Funkcije izvodnice vjerojatnosti

Škugor, Vedran

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Vedran Škugor

Funkcije izvodnice vjerojatnosti

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Vedran Škugor

Funkcije izvodnice vjerojatnosti

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2021.

Sažetak

Tema ovog rada su funkcije izvodnice vjerojatnosti. Za početak ćemo se prisjetiti nekih osnovnih pojmova iz teorije vjerojatnosti, a onda ćemo reći nešto više o samim funkcijama izvodnicama vjerojatnosti. Definirat ćemo funkcije izvodnice, reći nešto o njihovim svojstvima, izračunat ćemo ih za razne diskretne distribucije, primjerice diskretnu uniformnu distribuciju, Bernoullijevu, binomnu, Poissonovu... Nakon toga ćemo ih iskoristiti za izračun poznatih numeričkih karakteristika (npr. očekivanja i varijance). Pokazat ćemo da je funkcija izvodnica sume nezavisnih slučajnih varijabli produkt pripadnih funkcija izvodnica.

Ključne riječi

vjerojatnost, funkcije izvodnice vjerojatnosti, diskretna uniformna distribucija, Bernoullijeva distribucija, binomna distribucija, Poissonova distribucija, geometrijska distribucija, negativna binomna distribucija

Probability generating functions

Summary

The topic of this bachelor's thesis is probability generating functions. We will start off by recalling some basic definitions concerning probability theory. We will define probability generating functions, state some of their properties, calculate them for various discrete distributions, such as discrete uniform distribution, Bernoulli distribution, binomial distribution, Poisson distribution... Then we will use them for calculation of numerical characteristics (for example expectation and variance). We will prove that the probability generating function of the sum of the independent random variables is equal to the product of those probability generating functions.

Key words

probability, probability generating functions, discrete uniform distribution, Bernoulli distribution, binomial distribution, Poisson distribution, geometric distribution, negative binomial distribution

Sadržaj

Uvod

Funkcije izvodnice vjerojatnosti uvelike mogu olakšati posao računanja numeričkih karakteristika diskretnih distribucija.
U prvom poglavlju ovog rada navesti ćemo neke osnovne pojmove i neka svostva iz teorije vjerojatnosti koji će nam biti potrebni kako bismo mogli definirati i objasniti funkcije izvodnice vjerojatnosti.
Nadalje, u drugom poglavlju, definirat ćemo funkcije izvodnice vjerojatnosti te iskazati i dokazati par važnih teorema vezanih uz njih.
U konačnici, u trećem poglavlju, bavit ćemo se funkcijama izvodnicama nekih poznatih parametarskih diskretnih distribucija, izvest ćemo njihove funkcije izvodnice vjerojatnosti te ćemo uz pomoć njih izvesti osnovne numeričke karakteristike tih distribucija - očekivanje i varijancu. Također, na nekoliko primjera ćemo vidjeti na koji način možemo pronaći gustoću pripadne distribucije te kako iz funkcije izvodnice vjerojatnosti možemo odrediti o kojem se tipu diskretne distribucije radi.

1 Osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti

Ponovimo za početak neke osnovne definicije koje će nam biti potrebne u daljnjem radu. Uvest ćemo sljedeće pojmove: slučajni pokus, frekvencija, relativna frekvencija, prostor elementarnih događaja, suprotan događaj, $\sigma-$algebra, izmjeriv prostor, vjerojatnost te vjerojatnosni prostor. Također, prisjetit ćemo se nekih osnovnih svojstava vjerojatnosti.

Definicija 1. *Slučajni pokus ili slučajni eksperiment je takav pokus čiji ishodi, tj. rezultati nisu jednoznačno određeni uvjetima u kojima izvodimo pokus.*

Napomena 1. *Ishode slučajnog pokusa zvat ćemo elementarni događaji.*

Definicija 2. *Neprazan skup Ω koji reprezentira skup svih ishoda slučajnog pokusa zovemo prostor elementarnih događaja.*
Elemente skupa $\Omega - \omega$ zvat ćemo elementarni događaji.

Dakle, elementarni događaj ω je element prostora elementarnih događaja Ω.

Definicija 3. *Za događaj A stavimo $A^c = \Omega \backslash A$. Događaj A^c zovemo suprotan događaj događaju A.*

Definicija 4. *Familija $\mathscr{A}$ podskupova od Ω je algebra skupova (na Ω) ako je*

(A1) $\emptyset \in \mathscr{A}$

(A2) $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$

(A3) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}, \;\; n \in \mathbb{N}.$

Dakle, $\mathscr{A}$ je algebra skupova ako je zatvorena na komplementiranje i konačne unije.

Definicija 5. *Familija $\mathscr{F}$ podskupova od Ω ($\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\Omega)$) jest σ-algebra skupova (na Ω) ako je*

(F1) $\emptyset \in \mathscr{F}$

(F2) $A \in \mathscr{F} \implies A^c \in \mathscr{F}$

(F3) $(A_i, i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

Definicija 6. *Neka je $\mathscr{F}$ $\sigma - algebra$ na skupu Ω. Uređeni par $(\Omega, \mathscr{F})$ zove se izmjeriv prostor.*

Definicija 7. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F})$ izmjeriv prostor. Funkciju $P : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ zovemo vjerojatnost ako vrijedi*

(P1) $P(A) \geq 0$ *, za sve* $\mathscr{A} \in \mathscr{F}$

(P2) $P(\Omega) = 1$

(P3) ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i,\ i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, *tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *čim je* $i \neq j$, *tada vrijedi* $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$.

Definicija 8. *Uređena trojka* $(\Omega,\ \mathscr{F}, P)$, *gdje je* $\mathscr{F}$ σ *-algebra na* Ω *i* P *vjerojatnost na* $\mathscr{F}$ *zove se vjerojatnosni prostor.*

Napomena 2. *Zahtjev* $P(A) \geq 0$ *zove se nenegativnost vjerojatnosti, a zahtjev* $P(\Omega) = 1$ *zove se normiranost vjerojatnosti.*

Sljedeći teorem govori nam o svojstvima vjerojatnosti:

Teorem 1. *Neka je* $(\Omega,\ \mathscr{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi*

(a) $P(\emptyset) = 0$

(b) Ako su $A_1, \dots, A_n$ *međusobno disjunktni, tada je* $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(c) $A, B \in \mathscr{F}$ *i* $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

(d) $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ *i*
$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \implies P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

(e) $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ *i*
$A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \implies P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

(f) $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N} \implies P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

(g) $A, B \in \mathscr{F} \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(h) $A \in \mathscr{F} \implies P(A^c) = 1 - P(A)$.

Dokaz teorema (vidi [3, Teorem 2.1]).

Napomena 3. *Svojstvo (b) prethodnog teorema naziva se svojstvo konačne aditivnosti vjerojatnosti. Svojstvo (c) naziva se monotonost vjerojatnosti, svojstva (d) i (e) nazivaju se neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na rastući, odnosno padajući niz događaja. Svojstvo (f) naziva se* $\sigma -$ *poluaditivnost vjerojatnosti, dok se svojstvo (h) naziva vjerojatnost suprotnog događaja.*

Definicija 9. *Vjerojatnosni prostor kod kojega je* Ω *konačan ili prebrojiv skup, a pridružena je* $\sigma -$ *algebra* $\mathcal{P}(\Omega)$, *zvat ćemo diskretan vjerojatnosni prostor.*

U nastavku rada zanimat će nas samo diskretni vjerojatnosni prostori.

Definicija 10. *Neka je* $\mathbb{R}$ *skup realnih brojeva. Sa* $\mathscr{B}$ *označimo* $\sigma -$ *algebru generiranu familijom svih otvorenih skupova na* $\mathbb{R}$. $\mathscr{B}$ *nazivamo Borelova* σ*-algebra na* $\mathbb{R}$, *a elemente* $\sigma -$ *algebre* $\mathscr{B}$ *zovemo Borelovi skupovi.*

Definicija 11. *Neka je* $(\Omega,\ \mathscr{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *je slučajna varijabla (na* Ω*) ako je* $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ *za proizvoljno* $B \in \mathscr{B}$, *tj.* $X^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}$.

Definicija 12. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. *Svaku funkciju* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *zvat ćemo diskretna slučajna varijabla.*

Definicija 13. *Za diskretne slučajne varijable* X *i* Y *definirane na istom diskretnom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *kažemo da su nezavisne ako za sve skupove* $A \subseteq \mathbb{R}$ *i* $B \subseteq \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$P\{X \in A,\ Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}.$$

Definicija 14. *Slučajnu varijablu* X *prikazujemo u obliku tablice:*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix},$$

pri čemu su x_i *vrijednosti koje slučajna varijabla može primiti, a* p_i *pripadne vjerojatnosti te taj prikaz zovemo tablica distribucije ili, kraće, distribucija slučajne varijable* X.

Definicija 15. *Neka je* $(\Omega, P(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i* X *slučajna varijabla na* Ω. *Ako red* $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ *apsolutno konvergira, onda kažemo da slučajna varijabla* X *ima matematičko očekivanje i broj*

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P\{\omega\}$$

zovemo matematičko očekivanje (očekivanje) slučajne varijable X.

Definicija 16. *Neka je* X *slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, P(\Omega), P)$ *i neka je* $r > 0$. *Ako postoji* $E(X^r)$, *onda broj* $\mu_r = E(X^r)$ *zovemo* r*-ti moment slučajne varijable* X.

Definicija 17. *Neka je* X *slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, P(\Omega), P)$. *Ako postoji* $E(X - EX)^2$, *onda taj nenegativan broj zovemo varijanca slučajne varijable* X *i označavamo s* $VarX$.

2 Funkcije izvodnice

2.1 Definicija

Funkcije izvodnice vjerojatnosti od velike su nam pomoći kada promatramo diskretne slučajne varijable koje primaju vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Uz pomoć njih možemo karakterizirati distribuciju $X + Y$ u slučaju kada su X i Y nezavisne slučajne varijable. Također, uz pomoć funkcija izvodnica vjerojatnosti možemo izračunati numeričke karakteristike pojedinih distribucija (npr. očekivanje i varijancu) na kraći i elegantniji način, bez predugog raspisa. Naravno, kao što im samo ime kaže, iz samog raspisa funkcije izvodnice možemo vidjeti kolika je vjerojatnost određenog događaja, odnosno vjerojatnost pojedine realizacije slučajne varijable.
Definirajmo sada funkcije izvodnice vjerojatnosti.

Neka je X slučajna varijabla koja poprima vrijednost u skupu $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ te koja ima tablicu distribucije

$$\mathrm{X} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}.$$

Definicija 18. *Funkcija izvodnica slučajne varijable X je funkcija g_X definirana s*

$$g_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots + p_n s^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \ \ |s| < 1, \ \ s \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Napomena 4. *Uočimo sljedeće:*

(a) Zbog $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ zaključujemo da red $\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ apsolutno konvergira za $|s| \leq 1$

(b) Budući da red apsolutno konvergira, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ za $|s| < 1$ možemo derivirati član po član te dobivamo

$$g_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\ k!\ p_n s^{n-k}.$$

(c) Vrijedi: $g_X(s) = E[s^X]$

Napomena 5. *Primijetimo da iz tvrdnje (b) Napomene 4 možemo direktno odrediti koliko iznosi vjerojatnost p_k tako što u izraz $g_X^{(k)}(s)$ uvrstimo $s = 0$.*
Tako bismo, primjerice, vjerojatnost p_0 dobili uvrštavanjem nule u izraz

$$g_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots + p_n s^n,$$

odnosno $p_0 = g_X(0)$. Kada bismo htjeli izračunati, primjerice, vjerojatnost p_3, tada bismo prvo morali izračunati treću derivaciju funkcije g_X, odnosno imali bismo:

$$g_X^{(3)}(s) = 6p_3 + 24p_4 s + \cdots + n(n-1)(n-2)p_n s^{n-3} + \cdots .$$

Vjerojatnost p_3 dobije se uvrštavanjem nule u $g_X^{(3)}(s)$, odnosno vrijedi da je $p_3 = \frac{1}{3!} g_X^{(3)}(0)$.
Sada je jasno da je vjerojatnost p_k jednaka $\frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0)$.
Upravo ovo svojstvo je razlog zašto tu funkciju zovemo funkcijom izvodnicom vjerojatnosti.

Navedimo sada neka svojstva funkcije izvodnice vjerojatnosti:

Napomena 6. *Za funkcije izvodnice vjerojatnosti vrijedi* $g_X(1) = 1$.

Lagano se može pokazati kako vrijedi svojstvo prethodne napomene.
Promatramo:

$$\begin{aligned} g_x(1) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \cdots + P(X=n) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} P(X=i) \\ &= 1. \end{aligned}$$

2.2 Važni rezultati

Teorem 2. *Neka je* X *slučajna varijabla s distribucijom*

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *proizvoljna funkcija. Tada vrijedi*

$$Eg(X) = \textstyle\sum_{a_i} g(a_i) p_i,$$

ukoliko pripadni red konvergira.

Pokažimo kako uz pomoć funkcija izvodnica vjerojatnosti možemo doći do k-tog momenta slučajne varijable X.

Teorem 3. *Neka je* X *diskretna slučajna varijabla s funkcijom izvodnicom* $g_X(s)$. *Tada vrijedi:*

$$E[(X(X-1)\cdots(X-k+1)] = g_X^{(k)}(1).$$

Dokaz:

$$g_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)s^{n-k}p_n.$$

Kada bismo sada gledali $g_X^{(k)}(1)$, imali bismo:

$$\begin{aligned} g_X^{(k)}(1) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)p_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)p_n \\ &= E[(X(X-1)\cdots(X-k+1)]. \end{aligned}$$

$\square$

Dakle, na ovaj način možemo lako izračunati k-ti moment diskretne distribucije. Pogledajmo sada kako možemo izračunati očekivanje i varijancu.

Propozicija 1. *Ukoliko slučajna varijabla X ima konačnu varijancu, tada je njena funkcija izvodnica g dva puta diferencijabilna u točki $s=1$ i vrijedi:*

(a) $EX = g'_X(1)$

(b) $VarX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$.

Dokaz:
Za $|s| < 1$ iz svojstva (b) Napomene 4 slijedi

$$\begin{aligned} g'_X(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} np_n 1^{n-1} \\ g''_X(1) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n 1^{n-2}. \end{aligned}$$

Prema Teoremu 2 slijedi

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{n=1}^{\infty} np_n \\ E[X(X-1)] &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n, \end{aligned}$$

a budući da je varijanca od X konačna, znamo da oba reda konvergiraju. Sada, prema Teoremu 3 kojeg smo maloprije dokazali, slijedi da je $E[X] = g'_X(1)$. Nadalje, znamo da je $E[X(X-1)] = g''_X(1)$. Raspišemo li lijevu stranu, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= E[X^2 - X] \\ &= EX^2 - EX \\ &= EX^2 - g'_X(1) \\ &= g''_X(1). \end{aligned}$$

Dakle, sada je $EX^2 = g''_X(1) + g'_X(1)$. Znamo da je $VarX = EX^2 - (EX)^2$ te nam iz toga slijedi tvrdnja, odnosno

$$VarX = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2.$$

$\square$

Sada ćemo iskazati i dokazati teorem koji nam govori o funkciji izvodnici zbroja nezavisnih slučajnih varijabli.

Teorem 4. *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne diskretne slučajne varijable sa odgovarajućom slikom (skup $\mathbb{N}_0$) i neka je $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Tada vrijedi:*

$$g_Y(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s).$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} g_Y(s) &= E(s^{X_1+X_2+\cdots+X_n}) \\ &= E(s^{X_1}s^{X_2}\cdots s^{X_n}) \\ &= E(s^{X_1})E(s^{X_2})\cdots E(s^{X_n}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s), \end{aligned}$$

gdje smo u trećoj jednakosti koristili nezavisnost slučajnih varijabli $X_1 \ldots X_n$. □

Sada smo pokazali da je funkcija izvodnica sume nezavisnih slučajnih varijabli produkt pripadnih funkcija.
Proučimo sada pojedine diskretne distribucije te njihove funkcije izvodnice vjerojatnosti.

3 Funkcije izvodnice nekih poznatih parametarskih diskretnih distribucija

U ovom poglavlju bavit ćemo se proučavanjem funkcija izvodnica nekih poznatih parametarski zadanih diskretnih distribucija kao što su diskretna uniformna distribucija, Bernoullijeva distribucija, binomna distribucija i druge. Započet ćemo s diskretnom uniformnom distribucijom.

3.1 Diskretna uniformna distribucija

Definicija 19. *Slučajna varijabla X ima diskretnu uniformnu distribuciju ukoliko je njezin skup svih mogućih vrijednosti konačan podskup skupa realnih brojeva, tj.*
$\mathcal{R}(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, a pripadni niz vjerojatnosti je definiran kao

$$P\{X = x_i\} = \tfrac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tablica distribucije je oblika

$$\mathrm{X} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Primjer 1. *U košari se nalazi 10 kuglica te je na svakoj kuglici označen broj od 1 do 10. Neka je X slučajna varijabla kojom modeliramo broj kojeg smo izvukli pri nasumičnom izvlačenju kuglice iz košare. Tada X ima diskretnu uniformnu distribuciju s tablicom*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Primjer 2. *Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti diskretne uniformne slučajne varijable s pripadnom tablicom distribucije*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} g_X(s) &= P(X=1)s^1 + P(X=2)s^2 + P(X=3)s^3 + \cdots + P(X=n)s^n \\ &= \frac{1}{n}s^1 + \frac{1}{n}s^2 + \frac{1}{n}s^3 + \cdots + \frac{1}{n}s^n \\ &= \frac{1}{n}(s^1 + s^2 + s^3 + \cdots + s^n) \\ &= \frac{1}{n}\frac{s(1-s^n)}{1-s} \\ &= \frac{s(1-s^n)}{n(1-s)}. \end{aligned}$$

Sada kada smo odredili funkciju izvodnicu vjerojatnosti diskretne uniformne distribucije, iskoristit ćemo ju za računanje očekivanja i varijance navedene distribucije. Izvedimo ih.

Primjer 3. *Koristeći funkciju izvodnicu vjerojatnosti diskretne uniformne distribucije pronađite njeno očekivanje i varijancu.*

Rješenje:
Znamo da je funkcija izvodnica oblika

$$g_X(s) = \frac{s(1-s^n)}{n(1-s)}.$$

Započet ćemo s računanjem prve i druge derivacije funkcije izvodnice vjerojatnosti za diskretnu uniformnu distribuciju. Dakle,

$$\begin{aligned} g'_X(s) &= \frac{s^n\,(ns-n-1)+1}{n\,(s-1)^2} \\ g''_X(s) &= \frac{s^n\left(\left(n^2-n\right)s^2 + \left(2-2n^2\right)s + n^2 + n\right) - 2s}{n\,(s-1)^3\,s}. \end{aligned}$$

Nadalje, trebamo izračunati $g'_X(1)$ i $g''_X(1)$. Izračunajmo ih.

$$\begin{aligned} g'_X(1) &= \lim_{s\to 1} g'_X(s) \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{s^n\left(ns-n-1\right)+1}{n\left(s-1\right)^2} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{n\left(n+1\right)\left(s-1\right)s^{n-1}}{2n\left(s-1\right)} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{n\left(n+1\right)s^{n-2}\left(ns-n+1\right)}{2n} \\ &= \frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

pri čemu smo u četvrtoj i šestoj jednakosti koristili L'Hospitalovo pravilo.
Izračunajmo sada $g''_X(1)$. Isto tako, koristit ćemo L'Hospitalovo pravilo više puta.

$$\begin{aligned} &= \lim_{s\to 1} g''_X(s) \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{s^n\left(\left(n^2-n\right)s^2+\left(2-2n^2\right)s+n^2+n\right)-2s}{n\left(s-1\right)^3 s} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{ns^{n-1}\left(\left(n^2-n\right)s^2+\left(2-2n^2\right)s+n^2+n\right)+s^n\left(2\left(n^2-n\right)s-2n^2+2\right)-2}{n\left(s-1\right)^2\left(4s-1\right)} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{\left(n-1\right)n\left(n+1\right)s^{n-2}\left(\left(n+2\right)s^2+\left(-2n-2\right)s+n\right)}{6n\left(s-1\right)\left(2s-1\right)} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{s\to 1} \frac{\left(n-1\right)n\left(n+1\right)s^{n-3}\left(\left(n^2+2n\right)s^2+\left(2-2n^2\right)s+n^2-2n\right)}{6n\left(4s-3\right)} \\ &= \frac{2(n-1)n(n+1)}{6n} \\ &= \frac{n^2-1}{3}. \end{aligned}$$

Sada, prema svojstvu (a) Propozicije 1 slijedi da je

$$\begin{aligned} EX &= g'_X(1) \\ &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Nadalje, prema svojstvu (b) iste propozicije slijedi da je

$$\begin{aligned}
VarX &= g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 \\
&= \frac{n^2-1}{3} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{4n^2 - 4 + 6n + 6 - 3(n^2+2n+1)}{12} \\
&= \frac{4n^2 - 4 + 6n + 6 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \\
&= \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo očekivanje i varijancu diskretne uniformne distribucije koristeći njenu funkciju izvodnicu vjerojatnosti.

3.2 Bernoullijeva distribucija

Definicija 20. *Neka je X slučajna varijabla koja poprima točno dvije vrijednosti, $\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}$. Njena pripadna tablica distribucije je*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \; p \in \langle 0, 1\rangle \;, \quad q = 1 - p.$$

Za takvu slučajnu varijablu kažemo da ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom p, pri čemu parametar p predstavlja vjerojatnost da X primi vrijednost 1.

Vrijednosti p predstavlja vjerojatnost uspjeha, a vrijednost q vjerojatnost neuspjeha. Izvedimo sada funkciju izvodnicu vjerojatnosti za Bernoullijevu distribuciju.

Primjer 4. *Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom $p \in \langle 0, 1\rangle$.*

Rješenje:
Koristeći formulu (1) vrlo lako možemo izvesti funkciju izvodnicu vjerojatnosti za Bernoullijevu distribuciju. Vrijedi:

$$g_X(s) = P(X=0)s^0 + P(X=1)s^1 = qs^0 + ps^1 = q + ps.$$

Dakle, pokazali smo da je funkcija izvodnica vjerojatnosti Bernoullijeve distribucije jednaka $g_X(s) = q + ps,\; q = 1 - p$, gdje je p vrijednost uspjeha. Sada ćemo iskoristiti to kako bi na primjeru pokazali kako na jednostavan način možemo izvesti očekivanje i varijancu za navedenu distribuciju.

Primjer 5. *Koristeći funkciju izvodnicu vjerojatnosti Bernoullijeve distribucije izračunajte očekivanje i varijancu.*

Rješenje:
Pogledamo li svojstva (a) i (b) Propozicije 1, vidjet ćemo da ukoliko želimo pronaći očekivanje i varijancu, zapravo trebamo pronaći prve dvije derivacije funkcije izvodnice vjerojatnosti.
Pronađimo za početak te derivacije :

$$\begin{aligned} g_X'(s) &= (q+ps)' = p \\ g_X''(s) &= 0. \end{aligned}$$

Prema svojstvu (a) Propozicije 1 slijedi da je očekivanje

$$EX = g_X'(1) = p.$$

Prisjetimo li se očekivanja Bernoullijeve distribucije, znamo da ono iznosi $EX = p$. Primijetimo da smo dobili baš to. Pogledamo li svojstvo (b) Propozicije 1, vidjet ćemo da se varijanca može izračunati kao

$$VarX = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 = 0 + p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Sjetimo li se varijance Bernoullijeve distribucije, vidjet ćemo da smo dobili istu stvar. Dakle, funkcijom izvodnicom vjerojatnosti Bernoullijeve distribucije izračunali smo dvije osnovne numeričke karakteristike Bernoullijeve distribucije.

3.3 Binomna distribucija

Zamislimo da ponavljamo neki pokus nezavisno n puta te nas zanima broj uspjeha. Slučajnu varijablu X koja opisuje broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja slučajnog pokusa modeliranog Bernoullijevom slučajnom varijablom zovemo Binomna slučajna varijabla.
Definicija 21. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0,1 \rangle$. Za slučajnu varijablu X koja prima vrijednosti iz skupa $\{0,1,2,\ldots,n\}$ s vjerojatnostima*

$$P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

kažemo da ima binomnu distribuciju s parametrima n i p i pišemo $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, pri čemu je p vjerojatnost uspjeha u jednom izvođenju pokusa, a n broj nezavisnih ponavljanja Bernoullijevog pokusa.

Izračunajmo funkciju izvodnicu vjerojatnosti binomne distribucije.

Primjer 6. *Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti binomne slučajne varijable s parametrima $p \in \langle 0,1 \rangle$ i $n \in \mathbb{N}$.*

Rješenje:
Znamo

$$P\{X=i\}=\binom{n}{i}p^iq^{n-i}=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}.$$

Koristeći formulu (1) dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
g_X(s) &= P(X=0)s^0+P(X=1)s^1+P(X=2)s^2+\cdots+P(X=n)s^n\\
g_X(s) &= \binom{n}{0}p^0q^{n-0}s^0+\binom{n}{1}p^1q^{n-1}s^1+\binom{n}{2}p^2q^{n-2}s^2+\cdots+\binom{n}{n}p^nq^{n-n}s^n\\
g_X(s) &= \binom{n}{0}(ps)^0q^{n-0}+\binom{n}{0}(ps)^1q^{n-1}+\binom{n}{0}(ps)^2q^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}(ps)^nq^{n-n}.
\end{aligned}$$

Sada možemo prepoznati da je ovo prema binomnoj formuli jednako

$$g_X(s)=(1-p+ps)^n=(1-p(1-s))^n.$$

Izračunajmo sada numeričke karakteristike binomne distribucije.

Primjer 7. *Koristeći funkciju izvodnicu vjerojatnosti binomne distribucije izračunajte očekivanje i varijancu.*

Rješenje:
Opet ćemo započeti računanjem prve i druge derivacije funkcije izvodnice. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
g'_X(s) &= ((q+ps)^n)'=n(q+ps)^{n-1}p\\
g''_X(s) &= (n(q+ps)^{n-1}p)'=n(n-1)(q+ps)^{n-2}p^2.
\end{aligned}$$

Sada, prema svojstvu (a) Propozicije 1 znamo da je $EX=g'_X(1)$, odnosno:

$$EX=g'_X(1)=(n(q+p)^{n-1}p)=n(1-p+p)^{n-1}p=np,$$

a to je upravo očekivanje binomne distribucije.
Prema svojstvu (b) Propozicije 1 slijedi da je:

$$\begin{aligned}
VarX &= g''_X(1)+g'_X(1)-(g'_X(1))^2\\
&= n(n-1)(q+p)^{n-2}+n(q+p)^{n-1}-(n(q+p)^{n-1})^2\\
&= n(n-1)1^{n-2}p^2+n1^{n-1}p-(n1^{n-1}p)^2\\
&= (n^2-n)p^2+np-n^2p^2\\
&= n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)=npq,
\end{aligned}$$

a prisjetimo li se varijance binomne distribucije, vidjet ćemo da je taj izraz jednak dobivenom.
Dakle, uz pomoć funkcije izvodnice binomne distribucije izračunali smo osnovne numeričke karakteristike distribucije.
Pogledajmo sada na primjeru što bismo dobili kada bismo gledali funkciju izvodnicu zbroja n nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom p.

Primjer 8. *Neka su* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom* p, $p \in \langle 0, 1\rangle$. *Pronađite funkciju izvodnicu sume* $X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Rješenje:
Prema Teoremu 4 vrijedi:

$$\begin{aligned} g_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) &= g_{X_1}(s)g_{X_2}(s)\dots g_{X_n}(s) \\ &= (1-p+ps)(1-p+ps)\dots(1-p+ps) \\ &= (1-p+ps)^n. \end{aligned}$$

Vidimo da smo dobili upravo funkciju izvodnicu vjerojatnosti binomne distribucije. Dakle, zbroj n nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli nam daje binomnu slučajnu varijablu s parametrima n i p.

3.4 Poissonova distribucija

Poissonova distribucija može se primijeniti kao distribucija slučajne varijable koja broji uspjehe u nekom jediničnom vremenskom intervalu ili intervalu volumena, mase...
Međutim, pokus mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

1. vjerojatnost da se pojavi uspjeh ne ovisi o intervalu u kojem se dogodio
2. broj uspjeha u jednom intervalu neovisan je o broju uspjeha u drugom
3. očekivani broj uspjeha u jednom intervalu jednak je za sve intervale i dan je pozitivnim realnim brojem λ.

Definicija 22. *Slučajna varijabla* X *ima Poissonovu distribuciju s parametrom* $\lambda > 0$ *ako prima vrijednosti iz skupa* $\{0, 1, 2, \dots\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

te tada pišemo $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Zanima nas funkcija izvodnica vjerojatnosti Poissonove distribucije. Izvedimo ju.

Primjer 9. *Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti Poissonove slučajne varijable s parametrom* $\lambda > 0$.

Rješenje:
Znamo

$$P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

Korištenjem formule (1) dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} g_X(s) &= P(X=0)s^0 + P(X=1)s^1 + \cdots + P(X=n)s^n + \cdots \\ &= \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}s^0 + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}s^1 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}s^n + \cdots \\ &= \left(\frac{(\lambda s)^0}{0!} + \frac{(\lambda s)^1}{1!} + \ldots \frac{(\lambda s)^n}{n!} + \cdots\right)e^{-\lambda} \\ &= e^{\lambda s}e^{-\lambda} \\ &= e^{\lambda(s-1)}. \end{aligned}$$

Napomena 7. *Primijetimo da je u predzadnjem retku eksponencijalna funkcija razvijena u Taylorov red.*

Dakle, funkcija izvodnica vjerojatnosti Poissonove distribucije jednaka je $e^{\lambda(s-1)}$. Izračunajmo sada očekivanje i varijancu Poissonove distribucije koristeći njenu funkciju izvodnicu vjerojatnosti.

Primjer 10. *Koristeći funkciju izvodnicu vjerojatnosti Poissonove distribucije izračunajte očekivanje i varijancu.*

Rješenje:
Računamo prvu i drugu derivaciju funkcije izvodnice vjerojatnosti Poissonove distribucije:

$$\begin{aligned} g'_X(s) &= (e^{\lambda(1-s)})' = \lambda e^{\lambda s}e^{-\lambda} \\ g''_X(s) &= (\lambda e^{\lambda s}e^{-\lambda})' = \lambda^2 e^{\lambda s}e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Prema svojstvu (a) Propozicije 1 slijedi da je:

$$EX = g'_X(1) = \lambda e^{\lambda}e^{-\lambda} = \lambda.$$

Koristeći svojstvo (b) Propozicije 1 dobivamo:

$$\begin{aligned} VarX &= g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 \\ &= \lambda^2 e^{\lambda}e^{-\lambda} + \lambda e^{\lambda}e^{-\lambda} - (\lambda e^{\lambda}e^{-\lambda})^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Dobili smo upravo očekivanje i varijancu Poissonove distribucije. Pogledajmo sada na primjeru kako bi izgledala distribucija zbroja dvije nezavisne Poissonove slučajne varijable.

Primjer 11. *Neka su X i Y dvije nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima λ i μ, gdje su $\lambda, \mu > 0$. Izračunajte distribuciju zbroja slučajnih varijabli X i Y.*

Rješenje:

Funkcija izvodnica za X je oblika $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$, dok je za Y oblika $g_Y(s) = e^{\mu(s-1)}$.
Nadalje, prema Teoremu 4 vrijedi:

$$\begin{aligned} g_{X+Y}(s) &= g_X(s)g_Y(s) \\ &= e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)} \\ &= e^{(\lambda+\mu)(s-1)}. \end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo da je zbroj Poissonovih nezavisnih slučajnih varijabli opet Poissonova varijabla s parametrom jednakim zbroju parametara slučajnih varijabli X i Y.
Pokažimo sada kako se mogu pronaći vjerojatnosti određenih događaja uz pomoć funkcija izvodnica vjerojatnosti.

Primjer 12. *Pretpostavimo da broj bicklista koji prođu na biciklističkoj stazi u minuti možemo modelirati Poissonovom distribucijom s parametrom $\lambda = 2$. Kolika je vjerojatnost da će u bilo kojoj minuti proći:*

(a) točno jedan biciklist

(b) barem tri biciklista?

Rješenje:
Broj biciklista koji prođu u minuti ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda = 2$.
Koristeći formulu (1) raspisat ćemo funkciju izvodnicu za naš slučaj. Ono što bude stajalo uz s-ove su naše tražene vjerojatnosti. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} g_X(s) &= e^{\lambda(s-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \\ &= P(X=0)s^0 + P(X=1)s^1 + P(X=2)s^2 + P(X=3)s^3 + P(X=4)s^4 + \ldots \\ &= \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}s^0 + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}s^1 + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}s^2 + \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}s^3 + \frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda}s^4 + \ldots \\ &= \frac{2^0}{0!}e^{-2}s^0 + \frac{2^1}{1!}e^{-2}s^1 + \frac{2^2}{2!}e^{-2}s^2 + \frac{2^3}{3!}e^{-2}s^3 + \frac{2^4}{4!}e^{-2}s^4 + \ldots \end{aligned}$$

Dakle, za zadatak (a) zanima nas kolika je vjerojatnost da u minuti prođe točno jedan biciklist. Pogledajmo što u ovom razvoju stoji uz s^1. Vjerojatnost da u minuti prođe točno jedan biciklist jednaka je $\frac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.2706$.
Za zadatak (b) potrebno je pronaći vjerojatnost da u minuti prođu barem tri biciklista.
Taj događaj je suprotan događaj događaju da u minuti prođu manje od tri biciklista.
Dakle, $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$. Tako će naša tražena vjerojatnosti biti jednaka

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - \left(\frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2}\right) \\ &= 1 - (0.13533 + 0.27067 + 0.27067) \\ &= 0.32332. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali kako se na jednostavan način mogu pronaći vjerojatnosti određenih događaja uz pomoć funkcija izvodnica.

3.5 Geometrijska distribucija

Geometrijska distribucija također je vezana uz nezavisno ponavljanje istog pokusa s ishodima "uspjeh" i "neuspjeh". Međutim, ona se koristi za opisivanje broja ponavljanja pokusa do prvog uspjeha. Dakle, geometrijskom distribucijom opisana je slučajna varijabla koja daje broj potrebnih pokusa do realizacije nekog događaja.
Definicija 23. *Slučajna varijabla X ima geometrijsku distribuciju s parametrom $p \in \langle 0, 1\rangle$ ukoliko prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ s vjerojatnostima*

$$p_k = P\{X = k\} = p(1-p)^k.$$

Pogledajmo na primjeru kako izgleda funkcija izvodnica vjerojatnosti geometrijske distribucije.

Primjer 13. *Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti geometrijske slučajne varijable s parametrom $p \in \langle 0, 1\rangle$.*

Rješenje:
Znamo

$$p_k = P\{X = k\} = p(1-p)^k.$$

Koristeći formulu (1) dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} g_X(s) &= P(X=0)s^0 + P(X=1)s^1 + P(X=2)s^2 + \cdots + P(X=n)s^n + \cdots \\ &= p(1-p)^0 s^0 + p(1-p)^1 s^1 + p(1-p)^2 s^2 + \cdots + p(1-p)^n s^n + \cdots \\ &= p(((1-p)s)^0 + ((1-p)s)^1 + ((1-p)s)^2 + \cdots + ((1-p)s)^{n-1} + \cdots) \\ &= \frac{p}{1-s(1-p)}. \end{aligned}$$

Primjer 14. *Koristeći funkciju izvodnicu vjerojatnosti geometrijske distribucije izračunajte očekivanje i varijancu.*

Rješenje:
Izračunajmo prvu i drugu derivaciju funkcije izvodnice:

$$\begin{aligned} g_X'(s) &= \left(\frac{p}{1-s(1-p))}\right)' = \frac{(1-p)p}{(1-s(1-p))^2} \\ g_X''(s) &= \left(\frac{(1-p)p}{(1-s(1-p))^2}\right)' = \frac{(-2(1-s(1-p))(-(1-p))((1-p)p)}{(1-s(1-p))^4} \\ &= \frac{2(1-p)^2 p}{(1-s(1-p))^3}. \end{aligned}$$

Koristeći svojstvo (a) Propozicije 1 dobivamo:

$$EX = g'_X(1) = \frac{(1-p)p}{1-(1-p))^2} = \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p}.$$

Iskoristimo li svojstvo (b) Propozicije 1, slijedi:

$$\begin{aligned} VarX &= g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 \\ &= \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\ &= \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} \\ &= \frac{(1-p)^2 + p(1-p)}{p^2} \\ &= \frac{1-2p+p^2+p-p^2}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Koristeći funkciju izvodnicu vjerojatnosti geometrijske distribucije, uspjeli smo izvesti očekivanje i varijancu te distribucije.

3.6 Negativna binomna distribucija

Negativna binomna slučajna varijabla X je slučajna varijabla koja modelira vrijeme do n-tog uspjeha, pri čemu vjerojatnost uspjeha iznosi p. Negativnu binomnu distribuciju ponekad još nazivamo Pascalova distribucija. Pretpostavimo da se n-ti uspjeh dogodio u k-tom ponavljanju. Vjerojatnost tog događaja tada iznosi

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

za $k \geq n$, $n \in \mathbb{N}$ te $p \in \langle 0, 1 \rangle$.
Ilustrirajmo primjerom kako bi izgledala funkcija izvodnica vjerojatnosti negativne binomne distribucije.
Primjer 15. *Odredite funkciju izvodnicu negativne binomne distribucije s parametrima n i p, $p \in \langle 0, 1 \rangle$.*

Rješenje:
Znamo

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

Koristeći formulu (1) dobivamo sljedeće:

$$
\begin{aligned}
g_X(s) &= \sum_{k\geq n} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k s^{k+n} \\
&= p^n s^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} (1-p)^k s^k \\
&= p^n s^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (-1)^k (1-p)^k (-s)^k \\
&= p^n s^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (1-p)^k (-s)^k \\
&= p^n s^n (1-(1-p)s)^{-n} \\
&= \left(\frac{ps}{1-(1-p)s}\right)^n,
\end{aligned}
$$

pri čemu je u četvrtoj jednakosti korišten identitet

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

a u petoj jednakosti identitet

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Sada ćemo, u sljedećem primjeru, koristeći upravo izvedenu funkciju izvodnicu vjerojatnosti negativne binomne distribucije izračunati očekivanje i varijancu za danu distribuciju.

Primjer 16. *Koristeći funkciju izvodnicu vjerojatnosti negativne binomne distribucije izračunajte očekivanje i varijancu.*

Rješenje:
Za početak ćemo, kao i do sada, izračunati prvu i drugu derivaciju funkcije izvodnice.

$$
\begin{aligned}
g'_X(s) &= \frac{n\left(\frac{ps}{1-(1-p)s}\right)^n}{(p-1)\,s^2+s} \\
g''_X(s) &= -\frac{n\left((2p-2)\,s-n+1\right)\left(\frac{ps}{1-(1-p)s}\right)^n}{s^2\left((p-1)\,s+1\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Koristeći svojstvo (a) Propozicije 1 imamo:

$$EX = g'_X(1) = \frac{n\left(\frac{p}{1-(1-p)}\right)^n}{(p-1)\,1^2+1} = \frac{n}{p}.$$

Iskoristimo sada svojstvo (b) Propozicije 1:

$$\begin{aligned}
VarX &= g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 \\
&= -\frac{n\left((2p-2)-n+1\right)\left(\frac{p}{1-(1-p)}\right)^n}{1^2\left((p-1)\,1+1\right)^2} + \frac{n\left(\frac{p}{1-(1-p)}\right)^n}{(p-1)\,1^2+1} - \left(\frac{n\left(\frac{p}{1-(1-p)}\right)^n}{(p-1)\,1^2+1}\right)^2 \\
&= \frac{-n(2p-n-1)}{p^2} + \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} \\
&= \frac{-2np+n^2+n+np-n^2}{p^2} \\
&= \frac{n(1-p)}{p^2}.
\end{aligned}$$

Dakle, na ovaj način smo izračunali očekivanje i varijancu negativne binomne distribucije. Pogledajmo još kako možemo izračunati bilo koji moment na primjeru.

Primjer 17. *Izračunajte treći i peti moment:*

(a) Poissonove slučajne varijable s parametrom λ

(b) Binomne slučajne varijable s parametrima n i p.

Rješenje:
Prema Teoremu 3 vrijedi $E[(X(X-1)\cdots(X-k+1)] = g_X^{(k)}(1)$.
Također, znamo da je $g_X(1) = E[X]$. Sada, rekurzivno, računamo ostale momente. Prema Teoremu 3 je

$$g_X^{(2)}(1) = E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = EX^2 - E[X].$$

Dakle,

$$EX^2 = g_X^{(2)}(1) + g_X^{(1)}(1).$$

Nadalje, računamo treći moment. Vrijedi:

$$g_X^{(3)}(1) = E[X(X-1)(X-2)] = E[X(X^2-3X+2)] = E[X^3-3X^2+2X] = EX^3-3EX^2+2E[X].$$

Sada je:

$$EX^3 = g_X^{(3)}(1) + 3(g_X^{(2)}(1) + g_X^{(1)}(1)) - 2g_X^{(1)}(1) = g_X^{(3)}(1) + 3g_X^{(2)}(1) + g_X^{(1)}(1).$$

Računamo dalje prema Teoremu 3:

$$\begin{aligned}
g_X^{(4)}(1) &= E[X(X-1)(X-2)(X-3)] = E[(X^3-3X^2+2X)(X-3)] \\
&= E[X^4 - 3X^3 - 3X^3 + 9X^2 + 2X^2 - 6X] \\
&= EX^4 - 6EX^3 + 11EX^2 - 6E[X].
\end{aligned}$$

Sada je četvrti moment jednak:

$$\begin{aligned}
EX^4 &= g_X^{(4)}(1) + 6(g_X^{(3)}(1) + 3g_X^{(2)}(1) + g_X^{(1)}(1)) - 11(g_X^{(2)}(1) + g_X^{(1)}(1)) + 6g_X^{(1)}(1). \\
&= g_X^{(4)}(1) + 6g_X^{(3)}(1) + 7g_X^{(2)}(1) + g_X^{(1)}(1).
\end{aligned}$$

Preostaje nam još izračunati peti moment. Kao i do sada, računamo:

$$\begin{aligned} g_X^{(5)}(1) &= E[X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)] = E[(X^4-6X^3+11X^2-6X)(X-4)] \\ &= E[X^5-4X^4-6X^4+24X^3+11X^3-44X^2-6X^2+24X] \\ &= EX^5-10EX^4+35EX^3-50EX^2+24E[X]. \end{aligned}$$

Peti moment jednak je:

$$\begin{aligned} EX^5 &= g_X^{(5)}(1)+10(g_X^{(4)}(1)+6g_X^{(3)}(1)+7g_X^{(2)}(1)+g_X^{(1)}(1))-35(g_X^{(3)}(1)+3g_X^{(2)}(1)+g_X^{(1)}(1)) \\ &\quad +50(g_X^{(2)}(1)+g_X^{(1)}(1))-24g_X^{(1)}(1) \\ &= g_X^{(5)}(1)+10g_X^{(4)}(1)+25g_X^{(3)}(1)+15g_X^{(2)}(1)+g_X^{(1)}(1). \end{aligned}$$

U zadatku (a) traže se treći i peti momenti Poissonove slučajne varijable s parametrom λ. Funkcija izvodnica vjerojatnosti Poissonove slučajne varijable je oblika $g_X(s)=e^{\lambda(s-1)}$. Dakle, moramo još izračunati derivacije funkcije izvodnice vjerojatnosti kako bismo dobili traženo. Računamo:

$$\begin{aligned} g_X'(s) &= \lambda e^{\lambda(s-1)} \\ g_X''(s) &= \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \\ g_X'''(s) &= \lambda^3 e^{\lambda(s-1)} \\ g_X^{(4)}(s) &= \lambda^4 e^{\lambda(s-1)} \\ g_X^{(5)}(s) &= \lambda^5 e^{\lambda(s-1)}. \end{aligned}$$

Uvrštavamo umjesto s jedinicu i dobivamo da je treći moment Poissonove slučajne varijable jednak

$$EX^3=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda,$$

a peti moment jednak je

$$EX^5=\lambda^5+10\lambda^4+25\lambda^3+15\lambda^2+\lambda.$$

U zadatku (b) tražimo treći i peti moment binomne slučajne varijable s parametrima n i p. Opet računamo prvo derivacije funkcije izvodnice te dobivamo:

$$\begin{aligned} g_X'(s) &= np\,(1-p\,(1-s))^{n-1} \\ g_X''(s) &= (n-1)\,np^2\,(1-p\,(1-s))^{n-2} \\ g_X'''(s) &= (n-2)\,(n-1)\,np^3\,(1-p\,(1-s))^{n-3} \\ g_X^{(4)}(s) &= (n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,np^4\,(1-p\,(1-s))^{n-4} \\ g_X^{(5)}(s) &= (n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,np^5\,(1-p\,(1-s))^{n-5}. \end{aligned}$$

Dakle, treći moment binomne slučajne varijable jednak je

$$EX^3=(2-n)(1-n)np^3-3(1-n)np^2+np,$$

a peti moment jednak je

$$\begin{aligned}EX^5 &= (4-n)(3-n)(2-n)(1-n)np^5 - 10(3-n)(2-n)(-n1)np^4 + \\ &\quad 25(2-n)(1-n)np^3 - 15(1-n)np^2 + np.\end{aligned}$$

Dakle, sve što trebamo znati kako bismo izračunali k-ti moment neke slučajne varijable jest njena funkcija izvodnica vjerojatnosti i derivacije te funkcije.

Primjer 18. *Neka je X diskretna slučajna varijabla čija je funkcija izvodnica vjerojatnosti oblika $g_X(s) = \frac{1}{7}(2s^2 + 5s^4)$. Pronađite distribuciju slučajne varijable X.*

Rješenje:
Dakle, funkcija izvodnica slučajne varijable X je oblika

$$g_X(s) = \frac{1}{7}(2s^2 + 5s^4) = \frac{2s^2}{7} + \frac{5s^4}{7}.$$

Računamo derivacije funkcije g_X i dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}g_X'(s) &= \frac{4s}{7} + \frac{20s^3}{7}\\ g_X''(s) &= \frac{4}{7} + \frac{60s^2}{7}\\ g_X'''(s) &= \frac{120s}{7}\\ g_X^{(4)}(s) &= \frac{120}{7}\\ g_X^{(5)}(s) &= 0\\ g_X^{(k)}(s) &= 0,\ \forall k \geq 5\end{aligned}$$

Sada trebamo izračunati vjerojatnosti p_k pa imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}g_X(0) &= P(X=0) = 0\\ g_X'(0) &= P(X=1) = 0\\ \frac{1}{2!}g_X''(0) &= P(X=2) = \frac{2}{7}\\ \frac{1}{3!}g_X'''(0) &= P(X=3) = 0\\ \frac{1}{4!}g_X^{(4)}(0) &= P(X=4) = \frac{5}{7}\\ \frac{1}{5!}g_X^{(5)}(0) = &= P(X=5) = 0\\ \frac{1}{k!}g_X^{(k)}(0) = &= P(X=k) = 0,\ \forall k \geq 5\end{aligned}$$

Dakle, distribucija slučajne varijable X s funkcijom izvodnicom vjerojatnosti oblika

$$g_X(s) = \frac{1}{7}(2s^2 + 5s^4)$$

je

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Primjer 19. *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom izvodnicom vjerojatnosti $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$. Odredite o kojoj se vrsti distribucije diskretne slučajne varijable X radi na temelju njene funkcije izvodnice.*

Rješenje:
Kako bi shvatili o kojoj se vrsti distribucije diskretne slučajne varijable radi, pronaći ćemo k-tu derivaciju funkcije izvodnice vjerojatnosti i gledati koliko ona iznosi u nuli. Dakle, deriviramo

$$\begin{aligned} g_X'(s) &= \lambda e^{\lambda(s-1)} \\ g_X''(s) &= \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \\ &\vdots \\ g_X^{(k)}(s) &= \lambda^k e^{\lambda(s-1)} \end{aligned}$$

Kao što smo već prokomentirali, moramo još provjeriti koliko iznosi k-ta derivacija u nuli, odnosno

$$\frac{g_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

a to je baš vjerojatnost događaja $P(X = k) = p_k$ Poissonove slučajne varijable s parametrom $\lambda > 0$. Dakle, slučajna varijabla X ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$.
Na ovaj način odredili smo vrstu distribucije diskretne slučajne varijable X.

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[2] O. C.Ibe, *Fundamentals of Applied Probability and Random Processes*, Elsevier, Second edition, 2014.

[3] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[4] The University of Auckland (Nastavni materijali), *https://www.stat.auckland.ac.nz/ fewster/325/notes/ch4.pdf* , New Zeland, Department of Statistics (pristupljeno 18.7.2021.)

[5] University of Cambridge (Nastavni materijali), *https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/0708/Probabilty/prob06.pdf* , Department of Computer Science and Technology (pristupljeno 18.7.2021.)