# Vrednovanja u nastavi matematike

**Batrac, Ines**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:764889

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-26**

*Repository / Repozitorij:*

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ines Batrac

# Vrednovanja u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ines Batrac

# Vrednovanja u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2021.

# Sadržaj

**Uvod** **2**

**1 Kurikulum nastavnog predmeta Matematika** **3**
1.1 Matematički procesi i domene kurikuluma nastavnog predmeta Matematika . . . 3
1.2 Odgojno-obrazovni ciljevi učenja i poučavanja predmeta . . . . . 4
1.3 Odogojno-obrazovni ishodi kurikuluma nastavnog predmeta Matematika . . . . 4
1.4 Povezanost s drugim predmetima i međupredmetnim temama . . . . . 5

**2 Vrednovanje** **6**
2.1 Vrednovanje za učenje . . . . . 9
2.1.1 Metode vrednovanja za učenje . . . . . 10
2.1.2 Koristi od vrednovanja za učenje . . . . . 11
2.2 Vrednovanje kao učenje . . . . . 12
2.2.1 Metode vrednovanja kao učenje . . . . . 12
2.2.2 Koristi od vrednovanja kao učenje . . . . . 13
2.3 Vrednovanje naučenog . . . . . 14
2.3.1 Unutarnje vrednovanje . . . . . 14
2.3.2 Hibridno vrednovanje . . . . . 18
2.3.3 Vanjsko vrednovanje . . . . . 19

**3 Primjeri vrednovanja za učenje** **20**
3.1 Množenje i dijeljenje . . . . . 20
3.2 Brojevi i računske operacije u bazi 10 . . . . . 22
3.3 Pravokutni koordinatni sustav u ravnini . . . . . 24
3.4 Proporcionalnost . . . . . 25
3.5 Kvadriranje racionalnih brojeva . . . . . 27
3.6 Vjerojatnost i statistika . . . . . 28
3.7 Linearna funkcija . . . . . 29
3.8 Eksponencijalna funkcija . . . . . 30
3.9 Kompleksna ravnina . . . . . 31

**Zaključak** **32**

**Literatura** **33**

**Sažetak** **34**

**Summary** **35**

**Životopis** **36**

# Uvod

Za razumijevanje svijeta oko nas, od prošlosti preko sadašnjosti, a onda i u budućnosti, ključno je poznavanje matematike. Kroz kompleksan proces učenja i poučavanja nastavnog predmeta Matematike učitelji žele kod učenika poticati razvoj kreativnosti, apstraktnog i logičkog razmišljanja kako bi stečena znanja i vještine mogli primjenjivati u osobnom, društvenom i profesionalnom životu.

U prvom poglavlju ovoga rada upoznajemo Kurikulum nastavnog predmeta Matematika. Na početku su navedene dvije dimenzije matematičkog obrazovanja: matematički procesi i domene koje se očituju u odgojno-obrazovnim ciljevima učenja i poučavanja te odgojno-obrazovnim ishodima. Osim razrade odgojno-obrazovnih ciljeva učenja i poučavanja i odgojno-obrazovnih ishoda, opisana je povezanost nastavnog predmeta Matematike s drugim predmetima i međupredmetnim temama.

Osim kurikuluma, sastavni dio odgojno-obrazovnog sustava čini i vrednovanje kao dio procesa učenja i poučavanja. Pojmovi poput praćenja, provjeravanja i ocjenjivanja često su poistovjećivani s pojmom vrednovanja, no kod provođenja procesa vrednovanja bitno je poznavati razlike. Kako bi vrednovanje učeničkih postignuća i napredovanja bilo kvalitetno osmišljeno i provedeno, ono treba zadovoljavati ključna načela. Ovisno o tome tko provodi vrednovanje, kako i kada se ono provodi te što se njime vrednuje kod učenika , razlikujemo tri osnovna pristupa vredovanju: vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje te vrednovanje naučenog. Kroz drugo poglavlje detaljno je opisan svaki od navedenih pristupa vrednovanju, navedene su koristi svakog pristupa za sve sudionike odgojno-obrazovnog sustava te su nabrojane neke od najčešće primjenjivanih metoda za svaki oblik vrednovanja.

U trećem su poglavlju dani primjeri vrednovanja za učenje koji se mogu primjenjivati tijekom učenja i poučavanja u osnovnim i srednjim školama. Uz zadatke, navedeni su i primjeri učeničkih rješenja te povratne informacije koje, kao temelj vrednovanja za učenje, omogućuju učenicima uvid u sam proces učenja, prepoznavanje nedostataka te mogućnost unaprijeđenja strategija učenja.

# 1 Kurikulum nastavnog predmeta Matematika

## 1.1 Matematički procesi i domene kurikuluma nastavnog predmeta Matematika

Matematika je jedan od glavnih pokretača napretka društva, od prošlosti pa sve do danas, a zasigurno će tako biti i u budućnosti. Od iznimne je važnosti za razumijevanje svijeta oko nas, a učenje i poučavanje matematike omogućuje razvoj znanja i vještina koje se mogu primijeniti u osobnom, društvenom i profesionalnom životu. Učenje i poučavanje nastavnog predmeta Matematike potiče kreativnost, preciznost, razvoj apstraktnog i kritičkog mišljenja, a sve to ostvaruje se povezivanjem matematičkih procesa i domena. Matematički procesi važni su na svim razinama obrazovanja i prožimaju sve domene koje se postupno razvijaju i nadograđuju tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja učenika, a udio pojedine domene u školskim godinama prilagođen je dobi i razvojnim mogućnostima samih učenika.
Matematički procesi su:

- prikazivanje i komunikacija
- povezivanje
- logičko mišljenje
- argumentiranje i zaključivanje
- rješavanje problema
- matematičko modeliranje
- primjena tehnologije.

Domene nastavnog predmeta Matematika su:

- Brojevi
- Algebra i funkcije
- Oblik i prostor
- Mjerenje
- Podaci, statistika i vjerojatnost

Navedene dimenzije matematičkog obrazovanja očituju se u ishodima te doprinose razvoju matematičkih kompetencija kod učenika. Da bi se kompetencije kod učenika razvile, neophodno je da ih učitelji prepoznaju kao važne te svoje matematičko poučavanje osmisle tako da ih potiču kod svojih učenika.

## 1.2 Odgojno-obrazovni ciljevi učenja i poučavanja predmeta

Temeljem usvojenih znanja, vještina i procesa učenici će:

- primijeniti matematički jezik u usmenome i pisanome izražavanju, strukturiranju, analizi, razumijevanju i procjeni informacija upotrebljavajući različite načine prikazivanja matematičkih ideja, procesa i rezultata u matematičkome kontekstu i stvarnome životu
- samostalno i u suradničkome okružju matematički rasuđivati logičkim, kreativnim i kritičkim promišljanjem i povezivanjem, argumentiranim raspravama, zaključivanjem, provjeravanjem pretpostavki i postupaka te dokazivanjem tvrdnji
- rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije te preispitivanjem procesa i rezultata, po potrebi uz učinkovitu uporabu odgovarajućih alata i tehnologije
- razviti samopouzdanje i svijest o vlastitim matematičkim sposobnostima, upornost, poduzetnost, odgovornost, uvažavanje i pozitivan odnos prema matematici i radu općenito
- prepoznati povijesnu, kulturnu i estetsku vrijednost matematike njezinom primjenom u različitim disciplinama i djelatnostima kao i neizostavnu ulogu matematike u razvoju i dobrobiti društva.

## 1.3 Odogojno-obrazovni ishodi kurikuluma nastavnog predmeta Matematika

Kurikulum nastavnog predmeta Matematika odgojno-obrazovne ishode opisuje sljedećim elementima:

- odgojno-obrazovni ishod
- razrada ishoda
- odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti "dobar" na kraju razreda
- sadržaji
- preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda.

## 1.4 Povezanost s drugim predmetima i međupredmetnim temama

Učenje i poučavanje matematike očituje se u raznim područjima ostalih predmeta s kojima se učenici susreću kroz svoje obrazovanje, ali i u međupredmetnim temama. Međupredmetne teme predstavljaju teme općeljudskih vrijednosti, a ostvaruju se međusobnim povezivanjem odgojno-obrazovnih područja i nastavih tema svih nastavnih predmeta. U našem obrazovnom sustavu izdvojeno je sedam međupredmetnih tema, a to su:

- Osobni i socijalni razvoj
- Učiti kako učiti
- Građanski odgoj i obrazovanje
- Zdravlje
- Poduzetništvo
- Uporaba informacijske i komunikacijske tehnologije
- Održivi razvoj.

Osim u navedenom, primjena matematike zastupljena je u svim područjima ljudske djelatnosti pa tako primjerice učenici svoje znanje matematike koriste pri proučavanju društvenih, povijesnih i geografskih pojava, pri izvođenju formula i mjerenja u fizici i kemiji, pri provođenju različitih projekata o sportu, okolišu, poduzetništvu itd.
Osim razvoja matematičkih znanja i kompetencija, povezivanje matematike s drugim predmetima i raznim sferama ljudskog djelovanja doprinosi i razvoju socijalnih vještina, kulture i osobnosti učenika. Na taj će način svaka osoba posjedovati čitalačku, matematičku, medijsku, prirodoslovnu, digitalnu i financijsku pismenost kao važne segmente za snalaženje u suvremenome svijetu.

# 2 Vrednovanje

Vrednovanje, ili evaluacija, sastavni je dio odgojno-obrazovnog sustava kao dio procesa učenja i poučavanja učenika, a zajedno s kurikulumom čini jedan cjelovit sustav. Pojam vrednovanja često se poistovjećuje s pojmovima: praćenje, provjeravanje i ocjenjivanje, no svaki od tih pojmova ima zasebno značenje i vrlo je bitno poznavati definiciju svakog od navedenih pojmova.

Prema Pravilniku o izmjenama i dopuni Pravilnika o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnim i srednjim školama, izdanog od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja 2019. godine, pojam *vrednovanja* definira se kao sustavno prikupljanje podataka u procesu učenja i postignutoj razini ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda, kompetencijama, znanjima, vještinama, sposobnostima, samostalnosti i odgovornosti prema radu, u skladu s unaprijed definiranim i prihvaćenim metodama i elementima. Obuhvaća sva tri pristupa vrednovanju, a to su: vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog.

Isti Pravilnik pojam *praćenja* definira kao sustavno uočavanje i bilježenje zapažanja o postignutoj razini ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda u svrhu poticanja učenja i provjere postignute razine ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda i očekivanja definiranih nacionalnim, predmetnim i međupredmetnim kuriklulumima, nastavnim programima te strukovnim i školskim kurikulumima. Praćenje, kao i vrednovanje, uključuje sva tri ranije spomenuta pristupa vrednovanju. Proces praćenja od izuzetne je važnosti jer se kroz njega prati i tijek i rezultat, tj. nastoji se pobliže upoznati učenike, prepoznati njihove napretke, uočitii pogreške i eventualne nedostatke te pravovremeno reagitati kako bi one bile ispravljene i poboljšane.

Uz kontinuirano praćenje učenika, obavezno je provođenje pisanih i usmenih provjera kojima se utvrđuje trenutačno stanje učenika. Pojam *provjeravanja* u spomenutom Pravilniku definira se kao procjena postignute razine ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda, kompetencija i očekivanja u nastavnome predmetu ili području i drugim oblicima rada u školi tijekom školske godine. Provođenje pisanih i usmenih provjera tijekom školske godine rezultira ocjenjivanjem.

*Ocjenjivanje* je pridavanje brojčane ili opisne vrijednosti rezultatima praćenja i provjeravanja učenikovog rada. U hrvatskom odgojno-obrazovnom sustavu za ocjenjivanje učeničkih postignuća rabi se brojčana skala od pet stupnjeva gdje najniži stupanj predstavlja ocjenu 1 (nedovoljan), a najviši stupanj predstavlja ocjenu 5 (odličan). Osim navedenog brojčanog ocjenjivanja, sve veći naglasak stavlja se na opisno ocjenjivanje učenika kojim se nastoji pobliže opisati ono što se ocjenjuje kod učenika. Opisno ocjenjivanje može poslužiti kao praćenje razvoja interesa, motivacije, sposobnosti, postignuća u usvajanju sadržaja, odnosa prema radu i postavljenim zadacima te odnosa prema odgojnim vrijednostima. Rečenice opisnog praćenja moraju biti afirmirajući poticajne i pozitivne ako je to ikako moguće.

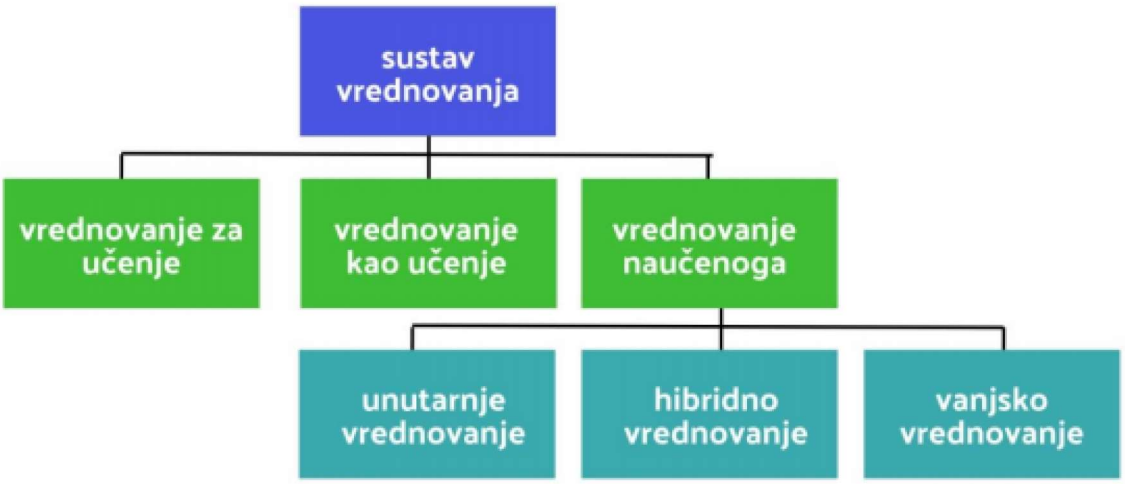
Svako vrednovanje učeničkih postignuća i napredovanja treba zadovoljavati ključna načela kako bi ono bilo kvalitetno osmišljeno i provedeno, a to uključuje sljedeće:

- pouzdanost - vrednovanje treba dati precizne i konzistentne informacije o učenikovim procesima i ishodima u različitim situacijama vrednovanja
- pravednost - vrednovanje se osmišljava i provodi tako da se na najmanju moguću razinu svede djelovanje čimbenika koji nisu povezani s onime što se vrednuje (npr. jezični, rodni)
- valjanost - vrednovanje treba ispitivati i procjenjivati upravo ono što se željelo ispitivati i procjenjivati tijekom odgojno-obrazovnoga procesa u određenom predmetu i obrazovnom razdoblju
- jasnoća - jasno vrednovanje podrazumijeva upoznatost učenika sa svim postupcima u vrednovanju
- poticajnost - vrednovanje treba omogućiti poticajne zadatke i aktivnosti koji doprinose učeničkom ostvarivanju ishoda
- praktičnost i ekonomičnost - vrednovanje treba biti učinkovito, odnosno treba se koristiti primjerenim pristupima i metodama, uz racionalnu uporabu materijalnih, vremenskih, organizacijskih i drugih resursa.
- pozitivan utjecaj - vrednovanjem se ne utvrđuje samo razina postignuća, već se nastoji postići pozitivan učinak na buduće učenje i poučavanje, kao i na motivaciju učenika za učenje.

Zadaća učitelja je unaprijed planirati i najaviti što i kako se vrednuje te na početku školske godine učenike upoznati s očekivanim ishodima i kriterijima vrednovanja koji ukazuju na njihovu usvojenost. Vrednovanje treba biti instrument unaprjeđenja napretka učenika, ali i poučavanja učitelja i cijeloga odgojno-obrazovnoga sustava i time ono zahtijeva odgovornost svih sudionika procesa.

Vrednovanje možemo kategorizirati na različite načine, a kategorizacija ovisi o tome tko ga provodi, kada se provodi, što se vrednuje kod učenika, kako se vrednuje i u odnosu na što se vrednuje. Prema tome, razlikujemo tri osnovna pristupa vrednovanju:

- Vrednovanje za učenje
- Vrednovanje kao učenje
- Vrednovanje naučenog.




Slika 1: Pristupi i oblici vrednovanja

## 2.1 Vrednovanje za učenje

Ključnu ulogu u unaprjeđivanju i planiranju budućega učenja i poučavanja predstavlja upravo vrednovanje za učenje. Ono se odnosi na proces prikupljanja informacija i dokaza o procesu učenja, kao i na interpretaciju prikupljenih informacija i dokaza s ciljem unaprjeđivanja procesa učenja kod učenika te procesa poučavanja kod učitelja. U središtu ovog pristupa vrednovanju jest sam proces učenja tijekom kojeg učenici trebaju steći uvid u to kako unaprijediti svoje učenje u svrhu ostvarivanja predviđenih ciljeva učenja. Napredak učenika osnovna je ideja u pristupu vrednovanja za učenje. Trenutačna postignuća svakoga učenika uspoređuju se s njegovim prethodnim postignućima, ali fokusirajući se pri tom na napredovanje koje je učenik ostvario u odnosu na postavljene odgojno-obrazovne ishode umjesto na međusobno uspoređivanje učenika u razredima. Takvim pristupom vrednovanje za učenje promovira ideju koja govori da svi učenici mogu napredovati neovisno o različitostima koje svaki od njih posjeduje u pogledu sposobnosti, osobnih karatkeristika ili životnog okruženja u kojem se nalaze.

Vrednovanje za učenje jedan je od oblika formativnog vrednovanja jer se ono odvija tijekom učenja i poučavanja. Povratna informacija temelj je formativnog vrednovanja, a samim time i vrednovanja za učenje. Učinkovitom povratnom informacijom smatra se ona povratna informacija koja je precizna, konkretna i specifična za svakog učenika, odnosno ona povratna informacija koja točno govori što je učenik ostvario i na kojim razinama.
Povratna informacija može se oblikovati:

- tako da ukaže ono što je dobro napravljeno
- tako da negativnu informaciju prikaže pozitivnim i jednostavnim jezikom
- u obliku reflektivnih pitanja učenicima
- pomoću listi za procjenu i rubrika.

Vrednovanje za učenje podrazumijeva davanja povratne informacije prije ocjenjivanja. Kvalitativne povratne informacije koje učitelji daju učenicima omogućuju učenicima kontrolu nad vlastitim učenjem, ali i uvid u sam proces učenje, tj. u kojoj fazi ostvarivanja odgojno-obrazovnih ishoda se učenici nalaze, koliko su učinkovite strategije njihovog učenja, prepoznavanje nedostataka i slabosti kako bi ih mogli ispraviti i unaprijediti da bi spomenute odgojno-obrazovne ishode u potpunosti ostvatili. Upravo to osnovni je razlog zbog kojega ovaj način vrednovanja nema izražene numeričke vrijednosti koje bi utjecale na donošenje zaključnih ocjena krajem školske godine.

Kod procesa vrednovanja za učenje bitno je pažnju usmjeriti i na dijagnostičko vrednovanje. Dijagnostičko vrednovanje provodi se radi utvrđivanja kvalitete i razine učeničkoga predznanja i vještina prije početka procesa učenja i poučavanja. Osim inicijalne procjene znanja na početku svake školske godine, dijagnostičko vrednovanje ima svrhu utvrđivanja razine predznanja učenika i prije obrađivanja pojedine nastane teme. S obzirom na rezultate dijagnostičkog vrednovanja, učitelji osmišljavaju, prilagođavaju i planiraju učenje i poučavanje. Dijagnostičko vrednovanje u procesu učenja i poučavanja iznimno je važno, prvenstveno učiteljima, kako bi uvidjeli razinu učeničkog predznanja o temama koje učitelj planira poučavati i time nastavu prilagodili onime

što učenici doista znaju, a ne onome što učitelji pretpostavljaju da bi učenici trebali znati. Također se ono može koristiti i za određivanje prikladnog oblika odgojno-obrazovne podrške potrebitim učenicima.

### 2.1.1 Metode vrednovanja za učenje

Redovito prikupljanje različitih metoda i informacija iz različitih izvora glavna je odlika metoda koje se primjenjuju u vrednovanju za učenje. Naglasak se stavlja na informacije dobivene interakcijom učenik-učitelj ili učenik-učenik. Dobivene informacije važno je iskoristiti i za razvijanje dobre razredne kulture u kojoj se učenici osjećaju sigurnima kada nešto ne znaju, ne razumiju, kada trebaju pomoć učitelja ili drugih učenika u razredu i kada trebaju primiti ili dati povratnu informaciju drugima. Pozitivna razredna kultura utječe i na razvoj partnerskog odnosa između učitelja i učenika.

Primjenom metoda vrednovanja za učenje učenik dobiva informacije o tome gdje se nalazi na svom putu prema ostvarenosti ishoda u odnosu na postavljene ciljeve učenja te kako unaprijediti svoje učenje, a neke od najčešće primjenjivanih metoda u ovom obliku vrednovanja su:

- rubrike za vrednovanje
- izlazne kartice
- semafor kartice
- kvizovi
- anegdotske zabilješke
- učeničke mape
- ciljna propitivanja za provjeru razumijevanja
- opažanja učenika tijekom individualnoga rada
- opažanja učenika tijekom rada u skupinama
- rasprave u skupinama.

### 2.1.2 Koristi od vrednovanja za učenje

Vrednovanje za učenje osmišljeno je na način da bude značajno za sve sudionike odgojno-obrazovnog procesa, uključujući pritom i roditelje učenika.
Roditeljima vrednovanje za učenje pomaže da:

- dobiju kvalitativne povratne informacije o procesu učenja i razvoja svoga djeteta
- dobiju smjernice kako pomoći djetetu u učenju
- razumiju proces odgoja i obrazovanja, što pomaže u izgradnji partnerstva odgojno-obrazovne ustanove i obitelji.

Učenicima vrednovanje za učenje pomaže da:

- postanu svjesni koliko učinkovito uče te uvide kako trebaju učiti
- unaprjeđuju kompetenciju učiti kako učiti postavljanjem svojih ciljeva učenja i razvijanjem vještina upravljanja svojim učenjem
- imaju bolja postignuća jer primaju kontinuirane povratne informacije koliko napreduju i koliko učinkovito uče
- razvijaju motivaciju za učenje, samopouzdanje i pozitivnu sliku o sebi
- imaju visoka očekivanja od sebe i općenito su zainteresiraniji za uspjeh jer znaju kako ga ostvariti.

Učiteljima vrednovanje za učenje pomaže u:

- prikupljanju informacija o početnim znanjima i iskustvima učenika, eventualnim pogrešnim idejama ili pogrešno usvojenim znanjima te nedostatcima koje učenici imaju tijekom procesa učenja, o razinama usvojenosti znanja i vještina, stilovima učenja učenika, njihovim uvjerenjima, motivaciji za učenje, njihovim interesima i dr.
- postavljanju ciljeva i planiranju poučavanja u skladu s potrebama konkretnih učenika u određenome trenutku, npr. učitelji mogu promijeniti planirane strategije poučavanja nakon što ustanove da je stvarno predznanje učenika ispod ili iznad očekivane razine ili ako ustanove da učenici pri radu pokazuju neke tipične pogreške ili miskoncepcije
- dobivanju uvida u učinkovitost vlastita rada
- učinkovitijem planiranju i kontinuiranome unaprjeđenju procesa poučavanja
- dobivanju povjerenja učenika i roditelja jer je sam proces vrednovanja transparentniji.

## 2.2 Vrednovanje kao učenje

Aktivno uključivanje učenika u proces vrednovanja radi poticanja samostalnog i samoreguliranog pristupa učenju misao je vodilja vrednovanja kao učenje. Ovaj pristup vrednovanju temelji se na ideji da učenici vrednovanjem uče. Navedeni oblik vrednovanja formativnog je karaktera i važno ga je provoditi kontinuirano, tijekom učenja i poučavanja.

Kako bi se vrednovanje kao učenje uspješno provodilo u nastavi, učitelji moraju učenicima osigurati jasno i pravovremeno poznavanje kriterija vrednovanja. Uključivanjem učenika u proces vrednovanja, on za njih postaje manje rizičan i stresan. Iskustvo u vrednovanju svog i tuđeg procesa učenja i postignuća učenicima uvelike olakšava proces samovrednovanja i regulacije vlastitog učenja. Preuzimanje odgovornosti za vlastito učenje učenicima omogućuje razvoj kompetencija važnih za cjeloživotno učenje.

### 2.2.1 Metode vrednovanja kao učenje

Razmišljanje i refleksija učenika o vlastitome učenju neodvojiv je dio svakodnevnoga učenja i poučavanja. Najvažnije metode na kojima se temelji vrednovanje kao učenje jesu metode samovrednovanja tj. samorefleksije te vršnjačkog vrednovanja, a one ujedno predstavljaju i izvor povratnih informacija za učenike, a u manjoj mjeri i za učitelje. Neke od ostalih metoda i tehnika vezanih za ovaj pristup vrednovanju su: razgovori s učenicima, dnevnici učenja, skale procjene, učeničke mape (portfolio).

Samovrednovanje učenika jest metakognitivni proces osvješćivanja i razmišljanja o vlastitome procesu učenja i postignuća. Provođenjem metode samovrednovanja učenik, uz učiteljevu podršku, uči prepoznavati, opisivati i postavljati ciljeve učenja te vrednovati svoj napredak u ostvarivanju predviđenih odgojno-obrazovnih ishoda.

Vršnjačko vrednovanje predstavlja oblik suradničkoga reguliranja učenja. Učenici su aktivno uključeni u vrednovanje učenja i postignuća svojih vršnjaka, pomažu im u promatranju, nadgledanju i reguliranju procesa učenja dajući jedni drugima povratne informacije. Neke od glavnih pogodnosti vršnjačkog vrednovanja su: poboljšanje motivacije i učenja, razvoj autonomije, preuzimanje odgovornosti za vlastito učenje i slično.

Samovrednovanje i vršnjačko vrednovanje u školama se provode na način da učenici ispravljaju vlastite ili tuđe ispite/zadaće vodeći se pritom učiteljevim uputama. Navedene metode rijetko se provode na način da učenici i učitelj raspravljaju o kriterijima na temelju kojih su donijeli svoju odluku, stoga takve povratne informacije ne pridonose efikasnosti i poboljšanju procesa učenja. Kako bi povratne informacije bile učinkovitije i davale što bolje rezultate, važno je učenike uputiti u ishode za određeni nastavni sat, nastavnu temu, nastavni tjedan i slično. Učenik može dobro i kvalitetno procijeniti svoj ili tuđi uradak tek onda kada dobro poznaje unaprijed postavljene kriterije vrednovanja kojima se služi i učitelj. Takav pristup omogućuje razvoj kompetencija važnih za cjeloživotno učenje, a na učiteljima je da odluče hoće li i u kojoj mjeri ove metode uključivati u ocjenjivanje ili voditi u bilješkama.

### 2.2.2 Koristi od vrednovanja kao učenje

Vrednovanje kao učenje povezuje učenike i učitelje u oblik partnerstva u kojem učitelji stvaraju uvjete za učenje i pomažu ih unaprijediti kod učenika, vode proces samorefleksije te pomažu učenicima razumjeti kriterije za samovrednovanje, a učencici aktivno i odgovorno sudjeluju u procesu učenja i vrednovanja.

Učenicima vrednovanje kao učenje pomaže da:

- shvate da je vrednovanje alat za vlastito praćenje učenja i za stjecanje razumijevanje na kojoj se razini učenja nalaze
- spoznaju da je vrednovanje prilika za razumijevanje i primjenu kompetencije učiti kako učiti
- usklađuju vlastite procjene s procjenama drugih
- razvijaju vještinu upravljanja svojim učenjem, postavljanja vlastitih ciljeva i razvijanja vještine samovrednovanja i vršnjačkoga vrednovanja potrebnih za postizanje tih ciljeva
- razvijaju osjećaj odgovornosti i samopouzdanja istovremeno razvijajući kritičko razmišljanje, analizu i na kraju - vrednovanje.

Učiteljima vrednovanje kao učenje pomaže u:

- dijeljenju odgovornosti za učenje između učitelja i učenika
- dobivanju uvida u učenikovo razmišljanje prilikom analize i vrednovanja procesa učenja
- osmišljavanju učinkovitijega poučavanja jer učenici postaju samostalniji i motiviraniji.

## 2.3 Vrednovanje naučenog

Neizostavni dio sustava vrednovanja upravo je vrednovanje naučenog. Ono, zajedno s vrednovanjem za učenje i vrednovanjem kao učenje čini skladnu cjelinu no u odnosnu na njih ovaj pristup vrednovanju ima ograničenije mogućnosti utjecaja na trenutačne procese učenja. Vrednovanje naučenog uvelike se koristi na svim razinama našeg obrazovnog sustava pa tako i u nastavi matematike.

Ovaj pristup vrednovanju pripada sumativnom vrednovanju, a svrha takvog vrednovanja jest procjena ostvarenosti ishoda nakon određenog razdoblja učenja i poučavanja. Učitelji bi time trebali dati učenicima informacije o znanjima, vještinama i sposobnostima na kraju nastavne jedinice, cjeline ili razdoblja, a te informacije ostvaruju se u obliku brojčane ocjene ili neke vrste formalnoga izvješća. Osim navedenog, vrednovanjem naučenog također se vrednuje učinkovitost nekoga obrazovnog programa te selekcijsku svrhu za upis učenika u višu odgojno-obrazovnu razinu. Rezultati vrednovanja naučenog su javni, a osim učenicima i učiteljima uvelike koriste i roditeljima, stručnim suradnicima te ravnateljima škola koji ih koriste u praćenju napredovanja učenika, planiranju učenja i daljnjega odgojno-obrazovnog puta, za prepoznavanje učenika kojima je potrebna dodatna odgojno-obrazovna podrška i slično.

S obzirom na to planira li ili provodi li vrednovanje naučenog učitelj ili neka vanjska institucija koja ne sudjeluje u neposrednome odgojno-obrazovnom procesu, razlikujemo:

- unutarnje vrednovanje
- hibridno vrednovanje
- vanjsko vrednovanje.

### 2.3.1 Unutarnje vrednovanje

Učitelj, kao osoba koja sudjeluje u neposrednom odgojno-obrazovnom radu s učenicima, zadužen je za planiranje i provođenje unutarnjeg vrednovanja odgojno-obrazovnih ishoda. Ovim oblikom vrednovanja učitelji ispituju cijeli raspon ishoda koje učenici ostvaruju vodeći pri tom računa o primjeni onih metoda i zadataka koji su usklađeni s definiranim ishodima, ali i s korištenim pristupima učenja i poučavanja. Unutarnje vrednovanje naučenog treba biti kriterijsko, a kriterije vrednovanja određuju učitelji.

Pri izboru metoda vrednovanja, učitelji pažnju trebaju usmjeriti i na to da izabrane metode budu primjerene dobi i potrebama učenika. Važno je u nastavi koristiti raznolike metode kako bi svaki učenik dobio priliku za pokazivanje ostvarenosti ishoda na način koji je za njih najpogodniji. Neke od predloženih metoda unutarnjeg vrednovanja su: pisane provjere znanja i vještina, usmene provjere, analiza učeničkih mapa, opažanje izvedbe učenika u nekoj aktivnosti ili praktičnome radu i druge. Zbog navedenih razloga, učitelji unutarnje vrednovanje trebaju planirati u trenutku dok planiraju i poučavanje, a ono ne bi smjelo biti primjenjivano češće od vrednovanja za učenje i vrednovanja kao učenja.

Unutarnje vrednovanje naučenoga rezultira ocjenom, a za ocjenjivanje postignuća učenika učitelji koriste brojčanu skalu od pet stupnjeva. Učenički projekti ili složeniji zadaci mogu se vrednovati i s više od jedne ocjene ako se njima provjerava ostvarenost ishoda na temelju više od jednog elementa vrednovanja. Učenici na vrijeme trebaju biti upoznati s vremenom kada će se provoditi unutarnje vrednovanje naučenog, s elementima i ciljem vrednovanja te metodama i kriterijima vrednovanja.

Elementi vrednovanja u nastavnom predmetu Matematika su:

1. Usvojenost znanja i vještina
2. Matematička komunikacija
3. Rješavanje problema.

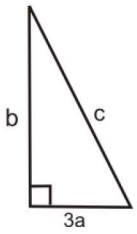
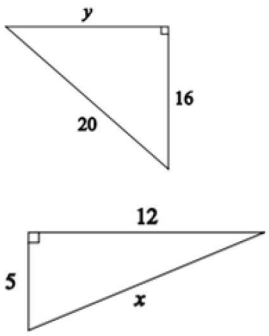
Kroz element vrednovanja Usvojenost znanja i vještina vrednuje se kako učenik opisuje matematičke pojmove i odabire li odgovarajuće i matematički ispravne procedure te način na koji ih provodi. Također, vrednuje se upotreba i povezivanje matematičkih koncepata. Zadaća učitelja u ovom elementu vrednovanja jest provjeravati ispravnost provođenja matematičkih postupaka i utvrđivati smislenost učeničkih rezultata.

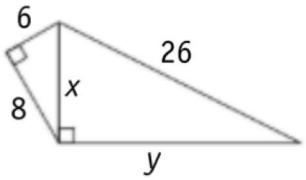
Drugim navedenim elementom vrednovanja vrednuje se korištenje odgovarajućeg matematičkog jezika kao što su primjena standardnih matematičkih simbola, zapisa i terminologije pri usmenome i pisanome izražavanju, ali i primjereno korištenje tehnologije u nastavi. Važno je da se učenici u radu koriste odgovarajućim matematičkim prikazima za predstavljanje podataka, da svoja razmišljanja o određenoj matematičkoj temi iznose cjelovitim, suvislim i sažetim matematičkim rečenicama. Kroz Matematičku komunikaciju također je poželjno kod učenika vrednovati i postavljanje pitanja te odgovaranje na pitanja koja nadilaze opseg izvorno postavljenih pitanja.

Posljednjim elementom vrednovanja učitelji vrednuju prepoznavanje relevantnih elemenata problema i prepoznavanje metoda za njihovo rješavanje. Na učenicima je da uspješno primjenjuju odabranu matematičku metodu pri rješavanju problema te da problemske situacije modeliraju matematičkim zakonitostima problemske situacije. Osim navedenog, unutar elementa Rješavanje problema, vrednuje se i način na koji učenici rješavaju probleme u različitim kontekstima, provjeravaju ispravnost matematičkih postupaka i smislenost dobivenih rješenja.

*Primjer: Pisana provjera znanja*

Pisana provjera znanja jedna je od metoda unutarnjeg vrednovanja naučenog. Konkretno, u navedenom primjeru dana je pisana provjera znanja iz nastavne teme Pitagorin poučak kojom se vrednovao odgojno obrazovni ishod: MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak, a predviđena je za učenike osmih razreda osnovnih škola.

| **Pisana provjera znanja: Pitagorin poučak** |
|---|
| 1. Napiši formulu Pitagorina poučka za trokut na slici. /1 bod<br>  <br> |
| *usvojenost znanja i vještina*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(Objašnjava i primjenjuje Pitagorin poučak na pravokutni trokut)<br>*razina usvojenosti:* zadovoljavajuća |
| 2. Izračunaj duljinu nepoznate stranice u trokutu. /4 boda<br>  <br> |
| *usvojenost znanja i vještina*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(Primjenjuje Pitagorin poučak za računanje nepoznatih elemenata trokuta)<br>*razina usvojenosti:* zadovoljavajuća |
| 3. Izračunaj duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta<br>kojem su katete duge 9 cm i 12 cm. /3 boda |
| *usvojenost znanja i vještina*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(Primjenjuje Pitagorin poučak za računanje nepoznatih elemenata trokuta)<br>*razina usvojenosti:* dobra |

| | |
|---|---|
| 4. Izračunaj duljine nepoznatih stranica.   | /4 boda |
| *rješavanje problema*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(U problemskim/geometrijskim situacijama uočava pravokutni trokut)<br>*razina usvojenosti:* vrlo dobra | |
| 5. Je li trokut sa stranicama duljina 5 cm, 2 cm i 7 cm pravokutan?<br>Zašto? | /3 boda |
| *matematička komunikacija*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(Istražuje i otkriva obrat Pitagorina poučka i primjenjuje ga)<br>*razina usvojenosti:* dobra | |
| 6. Izračunaj duljinu polumjera kružnice opisane<br>pravokutnom trokutu s katetama duljina 18 cm i 24 cm. | /5 bodova |
| *rješavanje problema*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(Primjenjuje Pitagorin poučak za računanje nepoznatih elemenata,<br>primjena Talesovog poučka)<br>*razina usvojenosti:* iznimna | |
| 7. Odredi duljinu dijagonale romba ako mu je<br>stranica duga 25 cm, a druga dijagonala jest 30 cm. | /4 boda |
| *rješavanje problema*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(Objašnjava i primjenjuje Pitagorin poučak na pravokutni trokut, romb)<br>*razina usvojenosti:* vrlo dobra | |
| 8. Ljestve duge 5.2 m naslonjene su za vertikalni zid.<br>Do koje visine dosežu ljestve ako je<br>njihov donji kraj od zida odmaknut 2 m? | /6 bodova (4+2) |
| *rješavanje problema i matematička komunikacija*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(U problemskim/geometrijskim situacijama uočava pravokutni trokut)<br>*razina usvojenosti:* iznimna | |
| 9. Je li trojka brojeva 5,12,13 Pitagorina trojka? | /3 boda |
| *matematička komunikacija*<br>*ishod:* **MAT OŠ D.8.1. Primjenjuje Pitagorin poučak**<br>(Izriče Pitagorin poučak i zapisuje matematičkim jezikom)<br>*razina usvojenosti:* dobra | |

Prikazanom pisanom provjerom znanja učenička postignuća vrednovala su se kroz sva tri elementa vrednovanja. Učenici su ocijenjeni dvjema ocjenama - Usvojenost znanja i vještina i Matematička komunikacija činili su jednu ocjenu, a Rješavanje problema drugu. Bodovna skala za navedene elemente vrednovanja dana je u sljedećoj tablici:

| | |
|---|---|
| Usvojenost znanja i vještina i matematička komunikacija | Ukupno 16 bodova:<br><br>16-15 odličan<br>14-12 vrlo dobar<br>11-9 dobar<br>8-7 dovoljan<br>6-0 nedovoljan |
| Rješavanje problema | Ukupno 17 bodova:<br><br>17-16 odličan<br>15-13 vrlo dobar<br>12-10 dobar<br>9-7 dovoljan<br>6-0 nedovoljan |

Slika 2: Bodovna skala elemenata vrednovanja

### 2.3.2 Hibridno vrednovanje

Hibridno vrednovanje oblik je vrednovanja naučenog koje bi trebao provoditi učitelj, a osmišljavati i provoditi ispitni centar. Zadaća ispitnog centra jest osmisliti sadržajno i metodološki provjerene zadatke i ispite koji se elektroničkim putom šalju u škole, a istim se putem vraćaju i rezultati učenika nakon provedbe vrednovanja.

Ovaj oblik vrednovanja učitelji koriste za utvrđivanje uspješnosti učenika u ostvarivanju ishoda nakon završetka procesa učenja i poučavanja određene predmetne cjeline. Na učiteljima je da odluče hoće li koristiti određene zadatke ili cijele ispite sastavljene od strane ispitnog centra. Ako učitelji odaberu koristiti cijeli ispit, nakon njegove provedbe dobivaju povratne informacije o razini postignuća prema predloženim pragovima koje je odredio ispitni centar.

### 2.3.3 Vanjsko vrednovanje

Vanjsko se vrednovanje primjenjuje za procjenjivanje učeničkih postignuća nakon završetka određenoga odgojno-obrazovnog razdoblja, za certifikacijske ili selekcijske svrhe, ali i za praćenje ostvarivanja odgojno-obrazovnih ishoda na nacionalnoj razini i osiguravanje kvalitete u odgojno-obrazovnom sustavu. Navedeni oblik vrednovanja provode prosvjetne vlasti i stručnjaci, neovisni znanstveni instituti, medunarodne ustanove i organizacije za odgoj i obrazovanje. *Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja* (NCVVO) obavlja poslove vanjskoga vrednovanja u odgojno-obrazovnom sustavu Republike Hrvatske. Vanjsko se vrednovanje najčešće provodi u obliku nacionalnih ispita, ispita državne mature, međunarodnog vrednovanja postignuća preko PISA (*Programme for international Student Assesment*) ili TIMSS programa (*Trends in mathematics and science study*).

U hrvatskom odgojno-obrazovnom sustavu pod pojmom vanjskog vrednovanja najčešće se podrazumijevaju ispiti državne mature. Ispitima državne mature pristupaju učenici završnih razreda gimnazijskih, strukovnih i umjetničkih programa srednjih škola koji svoje obrazovanje planiraju nastaviti na jednom od visokih učilišta u Republici Hrvatskoj. Ispiti državne mature trebaju biti usklađeni s propisanim ishodima u kurikulumima nastavnih predmeta. Razvoj ispita državne mature treba pratiti najnovija dostignuća u područjima edukacijskih mjerenja, psihologije učenja i kognitivnih znanosti. U Republici Hrvatskoj tri su obvezna predmeta koja učenici polažu na državnoj maturi, izabirući pri tom osnovnu ili višu razinu, a to su: Matematika, Hrvatski i strani jezik. Za učenike koji se školuju na jeziku i pismu nacionalnih manjina obvezno je polaganje ispita iz jezika nacionalne manjine na kojemu se školuju. Učenici također imaju mogućnost polaganja ispita državne mature iz izbornih predmeta, a neki od njih su: Informatika, Fizika, Kemija, Biologija itd.

Vanjsko vrednovanje, kao i svaki oblik vrednovanja, posjeduje određene specifičnosti i prednosti. Neke od prednosti vanjskog vrednovanja su:

- ispiti i ispitni zadatci izrađuju se prema unaprijed definiranim procedurama i metodološkim smjernicama, čime se osigurava kvaliteta i standardiziranost ispitnoga materijala
- provedba ispitivanja priprema se jednako u svim školama, a učenici pišu ispite u isto vrijeme i pod jednakim uvjetima
- kriteriji vrednovanja ispita jasni su i transparentni svim pristupnicima prije, tijekom i nakon polaganja ispita
- ocjene ili razine postignuća učenika temelje se na broju bodova ili postotku riješenosti ispita koje je učenik postigao u odnosu na definirane pragove za ocjene ili razine postignuća, a rezultati učenika na istome ispitnom roku međusobno su usporedivi s obzirom na to da su rješavali isti ispit.

# 3 Primjeri vrednovanja za učenje

U nastavku ovog rada, dani su primjeri nastavnih tema za učenike osnovnih i srednjih škola zajedno sa zadacima koji se mogu primjenjivati kod vrednovanja za učenje.
Uz to, dani su i primjeri učeničkih rješenja navedenih zadataka i povratne informacije.

## 3.1 Množenje i dijeljenje

U trećem razredu osnovne škole, u domeni Brojevi, od učenika se očekuje da rješavaju probleme koji uključuju množenje i dijeljenje, da razumiju svojstva množenja te vezu između množenja i dijeljenja. Isto tako, učenici bi trebali znati množiti i dijeliti u skupu prirodnih brojeva do 100 te primjenjivati četiri računske operacije među brojevima u problemskim zadacima.

Na početku učenja i poučavanja, učitelj može provesti dijagnostičko vrednovanje kako bi se utvrdila razina učeničkog predznanja. Primjer dijagnostičkog zadatka za ovu temu:

Na raspolaganju imate 24 bombona. Odaberite broj djece i podijelite im bombone.
Koliko bi bombona dobilo svako dijete?
Napišite odgovor koristeći matematičke simbole.

Ponovite zadatak tako da odaberete drugi broj djece.
Uzmite drugi broj bombona i ponovite zadatak.

Vrednovanje za učenje može uključivati sljedećih zadataka:

Nastavite priču kako biste to učinili problemom dijeljenja:
Klara je imala 36 kolačića.

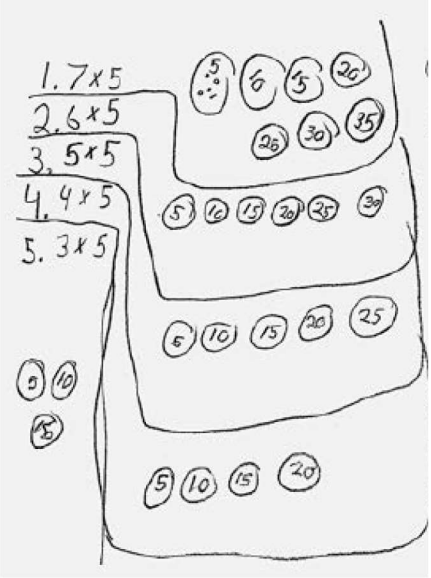
Ani, Ivani, Maji i Vesni podijelila je svakoj 5 kolačića.
Klari je ostalo 16 kolačića.
Pozvala je i Frana, Josipa i Mateja i njima je podijelila svakom po 5 kolačića.
Klara je sebi uzela jedan kolačić.

36 - 20 = 16
16 - 15 = 1
1 - 1 = 0

Ovaj učenički uradak vrlo je složen. Kroz ovako riješen zadatak, operacija dijeljenja donekle je skrivena. Neki učitelji bit će zadovoljni prikazanim rješenjem pod pretpostavkom da je učenik znao zašto je navedeni zadatak problem dijeljenja jer zaista, učenik je pokazao da vrijedi $36 = (7 \cdot 5) + 1$. Isto tako, neke će učitelje zabrinuti ovakav način rješavanja i zapitat će se zna li učenik doista objasniti zašto ovaj zadatak predstavlja problem dijeljenja.
U tom slučaju, učeniku se mogu postaviti pitanja:

- Kako bi objasnio nekome tko ne zna zašto je ovo problem dijeljenja?
- Što je zapravo podijeljeno čime?
- Radi li se i dalje o problemu dijeljenja ako postoji ostatak?

Izaberite nekoliko brojeva. Svaki broj pomnožite brojem 5.
Što primjećujete?
Zašto se to događa?




Iz ovog učeničkog rada uočavamo da učenik zna množiti brojem 5. Ono što nedostaje jest objašnjenje što se i zašto događa prilikom množenja nekog broja brojem 5. Pitanja koja učitelj može postaviti učeniku su:

- Kojom znamenkom završavaju brojevi pomnoženi brojem 5?
- Što uočavaš za parne, a što za neparne brojeve?

Znamo da vrijedi: **4 · 10 = 40**. Možete li i kako to primjeniti za rješavanje sljedećih zadataka?

a) 4 · 5
b) 8 · 10
c) 4 · 11

4 · 10 = 40 mogu primjeniti na sve zadatke.

a) Pola od 10 iznosi 5 pa pola od 40 iznosi 20.
b) 4 + 4 = 8 pa u zadatku 4 · 10 = 40 broj 4 zamijenimo s brojem 8 i rezultat iznosi 80.
c) Broju 40 dodamo još 4 i rezultat iznosi 44.

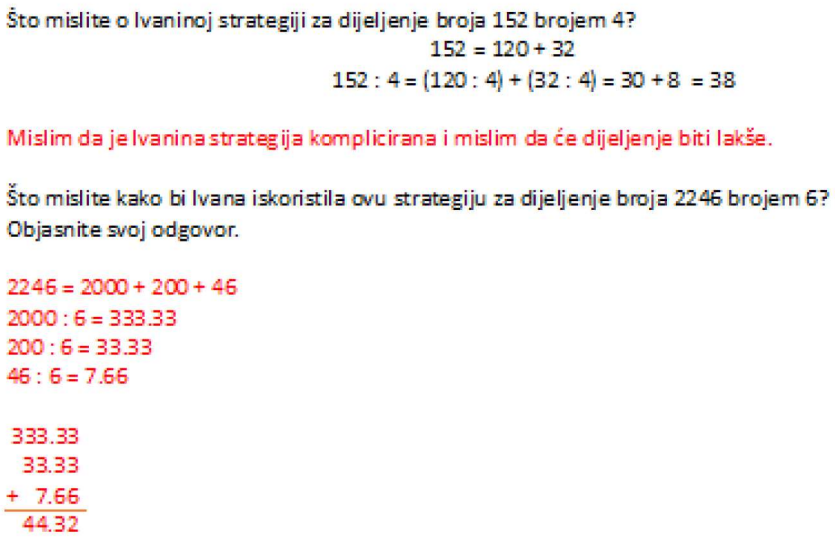
Ovakvo rješenje daje učiteljima dosta informacija o učenikovom razmišljanju. No, ono što zabrinjava je dio u kojem učenik govori o zamjeni broja 4 brojem 8. Učenika se može upitati:

- Da je u zadatku pisalo da izraz $4 \cdot 9 = 36$ iskoristiš za rješavanje zadatka $8 \cdot 9$, što bi tada učinio?
- Zašto na 40 dodajemo 4 kako bismo dobili 44?

## 3.2 Brojevi i računske operacije u bazi 10

U domeni Brojevi u četvrtoj godini učenja matematike od učenika se očekuje da se služe prirodnim brojevima do milijun, da pisano zbrajaju i oduzimaju u skupu prirodnih brojeva do milijun, da pisano množe i dijele dvoznamenkastim brojevima u skupu prirodnih brojeva do milijun te da spomenute računske operacije primjenjuju u problemskim zadacima.

Vrednovanje za učenje može uključivati neke od sljedećih zadataka:


Što mislite o Ivaninoj strategiji za dijeljenje broja 152 brojem 4?

152 = 120 + 32

152 : 4 = (120 : 4) + (32 : 4) = 30 + 8 = 38

Mislim da je Ivanina strategija kompliciranа i mislim da će dijeljenje biti lakše.

Što mislite kako bi Ivana iskoristila ovu strategiju za dijeljenje broja 2246 brojem 6? Objasnite svoj odgovor.

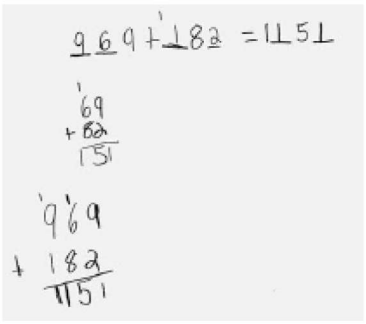
2246 = 2000 + 200 + 46
2000 : 6 = 333.33
200 : 6 = 33.33
46 : 6 = 7.66

333.33
33.33
+ 7.66
44.32

Na primjeru ovog učeničkog rada vidimo kako učenik shvaća osnovnu ideju korištene strategije - rastavljanje zadanog broja na nekoliko pribrojnika, a zatim dijeljenje svakog pribrojnika zadanim brojem, ali pri rješavanju zadatka odabire krivi rastav zadanog broja na pribrojnike. Povratna informacija trebala bi biti koncipirana tako da učenik shvati da bi drugačiji rastav zadanog broja na pribrojnike bio prikladniji za rješavanje danog zadatka. Isto tako, važno je dati učeniku povratnu informaciju o pogrešnom zbranjaju pri kraju zadatka.
Pitanja koja učitelj može pri tome postaviti učeniku su:

- Što misliš zašto je Ivana pri rastavljanju zapisala broj 152 kao $120 + 32$ umjesto $100 + 52$?
- Bi li drugačiji rastav broja 2246 na probrojnike olakšao proces dijeljenja? Bi li se tada razlikovalo rješenje?

Iva je zbrojila brojeve **_ _ 9** i **_8_** i dobila broj **1_5_**. Oba pribrojnika veća su od broja 100. Koji su to brojevi? Objasnite postupak kojim ste došli do traženih brojeva.




Isprobavao sam različite brojeve dok nisam pronašao one koji zadovoljavaju traženo.

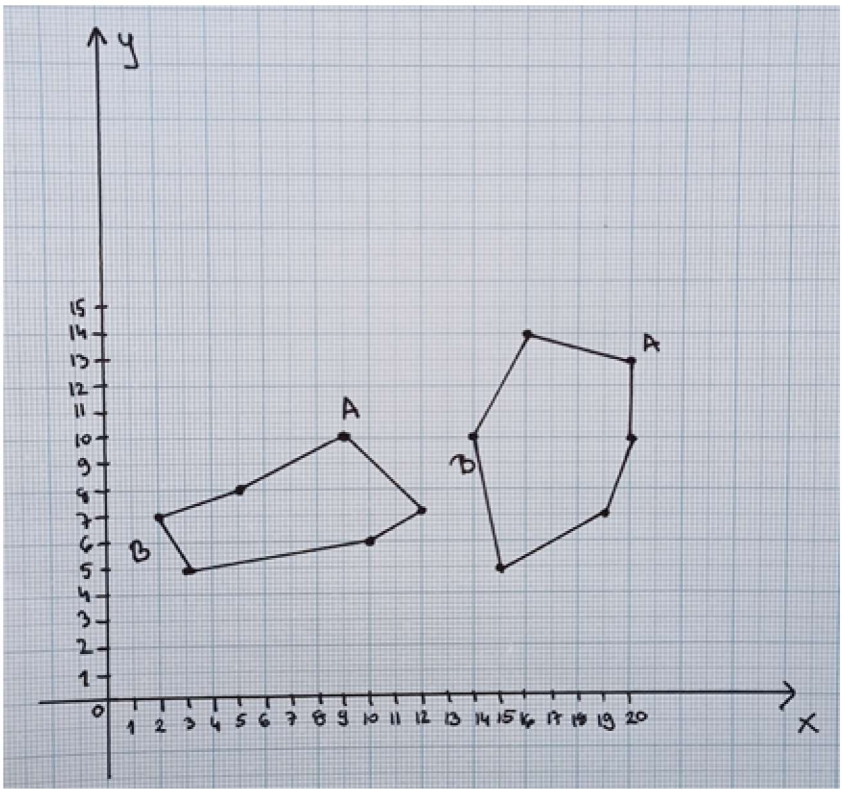
U idealnom slučaju učenici bi trebali shvatiti da za dobivanje znamenke 5 na mjestu desetica u zbroju, znamenka desetica prvog pribrojnika mora biti 6 ako vrijedi da su znamenke drugog pribrojnika veće od 0. Tada zbroj znamenaka stotica mora biti veći od 8.
Na primjeru ovog učeničkog rada uočavamo da je učenik dobro odredio tražene brojeve, ali njegovo objašnjenje postupka kojim je došao do rješenja ne otkriva puno o stvarnom znanju. Pitanja koja učitelj može postaviti učeniku su:

- Koju nepoznatu znamenku si prvu izračunao? Zašto baš tu?
- Što si napravio kako bi bio siguran da je znamenka 5 u zbroju na pravom mjestu?
- Što si napravio kako bi bio siguran da je znamenka 1 u zbroju na pravom mjestu?

## 3.3 Pravokutni koordinatni sustav u ravnini

U šestom razredu osnovne škole, u domeni Mjerenje, obrađuje se nastavna tema Pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Od učenika se očekuje da nakon obrađene nastavne teme znaju organizirati pravokutni koordinatni sustav u ravnini (ishodište, jedinične dužine, koordinate točke, koordinatne osi, kvadranti), povezivati koordinate točaka i uređene parove cijelih brojeva, očitavati ih i crtati te crtati likove određene točkama s cjelobrojnim koordinatama.

Nacrtajte šesterokut čiji je jedan vrh točka **B (5,3)**, a drugi vrh točka **A (6,10)**.
Zapišite koordinate preostalih vrhova nacrtanog šesterokuta.




U ovom učeničkom radu uočavamo da učenik nije ispravno ucrtao zadane točke A i B u pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Isto tako, koordinate preostalih vrhova šesterokuta nisu navedene. Ono što je učenik ispravno zaključio jest da se točka A mora nalaziti s gornje desne strane točke B.
Povratne informacije mogu biti usmjerene na nekoliko stvari, naprimjer:

- Zašto ima smisla da se točka A nalazi s gornje desne strane točke B?
- Objasni kako je točka A na mjestu (6,10).
- Objasni kako je točka B na mjestu (5,3).
- Koje su koordinate preostalih vrhova nacrtanog šesterokuta?

## 3.4 Proporcionalnost

U domeni Algebra i funkcije u sedmom razredu osnovne škole od učenika se očekuje da prepoznaju i opisuju proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine, da određuju i tumače koeficijent proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti te da pri rješavanju problemskih situacija primjenjuju svojstva proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti.

Na početku učenja i poučavanja, učitelj može provesti dijagnostičko vrednovanje kako bi se utvrdila razina učeničkog predznanja za nadolazeću nastavnu temu. Za razumijevanje proporcionalnosti, iznimno je važno da učenici znaju množiti i dijeliti, te da razumiju koncepte razlomaka - prije svega poznavanje ekvivalentnih razlomaka.

Izračunajte:
140 : 2
420 : 6
840 : 12

Što primjećujete?
Možete li objasniti kako je to povezano s ekvivalentnim razlomcima?

Vrednovanje za učenje može se provoditi primjenom sljedećih zadataka:

Cijena kaputa snižena je 30%. Kaput je nakon sniženja koštao 420 kuna.
Kolika je bila cijena kaputa prije sniženja?

U idealnom slučaju, učenici će shvatiti da je početna cijena veća od 420 kuna i da je 420 kuna 70 % početne cijene. Ako je $70 : 100 = 420 : x$, početna cijena tada iznosi 600 kuna.

Cijena kaputa snižena je 30%. Kaput je nakon sniženja koštao 420 kuna.
Kolika je bila cijena kaputa prije sniženja?

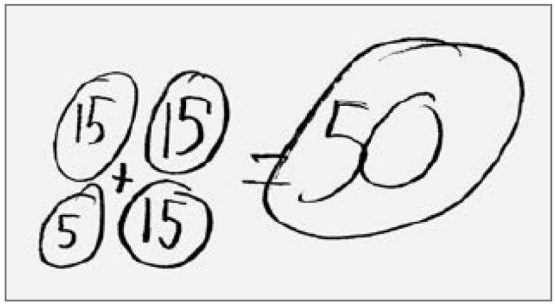
1. način: 420 • 30 % = 126 kn
2. način: 420 • 1% • 30 = 126 kn

420 + 126 = 546 kuna

Uobičajena greška koja je napravljena u ovom učeničkom radu jest da je na iznos od 420 kuna dodano 30 % od 420 kuna. Povratna informacija trebala bi biti usmjerena na to je li računanje 30 % od 420 kuna uistinu potrebno?
Pitanja koja učitelj može pri tome postaviti učeniku su:

- Pokušaj oduzeti 30% od 546 kuna od 546 kuna. Dobiješ li za rezultat iznos od 420 kuna?
- Zbog čega se to nije dogodilo?
- Je li početna cijena kaputa viša ili niža od 546 kuna? Zašto to misliš?

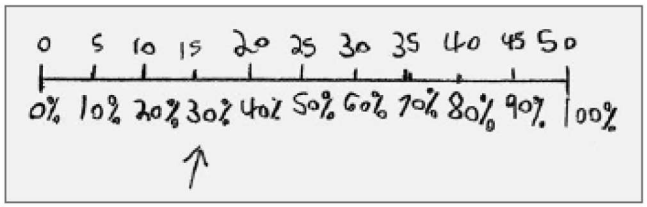
Nacrtajte sliku koja će vam pomoći da otkrijete broj za koji vrijedi da 30% tog broja iznosi 15.




Iz ovog učeničkog rada uočavamo da je učenik shvatio da je nužno koristiti 30% tri puta te na to dodati trećinu tj. 10% ($30\% + 30\% + 30\% + 10\% = 100\%$) kako bismo dobili traženi broj. Ono što u ovom radu nedostaje jest objašnjenje postupka. Povratna informacija trebala bi biti usmjerena na postupak pronalaska rješenja.
Pitanja koja učitelj može pri tome postaviti su:

- Kako si znao da na svoju sliku trebaš nacrtati tri puta broj 15 i jednom broj 5?
- Kako ti nacrtana slika pomaže pri zaključivanju da zaista 30% od 50 iznosi 15?

Nacrtajte sliku koja će vam pomoći da otkrijete broj za koji vrijedi da 30% tog broja iznosi 15.




U ovom učeničkom radu odabran je izvrstan prikaz rješenja pomoću brojevnog pravca. Kako bi učitelj od učenika saznao kako je došao do ideje i rješenja zadatka može ga upitati:

- Kako si znao da se na brojevnom pravcu trebaš pomicati za 5, odnosno za 10%?

## 3.5 Kvadriranje racionalnih brojeva

U osmom razredu osnovne škole, u nastavnoj temi Realni brojevi učenici, između ostaloga, uče kvadrirati racionalne brojeve. Od njih se očekuje da mentalno računaju kvadrate prirodnih brojeva do 20, da povezuju zapis višestrukoga množenja racionalnoga broja s potencijom racionalne baze i nenegativnoga cjelobrojnog eksponenta, da množe i dijele s potencijama jednakih racionalnih baza i nenegativnih cjelobrojnih eksponenata u jednostavnim izrazima te da argumentiraju uočeno pravilo računanja s potencijama racionalnih baza i nenegativnih cjelobrojnih eksponenata.

Vrednovanje za učenje u ovoj nastavnoj jedinici može se provoditi rješavanjem izlazne kartice koja učiteljima omogućuje analizu odgovora učenika i pravovremeno pružanje povratne informacije. Istovremeno, one potiču učitelje da promisle o metodama i strategijama poučavanja i po potrebi primijene neki drugi pristup ukoliko se utvrdi da većina učenika nije ostvarila zadane ishode.

**KVADRIRANJE RACIONALNIH BROJEVA – izlazna kartica**

**1.** Jesu li navedene tvrdnje točne?

$-9^2 = 81$ TOČNO

$\frac{5^2}{8} = \frac{25}{64}$ TOČNO

$\frac{-(-1)^2}{2} = -\frac{1}{2}$ TOČNO

**2.** Što znači kvadrirati broj?

Pomnožiti broj samim sobom.

**3.** Izračunajte $\left(-4\frac{1}{3}\right)^2$

$\left(-4\frac{1}{3}\right)^2 = 16\frac{1}{3}$

Iz rješenja ovog učeničkog rada uočavamo da učenik u teoriji zna što znači kvadrirati broj, ali pri rješavanju zadataka nailazi na prepreke tj. prilikom rješavanja zadataka ne primjenjuje ispravno pravilo za računanja s potencijama racionalnih baza i nenegativnih cjelobrojnih eksponenata. Povratne informacije trebale bi biti usmjerene na uočavanje pogrešaka i ispravljanje istih.
Pitanja koja učitelj može postaviti učeniku su:

- Je li $9^2$ isto što i $-9^2$? Zašto?
- Kako kvadriramo razlomak ako je zagrada izostavljena, a kako kada se cijeli razlomak nalazi u zagradi?

## 3.6 Vjerojatnost i statistika

U domeni Podaci, statistika i vjerojatnost učenici se susreću s pojmom vjerojatnosti i njenim osnovnim svojstvima. Od njih se očekuje da opisuju vjerojatnost slučajnoga događaja, da razlikuju skup povoljnih događaja od skupa elementarnih događaja, da procjenjuju i računaju vjerojatnost zadanoga događaja te da računajući vjerojatnost, donose odluke i zaključke o dvije populacije. Navedeni primjeri prikladni su za poučavanje učenika srednjih strukovnih škola.

Na početku učenja i poučavanja može se provesti dijagnostičko vrednovanje u obliku sljedećeg zadatka:

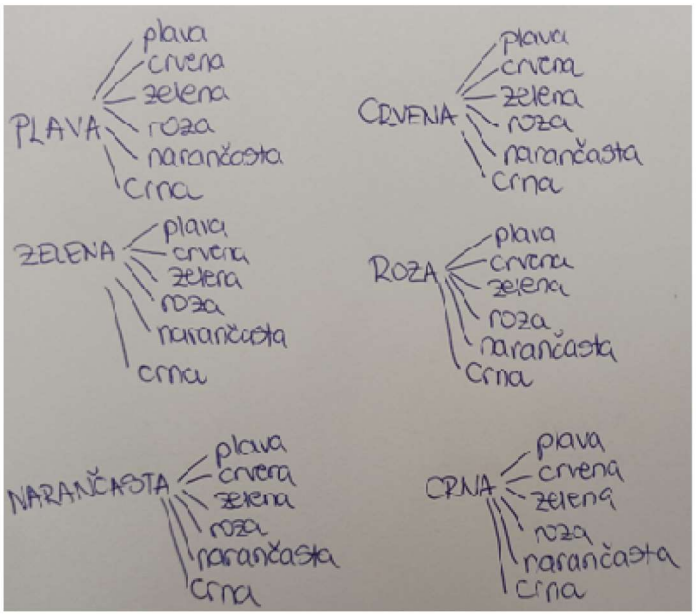
1. Načinite skup podataka koji zadovoljava svojstvo da su vrijednosti za medijan i aritmetičku sredinu jednake.
2. Izračunajte medijan, aritmetičku sredinu i interkvartilni raspon za skup podataka:
   17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 35

Vrednovanje za učenje može se provoditi korištenjem zadatka:

Nacrtali ste dijagram stabla (vjerojatnosno stablo) kako biste opisali vjerojatnost dobivanja određene kombinacije boja birajući iz torbe dvije obojene kockice. Dobivena vjerojatnost iznosi **4/30**.

Kockice kojih boja bi mogle biti u torbi? Koju ste vjerojatnost pokušali shvatiti?

U idealnom slučaju, učenici trebaju shvatiti da vjerojatnost $\frac{4}{30}$ sugerira da njihov dijagrama stabla treba sadržavati ukupno 30 grana, od kojih samo 4 zadovoljavaju uvjet.




Ukupno je 30 mogućih kombinacija.

Možemo iz torbe odabrati dvije kockice bilo koje boje.

Na primjeru ovog učeničkog rada vidimo da učenik zna kako koristiti dijagram stabla, ali je prikazano 36 umjesto 30 kombinacija. Učenik nije vodio računa oko toga da vjerojatnost prvog izbora utječe na vjerojatnost drugog izbora niti je objasnio kako odabir bilo koje dvije boje dovodi do vjerojatnosti $\frac{4}{30}$. Učenika se može upitati:

- Gdje u dijagramu stabla možemo vidjeti $\frac{4}{30}$? Koje 4 grane tražimo kod vjerojatnosti $\frac{4}{30}$?

## 3.7 Linearna funkcija

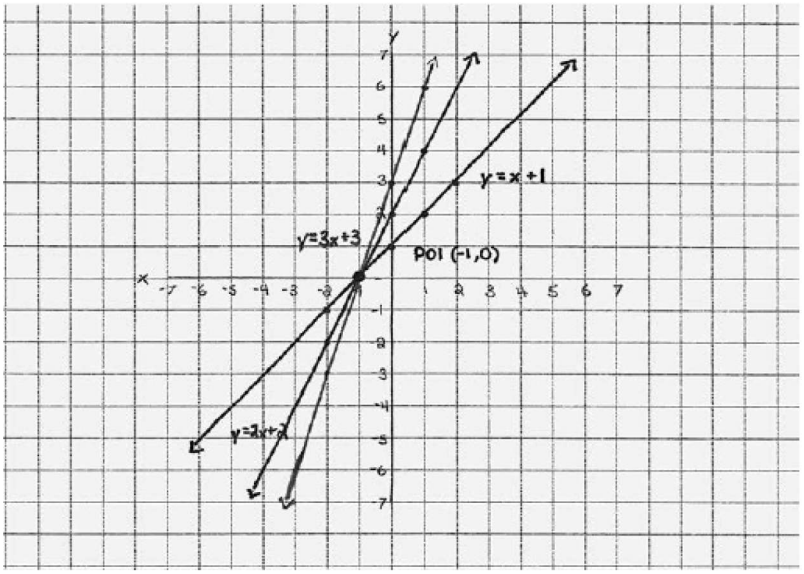
U prvom razredu srednje škole u domeni Brojevi učenici se susreću s linearnom funkcijom. Od njih se očekuje da zadanu linearnu funkciju znaju prikazati tablično i grafički, da opisuju utjecaj koeficijenata na položaj grafa, da definiraju i određuju nultočku funkcije te da iz grafa iščitavaju argumente i vrijednosti te da iz zadanih elemenata određuju funkciju.

Prilikom provođenja vrednovanja za učenje, učitelji mogu učenicima zadati:

U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcija:

f(x) = x + 1
f(x) = 2x + 2
f(x) = 3x + 3

Što je zajedničko tim grafovima?
Zašto to ima smisla?




Sva tri grafa sijeku se u točki (-1,0).
Koeficijent smjera svakog pravca je pozitivan broj što znači da su ti pravci rastući.
Svi pravci su beskonačni.

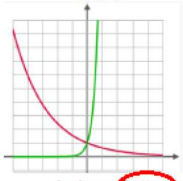
Na primjeru ovog učeničkog rada uočavamo da je učenik dobro nacrtao sva tri grafa zadanih funkcija te ispravno odredio sjecište pravaca. Ono što nedostaje jest objašnjenje zbog čega to ima smisla. U idealnom slučaju, učenik treba zaključiti da ako je $f(x) = mx + m$ (što vrijedi u slučaju ovog zadatka), tada je $x = -1$ nultočka zadanih funkcija jer je $-m + m = 0$.
Pitanja koja učitelj može postaviti učeniku su:

- Zbog čega možeš predvidjeti da će svi grafovi zadanih funkcija biti beskonačni?
- Zbog čega možeš predvidjeti da svi grafovi zadanih funkcija prolaziti točkom $(-1, 0)$?

## 3.8 Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna i logaritamska funkcija nastavna je tema koja se obrađuje u trećem razredu srednje škole. U sklopu odgojno-obrazovnih iskoda od učenika se očekuje da računaju s potencijama racionalnoga eksponenta, analiziraju i primjenjuju eksponencijalnu i logaritamsku funkciju te da modeliraju eksponencijalnom i logaritamskom jednadžbom i nejednadžbom.

Prilikom obrade nastavne teme Eksponencijalna funkcija, učenici se susreću sa svojstvima eksponencijalne funkcije. Vrednovanje za učenje može se provoditi na način da se učenicima da nekoliko tvrdnji, a oni trebaju odrediti koja je tvrdnja istinita, a koja lažna.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Eksponencijalna funkcija je injektivna funkcija.<br>**istina / laž** | Grafovi eksponencijalnih funkcija $f(x) = a^x$ i $g(x) = a^{-x}$ su simetrični s obzirom na os x.<br>**istina / laž** | Domena eksponencijalne funkcije je skup svih pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$, a njezina slika je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.<br>**istina laž** | Pomoću horizontalnog testa provjeravamo injektivnost funkcije.<br>**istina / laž** |
| Među rastućim eksponencijalnim funkcijama brže rastu one čija je baza veća.<br>**istina laž** | Baza eksponencijalne funkcije može biti negativna.<br>**istina / laž** | Graf eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ uvijek prolazi točkom (1,0).<br>**istina laž** | Među padajućim eksponencijalnim funkcijama brže padaju one čija je baza manja.<br>**istina / laž** |
| Asimptota grafa eksponencijalne funkcije je pravac $y = 0$.<br>**istina / laž** | Eksponencijalna funkcija $f(x) = b \cdot a^x$ nema nultočku.<br>**istina / laž** | Zeleni graf predstavlja graf funkcije $f(x) = 0.8^x$, a crveni $g(x) = 5^x$.<br>  <br>**istina laž** | Od navedenih eksponencijalnih funkcija $f(x) = 1.2^x$, $g(x) = 2.1^x$, $h(x) = 1.7^x$, brže raste $h$ od $g$.<br>**istina laž** |

Povratne informacije mogu biti usmjerene na način da se učenike pohvali za ono što su točno odgovorili, ali i da ih se usmjeri na eventualne pogreške i poteškoće. Ako među ispravno odgovorenim tvrdnjama ima onih tvrdnji koje su lažne, od učenika se može tražiti da ih preoblikuju tako da budu istinite.

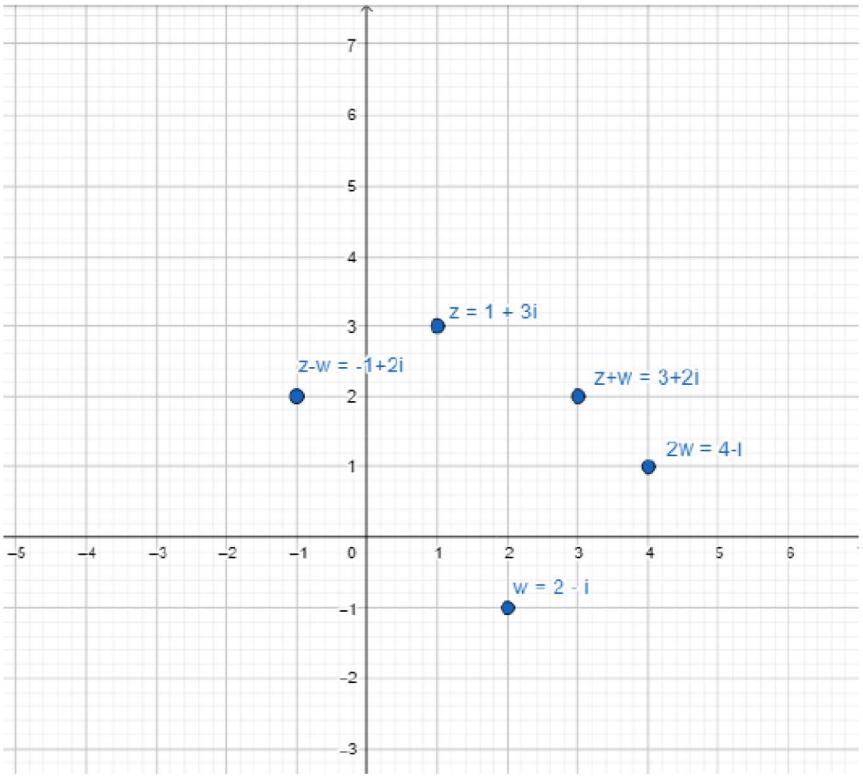
## 3.9 Kompleksna ravnina

U domenama Brojevi te Oblik i prostor u četvrtom razredu srednje škole u sklopu nastavne teme Brojevi obrađuje se nastavna jedinica Kompleksna ravnina. Od učenika se očekuje da uju kompleksne brojeve u Gaussovoj ravnini, da u Gaussovoj ravnini određuju i prikazuju konjugirano kompleksni broj i modul kompleksnoga broja te interpretiraju zbroj, razliku i umnožak kompleksnih brojeva.

Vrednovanje za učenje može se provoditi koristeći sljedeći zadatak:

Neka su zadani kompleksni brojevi $z = 1 + 3i$ i $w = 2 - i$.

1. Izračunajte $z + w$ a zatim prikažite u Gaussovoj ravnini brojeve $z$, $w$ i $z + w$.
2. Izračunajte $z - w$ a zatim prikažite u Gaussovoj ravnini broj $z - w$.
3. Izračunajte $2w$, a zatim ga prikažite u Gaussovoj ravnini.




1. $z + w = 1 + 3i + 2 - i = 3 + 2i$
2. $z - w = 1 + 3i - 2 - i = -1 + 2i$
3. $2w = 2 \cdot 2 - i = 4 - i$

Iz ovog učeničkog rada uočavamo da učenik zna zbrajati kompleksne brojeve i neke od zadanih kompleksnih brojeva pravilno grafički prikazati u Gaussovoj ravnini. Uočavamo pogrešno provođenje operacija oduzimanja i množenja kompleksnog broja skalarom.
Pitanja koja učitelj može postaviti učeniku su:

- Kako provodimo oduzimanje dvaju kompleksnih brojeva, a kako množenje skalarom?
- Na koju os smještamo imaginarni dio kompleksnog broja?

# Zaključak

Neizostavni dio odgojno-obrazovnog sustava, uz kurikulum, čini i vrednovanje. Vrednovanje treba biti osmišljeno na način da se njime unaprijeđuje napredak učenika, ali i poučavanje učitelja i cijelog odgojno-obrazovnog sustava i time zahtijeva odgovornost svih sudionika tog procesa. Kako bi se u osnovnim i srednjim školama vrednovanje učeničkih postignuća i napredovanja provodilo kvalitetno ono treba zadovoljavati određena načela. U procesu vrednovanja, zadaća učitelja je unaprijed planirati i najaviti što i kako se vrednuje te na početku školske godine učenike upoznati s očekivanim ishodima i kriterijima vrednovanja koji ukazuju na njihovu usvojenost. Uz neizostavno sumativno vrednovanje, učitelji bi formativno vrednovanje, što uključuje vrednovanje za učenje i vrednovanje kao učenje, trebali provoditi kontinuirano tijekom procesa učenja i poučavanja i nastojati učenicima što češće davati precizne i konkretne povratne informacije o procesu njihova učenja, eventualnim nedostatcima i poteškoćama kako bi se njihovo učenje unaprijedilo s ciljem ostvarivanja odgojno-obrazovnih ishoda.

U ovom su radu prikazane metode i načini na koji se vrednovanje za učenje može provoditi u osnovnim i srednjim školama. Jedan od načina provedbe vrednovanja za učenje jest u obliku zadataka osmišljenih za dijagnostičko vrednovanje koje učitelji daju učenicima na početku obrade novih nastavnih jedinica kako bi se utvrdila razina njihova predznanja. Na temelju rezultata dijagnostičkog vrednovanja, učitelji osmišljavaju, prilagođavaju i planiraju učenje i poučavanje te određuju prikladan oblik odgojno-obrazovne podrške potrebitim učenicima. Isto tako, vrednovanje za učenje može se provoditi i tijekom obrade nastavnih jedinica, prilikom rješavanja zadataka. Bitno je da učitelji konstantno učenicima daju povratne informacije koje trebaju pohvaliti ono što je dobro napravljeno, a ono što je pogrešno napravljeno usmjeravati ka boljem koristeći se pozitivnim i jednostavnim jezikom kako bi svi učenici to mogli prepoznati i razumjeti.

# Literatura


[1] K. Brleković, A. Brmbota, D. Dublec, M. Ivišić, M. Kanaet, A. Karaban, *Matematika 4 Pomoćnik u nastavi*, priručnik za nastavnike uz udžbenik matematike za četvrti razred srednje škole, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[2] Ž. Dijanić, V. Drvarić, P. Hiržin, S. Loparić, *Matematika 3 Pomoćnik u nastavi*, priručnik za nastavnike uz udžbenik matematike za treći razred srednje škole, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[3] M. Hunjek, *Vrednovanje kao strategija učenja matematike*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2015.

[4] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2.*, 2019.

[5] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, *Pravilnik o izmjenama i dopuni Pravilnika o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi*, Narodne novine 82/2019, 2019.

[6] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, *Pravilnik o načinima, postupcima i elementima vrednovanja učenika u osnovnoj i srednjoj školi*, Narodne novine 112/2010, 2010.

[7] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, *Pravilnik o polaganju državne mature*, Narodne novine 1/2013, 2013.

[8] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Smjernice za vrednovanje procesa i ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda u osnovnoškolskome i srednjoškolskome odgoju i obrazovanju*, 2019.

[9] M. Small, *Math That Matters, Targeted Assessment and Feedback for Grades 3-8*, Teachers College, Columbia University, 2019.

# Sažetak

Tri osnovna pristupa vrednovanju su vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje i vrednovanje naučenog. Vrednovanje za učenje oblik je formativnog vrednovanja, odvija se tijekom učenja i poučavanja te predstavlja proces prikupljanja informacija i dokaza o procesu učenja te njihovu interpretaciju s ciljem unaprjeđivanja procesa učenja kod učenika te procesa poučavanja kod učitelja. To je osnovni razlog zbog kojega ovaj način vrednovanja ne rezultira brojčanim ocjenjivanjem koje bi utjecalo na donošenje zaključnih ocjena krajem školske godine. Vrednovanje za učenje značajno je za sve sudionike odgojno-obrazovnog procesa. Kroz kvalitativne povratne informacije i primjenom različitih metoda vrednovanja za učenje, kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje, učenici lakše prate svoj put prema ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda, prepoznaju nedostatke i unaprijeđuju svoje znanje.

**Ključne riječi:** kurikulum, vrednovanje, vrednovanje za učenje, vrednovanje kao učenje, vrednovanje naučenog, povratna informacija.

# Summary

Three main approaches to assessment are: assessment for learning, assessment as learning and assessment of learned. Assessment for learning is a type of formative valuation, it is happening during learning and teaching and it represents the process of collecting information and evidence about the process of learning and their interpretation with the objective of improvement of the process of learning by students and the process of teaching by teachers. That is the main reason why this way of assessment does not result in numerical evaluation which would affect on bringing concluding evaluation at the end of the school year. Assessment for learning is significant for all the participants of education process. Through qualitative feedback and the use of different methods of assessment for learning, during elementary and high school education, students follow their way to achievement of education process outcomes easier, they recognize downgrades and they improve their knowledge.



**Keywords:** Curriculum, Assessment, Assessment for Learning, Assessment as Learning, Assessment of Learning, Feedback.

# Životopis

Rođena sam 3. travnja 1997. godine u Našicama. Svoje obrazovanje započela sam u Osnovnoj školi Josipa Jurja Strossmayera u Đurđenovcu. Sve razrede osnovne škole završila sam s odličnim uspjehom, a sudjelovala sam i na raznim natjecanjima iz matematike, hrvatskog jezika i geografije, ali i na LiDraNu. Također sam pohađala i neke izvannastavne aktivnosti kao što su odbojka, dramska sekcija i školski zbor. Nakon završene osnovne škole upisujem opću gimnaziju u Srednjoj školi Isidora Kršnjavoga u Našicama koju 2016. godine završavam s odličnim uspjehom. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja također sam sudjelovala na raznim natjecanjima. Završetkom srednjoškolskog obrazovanja, 2016. godine upisujem Sveučilišni integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Trenutno sam zaposlena kao profesor matematike i informatike u Srednjoj školi Isidora Kršnjavoga u Našicama.