Verižni razlomci

Gavran, David

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:181094

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-17**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Informatics

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

David Gavran

Verižni razlomci

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

David Gavran

Verižni razlomci

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Mirela Jukić Bokun

Osijek, 2021.

Sažetak:
U ovom radu bavit ćemo se verižnim razlomcima. Proučavat ćemo osnovna svojstva verižnih razlomaka, konačne i beskonačne verižne razlomke te njihove konvergente. Detaljnije ćemo proučiti svojstva periodskih verižnih razlomaka. Na kraju rada ćemo navesti neke zanimljive primjene vezane za verižne razlomke.

Ključne riječi:
verižni razlomci, konačni verižni razlomci, beskonačni verižni razlomci, periodski verižni razlomci, konvergente, diofantske jednadžbe

Continued fractions

Abstract:
In this work, we will deal with continued fractions. We will study the basic properties of continued fractions, finite and infinite continued fractions, and their convergents. In more detail, we will study the properties of the periodic continued fractions. In addition, we will list some interesting applications related to continued fractions.

Keywords:
continued fractions, finite continued fractions, infinite continued fractions, periodic continued fractions, convergents, diophantine equations

Sadržaj

Uvod 1

1. Osnovni pojmovi i svojstva 2

1.1. Definicija i osnovna svojstva . . . 2

1.2. Konvergente . . . 3

2. Konačni verižni razlomci 6

3. Beskonačni verižni razlomci 10

3.1. Periodski verižni razlomci . . . 11

4. Primjene verižnih razlomaka 15

4.1. Linearne diofantske jednadžbe . . . 15

4.2. Pellove i pellovske jednadžbe . . . 16

4.3. Problem kalendara . . . 17

4.4. Razvoj Fibonaccijevih brojeva u verižni razlomak . . . 17

Literatura 19

Uvod

Početkom verižnih razlomaka smatra se vrijeme starogrčkog matematičara Euklida iz Atene, točnije vrijeme nastanka Euklidovog algoritma. Jedan od ranijih matematičara koji su proučavali verižne razlomke je i indijski matematičar Aryabhata $(475.-550.)$. Aryabhata je koristio verižne razlomke u određivanju rješenja linearnih diofantskih jednadžbi, no on nije imao dobro razvijenu opću metodu, već je razlomke koristio u nekim određenim primjerima. Smatra se da moderna teorija verižnih razlomaka počinje u 16. i 17. stoljeću u doba talijanskih matematičara R. Bombellia i P. Cataldia. Nakon njih svojim proučavanjima teorije verižnih razlomaka veliki doprinos su dali matematičari: J. Wallis, C. Huygens, L. Euler, J. Lambert, J. L. Lagrange, C. F. Gauss i drugi. U 18. stoljeću Euler je uočio kako Euklidov algoritam pomaže pri postupku razvoja racionalnog broja u verižni razlomak. U 19. stoljeću znatno se povećava proučavanje verižnih razlomaka i upravo se to stoljeće smatra zlatnim dobom verižnih razlomaka. Verižni razlomci koriste se u numeričkoj aproksimaciji i u računu s transcendentalnim funkcijama[1]. Upravo te primjene jamče da će se verižni razlomci uvijek upotrebljavati i da nikada neće biti zaboravljeni. Također, verižni razlomci imaju mnogobrojnu primjenu.
U prvom poglavlju definiramo verižne razlomke i osnovna svojstva. Navodimo algoritam za razvoj realnog broja u verižni razlomak te na kraju poglavlja govorimo o konvergentama i o nekim njihovim relacijama.
Drugo poglavlje govori nešto više o konačnim verižnim razlomcima. Pokazan je postupak i primjer razvijanja racionalnog broja u verižni razlomak pomoću Euklidovog algoritma.
U trećem poglavlju navodimo primjere beskonačnih verižnih razlomaka te da je zapis iracionalnog broja u beskonačan verižni razlomak jedinstven. Opisan je periodski verižni razlomak te je naveden još jedan postupak dobivanja beskonačnog verižnog razlomka. Naveden je algoritam za razvoj kvadratne iracionalnosti u verižni razlomak i primjer.
U posljednjem, četvrtom poglavlju opisujemo neke primjene u kojima se pojavljuju verižni razlomci.

[1]Eksponencijalne, trigonometrijske funkcije i logaritmi

1. Osnovni pojmovi i svojstva

1.1. Definicija i osnovna svojstva

Definirajmo najprije verižne razlomke i navedimo njihova osnovna svojstva.

Definicija 1.1. *Svaki izraz oblika* $\alpha = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots}}}}$

gdje su a_i, b_i *proizvoljni izrazi nazivamo verižni razlomak.*

Definicija 1.2. *Brojevi* a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ *zovu se parcijalni kvocijenti verižnog razlomka. Ukoliko je* a_0 *cijeli broj, a* a_i *prirodni brojevi te* $b_i = 1$, $i = 1, \ldots,$ *tada kažemo da je verižni razlomak jednostavan. Jednostavan verižni razlomak možemo kraće zapisati kao* $[a_0, a_1, \ldots]$.

Navedimo nekoliko jednostavnih svojstava verižnih razlomaka.

Napomena 1.1. *(**Osnova svojstva.**)*

a) $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$,

b) $\frac{1}{[a_0, a_1, \ldots, a_n]} = [0, a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

U nastavku donosimo algoritam za razvoj realnog broja u jednostavni verižni razlomak. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je $\lfloor \alpha \rfloor = a_0$. Ako je $\alpha \neq a_0$, onda α pišemo u obliku $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, gdje

je $\alpha_1 > 1$ te stavimo $\lfloor \alpha_1 \rfloor = a_1$. Ako je $\alpha_1 \neq a_1$, onda α_1 pišemo u obliku $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$, gdje je $\alpha_2 > 1$ te stavimo $\lfloor \alpha_2 \rfloor = a_2$. Proces možemo nastaviti sve dok ne bude da je $\alpha_n = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Kada je $\alpha_n = a_n$ tada vrijedi:

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Takav razlomak zovemo konačni verižni razlomak te pišemo $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.
Ako je $\alpha_n \neq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ onda dobijemo beskonačan razvoj u verižni razlomak koji je oblika

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Beskonačan verižni razlomak možemo kraće zapisati kao $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Napomena 1.2. *Uočimo da je $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}$, za sve i.*

1.2. Konvergente

Definicija 1.3. *Svaki racionalan broj*

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

za $k \leq n$ zovemo k-ta konvergenta od $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Teorem 1.1. *Brojnik p_k i nazivnik q_k, k-te konvergente od $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ zadovoljavaju sljedeće rekurzivne relacije:*

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1 a_0 + 1, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, & q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, \end{aligned}$$

za $k \in \{2, 3, 4, \ldots, n\}$.

Dokaz. Kada je $k = 0$ imamo $c_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ te je $q_0 = 1$ i $p_0 = a_0$. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije.
Baza indukcije: za $k = 2$, vrijedi

$$\begin{aligned} c_2 &= [a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} \\ &= a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1} \\ &= \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + 1}. \end{aligned}$$

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da za $k = m$ tvrdnja vrijedi te tada imamo

$$c_m = [a_0, a_1, \ldots, a_m] = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}}.$$

Korak indukcije: pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $k = m + 1$, točnije da vrijedi

$$c_{m+1} = [a_0, a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}] = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}}.$$

Uočimo da nam je $c_{m+1} = [a_0, a_1, \ldots, a_{m+1}] = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right)]$ zapis c_{m+1} pomoću m članova verižnog razlomka. Sada koristeći pretpostavku indukcije dobivamo

$$c_{m+1} = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right)] = \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}}.$$

Množeći brojnik i nazivnik prethodne jednakosti s a_{m+1} dobivamo

$$c_{m+1} = \frac{(a_m a_{m+1} + 1)p_{m-1} + a_{m+1}p_{m-2}}{(a_m a_{m+1} + 1)q_{m-1} + a_{m+1}q_{m-2}}.$$

Nakon množenja sa zagradom te izlučivanja a_{m+1} dobivamo

$$c_{m+1} = \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}}.$$

Kako nam je $a_m p_{m-1} + p_{m-2} = p_m$, odnosno, $a_m q_{m-1} + q_{m-2} = q_m$ onda c_{m+1} zapisujemo u obliku

$$c_{m+1} = \frac{a_{m+1}p_m + p_{m-1}}{a_{m+1}q_m + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$$

te tvrdnja vrijedi i za $k = m + 1$. □

Napomena 1.3. *Metodom matematičke indukcije može se pokazati da vrijedi relacija* $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}$, $k \geq -1$.

U beskonačnom verižnom razlomku uzmimo konačno mnogo članova $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$. Takav dobiveni izraz zovemo **k-tom konvergentom beskonačnog verižnog razlomka**. Konvergente zadovoljavaju ista svojstva kao i konvergente konačnog verižnog razlomka.

Propozicija 1.1. *Neka je* $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ *konvergenta u razvoju broja* x *u beskonačni verižni razlomak. Tada vrijedi:*

$$\mid x - c_n \mid < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Dokaz. Vidi [5]. □

Propozicija 1.2. *Neka je* $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ *konvergenta u razvoju broja* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *u beskonačni verižni razlomak. Za sve* $k \geq 1$ *vrijedi:*

$$a) \quad c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}},$$

$$b) \quad c_k - c_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}}.$$

Dokaz. Dokaz se provodi korištenjem rekurzivnih relacija za p_n i q_n.

$$\begin{aligned}
a) \quad c_k - c_{k-1} &= \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \\
&= \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k g_{k-1}}. \\
b) \quad c_k - c_{k-2} &= \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}} \\
&= \frac{(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} - p_{k-2}(a_k q_{k-1} + q_{k-2})}{q_k q_{k-2}} \\
&= \frac{a_k p_{k-1} q_{k-2} + p_{k-2} q_{k-2} - a_k q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-2} q_{k-2}}{q_k q_{k-2}} \\
&= \frac{a_k (p_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} p_{k-2})}{q_k q_{k-2}} = \frac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}}.
\end{aligned}$$

□

2. Konačni verižni razlomci

U ovom ćemo dijelu opisati svojstva konačnih verižnih razlomaka. Navedimo najprije jedan primjer konačnog verižnog razlomka.

Primjer 2.1. *Odredimo broj čiji je verižni razlomak zadan s* $[4,5,7]$ *:*

$$[4,5,7] = 4 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}} = \frac{151}{36}.$$

Teorem 2.1. *Svaki konačni verižni razlomak može se prikazati racionalnim brojem. Obratno, svaki racionalan broj možemo prikazati u obliku konačnog verižnog razlomka.*

Dokaz. Prvo pokažimo prvu tvrdnju, a nakon toga i obrat. Pomoću matematičke indukcije po duljini verižnog razlomka ćemo dokazati prvu tvrdnju. Uočimo da vrijedi $[a_0] = a_0$. Pokažimo sada prvi korak matematičke indukcije za $n = 1$.

$$[a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Kako je $a_0 \in \mathbb{Z}$ i $a_1 \in \mathbb{N}$, vrijedi da je $[a_0, a_1] \in \mathbb{Q}$ te smo tako pokazali bazu indukcije. Neka je $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ racionalan broj. Za $n > 1$ imamo

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]}.$$

Sada zbog pretpostavke $[a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{Q}$ možemo pisati

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

gdje nam je $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Sređivanjem desne strane jednakosti dobivamo $\frac{a_0 p + q}{p} \in \mathbb{Q}$, te smo time pokazali da je $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{Q}$.

Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da je $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $b > 0$. Pomoću matematičke indukcije po b pokazat ćemo da se $\frac{a}{b}$ može zapisati kao konačan verižni razlomak. Za $b = 1$, slijedi

$$\frac{a}{b} = a = [a].$$

Pretpostavit ćemo da se svaki racionalni broj kojemu je nazivnik manji od b može zapisati kao konačan verižni razlomak. Pomoću teorema o dijeljenju s ostatkom pišemo a u sljedećem obliku $a = ba_0 + r$, gdje je $a_0 \in \mathbb{Z}$ i r cijeli broj za koji vrijedi $0 \leq r < b$. Dijeljenjem dobivene jednakosti s b dobivamo,

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r}{b}.$$

U slučaju kad je $r = 0$, onda je $\frac{a}{b} = a_0 = [a_0]$ te tvrdnja vrijedi.
U slučaju kad je $r \neq 0$, tada je $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r}}$. Koristeći pretpostavku indukcije da je

$$\frac{b}{r} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

za neke $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Kako je $\frac{b}{r} > 1$ i a_1 je pozitivan broj, slijedi nam da je $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, a to je i trebalo dokazati. $\square$

Razvoj racionalnog broja u verižni razlomak može se dobiti i iz Euklidovog algoritma. Neka su $x \in \mathbb{Z}$ i $y \in \mathbb{N}$. Koristeći teorem o dijeljenju s ostatkom dobivamo niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
x &= yq_1 + r_1, & 0 &< r_1 < y \\
y &= r_1q_2 + r_2, & 0 &< r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 &< r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{j-2} &= r_{j-1}q_j + r_j, & 0 &< r_j < r_{j-1} \\
r_{j-1} &= r_jq_{j+1}.
\end{aligned}$$

Tada je $(x, y) = r_j$, tj. zadnjem ostatku koji nije nula [3].

Primjer 2.2. *Razvijmo racionalan broj $\frac{101}{31}$ u verižni razlomak. Odredimo najveći zajednički djelitelj pomoću Euklidovog algoritma na gore navedeni način. Postupak staje kada dobijemo ostatak jednak nuli. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned}
101 &= 3 \cdot 31 + 8, \\
31 &= 3 \cdot 8 + 7, \\
8 &= 1 \cdot 7 + 1, \\
7 &= 7 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Također, dijeljenje možemo pisati i na sljedeći način,

$$\begin{aligned}
\tfrac{101}{31} &= 3 + \tfrac{8}{31}, \\
\tfrac{31}{8} &= 3 + \tfrac{7}{8}, \\
\tfrac{8}{7} &= 1 + \tfrac{1}{7}.
\end{aligned}$$

Tada $\frac{101}{31}$ *možemo zapisati i ovako:*

$$\frac{101}{31} = 3 + \frac{8}{31} = 3 + \frac{1}{\frac{31}{8}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{7}{8}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{8}{7}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{1}{7}}}$$

ili $[3, 3, 1, 7]$ *te smo racionalan broj* $\frac{101}{31}$ *razvili u verižni razlomak.*

Analognim postupkom kao u prethodnom primjeru, može se pokazati da je razvoj u verižni razlomak broja $\frac{x}{y} = [q_0, q_1, \ldots, q_{n+1}]$, pri čemu su q_i, $i = 0, 1, \ldots, n + 1$, dobiveni postupkom danim u Euklidovom algoritmu.
Dokažimo u nastavku jedno svojstvo konačnih verižnih razlomaka vezano uz duljinu razvoja u verižni razlomak racionalnog broja.

Teorem 2.2. *Svaki racionalan broj* $\frac{x}{y}$ *može se zapisati u obliku jednostavnog verižnog razlomka tako da broj članova razvoja bude neparan ili paran.*

Dokaz. Neka je $\frac{x}{y} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Ako je $a_n = 1$ onda vrijedi

$$\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1} + 1}$$

te racionalan broj možemo prikazati u obliku:

$$\frac{x}{y} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1].$$

Ako je $a_n > 1$ onda vrijedi

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$$

te racionalan broj možemo prikazati u obliku:

$$\frac{x}{y} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n-1} - 1, 1].$$

$\square$

Primjenimo svojstva iz prethodnog teorema na jednom primjeru.

Primjer 2.3. *Vrijedi*

$$\frac{41}{8} = 5 + \frac{1}{8} = 5 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}},$$

tj. $\frac{41}{8} = [5, 8] = [5, 7, 1]$.

U sljedećem primjeru ćemo vidjeti kako se određuju konvergente u razvoju broja u verižni razlomak.

Primjer 2.4. *Odredimo konvergente racionalnog broja* $\frac{101}{31}$.
Znamo iz Primjera 2.2. da je razvoj broja $\frac{101}{31}$ *u verižni razlomak idući:*

$$\frac{101}{31} = 3 + \frac{8}{31} = 3 + \frac{1}{\frac{31}{8}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{7}{8}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{8}{7}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}.$$

Promotrimo idući postupak:

$$c_0 = \frac{p_0}{q_0} = [3] = 3,$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = [3, 3] = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3},$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = [3, 3, 1] = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{13}{4},$$

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = [3, 3, 1, 7] = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}} = \frac{101}{31}.$$

3. Beskonačni verižni razlomci

Navedimo nekoliko primjera beskonačnih verižnih razlomaka. Razvoji se dobiju korištenjem algoritma opisanog u prvom poglavlju.

Primjer 3.1. *a)*

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}},$$

$$\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164 0.$$

b)

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}} \approx \frac{97}{56}.$$

Propozicija 3.1. *Jednostavni beskonačni verižni razlomci predstavljaju iracionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da jednostavan beskonačan verižni razlomak predstavlja racionalan broj. Neka su a i b relativno prosti i $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \ldots]$ te $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ n-ta konvergenta verižnog razlomka. Za dovoljno velik n vrijedi $\mid b \mid < q_n$. Kako je $\frac{a}{b} \neq \frac{p_n}{q_n}$, množeći unakrsno dobijamo da vrijedi $aq_n - bp_n \neq 0$. Koristeći nejednakosti (Propozicija 1.1.) $\mid \frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n} \mid < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ i $\mid b \mid < q_n < q_{n+1}$, zaključujemo da vrijedi

$$0 < \mid aq_n - bp_n \mid < \frac{\mid b \mid}{q_{n+1}} < 1.$$

Kako je $aq_n - bp_n$ cijeli broj, došli smo do kontradikcije s pretpostavkom te smo dokazali tvrdnju. □

Teorem 3.1. *Neka za* $x \in \mathbb{I}$ *vrijedi*

$$x = [a_0, a_1, \ldots] = [b_0, b_1, \ldots],$$

gdje su a_n *i* b_n *cijeli brojevi. Tada je* $a_n = b_n$*, za* $n \geq 0$.

Dokaz. Vidi [5]. □

Prethodni teorem pokazuje da je zapis iracionalnog broja u obliku beskonačnog verižnog razlomka jedinstven.

Teorem 3.2. *Neka je* $\frac{p_n}{q_n}$ *razvoj iracionalnog broja* α *u verižni razlomak. Tada vrijedi*

$$\lim \frac{p_n}{q_n} = \alpha.$$

Dokaz. Vidi [2]. $\square$

3.1. Periodski verižni razlomci

Razvoj u beskonačni verižni razlomak broja $\sqrt{2}$ je

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$$

gdje $\overline{2}$ znači da se taj broj uzastopno ponavlja pa takve verižne razlomke zovemo periodski verižni razlomci.

Definicija 3.4. *Beskonačni verižni razlomak* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *je periodičan ako postoje* $s \in \mathbb{N}$ *i* $N \in \mathbb{N}$ *takvi da vrijedi* $a_k = a_{k+s}$*, za svaki* $k \geq N$*. Takav* s *zovemo duljina perioda verižnog razlomka, te pišemo*

$$x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+s-1}}],$$

gdje $\overline{a_N, \ldots, a_{N+s-1}}$ *znači da se brojevi* $a_N, \ldots, a_{N+s-1}$ *ponavljaju. Kada je* $N = 0$*, točnije nema dijela brojeva koji se ne ponavljaju, onda kažemo da je verižni razlomak čisto periodičan te pišemo*

$$x = [\overline{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}}].$$

Kao što smo naveli da se $\sqrt{2}$ može razviti u beskonačan periodičan verižni razlomak tako se može i pokazati da se svaki $\sqrt{n}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, $n \neq \square$, može razviti u beskonačan periodičan verižni razlomak. U tu svrhu uvest ćemo pojam kvadratne iracionalnosti.

Definicija 3.5. *Iracionalan broj* x *je kvadratna iracionalnost ako je* x *korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim (cjelobrojnim) koeficijentima i pozitivnom diksriminatnom.*

Teorem 3.3. *Ako je* x *periodičan verižni razlomak, onda je* x *kvadratna iracionalnost.*

Dokaz. Neka je $x = [a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}, \overline{a_h, a_{h+1}, \ldots, a_{h+l-1}}]$ i y čisto periodski dio od x, tj. $y = [\overline{a_h, a_{h+1}, \ldots, a_{h+l-1}}] = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}}]$. Iz $y = [b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}, y]$, slijedi

$$y = \frac{yr_{l-1} + r_{l-2}}{ys_{l-1} + s_{l-2}},$$

gdje je $\frac{r_i}{s_i}$ i - ta konvergenta broja y. To je kvadratna jednadžba s cjelobrojnim brojevima i pozitivnom diskriminantom. Kako y nema konačan razvoj u verižni razlomak te nije racionalan, onda je kvadratna iracionalnost. Pogledajmo sada $x = [a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}, y]$. Neka su $\frac{p_i}{q_i}$ konvergente od $x = [a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}, \ldots]$. Tada je

$$x = \frac{yp_{h-1} + p_{h-2}}{yq_{h-1} + q_{h-2}}.$$

Kako je y kvadratna iracionalnost, tada je i x kvadratna iracionalnost. □

Prethodni teorem dokazao je Euler.
Iracionalan broj x može se prikazati u obliku $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n]$, gdje je a_0 cijeli broj, x_n iracionalan broj koji je veći od 1, a $a_1, \ldots, a_{n-1}$ prirodni brojevi. Razvoj broja x u verižni razlomak može se dobiti tako da stavimo:

$$a_0 = \lfloor x \rfloor,$$

$$x_1 = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor},$$

$$a_{k-1} = \lfloor x_{k-1} \rfloor,$$

$$x_k = \frac{1}{x_{k-1} - \lfloor x_{k-1} \rfloor},$$

za $1 < k \leq n$.

Teorem 3.4. *Neka je $d \in \mathbb{N}$, $d \neq \square$. Tada je razvoj u verižni razlomak broja $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}]$.*

Dokaz. Vidi [4]. □

Teorem 3.5. *Neka je $\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq \square$, $b > 0$ i $c \neq 0$. Tada je kvadratna iracionalnost α periodski verižni razlomak.*

Dokaz. Vidi [5]. □

Navedimo algoritam za razvoj kvadratne iracionalnosti u jednostavan verižni razlomak.

Neka je $\alpha = \frac{s_0+\sqrt{d}}{t-0}$ kvadratna iracionalnost. Želimo dobiti $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Za $i \in \mathbb{N}_0$

vrijede sljedeće jednakosti:

$$a_i = \lfloor \frac{s_i + \sqrt{d}}{t_i} \rfloor,$$

$$s_{i+1} = a_i t_i - s_i,$$

$$t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}.$$

Ako je $s_i t_i > 0$ onda je $\lfloor \frac{s_i+\sqrt{d}}{t_i} \rfloor = \lfloor \frac{s_i+\lfloor\sqrt{d}\rfloor}{t_i} \rfloor$.

Napomena 3.1. *Za prirodan broj d, $d \neq \square$, $d \equiv 1 \pmod 4$ i $\alpha = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ te uz $s_0 = t_0 = 1$,*

$\alpha_0 = \frac{s_0+\sqrt{d}}{2t_0}$ imamo:

$$s_{i+1} = 2a_i t_i - s_i, \qquad t_{i+1} = \frac{d-s_{i+1}^2}{4t_i}, \qquad \alpha_{i+1} = \frac{s_{i+1}+\sqrt{d}}{2t_{l+1}}, \qquad a_{i+1} = \frac{s_{i+1}+\sqrt{d}}{2t_{i+1}}.$$

Također, vrijede iduće simetrije:

$$\begin{aligned} a_i &= a_{l-i}, & i &= 1,2,\ldots,l-1, & a_l &= 2a_0 - 1, \\ s_{i+1} &= s_{l-i}, & i &= 0,1,\ldots,l-1, \\ t_i &= t_{l-i}, & i &= 0,1,\ldots,l-1. \end{aligned}$$

Može se pokazati da za s_i i t_i iz algoritma za razvoj kvadratne iracionalnosti u verižni razlomak vrijede sljedeća svojstva (vidi [4]):

(1) $s_i = s_{i+1}$, tada vrijedi da je duljina perioda parna, tj. $l = 2i$.

(2) $t_i = t_{i+1}$, tada vrijedi da je duljina perioda neparna, tj. $l = 2i + 1$.

Primjer 3.2. *Razvijmo broj $\alpha = \sqrt{13}$ u verižni razlomak.*
Zapišimo α u obliku $\alpha = \frac{0+\sqrt{13}}{1}$. Slijedi:

$$s_0 = 0,\ t_0 = 1,\ a_0 = \lfloor \sqrt{13} = 3 \rfloor,$$

$$s_1 = a_0 t_0 - s_0 = 3,\ t_1 = \tfrac{13-9}{1} = 4,\ a_1 = \tfrac{3+\sqrt{13}}{4} = 1,$$

$$s_2 = a_1 t_1 - s_1 = 1,\ t_2 = \tfrac{13-1}{4} = 3,\ a_2 = \tfrac{1+\sqrt{13}}{3} = 1,$$

$$s_3 = a_2 t_2 - s_2 = 2,\ t_3 = \tfrac{13-4}{3} = 3,\ a_3 = \tfrac{2+\sqrt{13}}{3} = 1,$$

$$s_4 = a_3t_3 - s_3 = 1,\ t_4 = \tfrac{13-1}{3} = 4,\ a_4 = \tfrac{1+\sqrt{13}}{4} = 1,$$

$$s_5 = a_4t_4 - s_4 = 3,\ t_5 = \tfrac{13-9}{4} = 1,\ a_5 = \tfrac{3+\sqrt{13}}{1} = 6.$$

Kako je $a_0 = 2a_5$, *postupak će se ponavljati unedogled i imamo*

$$\alpha = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}].$$

Primjer 3.3. *Razvijmo broj* $\alpha = \sqrt{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$ *u verižni razlomak.*
Naš α *je oblika* $\alpha = \frac{0+\sqrt{n^2+1}}{1}$, $s_0 = 0$ *i* $t_0 = 1$. *Odredimo najveće cijelo od* $\sqrt{n^2+1}$. *Uočimo da vrijede iduće nejednakosti:*

$$n^2 < n^2+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2,$$
$$n < \sqrt{n^2+1} < n+1 \text{ pa nam je } \lfloor \alpha \rfloor = n$$

pa je

$$s_1 = a_0t_0 - s_0 = n - 0 = n,\ t_1 = \tfrac{n^2+1-n^2}{1} = 1,\ a_1 = \lfloor \tfrac{n+n}{1} \rfloor = 2n,$$

$$s_2 = a_1t_1 - s_1 = 2n - n = n,\ t_2 = \tfrac{n^2+1-n^2}{1} = 1,\ a_2 = \lfloor \tfrac{n+n}{1} \rfloor = 2n.$$

Iz gornjeg postupka slijedi da je $\alpha = [n, \overline{2n}]$.

4. Primjene verižnih razlomaka

Verižni razlomci imaju brojne primjene. Neke od primjena razradit ćemo u ovom poglavlju. Više detalja o primjenama verižnih razlomaka u glazbi, astronomiji, kvadratnim jednadžbama, itd. može se naći u [1].

4.1. Linearne diofantske jednadžbe

Verižni razlomci primjenjuju se u rješavanju linearnih diofantskih jednadžbi. Rješenja diofantskih jednadžbi su cijeli brojevi. Promotrimo 3 vrste jednadžbi (vidi [3]):

a) $ax - by = c$,

b) $ax + by = c$,

c) $Ax \pm By = \pm C$,

gdje su $a, b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$ i $A, B, C \in \mathbb{N}$.
Rješenje jednadžbe a) dano je s

$$x = q_{n-1}c + bt,$$
$$y = p_{n-1}c + at,$$

$t \in \mathbb{Z}$. Rješenje jednadžbe pod b) dano je s

$$x = q_{n-1}c - bt,$$
$$y = at - p_{n-1}c,$$

$t \in \mathbb{Z}$. Uočimo da jednadžbe imaju beskonačno mnogo rješenja (x, y).

Primjer 4.1. *Riješimo jednadžbu* $101x + 31y = 28$.
Znamo da je raspis broja u verižni razlomak $\frac{101}{31} = [3, 3, 1, 7]$, *a konvergente smo odredili u Primjeru 2.4.*

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{10}{3}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{13}{4}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{101}{31}.$$

Odredimo partikularno rješenje jednadžbe $101x - 31y = 1$.
$(x_0, y_0) = (4, 13)$ *je partikularno rješenje* $101x - 31y = 1$, *tj. vrijedi* $101 \cdot 4 - 31 \cdot 13 = 1$.
Opće rješenje zadano je s $x = q_{n-1}c - bt$, $y = at - p_{n-1}c$, $t \in \mathbb{Z}$ *pa je opće rješenje zadane jednadžbe:*

$$x = 28 \cdot 4 - 31 \cdot t = 112 - 31t,$$
$$y = 101 \cdot t - 28 \cdot 13 = 101t - 364.$$

Za jednadžbu c) pogledati u [3].

4.2. Pellove i pellovske jednadžbe

Jedna od najčešćih i najvažnijih primjena verižnih razlomaka u teoriji brojeva je upravo u rješavanju Pellovih jednadžbi.

Definicija 4.6. *Neka je* $d \in \mathbb{N}$, *takav da* $d \neq \square$. *Diofantska jednadžba oblika*

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

naziva se Pellova jednadžba. Diofantsku jednadžbu oblika

$$x^2 - dy^2 = N, \quad N \in \mathbb{N}$$

zovemo pellovska jednadžba.

Navedimo teoreme vezane uz rješivost jednadžbi ovog tipa.

Teorem 4.1. *Rješenja u skupu* $\mathbb{N}$ *jednadžbe*

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

nalaze se među brojevima $x = p_n$ *i* $y = q_n$, *a* p_n *i* q_n *su konvergente u razvoju broja* $\sqrt{d}$. *Označimo s* $l = l(\sqrt{d})$.

a) Ukoliko je l *paran, tada su rješenja jednadžbe* $x^2 - dy^2 = 1$ *dana s* $x = p_{nl-1}$, $y = q_{nl-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *dok jednadžba* $x^2 - dy^2 = -1$ *nema rješenja.*

b) Ukoliko je l *neparan, tada jednadžba* $x^2 - dy^2 = 1$ *ima rješenje u obliku* $x = p_{nl-1}$, $y = q_{nl-1}$ *za* n *paran, dok su sva rješenja jednadžbe* $x^2 - dy^2 = -1$ *dana s* $x = p_{nl-1}$, $y = q_{nl-1}$, *za* n *neparan.*

Dokaz. Vidi [4]. $\square$

Teorem 4.2. *Neka je* (x_1, y_1) *fundamentalno rješenje jednadžbe* $x^2 - dy^2 = 1$ *u skupu prirodnih brojeva. Tada su sva rješenja te jednadžbe dana s* (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$, *gdje su* x_n, $y_n \in \mathbb{N}$ *definirani sa*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

Dokaz. Vidi [4]. $\square$

U sljedećem primjeru riješit ćemo ovakve jednadžbe.

Primjer 4.2. *Nađimo rješenja jednadžbi* $x^2 - 13y^2 = \pm 1$ *u skupu prirodnih brojeva. Imamo* $\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ *te je* $l = 5$. *Sva rješenja jednadžbe* $x^2 - 13y^2 = -1$ *dana su sa* $x = p_{5n-1}$, $y = q_{5n-1}$ *za* n *neparan broj, a sva rješenja* $x^2 - 13y^2 = 1$ *dana su sa* $x = p_{5n-1}$, $y = q_{5n-1}$ *za* n *paran broj.*

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_i	-	-	3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6	1	1	1	1
p_i	0	1	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649	4287	4936	9223	14159	23382
q_i	1	0	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180	1189	1369	2558	3927	6485

Dakle, rješenja jednadžbe $x^2 - 13y^2 = -1$ *su npr:* $x_1 = p_4 = 18$, $y_1 = q_4 = 5$, $x_2 = 23382$, $y_2 = 6485$, *dok je jedno od rješenja jednadžbe* $x^2 - 13y^2 = 1$, $x_1 = 649$, $y_1 = 180$.

4.3. Problem kalendara

Verižni razlomci se koriste kod problema kalendara. Kako je trajanje sunčane godine eksperimentalna veličina, zamijenimo broj 365.242199 s približnom vrijednosti, tj.

$$\alpha = 365 + \frac{20926s}{86400s} = 365\frac{10463}{43200}.$$

Kako je α racionalan po Teoremu 2.1. slijedi da je razvoj u verižni razlomak broja α racionalan. Primjenom Euklidovog algoritma dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}
43200 &= 4 \cdot 10463 + 1348, \\
10463 &= 7 \cdot 1348 + 1027, \\
1348 &= 1 \cdot 1027 + 321, \\
1027 &= 3 \cdot 321 + 64, \\
321 &= 5 \cdot 64 + 1, \\
64 &= 64 \cdot 1,
\end{aligned}$$

odakle nam je $\alpha = [365, 4, 7, 1, 3, 5, 64]$. Konvergente od $\alpha - 365$ su iduće:

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{7}{29}, \quad \frac{8}{33}, \quad \frac{31}{128}, \quad \frac{163}{673}, \quad \frac{10463}{43200}.$$

Svaka od navedenih konvergenti daje nam jedno rješenje za problem kalendara. Tako nam iz prve konvergente slijedi da je prosječno trajanje godine $365\frac{1}{4}$ dana. Iz toga nam slijedi da će svaka četvrta godina biti prijestupna. Točnije, brojnik konvergente nam daje broj prijestupnih godina, a nazivnik nam daje duljinu ciklusa. Prva konvergenta nam daje kalendar koji se koristio do 16. stoljeća, tj. Julijanski kalendar. Druga i treća konvergenta su dosta kompliciranije i netočne. Najprecizniciija nam je četvrta konvergenta. Kod nje imamo grešku od samo jedne sekunde koja je zanemariva.

4.4. Razvoj Fibonaccijevih brojeva u verižni razlomak

Fibbonacijev niz definiran je formulom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$. Uzmemo li dva uzastopna člana Fibbonacijeva niza njihov kvocijent preko verižnog razlomka je idući:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}}.$$

Nastavimo li na ovaj način, dobivamo $\frac{F_{n+1}}{F_n} = [1, 1, \ldots, 1]$.
Dužina duljine a u zlatnom rezu podijeljena je na dijelove veličine x i $a - x$ ukoliko vrijedi $x : (a - x) = a : x$.
Ako omjer $a : x$ označimo s β, tada nas problem zlatnog reza dovodi do jedadžbe

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0.$$

Pozitivno rješenje gornje kvadratne jednadžbe je $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jednadžbu zapišemo u obliku

$$\beta^2 = \beta + 1, \quad / : \beta$$

pa je

$$\beta = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Uvrstimo li s desne strane izraz za β, dobivamo

$$\beta = 1 + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}} = \ldots$$

Tada je prikaz zlatnog reza u obliku verižnog razlomka $\beta = [1, 1, 1, 1, \ldots]$, a konvergente su : $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$,$\frac{3}{2}$,$\frac{5}{3}$,$\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\ldots$. Možemo zaključiti da su brojnici i nazivnici redom upravo Fibonaccijevi brojevi pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \beta.$$

Literatura

[1] Y. T. Cheng, *Continued Fractions*, Cornell University Mathematics Department 2007., Senior Thesis.

[2] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, skripta.

[3] I. Matić, *Uvod u teoriju brojeva*, Osijek, 2015. , `http://www.mathos.unios.hr/index.php/odjel/nasa-izdanja?getBook=617`.

[4] V. Petričević, *Periodski verižni razlomci*, Magistarski rad, Zagreb, 2009. , `https://web.math.pmf.unizg.hr/ vpetrice/radovi/Magistarski.pdf`.

[5] I. Tržić, *Verižni razlomci*, Diplomski rad, Osijek, 2011. , `http://www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/TR`.

[6] A. Vranić, *Beskonačni verižni razlomci*, Završni rad, Osijek, 2020. , `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:915060`.