Nizovi funkcija

Majdenić, Jelena

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Jelena Majdenić

Nizovi funkcija

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Jelena Majdenić

Nizovi funkcija

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Dragan Jukić

Osijek, 2021.

Sequences of functions

Sažetak

U ovom završnom radu proučavat ćemo konvergenciju nizova funkcija. Najprije ćemo navesti konvergenciju po točkama kao očitu definiciju konvergencije niza funkcija i pokazati da ta konvergencija nema dobro ponašanje. Zbog toga, kao jači pojam konvergencije, definirat ćemo uniformnu konvergenciju niza funkcija. Navest ćemo teoreme koji nam govore da uniformna konvergencija čuva omeđenost, neprekidnost te osigurava integrabilnost granične funkcije, a onda i time komutiranje limesa i integrala. Pokazat ćemo kada imamo derivabilnost granične funkcije, te komutiranje derivacije i limesa niza funkcija.

Ključne riječi

niz funkcija, konvergencija po točkama, uniformna konvergencija, neprekidnost

Abstract

In this bachelor's thesis we will study the convergence of sequences of functions. Firstly we will state the pointwise convergence as an obvious way to define the convergence of functions and we will show that it is not as well-behaved. As a stronger definition of convergence, we will define uniform convergence. We will state theorems which proves that uniform convergence preserve boundedness, continuity and ensures integrability of limit function as well as commutation of limit and integration. Thesis will show when is limit function derivable along with commutation of derivation and limit of sequence of functions.

Keywords

sequence of functions, pointwise convergence, uniform convergence, continuity

Sadržaj

1 Uvod

Kada spomenemo pojam niza najčešće se prvo sjetimo niza realnih brojeva, a kao najvažnijeg svojstva nizova, konvergencije niza. U ovom završnom radu bavimo se nizovima funkcija, odnosno njihovom konvergencijom. Navodimo dva tipa konvergenije, a to su konvergencija po točkama i uniformna konvergencija. U prvom poglavlju definiramo pojam niza, navodimo primjere nizova i bavimo se konvergencijom nizova realnih brojeva. Zatim u drugom poglavlju proučavamo konvergenciju nizova funkcija. Najprije definiramo konvergenciju po točkama i pokazujemo primjerima da ta konvergencija nije osobito korisna. U drugom potpoglavlju definiramo uniformnu konvergenciju koja ima dobra svojstva. Navodimo i dokazujemo teoreme koji nam to govore i navodimo njihove posljedice. U zadnjem poglavlju proučavamo vezu između neprekidnosti i uniformne konvergencije.

2 Nizovi

Funkcija $a : n \mapsto a(n)$ sa skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u neprazni skup S zove se niz u skupu S. Umjesto $a(n)$ često pišemo a_n, a_n zovemo opći član niza a, a n indeks člana a_n. Umjesto $a : \mathbb{N} \to S$ pišemo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće (a_n).

Razlikujemo slučajeve:

1. Ako je $S = \mathbb{R}$, tada kažemo da je (a_n) niz realnih brojeva;
2. Ako je $S = \mathbb{C}$, tada kažemo da je (a_n) niz kompleksnih brojeva;
3. Ako je S skup realnih ili kompleksnih funkcija definiranih na nekom podskupu $A \subseteq \mathbb{R}$, tada kažemo da je (a_n) niz funkcija definiranih na A.

Primjer 2.1. *([3]) Niz $n \mapsto a_n = \frac{1}{n}$ je niz realnih brojeva, dok je niz $n \mapsto \frac{1}{n+2i}$ niz kompleksnih brojeva. Ako prirodnom broju n pridružimo funkciju $a_n : x \mapsto \sin nx$, dobivamo niz funkcija $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$.*

U idućoj definiciji uvodimo pojam konvergencije nizova realnih brojeva. Navest ćemo i korisne teoreme, a njihovi dokazi mogu se pronaći u [3].

Definicija 2.2. ([3]) Kažemo da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva konvergira realnom broju a_0, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0, takav da

$$(n > n_0) \Rightarrow (|a_n - a_0| < \varepsilon).$$

Broj a_0 zovemo granična vrijednost ili limes niza (a_n), a za niz (a_n) kažemo da je konvergentan. Pišemo $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.

Teorem 2.3. *([3])*

a) Konvergentan niz ima samo jednu graničnu vrijednost.

b) Konvergentan niz je ograničen.

Ako je S podskup od $\mathbb{R}$, $a : n \mapsto a_n$ niz elemenata iz S i f funkcija sa S u $\mathbb{R}$, onda je kompozicija $f \circ a$ funkcija f i a definirana i $f \circ a$ je niz realnih brojeva. Pri tome $(f \circ a)(n) = f(a_n)$, tj. $f \circ a$ je niz $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$.

Teorem 2.4. *([3]) Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $n \mapsto a_n$ niz u I koji konvergira k $a_0 \in I$. Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki a_0, onda niz $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$ konvergira k $f(a_0)$, tj. $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$.*

Teorem 2.5. *([3]) Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi realnih brojeva. Vrijedi:*

a) Niz $n \mapsto a_n + b_n$ je konvergentan i $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$;

b) Niz $n \mapsto a_n - b_n$ je konvergentan i $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$;

c) Za svaki $c \in \mathbb{R}$ niz $n \mapsto c \cdot a_n$ je konvergentan i $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$;

d) Niz $n \mapsto a_n \cdot b_n$ je konvergentan i $\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n)$;

e) Ako je $b_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\lim b_n \neq 0$, onda je i niz $n \mapsto \frac{a_n}{b_n}$ konvergentan i $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$;

f) Niz $n \mapsto |a_n|$ je konvergentan i $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.

3 Konvergencija nizova funkcija

3.1 Konvergencija po točkama

Definicija 3.1. ([2]) Neka je S bilo koji neprazan skup i (X, d) metrički prostor. Neka su na skupu S definirani niz (f_k) funkcija $f_k : S \to X$ i funkcija $f : S \to X$. Kažemo da niz funkcija (f_k) konvergira prema funkciji f u točki $t_0 \in S$ s obzirom na metriku d ako niz $(f_k(t_0))$ konvergira prema $f(t_0)$.

Ako niz funkcija (f_k) konvergira prema funkciji f u svakoj točki $t \in S$, onda kažemo da (f_k) konvergira po točkama ili obično prema funkciji f na skupu S.

Pišemo $f(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) \quad (t \in S)$.

Obična konvergencija na skupu S može se iskazati ovako:

$$(\forall t \in S)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})$$

$$k \geq k_0 \Rightarrow d(f_k(t), f(t)) < \varepsilon \tag{3.1}$$

Konvergencija po točkama nije naročito korisna i nema dobro ponašanje koje bi smo očekivali. Ona nam ne osigurava derivabilnost limesa niza derivabilnih funkcija niti nam osigurava integrabilnost (u Riemannovom smislu) limesa niza integrabilnih funcija. Prema tome, ne vrijede formule

$$\frac{d}{dx}(\lim_{k\to\infty} f_k) = \lim_{k\to\infty}(\frac{d}{dx} f_k)$$

$$\int_a^b (\lim_{k\to\infty} f_k))dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Pokažimo to primjerima:

Primjer 3.2. *([2]) Za svaki $k \in N$ definiramo derivabilnu funkciju $f_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ formulom $f_k(x) = |x|^{1+\frac{1}{k}}$. Granična funkcija $f(x) = |x|$ nije derivabilna u točki $x = 0$.*

Primjer 3.3. *([2]) Kako je Q prebrojiv skup, moguće je poslagati racionalne brojeve iz skupa $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ u niz $q_1, q_2, q_3 \dots$. Nadalje definiramo funkcije $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ na sljedeći način*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x \in \{q_1, \dots, q_k\} \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ funkcija f_k je integrabilna jer ima konačno mnogo prekida i pri tome je $\int_0^1 f_k(x)dx = 0$. Granična funkcija $f = \lim\limits_k f_k$ je Dirichletova funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x \textit{ racionalan} \\ 0, & \textit{ako je } x \textit{ iracionalan} \end{cases}$$

koja očito nije integrabilna.

Primjer 3.4. *([2]) Neka je $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f_k(x) = \frac{x}{1+kx^2}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Niz derivabilnih funkcija (f_k) konvergira ka funkciji $f = 0$ i zato je*

$$\frac{d}{dx}(\lim_{k\to\infty} f_k(x)) = 0.$$

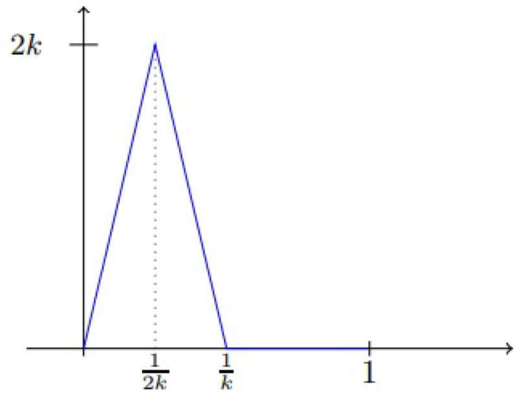
Kako je $\frac{d}{dx}f_k(x) = (\frac{x}{1+kx^2})' = \frac{1+kx^2-2kx^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$, *onda je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Vidimo da derivacija i limes ne komtiraju u točki $x = 0$.

Primjer 3.5. *([2]) Za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *definiramo integrabilnu funkciju na segmentu* $[0, 1]$ *formulom*

$$f_k(x) = \begin{cases} 4k^2x, & \text{ako je } 0 \leq x < \frac{1}{2k} \\ 4k - 4k^2x, & \text{ako je } \frac{1}{2k} \leq x < \frac{1}{k} \\ 0, & \text{ako je } \frac{1}{k} < x \leq 1 \end{cases}.$$



Slika 1.: graf funkcije f_k ([2])

Niz funkcija (f_k) *po točkama konvergira prema integrabilnoj nul funkciji, tj.* $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ *za svaki* $x \in [0, 1]$. *Vrijedi*

$$\int_0^1 f_k(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2k}} 4k^2x dx + \int_{\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{k}} (4k - 4k^2x)dx + \int_{\frac{1}{k}}^1 0 dx = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

te slijedi

$$0 = \int_0^1 (\lim_{k\to\infty} f_k(x))dx \neq \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx = 1.$$

Prema tome integral i limes niza funkcija ne komutiraju.

Idući primjeri pokazuju da konvergencija po točkama općenito ne čuva omeđenost i neprekidnost.

Primjer 3.6. *([1]) Neka je niz funkcija* $f_k : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *definiran s* $f_k(x) = \frac{k}{kx+1}$. *Znamo da je* $x \neq 0$ *pa vrijedi*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{k}} = \frac{1}{x}.$$

Tada je granična funkcija $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *definirana s* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Imamo* $|f_k(x)| < k$ *za sve* $x \in (0, 1)$, *odnosno svaka funkcija* f_k *je omeđena na* $(0, 1)$, *dok funkcija* f *nije omeđena.*

Primjer 3.7. *([1]) Neka je niz funkcija $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiran s $f_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$. Za $0 \leq x < 1$ vrijedi $x^k \to 0$ kad $k \to \infty$, dok za $x = 1$ vrijedi $x^k \to 1$ kad $k \to \infty$. Tada je granična funkcija f zadana s*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{za} \quad x = 1. \end{cases}$$

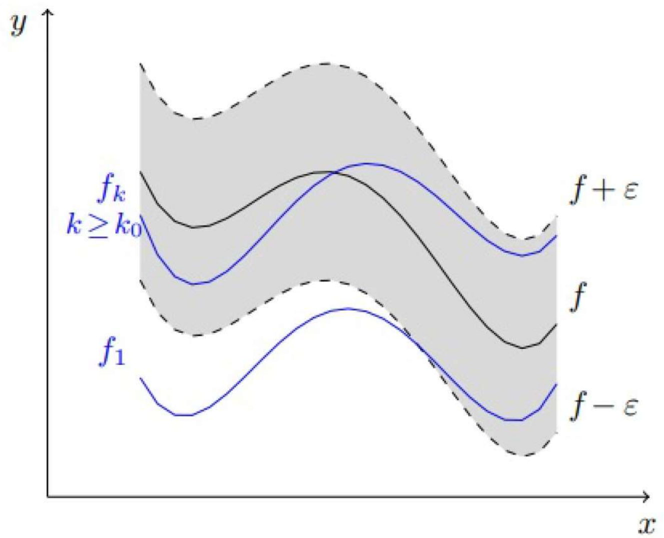
Svaka funkcija f_k neprekidna je na $[0,1]$, dok granična funkcija f nije neprekidna. Funkcija f ima prekid u 1.

3.2 Uniformna konvergencija

Definicija 3.8. ([2]) Neka je S bilo koji neprazan skup, a (X, d) metrički prostor. Za niz (f_k) funkcija $f_k : S \to X$ kažemo da uniformno konvergira prema funkciji $f : S \to X$ na skupu S ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ i za sve $t \in S$ vrijedi $d(f_k(t), f(t)) < \varepsilon$ (slika 2.).

Uniformna konvergencija na skupu S se može zapisati kao

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall t \in S)(\forall k \in \mathbb{N})$$
$$k \geq k_0 \Rightarrow d(f_k(t), f(t)) < \varepsilon. \tag{3.2}$$



Slika 2. ([2])

Treba uočiti da se zapis (3.2) razlikuje od zapisa (3.1). Zagrada $(\forall t \in S)$ kod (3.1) nalazi na prvom mjestu, a od (3.2) na trećem mjestu. Zbog toga kod konvergencije po točkama broj k_0 općenito ovisi i o ε i o t, dok kod uniformne konvergencije ovisi samo o ε.

Očito je da uniformna konveregencija povlači običnu konvergenciju (po točkama). Sljedeći primjer pokazuje da obrat ne vrijedi.

Primjer 3.9. *([2]) U primjeru 3.7 pokazali smo da niz funkcija (f_k) definiran formulom $f_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ konvergira obično prema funkciji*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Pokazat ćemo da ta konvergencija nije uniformna. Dovoljno je pokazati da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $x \in [0, 1)$ takav da je $|f_k(x) - f(x)| = x^k \geq 1/2$, pa konvergencija ne može biti uniformna. Za svaki $x \in [1 - \frac{1}{2k}, 1)$ pomoću Bernoullijeve nejednakosti dobiva se $x^k = (1 + (x-1))^k \geq 1 + k(x-1) \geq \frac{1}{2}$.

Bernoullijeva nejednakost: za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki realan broj $x \geq -1$ vrijedi $(1+x)^n \geq 1 + nx$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$ ili $x = 0$.

Primjedba 3.10. *([5])*

a) *Pretpostavimo da niz realnih brojeva (a_k) knvergira prema realnom broju a. Za svaki podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ neka $f_k : S \to \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ budu konstantne funkcije, odnosno $f_k(x) = a_k$, $f(x) = a$, za sve $x \in S$. Tada je lako vidjeti da niz funkcija (f_k) uniformno konvergira prema funkciji f na S.*

b) *Ako niz funkcija (f_k) uniformno konvergira prema funkciji f na S i $S' \subseteq S$, onda (f_k) uniformno konvergira prema f na S'.*

Propozicija 3.11. *([5]) Neka su f, $f_k : S \to \mathbb{R}$ realne funkcije na S. Tada niz (f_k) uniformno konvergira prema funkciji f na S onda i samo onda ako postoji $M_k = \sup_{x \in S} |f_k(x) - f(x)|$, za svaki dovoljno veliki k i $M_k \to 0$ kad $k \to \infty$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $M_k \to 0$ kad $k \to \infty$. Zbog toga za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $0 \leq M_k < \varepsilon$ za $k \geq k_0$. Prema definiciji od M_k imamo $|f_k(x) - f(x)| \leq M_k$ za sve $x \in S$. Dobivamo $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$ i sve $x \in S$, odnosno imamo uniformnu konvergenciju.
Obrnuto pretpostavimo da niz (f_k) uniformno konvergira prema funkciji f na S. Tada prema definiciji za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $k \geq k_0$ i sve $x \in S$. Tada je skup $S_k = \{|f_k(x) - f(x)| : x \in S\}$ omeđen odozgo sa $\frac{\varepsilon}{2}$ pa je $M_k = \sup_{x \in S} S_k \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. □

Sada je lako vidjeti da vrijedi i iduća propozicija.

Propozicija 3.12. *([2]) Neka je S bilo koji neprazan skup, a (X, d) metrički prostor. Niz (f_k) funkcija $f_k : S \to X$ uniformno konvergira prema funkciji $f : S \to X$ na skupu S onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi*

$$\sup_{t \in S} d(f_k(t), f(t)) < \varepsilon, \ \forall k \geq k_0.$$

Primjedba 3.13. *([2]) Skup $B(S, \mathbb{R})$ svih omeđenih realnih funkcija definiranih na skupu S uz standardno zbrajanje funkcija i standardno množenje funkcije skalarom je realan vektorski prostor. Funkcija $\|\cdot\|_\infty : B(S, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in S} |f(t)|$$

je uniformna norma na $B(S, \mathbb{R})$.
Niz (f_k) u $B(S, \mathbb{R})$ konvergira u normi $\|\cdot\|_\infty$ prema funkciji $f \in B(S, \mathbb{R})$ onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{t \in S} |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon, \ \forall k \geq k_0.$$

Prema propoziciji 3.12. će to biti onda i samo onda ako niz (f_k) uniformno konvergira prema f na S. Dakle konvergencija u normi $\|\cdot\|_\infty$ jest zapravo uniformna konvergencija na skupu S.

Sljedeća definicija i teorem omogućavaju nam ispitati uniformnu konvergenciju niza realnih funkcija bez određivanja granične funkcije.

Definicija 3.14. ([2]) Neka je S bilo koji neprazan skup. Niz funkcija (f_k), $f_k : S \to \mathbb{R}$, je uniformno Cauchyjev na S ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_m(x) - f_k(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in S, \ \forall m, k \geq k_0.$$

Primjedba 3.15. *([2]) Niz funkcija (f_k), $f_k : S \to \mathbb{R}$, je uniformno Cauchyjev na S onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$\sup_{x\in S} |f_m(x) - f_k(x)| < \varepsilon, \ \forall m, k \geq k_0.$$

Za dokaz idućeg teorema potrebna nam je sljedeća definicija i teorem.

Definicija 3.16. ([5]) Niz (x_k) je Cauchyjev niz ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom

$$m, k \geq k_0 \Rightarrow |x_m - x_k| < \varepsilon.$$

Teorem 3.17. *([5]) Niz realnih brojeva konvergira ako i samo ako je on Cauchyjev.*

Teorem 3.18. *([2]) Neka je S neprazan skup, a (f_k) niz funkcija $f_k : S \to \mathbb{R}$. Vrijedi:*

a) Niz funkcija (f_k) uniformno konvergira na S (prema nekoj funkciji $f : S \to \mathbb{R}$) onda i samo onda ako je taj niz uniformno Cauchyjev na S.

b) Ako su sve funkcije f_k omeđene na S i ako niz funkcija (f_k) konvergira uniformno na S prema funkciji $f : S \to \mathbb{R}$, onda je funkcija f omeđena na S.

Dokaz. a) Pretpostavimo da niz (f_k) konvergira uniformno na S prema $f : S \to \mathbb{R}$. Za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in S, \ \forall k \geq k_0.$$

Vrijedi:

$$|f_m(x) - f_k(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall m, k \geq k_0, \forall x \in S.$$

Odnosno niz (f_k) je uniformno Cauchyjev na S.

Obratno, pretpostavimo da je (f_k) uniformno Cauchyjev niz na S. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_m(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in S, \ \forall m, k \geq k_0. \tag{3.3}$$

Prema definiciji 3.16. niz realnih brojeva $(f_k(x))$ je Cauchyjev za svaki $x \in S$, pa je prema teoremu 3.17. i konvergentan. Definiramo funkciju f na S na sljedeći način

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in S.$$

Ako u (3.3) fiksiramo $k \geq k_0$ i zatim napravimo granični prijelaz po m, dobivamo

$$|f(x) - f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall x \in S, \ \forall k \geq k_0, \tag{3.4}$$

odnosno (f_k) konvergira uniformno prema f na S.

b) Iz zapisa (3.4) slijedi da je za $k \geq k_0$ funkcija $f - f_k$ omeđena na S. Kako je $f = (f - f_k) + f_k$ i znamo da su $f - f_k$ i f_k omeđene funkcije na S, slijedi da je i funkcija f omeđena na skupu S. $\square$

Znamo da uniformna konvergencija čuva omeđenost pa zbog toga vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 3.19. *([2]) Ako niz omeđenih funkcija konvergira po točkama ka neomeđenoj funkciji, tada taj niz ne konvergira uniformno.*

Primjer 3.20. *([2]) U primjeru 3.6. pokazali smo da niz omeđenih funkcija $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiran s $f_k(x) = \frac{k}{1+kx}$ konvergira po točkama na $(0,1)$ ka neomeđenoj funkciji $f(x) = \frac{1}{x}$. Pa prema korolaru 3.19. ta konvergencija nije uniformna.*

Sljedeći teorem pokazuje nam da uniformna konvergencija niza integrabilnih funkcija osigurava integrabilnost granične funkcije i komutiranje integrala i limesa niza funkcija.

Teorem 3.21. *([2]) Neka je (f_k) niz integrabilnih funkcija $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ koji na $[a,b]$ uniformno konvergira prema funkciji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

a) Funkcija f integrabilna je na $[a,b]$.

b) Integral i limes niza funkcija komutiraju, tj. vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

Dokaz. a) Treba pokazati da je f ograničena na $[a,b]$.

Za zadani $\varepsilon > 0$ zbog uniformne konvergencije postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{za svaki } k \geq k_0 \text{ i za sve } x \in [a,b],$$

odnosno,

$$f_k(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_k(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall k \geq k_0,\ \forall x \in [a,b]. \tag{3.5}$$

Prema zapisu (3.5) slijedi ograničenost funkcije f na $[a,b]$, jer znamo da je f_k ograničena na $[a,b]$.

Još je potrebno pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija P_0 segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon$, gdje su $S(f,P_0)$ gornja, a $s(f,P_0)$ donja Darbouxova suma funkcije f pridružena subdiviziji P_0. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna subdivizija segmenta $[a,b]$ i neka vrijedi

$$m_i(f) := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i(f_k) := \inf\{f_k(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i(f_k) := \sup\{f_k(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Tada iz zapisa (3.5) slijedi

$$m_i(f_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_i(f), \quad M_i(f) \leq M_i(f_k) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall k \geq k_0,$$

pa dobivamo

$$M_i(f) - m_i(f) \leq M_i(f_k) - m_i(f_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall k \geq k_0.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}S(f,P)-s(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}[M_i(f)-m_i(f)](x_i-x_{i-1})\\&\le\sum_{i=1}^{n}[M_i(f_k)-m_i(f_k)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}](x_i-x_{i-1})\\&=S(f_k,P)-s(f_k,P)+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Kako je funkcija f_k, $k\ge k_0$, integrabilna na segmentu $[a,b]$, za svaki $\varepsilon>0$ postoji subdivizija P_0 segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f_k,P_0)-s(f_k,P_0)<\frac{\varepsilon}{2}$.
Zato je $S(f,P_0)-s(f,P_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
b) Neka je $\varepsilon>0$, onda zbog uniformne konvergencije postoji $k_0\in\mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad\text{za svaki } k\ge k_0 \text{ i za sve } x\in[a,b].$$

Za sve $k\ge k_0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_k(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|&=\left|\int_a^b(f_k(x)-f(x))dx\right|\\&\le\int_a^b|f_k(x)-f(x)|dx\\&\le\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

Pokazali smo da je

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

□

Lema 3.22. *([2]) Neka je (f_k) niz funkcija $f_k:[a,b]\to\mathbb{R}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ na $[a,b]$. Ako je svaka od funkcija f_k neprekidna u točki $x_0\in[a,b]$, onda je i granična funkcija f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon>0$. Zbog uniformne konvergencije postoji $k_0\in\mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{za svaki } x\in[a,b] \text{ i za svaki } k\ge k_0. \tag{3.6}$$

Funkcija f_{k_0} je neprekidna u točki x_0, pa postoji $\delta>0$ takav da je

$$(\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b])\ |f_{k_0}(x)-f_{k_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.7}$$

Zato za svaki $k\ge k_0$ i za svaki $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b])$ pomoću zapisa (3.6) i (3.7) dobivamo

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=|f(x)-f_{k_0}(x)+f_{k_0}(x)-f_{k_0}(x_0)+f_{k_0}(x_0)-f(x_0)|\\&\le|f(x)-f_{k_0}(x)|+|f_{k_0}(x)-f_{k_0}(x_0)|+|f_{k_0}(x_0)-f(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

Odnosno f je neprekidna u točki x_0. □

Lema 3.22. pokazuje kako uniformna konvergencija ponekad osigurava zamjenu limesa. Odnosno vrijedi:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_k(x)$$

Jednakost pokazuje kako je limes kad $x \to x_0$ od $f(x)$ jednak limesu kad $k \to \infty$ od $f_k(x_0)$, odnosno $f(x_0)$.

Neka je zadan neki skup S i $\sum f_k$ red realnih funkcija $f_k : S \to \mathbb{R}$. Kažemo da red $\sum f_k$ konvergira (uniformno konvergira) prema funkciji $f : S \to \mathbb{R}$ na skupu S ako niz parcijalih suma (s_k), koji definiramo sa $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$, konvergira (uniformno konvergira) prema f.
U nastavku ćemo navesti korolare koji nam govore kada se konvergentni redovi funkcija smiju integrirati i derivirati član po član.

Korolar 3.23. *([2]) Neka red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ neprekidnih funkcija $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniformno konvergira prema funkciji f na $[a,b]$. Tada za svaki $x \in [a,b]$ red $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x f_k(t)dt$ konvergira i suma mu je $\int_a^x f(t)dt$, tj.*

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^x f_k(t)dt\right).$$

Dokaz. Parcijalne sume $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ tvore niz neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$. Budući da taj niz uniformno konvergira prema funkciji f, prema lemi 3.22., f je neprekidna na $[a,b]$. Zato su f i sve funkcije s_k neprekidne i na svakom manjem segmentu $[a,x]$, $x \in [a,b]$, pa su zbog toga i integrabilne na $[a,x]$. Prema teoremu 3.21. vrijedi

$$\int_a^x f(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_a^x s_k(t)dt,$$

tj.

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^x f_k(t)dt\right).$$

□

Uniformna konvergencija niza derivabilnih funkcija ne osigurava derivabilnost granične funkcije. U sljedećem primjeru pokazat ćemo da i kad imamo derivabilnu graničnu funkciju derivacija i limes ne moraju komutirati.

Primjer 3.24. *([1]) U primjeru 3.4. pokazali smo da niz funkcija (f_k), gdje je $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom $f_k(x) = \frac{x}{1+kx^2}$ konvergira po točkama prema funkciji $f = 0$. Vidjeli smo da derivacija i limes ne komutiraju u točki $x = 0$. Pokazat ćemo da taj niz konvergira i uniformno na $\mathbb{R}$. Vrijedi*

$$|f_k(x)| = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{\sqrt{k}|x|}{1+kx^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$$

gdje je $t = \sqrt{k}|x|$. Zbog $(1-t)^2 \geq 0$ slijedi $2t \leq 1+t^2$, pa imamo

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dobivamo

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{k}},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Za zadani $\varepsilon > 0$ odaberimo $k_0 = \frac{1}{4\varepsilon^2}$. Tada vrijedi

$$|f_k(x)| < \varepsilon \text{ za sve } x \in \mathbb{R} \text{ kad je } k > k_0.$$

Što dokazuje da niz (f_k) uniformno konvergira prema nul funkciji na $\mathbb{R}$.

Sljedeći teorem govori nam o komutiranju derivacije i limesa niza funkcija.

Teorem 3.25. *([2]) Neka je (f_k) niz neprekidno derivabilnih funkcija (derivacija je neprekidna funkcija) $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ koji na $[a, b]$ konvergira (obično) prema funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ako niz derivacija (f'_k) uniformno konvergira na $[a, b]$ prema funkciji g, onda je funkcija f derivabilna i $f' = g$, tj.*

$$\frac{d}{dx}(\lim_{k\to\infty} f_k) = \lim_{k\to\infty}(\frac{d}{dx} f_k).$$

Dokaz. Znamo da je f'_k neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$, pa prema lemi 3.22. slijedi neprekidnost funkcije g na segmentu $[a, b]$. Zato je ona integrabilna i na svakom segmentu $[a, x],\ x \in (a, b]$. Iz teorema 3.21., za svaki $x \in (a, b]$ dobivamo

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int_a^x f'_k(t)dt = \lim_{k\to\infty} [f_k(x) - f_k(a)] = f(x) - f(a),$$

odnosno vrijedi

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Sada iz posljednje jednakosti zaključujemo da je f derivabilna i $f' = g$. □

Korolar 3.26. *([2]) Neka red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ neprekidno derivabilnih funkcija $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergira prema funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i neka red $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ uniformno konvergira prema $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tada je $f' = g$ na $[a, b]$, tj.*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k.$$

Dokaz. Parcijalne sume $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ tvore niz neprekidno derivabilnih funkcija na $[a, b]$. Taj niz konvergira prema funkciji f, a niz (s'_k) uniformno konvergira prema funkciji g. Prema teoremu 3.25. slijedi tvrdnja. □

4 Neprekidnost i uniformna konvergencija

Znamo da neprekidnost niza funkcija nije dovoljna da bi i granična funkcija bila neprekidna. Idući teorem nam govori da je dovoljno zahtijevati uniformnu neprekidnost niza funkcija.

Teorem 4.1. *([2]) Neka je X topološki prostor i (f_k) niz funkcija $f_k : X \to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$. Ako je svaka od funkcija f_k neprekidna u točki $x_0 \in X$, onda je i granična funkcija f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog uniformne konvergencije postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svaki } x \in X \text{ i za svaki } k \geq k_0. \tag{4.1}$$

Zbog neprekidnosti funkcije f_{k_0} u točki x_0, postoji otvorena okolina U točke x_0 takva da vrijedi

$$(\forall x \in U)\ |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.2}$$

Sada za svaki $k \geq k_0$ i za svaki $x \in U$ prema zapisima (4.1) i (4.2) dobivamo

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Odnosno f je neprekidna u točki x_0. □

Korolar 4.2. *([2]) Neka je X topološki prostor i neka je $\sum f_k$ red realnih funkcija $f_k : X \to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$. Ako je svaka funkcija f_k neprkidna u točki $x_0 \in X$ (odnosno, na X), onda je i funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in X$ (odnosno, na X).*

Dokaz. Parcijalne sume $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ tvore niz neprekidnih funkcija. Kako taj niz uniformno konvergira prema funkciji f, prema teoremu 4.1. funkcija f je neprekidna. □

Neka je X topološki prostor. S $BC(X, \mathbb{R})$ označimo skup svih omeđenih neprekidnih realnih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$. Očito je $BC(X, \mathbb{R})$ potprostor vektorskog prostora $B(X, \mathbb{R})$ te je i on normiran prostor s uniformnom normom $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Za dokaz sljedećeg korolara potreban nam je sljedeći teorem.

Teorem 4.3. *([2]) Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $F \subseteq X$ zatvoren je onda i samo onda ako svaki niz (x_k) u F koji konvergira u X ima limes u F.*

Korolar 4.4. *([2]) Ako je X topološki prostor, onda je skup $BC(X, \mathbb{R})$ zatvoren u $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.*

Dokaz. Prema teoremu 4.3., dovoljno je pokazati da skup $BC(X, \mathbb{R})$ sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova. Neka je (f_k) niz funkcija u $BC(X, \mathbb{R})$ koji konvergira prema funkciji $f \in B(X, \mathbb{R})$. Treba pokazati da je f neprekidna na X. Kako prema primjedbi 3.13. konvergencija niza funkcija (f_k) u normi $\|\cdot\|_\infty$ zapravo znači uniformnu konvergenciju tog niza, niz (f_k) je niz omeđenih neprekidnih funkcija koji uniformno kovergira prema funkciji f. Prema teoremu 4.1., f je neprekidna na X, odnosno $f \in BC(X, \mathbb{R})$. □

U nastavku ćemo navesti i dokazati Dinijev teorem.

Teorem 4.5. *([4]) Neka je S kompaktan prostor i (f_k) niz neprekidnih funkcija $f_k : S \to \mathbb{R}$ koji konvergira (obično) prema funkciji $f : S \to \mathbb{R}$. Ako je niz (f_k) monoton i funkcija f neprekidna, onda (f_k) konvergira prema f uniformno.*

Dokaz. Pretpostavimo da niz (f_k) raste, odnosno za svaki $s \in S$ niz $(f_k(s))$ je uzlazan niz realnih brojeva. Kako je $\lim\limits_{k\to\infty}(f_k(s)) = f(s)$, za svaki $s \in S$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k(s) \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$0 \leq f(s) - f_{k(s)}(s) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.3}$$

Zbog neprekidnosti funkcija f i $f_{k(s)}$ u točki s postoji otvorena okolina $U(s)$ točke s tako da vrijedi

$$t \in U(s) \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4.4}$$

$$t \in U(s) \Rightarrow |f_{k(s)}(t) - f_{k(s)}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.5}$$

Iz (4.3), (4.4) i (4.5) sada slijedi

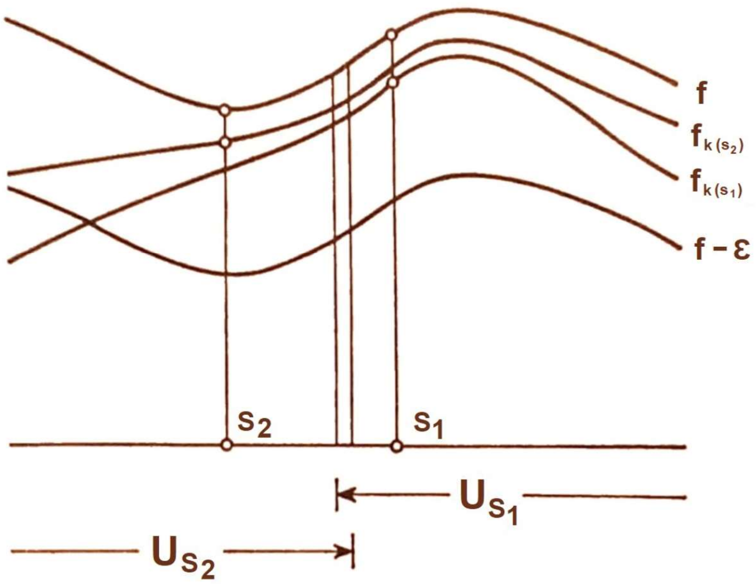
$$f(t) - f_{k(s)}(t) = |f(t) - f_{k(s)}(t)| < \varepsilon,\ t \in U(s). \tag{4.6}$$

Kako je niz $(f_k(t))$ uzlazan, prema zapisu (4.6) dobivamo

$$|f(t) - f_k(t)| = f(t) - f_k(t) \leq f(t) - f_{k(s)}(t) < \varepsilon, \tag{4.7}$$

$$k \geq k(s),\ t \in U(s).$$

Familija $(U(s), s \in S)$ je otvoren pokrivač za S, pa postoji konačan potpokrivač $(U(s_1), \ldots, U(s_r)),\ r \in \mathbb{N}$ (slika 3.).



Slika 3. ([4])

Neka je $k_0 = \max\{k(s_1), \ldots, k(s_r)\}$.

Za proizvoljnu točku $t \in S$ postoji $i \in \{1, \ldots, r\}$ takav da je $t \in U(s_i)$. Ako je $k \geq k_0$, onda je $k \geq k(s_i)$, pa iz (4.7) slijedi

$$|f(t) - f_k(t)| < \varepsilon.$$

Odnosno imamo uniformnu konvergenciju. Za silazan niz (f_k) zaključak se dobije analogno, promatranjem uzlaznog niza $(-f_k)$. $\square$

Literatura

[1] J. K. Hunter, An Introduction to Real Analysis, Department of Mathematics, University of California at Davis, 2014.
https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/intro_analysis_pdf/intro_analysis.pdf

[2] D. Jukić, Realna analiza, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[3] S. Kurepa, Matematička analiza, 2. dio, Funkcije jedne varijable, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[4] S. Mardešić, Matematička analiza, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[5] W. A. Sutherland, Introduction to Metric and Topological Spaces, 2nd edition, Oxford University Press, 2009.