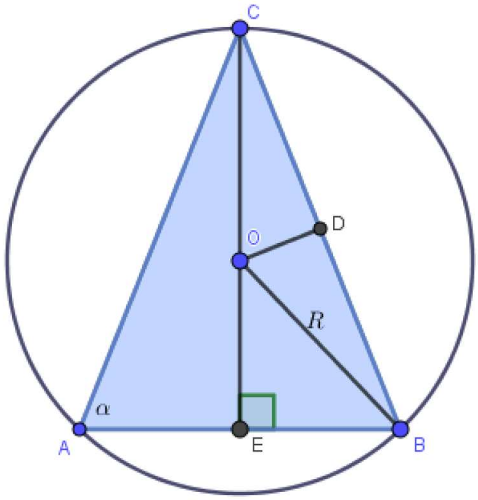
Rješenje. Neka su duljine stranica traženog pravokutnika x i y. Na temelju slike možemo zaključiti da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle DEC$ slični po $K - K - K$ poučku o sličnosti trokuta. Iz te sličnosti slijedi $(v - y) : v = x : a$, gdje je $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ visina trokuta $\triangle ABC$. Dakle, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$, odnosno površina upisanog prvokutnika iznosi $P(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(a - x),\ x \in \langle 0, a \rangle$. Budući da je $P'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - 2x)$, jedina stacionarna točka je $x_0 = \frac{a}{2}$. Kako je $P''(x_0) < 0$, to je x_0 točka lokalnog maksimuma funkcije P. Nadalje, zbog $\lim\limits_{x \to 0^+} P(x) = \lim\limits_{x \to a^-} P(x) = 0$ je točka x_0 i točka globalnog maksimuma. Dakle, za $x = \frac{a}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}a$ funkcija P postiže globalni maksimum koji iznosi $P(\frac{a}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$.



Slika 20: Pravokutnik upisan u jednakostranični trokut duljine stranica a

Primjer 3.11. *Među svim jednakokračnim trokutima upisanima unutar kruga, jednakostranični ima najveću površinu.*

Rješenje. Neka je zadan jednakokračan trokut $\triangle ABC$ sa kutom α pri osnovici. Tada je polovina kuta pri vrhu C jednaka $90° - \alpha$. Središte trokutu opisane kružnice označimo s O, polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ s D i E, te polumjer trokutu opisane kružnice s R.



Slika 21: Jednakokračni trokut ABC

Uzevši to u obzir, vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\measuredangle ACB = 180° - 2\alpha \\
&\measuredangle BCE = \measuredangle OCD = 90° - \alpha \\
&|OB| = |OC|,\ |BD| = |CD| \\
&\measuredangle OBD = \measuredangle OCD = 90° - \alpha \\
&\measuredangle OBE = \alpha - (90° - \alpha) = 2\alpha - 90° \\
&|OE| = R\sin(2\alpha - 90°) = R(-\cos(2\alpha)) = -R\cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

Budući da za dužinu $\overline{CE}$ vrijedi $|CE| = R + |OE|$, to je $|CE| = R - R\cos(2\alpha)$, odnosno $|CE| = R(1 - \cos(2\alpha))$. Primjenimo li sada trigonometriju na pravokutni trokut $\triangle BOE$

dobit ćemo da je $|AB| = 2|EB| = 2R\cos(2\alpha - 90^\circ) = 2R\sin(2\alpha)$. Dakle, površina trokuta $\triangle ABC$ je

$$P(\triangle ABC) = \frac{|AB| \cdot |CE|}{2} = R^2(1 - \cos(2\alpha))\sin(2\alpha).$$

Uzmemo li u obzir navedene jednakosti, dolazimo do zaključka kako je za maksimiziranje površine trokuta $\triangle ABC$ potrebno pronaći maksimum funkcije $f(\beta) = \sin\beta(1-\cos\beta)$, gdje je $\beta = 2\alpha$. Primjenom nužnog uvjeta ekstrema slijedi $f'(\beta) = \cos\beta(1-\cos\beta) + \sin\beta\sin\beta = \cos\beta - \cos\beta^2 + (1 - \cos\beta^2) = -2\cos\beta^2 + \cos\beta + 1 = 0$, a rješavanjem ove kvadratne jednadžbe slijedi $\cos\beta = -\frac{1}{2}$ pa je $\beta = 120^\circ$. Kako je $\beta = 2\alpha$, to je $\alpha = 60^\circ$ pa je trokut $\triangle ABC$ jedakostraničan. Stoga, među svim jednakokračnim trokutima upisanima unutar kruga, jednakostranični ima najveću površinu.

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[2] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Prehrambeno tehnološki fakultet Osijek i Elektrotehnički fakultet Osijek, Osijek, 1998.

[4] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, interna skripta kolegija Uvod u diferencijalnu geometriju, verzija 2.4, Matematički odsjek, Prirodoslovno matematički fakultet Zagreb

[5] I.-M. Polić, *Izoperimetrijski problem* - Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2017.
https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A924/datastream/PDF/view

[6] Š. Ungar, *Matematiča analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet - MATEMATIČKI ODJEL, Zagreb, 2002.

[7] Tangenta regularne krivulje u $\mathbb{R}^2$
http://www.math.uniri.hr/~msosic/Uvod%20u%20dif%20geometriju/Predavanja/05_Tangenta%20krivulje.pdf

Sažetak i ključne riječi

U matematici pojam *derivacija funkcije* predstavlja osnovni pojam diferencijalnog računa. Mnogi problemi u prirodnim, tehničkim i društvenim znanostima rješavaju se pomoću derivacije funkcije. U ovom radu pobliže je opisan pojam derivacije funkcije jedne varijable te primjene derivacije funkcije jedne varijable u geometriji. Na samom početku dan je povijesni pregled razvoja diferencijalnog računa. Navedeni su najvažniji matematičari i njihov doprinos razvoju diferencijalnog računa, koji se razvijao zajedno s integralnim računom pod zajedničkim imenom *infinitezimalni račun*. Pojam derivacije funkcije uveden je pomoću problema linearne aproksimacije. Definirana je derivacija funkcije u točki te su dana pravila za deriviranje elementarnih funkcija, složene i inverzne funkcije. U radu su spomenuti osnovni teoremi diferencijalnog računa te je dana njihova geometrijska interpretacija. Nakon toga je predstavljena lokalna teorija ravninskih, odnosno prostornih krivulja. Opisano je kako se određuje tangenta na ravninsku krivulju, definirana je zakrivljenost i torzija prostornih krivulja te je iskazan fundamentalni teorem za krivulje. Na samom kraju dani su primjeri optimizacijskih problema u geometriji, koji se rješavaju primjenom derivacije funkcije.

Ključne riječi: derivacija funkcije, tangenta, krivulja, parametar duljine luka, zakrivljenost, torzija, optimizacijski problem

Applications of derivative of a single variable function in geometry

In mathematics, the term *function derivative* is the basic concept of differential calculus. Many problems in the natural, technical, and social sciences can be solved by function derivative. In this work, the notion of function derivative and its application in geometry are described in more details. At the very beginning, a historical overview of the development of the differential calculus is given. The most important mathematicians and their contribution to the development of differential calculus, which developed together with integral calculus under the common name of *infinitesimal calculus*, are listed. The notion of function derivative using the problem of linear approximation is introduced. The derivative of a function at a point is defined and the derivative rules for elementary functions, composition of functions and inverse functions are given. In the work are given the basic theorems of differential calculus and their geometric interpretation. After that, the local theory of plane or spatial curves is presented. It is described how the tangent to a plane curve is determined, the curvature and torsion of spatial curves are defined, and the fundamental theorem for curves is presented. At the very end, examples of optimization problems in geometry are given, which are solved by applying a function derivative.

Keywords: function derivative, tangent, curve, arc length parameter, curvature, torsion, optimization problem

Životopis

Rođena sam 1. studenoga 1997. godine u Virovitici. Trenutno živim u Mikleušu gdje sam završila osnovnu školu. Nakon osnovnoškolskog obrazovanja nastavljam školovanje u Slatini gdje upisujem opću gimnaziju u Srednjoj školi Marka Marulića Slatina. Po završetku gimnazije, 2016. godine, upisujem integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u sklopu Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.