Neke osobite točke trokuta

Majdenić, Ivana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Majdenić

Neke osobite točke trokuta

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Majdenić

Neke osobite točke trokuta

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Zdenka Kolar Begović

Osijek, 2021.

Sažetak

Kada se cevijane od posebnog značaja u trokutu (težišnice, simetrale kutova itd.) sijeku, točka njihova presjeka često se naziva posebnom točkom trokuta. Takve točke oduvijek su bile zanimljive geometričarima. Stoga ćemo u ovom završnom radu posebnu pažnju posvetiti Gergonneovoj i Nagelovoj točki trokuta. Razmatrat će se i Tarryjeva i Brocardove točke trokuta. Promatrat će se i veze spomenutih točaka i nekih drugih elemenata trokuta.

Ključne riječi: Gergonneova točka, Nagelova točka, Brocardove točke, Tarryjeva točka

Some particularly points of triangle

Abstract

When cevians of special importance intersect in a triangle (medians, angle bisectors, etc.), their intersect point is often called the special point of the triangle. Such points have always been of interest to geometricians. Therefore, in this thesis we will pay attention to the Gergonne and Nagel point of the triangle. Tarry point and Brocard points of the triangle will also be considered. Thesis will observe the connections of the mentioned points and some other elements of triangle.

Keywords: Gergonne point, Nagel point, Brocard points, Tarry point

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Gergonneova i Nagelova točka trokuta **2**

2.1 Izotomične točke 8

2.2 Nagelov pravac 10

3 Brocardove točke **11**

3.1 Brocardova kružnica 14

4 Tarryjeva točka **16**

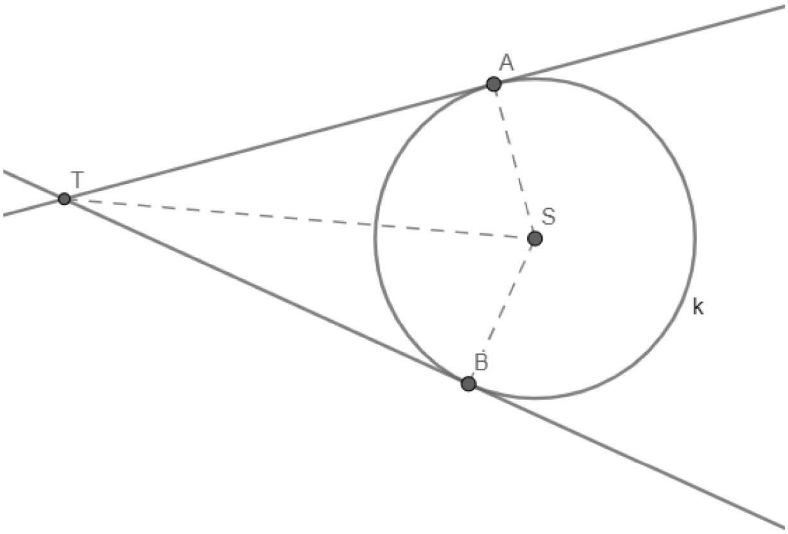
1 Uvod

U ovom radu bavimo se nekim posebnim točkama geometrije trokuta. Na početku rada razmatramo Gergonneovu i Nagelovu točku trokuta. Razmatramo konstrukciju navedenih točaka, te dokazujemo njhovu egzistenciju. Zatim definiramo svojstvo izotomičnosti točaka koje veže Gergonneovu i Nagelovu točku trokuta. Posebno promatramo još jedno svojstvo Nagelove točke i upoznajemo se s pojmom Nagelov pravac. Nadalje se bavimo Brocardovim točkama. Proučavamo njihovu konstrukciju i dokazujemo njihovu egzistenciju. U nastavku navodimo neka svojstva Brocardovih točaka. Posebno promatramo Brocardovu kružnicu te navodimo njezinu vezu s Brocardovim točkama. Na kraju se bavimo Tarryjevom točkom trokuta. Navodimo njezinu konstrukciju i dokazujemo egzistenciju, te gledamo svojstva koja zadovoljava.

2 Gergonneova i Nagelova točka trokuta

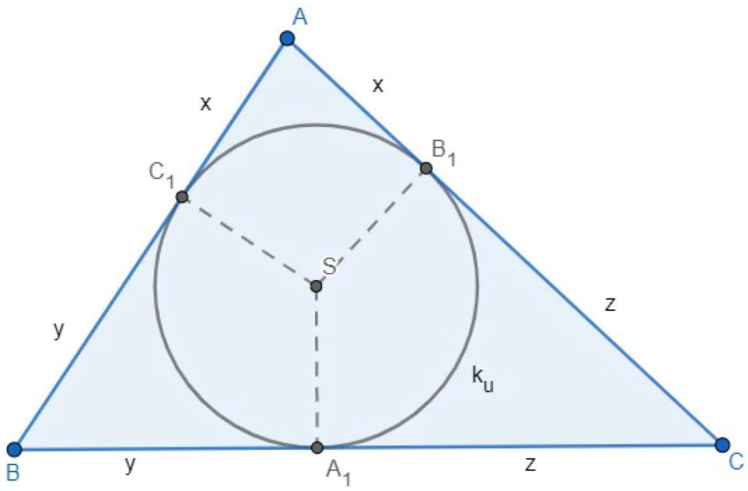
U ovom poglavlju rada ćemo razmatrati Gergonneovu i Nagelovu točku trokuta. Najprije navedimo definicije i leme koje će nam biti potrebne za uvođenje Gergonneove i Nagelove točke, te za dokaze svojstava navedenih točaka.

Lema 2.1. *Odsječci tangenata povučenih iz neke točke na kružnicu su jednaki, tj. uz oznake kao na slici 1. vrijedi* $|TA|=|TB|$.



Slika 1. Tangente na kružnicu

Nađimo sada udaljenosti vrhova trokuta od dirališta trokutu upisane kružnice i stranica trokuta ABC (slika 2).



Slika 2. Trokutu upisana kružnica

Uočimo da su pravci na kojima leže stranice trokuta ABC tangente upisane kružnice. Prema lemi 2.1 vrijedi $|AB_1| = |AC_1|$, $|BA_1| = |BC_1|$ i $|CA_1| = |CB_1|$. Uvedimo oznake $x = |AB_1| = |AC_1|$, $y = |BA_1| = |BC_1|$ i $z = |CA_1| = |CB_1|$. Uočimo da tada vrijedi $y + z = a$,

$x+z=b$ i $x+y=c$, gdje su a, b i c duljine stranica trokuta ABC. Rješavanjem tog sustava dobije se

$$x=\frac{1}{2}(b+c-a), \quad y=\frac{1}{2}(a+c-b), \quad z=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

Lako se vidi da vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.2. *Neka su A_1, B_1 i C_1 dirališta upisane kružnice k_u trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Tada je*

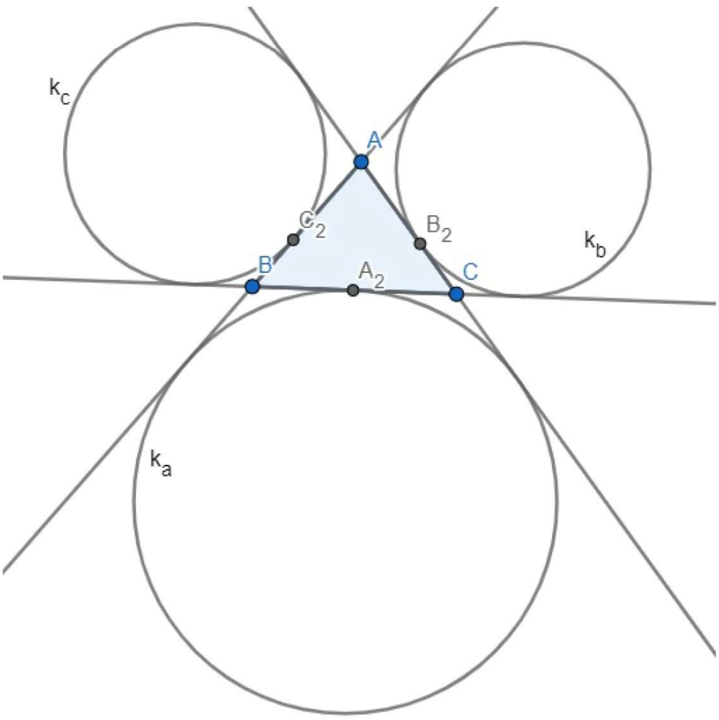
$$|AB_1|=|AC_1|=s-a, \quad |BA_1|=|BC_1|=s-b, \quad |CA_1|=|CB_1|=s-c$$

gdje je $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Prisjetimo se sada definicije pripisane kružnice trokuta jer su nam pripisane kružnice vezane uz Nagelovu točku.

Definicija 2.3. Kružnicu koja dira stranicu a trokuta ABC s vanjske strane i produžetke preostalih dviju stranica b, c zovemo pripisanom kružnicom trokuta ABC i označavamo k_a.

Analogno se definiraju i pripisane kružnice k_b i k_c trokuta ABC. Svaki trokut ima tri pripisane kružnice, kao što je pokazano na slici 3.



Slika 3. Trokutu pripisane kružnice

Vrijedi sljedeća lema.

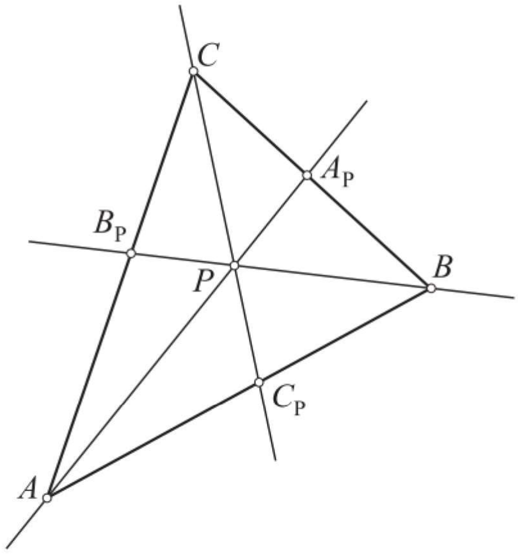
Lema 2.4. *Neka su A_2, B_2 i C_2 redom dirališta pripisanih kružnica k_a, k_b i k_c trokuta ABC sa stranicama $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Tada je*

$$|BC_2|=|CB_2|=s-a, \quad |AC_2|=|CA_2|=s-b, \quad |AB_2|=|BA_2|=s-c.$$

Za razmatranje Gergonneove i Nagelove točke trokuta od velike koristi bit će sljedeća tvrdnja, poznati Cevin teorem.

Lema 2.5 (Ceva)**.** *Neka su A_p, B_p, C_p točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pravci AA_p, BB_P, CC_P prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_p|}{|C_pB|} \cdot \frac{|BA_p|}{|A_pC|} \cdot \frac{|CB_p|}{|B_pA|} = 1.$$



Slika 4. Cevin teorem ([1])

Teorem 2.6 (Gergonne)**.** *[1] Neka su A_1, B_1, C_1 dirališta upisane kružnice trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Tada se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki (slika 5).*

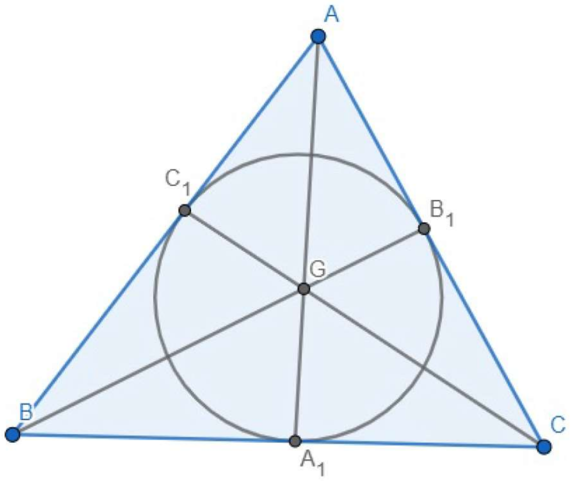
Dokaz. Po lemi 2.1 vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} = 1,$$

pa tvrdnja slijedi prema Cevinom teoremu. □

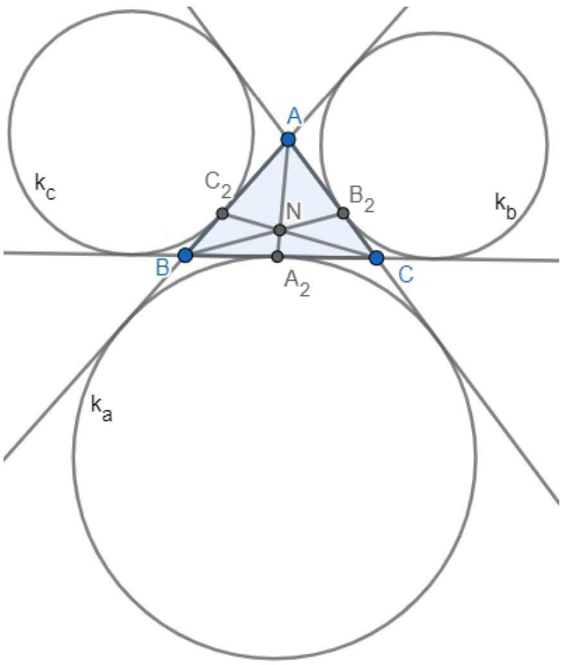
Točka u kojoj se sijeku pravci AA_1, BB_1, CC_1 iz teorema 2.6 zove se *Gergonneova točka* (slika 5).

Dokažimo sada sljedeću tvrdnju o pravcima koji prolaze vrhovima trokuta i diralištima stranica trokuta i trokutu pripisane kružnice ([1], [4]).



Slika 5. Gergonneova točka trokuta ABC

Teorem 2.7 (Nagel)**.** *Neka su A_2, B_2, C_2 dirališta pripisanih kružnica trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Tada se pravci AA_2, BB_2, CC_2 sijeku u jednoj točki.*



Slika 6. Nagelova točka trokuta ABC

Dokaz. Neka je $2s = a + b + c$ opseg trokuta. Po lemi 2.4 vrijedi

$$|BC_2| = |CB_2| = s - a, \quad |AC_2| = |CA_2| = s - b, \quad |AB_2| = |BA_2| = s - c.$$

Dakle,

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1.$$

Prema Cevinom teoremu slijedi da se pravci AA_2, BB_2, CC_2 sijeku u jednoj točki. □

Točka u kojoj se sijeku pravci AA_2, BB_2, CC_2 iz teorema 2.7 zove se *Nagelova točka*.

Uočimo da vrijedi

$$|AB| + |BA_2| = c + (s - c) = s = b + (s - b) = |AC| + |CA_2|,$$

pa točka A_2 raspolavlja opseg trokuta. Analogno je s točkama B_2 i C_2. Drugim riječima, Nagelova točka je presjek pravaca koji spajaju vrhove A, B, C redom s polovištima opsega A_2, B_2, C_2.

Osim dirališta A_2, B_2, C_2 pripisanih kružnica k_a, k_b i k_c sa stranicama trokuta ABC navedimo još šest dirališta.
Neka su:
Y_a, Z_a, dirališta pripisane kružnice k_a s pravcima na kojima leže stranice $\overline{CA}$, $\overline{AB}$;
X_b, Z_b, dirališta pripisane kružnice k_b s pravcima na kojima leže stranice $\overline{BC}$, $\overline{AB}$;
X_c, Y_c, dirališta pripisane kružnice k_c s pravcima na kojima leže stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

Spojimo pojedini vrh danog trokuta ABC sa svim onim diralištima koja leže na suprotnoj stranici ili produženju te stranice trokuta. Tako dobijemo devet spojnica:

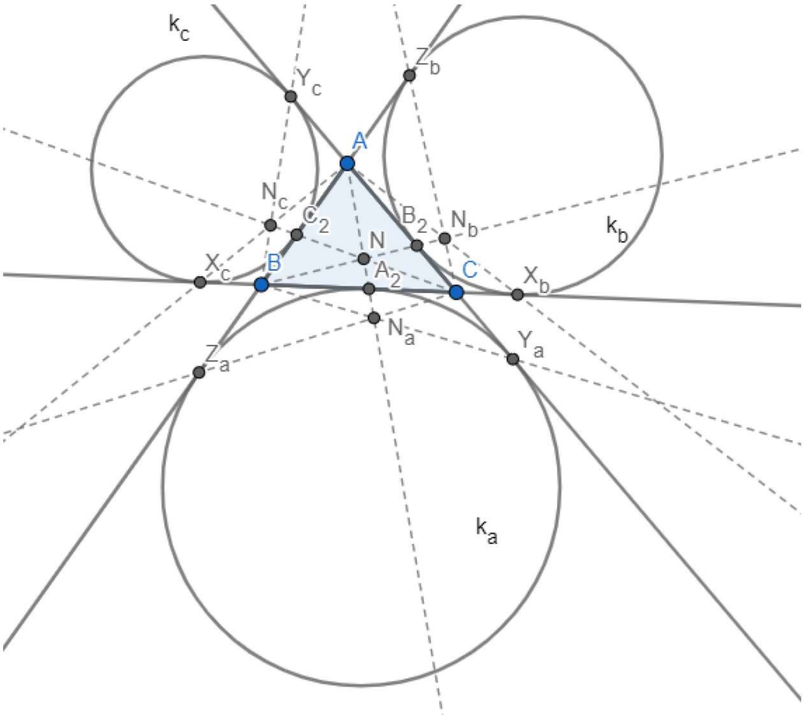
$$\begin{array}{ccc} \overline{AA_2}, & \overline{AX_b}, & \overline{AX_c}, \\ \overline{BY_a}, & \overline{BB_2}, & \overline{BY_c}, \\ \overline{CZ_a}, & \overline{CZ_b}, & \overline{CC_2}. \end{array} \tag{2.1}$$

Od tih spojnica spomenuli smo $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_2}$ i $\overline{CC_2}$ za uvođenje Nagelove točke. Pogledajmo što je s preostalim spojnicama.

Teorem 2.8. *[3] Preostalih šest spojnica iz (2.1) sijeku se po tri u još tri točke N_a, N_b, N_c. Neka se*

$$\begin{array}{lllll} AA_2, & BY_a, & CZ_a, & \textit{sijeku u točki} & N_a, \\ AX_b, & BB_2, & CZ_b, & \textit{sijeku u točki} & N_b, \\ AX_c, & BY_c, & CC_2, & \textit{sijeku u točki} & N_c. \end{array}$$

Točke N_a, N_b, N_c zovemo *vanjskim Nagelovim točkama.*

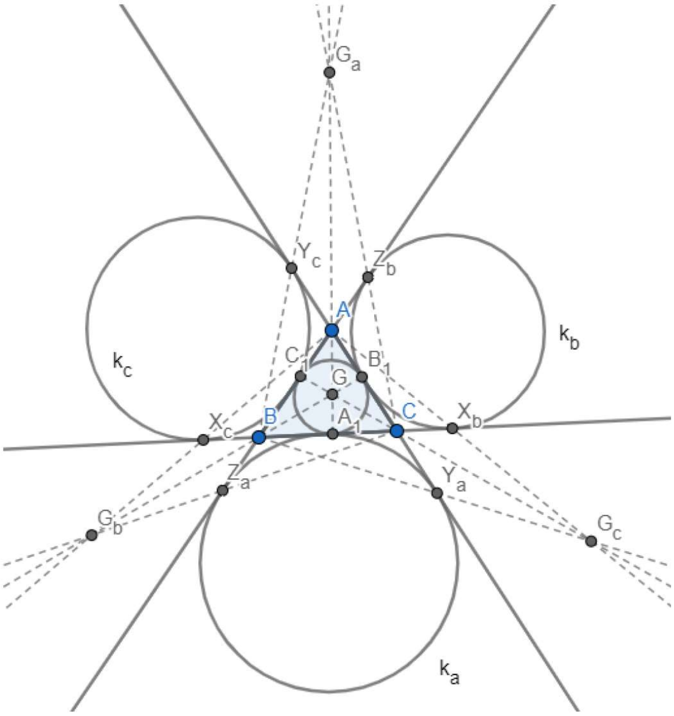


Slika 7. Vanjske Nagelove točke trokuta ABC

Teorem 2.9. *[3] Neka su AA_1, BB_1 i CC_1 pravci iz teorema 2.6, a AA_2, BY_a, CZ_a, AX_b, BB_2, CZ_b, AX_c, BY_c, CC_2 pravci iz (2.1). Tada se odgovarajuća tri sijeku u točkama G_a, G_b i G_c*

$$\begin{array}{llll} \overline{AA_1}, & \overline{BY_c}, & \overline{CZ_b} & \textit{u točki} \quad G_a; \\ \overline{AX_c}, & \overline{BB_1}, & \overline{CZ_a} & \textit{u točki} \quad G_b; \\ \overline{AX_b}, & \overline{BY_a}, & \overline{CC_1} & \textit{u točki} \quad G_c. \end{array}$$

Točke G_a, G_b, G_c, zovemo *vanjskim Georgonneovim točkama* trokuta ABC.



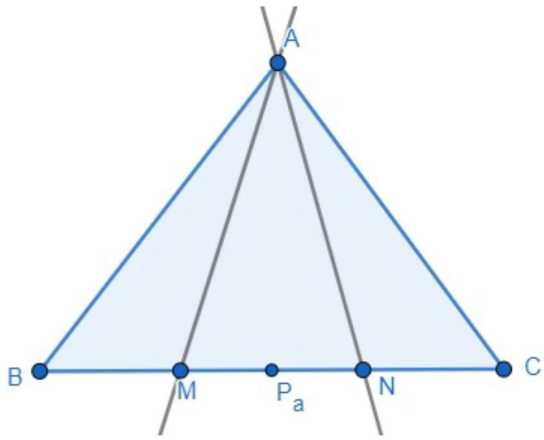
Slika 8. Vanjske Gergonneove točke trokuta ABC

2.1 Izotomične točke

Upoznajmo se s pojmom izotomičnih točaka i pogledajmo sljedeću definiciju.

Definicija 2.10. [3] Dvije točke na istoj stranici danog trokuta koje su jednako udaljene od polovišta te stranice zovemo izotomičnim točkama tog trokuta.

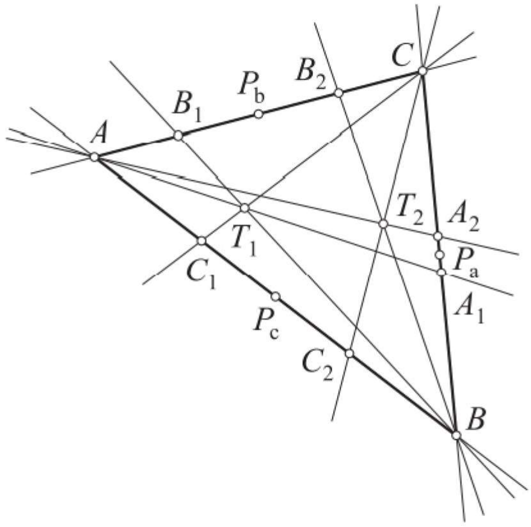
Izotomične pravce dobivamo tako da spojimo par izotomičnih točaka na nekoj stranici trokuta sa suprotnim vrhom. Uočavamo, ako imamo trokut ABC i točke M i N na pravcu BC koje su simetrične u odnosu na polovište P_a dužine $\overline{BC}$, da tada vrijedi $|BM| = |CN|$ i $|BN| = |CM|$ (slika 9.).



Slika 9. Izotomične točke

Navedimo teorem koji vrijedi za izotomične pravce.

Teorem 2.11. *[1] Neka su A_1, B_1 i C_1 redom točke na pravcima BC, AC i AB takve da se tri pravca AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki. Tada se njima izotomični pravci AA_2, BB_2 i CC_2 također sijeku u jednoj točki (vidjeti sliku 10.).*



Slika 10. Ilustracija teorema 2.11 ([1])

Dokaz. Kako se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki, označmo je s T_1, to prema Cevinom teoremu vrijedi

$$\frac{|AB_1|}{|CB_1|} \cdot \frac{|CA_1|}{|BA_1|} \cdot \frac{|BC_1|}{|AC_1|} = 1.$$

Definiramo točke A_2, B_2 i C_2 na stranicama trokuta takve da su pravci AA_2, BB_2 i CC_2 izotomični pravcima AA_1, BB_1 i CC_1 redom. Prema razmatranjima od ranije vrijedi:

$$\begin{aligned} |AB_1| = |CB_2|, \quad |CB_1| = |AB_2| \\ |CA_1| = |BA_2|, \quad |BA_1| = |CA_2| \\ |BC_1| = |AC_2|, \quad |AC_1| = |BC_2|. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\frac{|CB_2|}{|AB_2|} \cdot \frac{|BA_2|}{|CA_2|} \cdot \frac{|AC_2|}{|BC_2|} = 1,$$

te se prema Cevinom teoremu pravci AA_2, BB_2 i CC_2 sijeku u jednoj točki, koju smo označili s T_2. □

Točke T_1 i T_2 iz teorema 2.11 zovemo *izotomično konjugiranim točkama* trokuta ABC.
Dakle, postoji beskonačno mnogo parova točaka izotomičnih u odnosu na trokut koji promatramo.
Pogledajmo teorem koji povezuje Gergonneovu i Nagelovu točku.

Teorem 2.12. *[1] Gergonneova i Nagelova točka su međusobno izotomične točke.*

Dokaz. Iz lema 2.2 i 2.4 slijedi

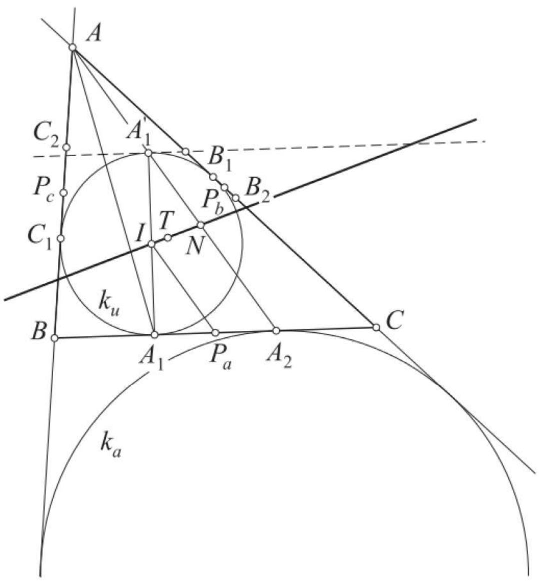
$$\begin{aligned} |AC_1| = |BC_2| = s - a, \\ |BA_1| = |CA_2| = s - b, \\ |CB_1| = |AB_2| = s - c. \end{aligned}$$

Tvrdnja slijedi iz teorema 2.11. □

2.2 Nagelov pravac

U ovom dijelu dokazat ćemo da Nagelova točka leži na pravcu kroz središte trokutu upisane kružnice i težište.

Teorem 2.13. *[1] Neka je dan trokut ABC, te neka je T njegovo težište, I središte trokutu upisane kružnice i N Nagelova točka. Tada te tri točke leže na jednom pravcu i vrijedi* $|TN| = 2 \cdot |TI|$.



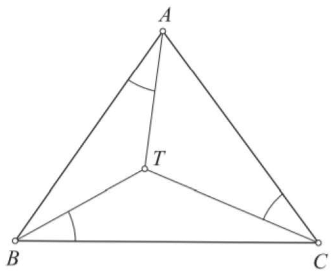
Slika 11. Nagelova točka trokuta ([1])

Dokaz. Označimo trokutu upisanu i pripisane kružnice te njihova dirališta sa stranicama trokuta, kao ranije, te označimo polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom s P_a, P_b i P_c. Ako istaknemo elemente kao na slici 11., možemo uočiti da su upisana kružnica k_u i pripisana kružnica k_a trokuta ABC upisane u kut $\sphericalangle BAC$. Zbog toga su te dvije kružnice homotetične, a centar homotetije je točka A.
Neka je A_1' dijametralno suprotna točka točki A_1 na kružnici k_u, pa vrijedi $|A_1I| = |IA_1'|$. Zbog homotetije točke A, A_1' i A_2 su kolinearne. Kako su AA_1 i AA_2 izotomični pravci, vrijedi $|A_1P_a| = |A_2P_a|$. Zaključujemo da je $\overline{IP_a}$ srednjica trokuta $A_1A_2A_1'$, pa je zbog toga pravac IP_a paralelan pravcu A_2A_1'.
Neka je h homotetija s centorm u točki T i koeficijentom -2. Znamo da težište dijeli težišnicu $\overline{AP_a}$ u omjeru 2 : 1, te računajući od vrha trokuta, homotetija h preslikava točku P_a u točku A. Homotetijom h pravac IP_a preslikava se u njemu paralelan pravac koji prolazi točkom A, odnosno u pravac AA_2. Analogno se pravac IP_b preslikava u pravac BB_2. Zaključujemo da se točka I pri homotetiji h preslikava u sjecište pravaca AA_2 i BB_2, a to je Nagelova točka N. Time je dokazano $|NT| = 2 \cdot |IT|$. □

Nagelov pravac je pravac koji prolazi kroz središte upisane kružnice trokuta, težište i Nagelovu točku.

3 Brocardove točke

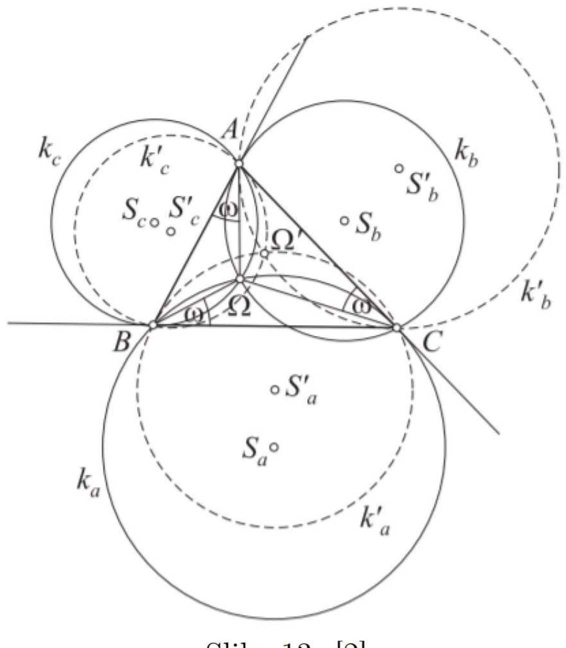
Neka je točka T unutar trokuta ABC. Točku T spojimo s vrhovima trokuta i promotrimo kutove koje dužine $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ zatvaraju sa stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Dokazat ćemo da postoji točka za koju su sva tri promatrana kuta jednaka. Također se može dokazati da postoji točka T' tako da dužine $\overline{T'A}$, $\overline{T'B}$ i $\overline{T'C}$ zatvaraju sa stranicama $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ i $\overline{CB}$ sukladne kutove.



Slika 12. [2]

Dokažimo teorem koji će nam omogućiti dokaz postojanja točaka s navedenim svojstvom.

Teorem 3.1. *[2] Za dani trokut ABC dane su tri kružnice: k_a koja prolazi točkom B i dira stranicu $\overline{AC}$ u točki C, k_b koja prolazi točkom C i dira stranicu $\overline{AB}$ u točki A, k_c koja prolazi točkom A i dira stranicu $\overline{BC}$ u točki B (slika 13.). Kružnice k_a, k_b i k_c sijeku se u jednoj točki.*



Slika 13. [2]

Dokaz. Promatrajmo kružnice k_a i k_c. Navedene kružnice imaju zajedničku točku B i još jednu točku trokuta ABC koju označimo s Ω. Kako je BC tangenta kružnice k_c, $\sphericalangle A\Omega B = 180^\circ - \beta$ i analogno $\sphericalangle B\Omega C = 180^\circ - \gamma$. Slijedi $\sphericalangle A\Omega C = 360^\circ - (180^\circ - \beta) - (180^\circ - \gamma) = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, gdje su α, β i γ unutrašnji kutovi trokuta ABC. Slijedi da točka Ω pripada luku kružnice k_b unutar trokuta ABC, čime je dokazan teorem. $\square$

Teorem 3.2. *[2] Za dani trokut ABC dane su tri kružnice: k'_a koja prolazi vrhom C i dira stranicu $\overline{AB}$ u vrhu B, k'_b koja prolazi točkom A i dira stranicu $\overline{BC}$ u točki C, k_c koja prolazi točkom B i dira stranicu $\overline{AC}$ u točki A. Kružnice k'_a, k'_b i k'_c sijeku se u jednoj točki Ω' (slika 13.).*

Dokaz ove tvrdnje provodi se slično dokazu prethodne tvrdnje.
Dokažimo sada tvrdnju o točkama s traženim svojstvima, koja smo već spomenuli.

Teorem 3.3. *[2] Neka su Ω i Ω' točke iz teorema 3.1 i 3.2. Tada vrijede tvrdnje:*

i) $\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$ i točka Ω je jedina točka s tim svojstvom.

ii) $\sphericalangle \Omega' AC = \sphericalangle \Omega' CB = \sphericalangle \Omega' BA$ i točka Ω' je jedina točka s tim svojstvom (slika 13.).

Dokaz. i) Kut $\sphericalangle \Omega AB$ jednak je polovini središnjega kuta kružnice k_c nad tetivom $\overline{\Omega B}$. Kako je BC tangenta kružnice k_c taj središnji kut jednak je $2\sphericalangle \Omega BC$ odakle slijedi $\sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega AB$. Analogno se dokaže $\sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$.

Neka je Ω_1 točka za koju vrijedi $\sphericalangle \Omega_1 AB = \sphericalangle \Omega_1 BC$, tada će kružnica na kojoj leže točke Ω_1, A i B dirati BC u točki B. Tada se Ω_1 nalazi na kružnici k_c. Analogno, iz uvjeta $\sphericalangle \Omega_1 BC = \sphericalangle \Omega_1 CA$ slijedi da se točka Ω_1 nalazi na k_a. Dakle, vrijedi $\Omega_1 = \Omega$.

Dokaz pod ii) se provodi slično. □

Definicija 3.4. [2] Za dani trokut ABC točku Ω za koju vrijedi $\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$ zovemo *prvom* ili *pozitivnom Brocardovom točkom* trokuta ABC, a točku Ω' za koju vrijedi $\sphericalangle \Omega' AC = \sphericalangle \Omega' CB = \sphericalangle \Omega' BA$ zovemo *drugom* ili *negativnom Brocardovom točkom* trokuta ABC.

Kako bismo razmatrali neka svojstva Brocardovih točaka navedimo najprije definiciju izogonalnih pravaca i izogonalno konjugiranih točaka.

Definicija 3.5. [2] Par pravaca koji prolaze vrhom kuta i sa simetralom tog kuta čine sukladne kutove naziva se izogonalama tog kuta.

Također se može dokazati da ako se tri pravca položena vrhovima danog trokuta ABC sijeku u jednoj točki T_1, tada se i njihove izogonale također sijeku u nekoj točki, označimo je s T_2. Točke T_1 i T_2 zovemo *izogonalno konjugiranim točkama* trokuta ABC.
Za Brocardove točke vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 3.6. *[2] Brocardove točke Ω i Ω' su izogonalno konjugirane točke.*

Dokaz. Neka je Ω_1 izogonalno konjugirana točka Brocardovoj točki Ω. Tada prema razmatranjima od ranije, vrijedi

$$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega_1 AC, \quad \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega_1 BA, \quad \sphericalangle \Omega CA = \sphericalangle \Omega_1 CB$$

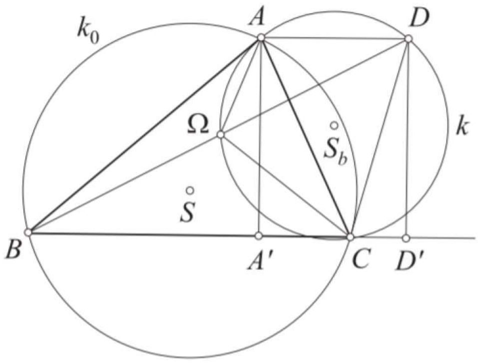
i jer je Ω Brocardova točka vrijedi $\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$, slijedi

$$\sphericalangle \Omega_1 AC = \sphericalangle \Omega_1 BA = \sphericalangle \Omega_1 CB.$$

Vidimo da je $\Omega_1 = \Omega'$ što je i trebalo dokazati. □

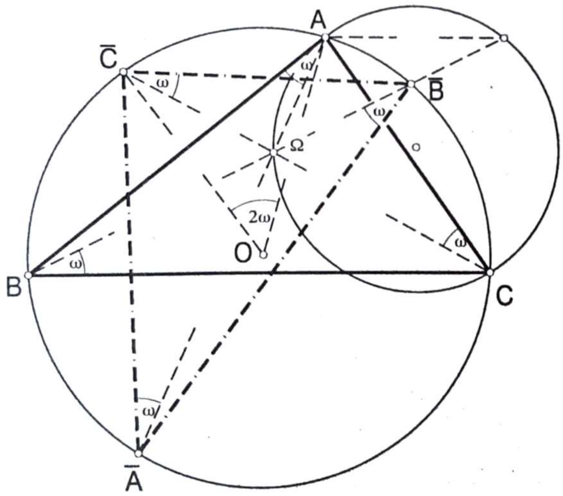
Definicija 3.7. [2] $\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega' AC$ zove se Brocardov kut trokuta ABC i označava s ω.

Pogledajmo još jedan način konstrukcije prve Brocardove točke. Konstruirajmo kružnicu k i kroz točku A paralelu s BC. Označimo s D drugo sjecište te paralele i kružnice k. Tada BD siječe kružnicu k u točki Ω. Uočimo da vrijedi $\sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega DA$. Jer su $\sphericalangle \Omega DA$ i $\sphericalangle \Omega CA$ obodni kutovi nad tetivom ΩA kružnice k, slijedi $\sphericalangle \Omega DA = \sphericalangle \Omega CA$. Jer je AB tangenta kružnice k kut $\sphericalangle \Omega AB$ je jedank obodnom kutu nad tetivom ΩA, to jest vrijedi $\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega CA$. Dakle, spomenuti kutovi su Brocardovi kutovi.



Slika 14. [2]

Uvedimo oznake koje su nam potrebne za sljedeći teorem. Prvo, neka je dan trokut ABC s opisanom kružnicom k_0 i pozitivnom Brocardovom točkom Ω. Spojimo li vrhove danog trokuta ABC s točkom Ω, tada te spojnice sijeku kružnicu k_0 redom u točkama $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Sljedeći teorem povezuje trokute ABC i $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, te pozitivnu i negativnu Brocardovu točku.



Slika 15. Ilustracija teorema 3.8 ([4])

Teorem 3.8. *[3] Trokuti ABC i $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ su sukladni, a pozitivna Brocardova točka Ω trokuta ABC ujedno je negativna Brocardova točka trokuta $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.*

Dokaz. Neka je Ω pozitivna Brocardova točka trokuta ABC, te vrijedi

$$\sphericalangle \Omega CA = \sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \omega.$$

Uočimo da su $\sphericalangle \Omega AB$ i $\sphericalangle \bar{A}\bar{B}B$ obodni kutevi nad tetivom $\overline{\bar{A}B}$, pa slijedi

$$\sphericalangle \bar{A}\bar{B}B = \sphericalangle \Omega AB = \omega.$$

Analogno pokažemo

$$\sphericalangle \bar{B}\bar{C}C = \sphericalangle \bar{C}\bar{A}A = \omega.$$

Slijedi da je Ω negativna Brocardova točka trokuta $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Preostaje pokazati da su trokuti ABC i $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ sukladni.

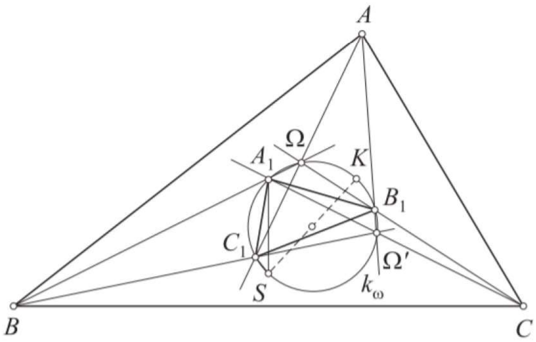
Uočimo da vrijedi $\sphericalangle \bar{C}CB = \sphericalangle \bar{C}\bar{B}B$, jer su oni obodni kutovi nad istom tetivom $B\bar{C}$, što povlači sukladnost kutova γ i $\bar{\beta}$. Analogno dobijemo sukladnost kutova α i $\bar{\gamma}$ te β i $\bar{\alpha}$.

Neka je O središte opisane kružnice trokutu ABC. $\sphericalangle \bar{C}OA$ je središnji kut nad tetivom $\overline{\bar{C}A}$, te je on jednak $2\sphericalangle \bar{C}\bar{A}A$. Možemo pisati $\sphericalangle \bar{C}OA = 2\omega$. Slijedi da trokut $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ možemo dobiti rotacijom trokuta ABC oko središta O za kut 2ω, pa su zbog toga trokuti ABC i $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ sukladni. □

3.1 Brocardova kružnica

Navest ćemo još jedan pojam vezan uz Brocardove točke trokuta. Povucimo pravce $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$; $A\Omega'$, $B\Omega'$, $C\Omega'$ koji spajaju obje Brocardove točke s vrhovima danog trokuta ABC. Pravci $A\Omega$ i $B\Omega'$ sijeku se u točki koju označimo s C_1, pravci $B\Omega$ i $C\Omega'$ sijeku se u točki koju označimo s A_1 i pravci $C\Omega$ i $A\Omega'$ sijeku se u točki koju označimo s B_1 (slika 16.). Uočimo da dobivene točke određuju trokut $A_1B_1C_1$.

Pogledajmo sljedeće dvije definicije.



Slika 16. Brocardova kružnica trokuta ABC ([2])

Definicija 3.9. [2] Neka su A_1, B_1 i C_1 vrhovi jednakokračnih trokuta konstruiranih nad stranicama danog trokuta ABC kao osnovicama, u unutrašnjosti danog trokuta, a s kutom uz bazu jednakom Brocardovom kutu. Trokut $A_1B_1C_1$ zovemo prvim Brocardovim trokutom trokuta ABC.

Definicija 3.10. [2] Kružnicu k_ω opisanu prvom Brocardovom trokutu trokuta ABC zovemo Brocardovom kružnicom trokuta ABC (slika 16.).

Sljedeći teorem povezuje Brocardove točke i Brocardovu kružnicu.

Teorem 3.11. *[2] Brocardove točke trokuta leže na njegovoj Brocardovoj kružnici.*

Dokaz. Promotrimo trokut $AB\Omega$. Vrijedi $\sphericalangle A\Omega B = 180° - \beta$, te za vanjski kut trokuta $AB\Omega$ slijedi

$$\sphericalangle A_1\Omega C_1 = \beta. \tag{3.1}$$

Na isti način, promatramo li trokut $BC\Omega'$ dobivamo

$$\sphericalangle A_1\Omega' C_1 = \beta. \tag{3.2}$$

Također vrijedi

$$\sphericalangle A_1SC_1 = \beta \tag{3.3}$$

jer su krakovi tog kuta okomiti na BC i AB. Uočimo da kutove (3.1), (3.2) i (3.3) možemo promatrati kao obodne kutove nad tetivom $\overline{A_1C_1}$ iste kružnice. Dakle, točke A_1, C_1, Ω, Ω' i S leže na jednoj kružnici. Označimo ju s k_ω (pogledati sliku 16.).

Slično dobijemo $\sphericalangle B_1\Omega C_1 = \alpha$, $\sphericalangle B_1\Omega' C_1 = 180° - \alpha$ i $\sphericalangle B_1SC_1 = 180° - \alpha$ odakle slijedi da točke B_1, C_1, Ω, Ω' i S leže na jednoj kružnici. Označimo je s $k_{\omega'}$. Znamo da se točke C_1, Ω, Ω' i S nalaze na kružnici k_ω, pa se one podudaraju. $\square$

4 Tarryjeva točka

Prije nego što pogledamo teorem koji nam opisuje konstrukciju Tarryjeve točke, navedimo teorem koji će nam trebati za dokaz.

Teorem 4.1. *[2] Dani trokut ABC i prvi Brocardov trokut $A_1B_1C_1$ su slični.*

Teorem 4.2. *[3] Povučemo li iz vrhova A, B i C danog trokuta ABC okomice na odgovarajuće stranice $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$ prvog Brocardova trokuta $A_1B_1C_1$ tada se te tri okomice sijeku u jednoj točki R koja leži na trokutu ABC opisanoj kružici k_0 (slika 17.).*

Dokaz. Neka se okomica iz točke A na stranicu $\overline{B_1C_1}$ i okomica iz točke B na stranicu $\overline{A_1C_1}$ sijeku u točki R (slika 17.). Kako je $AR \perp B_1C_1$ i $BR \perp A_1C_1$, vrijedi $\sphericalangle ARB = \sphericalangle A_1C_1B_1$.

Prema teoremu 4.1 znamo da je $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle ACB = \gamma$, pa su $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ARB$ obodni kutovi nad tetivom AB opisane kružnice trokutu ABC.

Analogno zaključimo spuštanjem okomica iz točaka B i C. Njihovo sjecište označimo s $\bar{R}$, te se ono mora nalaziti na kružnici k_0 i na okomici iz B. Slijedi $R = \bar{R}$. $\square$

Točka sjecišta okomica povučenih iz vrhova trokuta ABC na odgovarajuće stranice prvog Brocardovog trokuta zove se *Tarryjeva točka* trokuta ABC.

Prije nego što pogledamo i dokažemo neka svojstva Tarryjeve točke, navedimo teorem koji će nam trebati za dokaz kolinearnosti težišta, središta Brocardove kružnice i Tarryjeve točke.

Teorem 4.3. *[3] Dani trokut ABC i prvi Brocardov trokut $A_1B_1C_1$ imaju zajedničko težište T.*

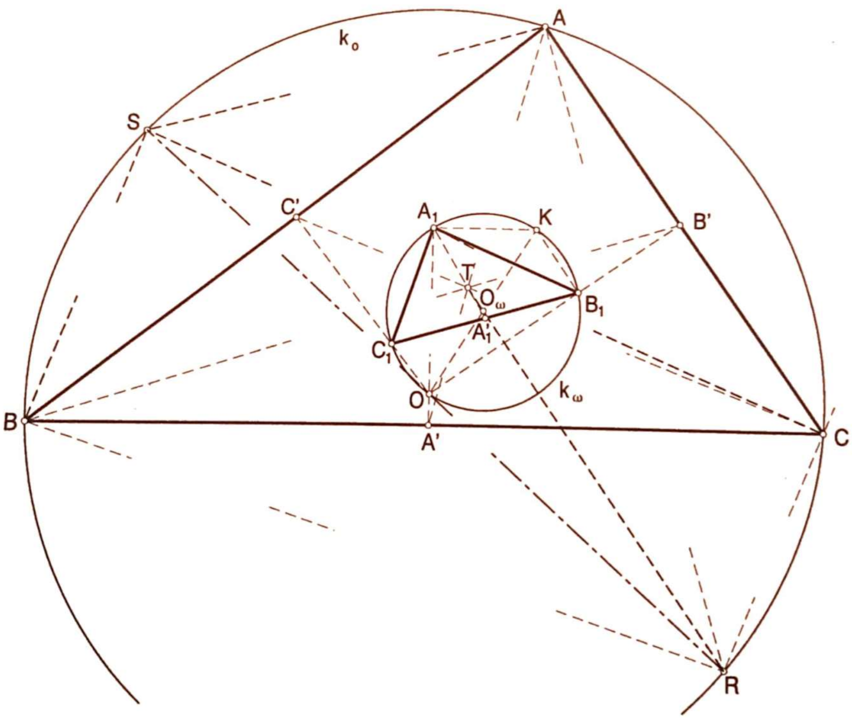
Teorem 4.4. *[3] Za dani trokut ABC su težište T, središte O_ω Brocardove kružnice i Tarryjeva točka R kolinearne su točke.*

Dokaz. Kako po teoremu 4.1 znamo da su prvi Brocardov trokut $A_1B_1C_1$ i trokut ABC slični oni definiraju jednu sličnost ravnine.

Pogledajmo sliku 17. i dokažimo da se Tarryjeva točka R preslikava s tom sličnošću u središte O opisane kružnice k_0 danog trokuta ABC. Uočavamo da se A preslika u A_1, B u B_1 i C u C_1, a onda i k_0 u k_ω. Znamo da se pri toj sličnosti $\overline{AA'}$ preslikava na $\overline{A_1A_1'}$. Tada se točka T prelikava u samu sebe, jer znamo da je točka T težište i danog trokuta ABC i prvog Brocardovog trokuta $A_1B_1C_1$ (teorem 4.3).

Znamo da zbog sličnosti vrijedi $\sphericalangle RAB = \sphericalangle OA_1B_1$. Kako se R nalazi na kružnici k_0, a ona se preslikava na k_ω, slika točke R je O.

Trokuti $OA'T$ i $O_\omega A_1'T$ su slični jer znamo da se O preslikava u O_ω. Iz toga slijedi $\sphericalangle OTA' = \sphericalangle O_\omega TA_1'$. No, s druge strane je $\sphericalangle RTA' = \sphericalangle OTA_1'$, pa je i $\sphericalangle OTA' = \sphericalangle O_\omega TA_1'$, odakle slijedi kolinearnost točaka T, O_ω i R. $\square$



Slika 17. [3]

Teorem 4.5. *[3] Povučemo li vrhovima A, B, C danog trokuta paralele redom sa stranicama prvog Brocardova trokuta, tada se te tri paralele sijeku u točki S koja leži na opisanoj kružnici k_0 danog trokuta dijametralno suprotno Tarryjevoj točki R.*

Dokaz. Pogledajmo paralelu AS sa stranicom $\overline{B_1C_1}$ prvog Brocardova trokuta. Ona je okomita na spojnicu $\overline{AR}$. Slijedi da paralela AS mora sjeći opisanu kružnicu k_0 trokuta ABC u točki S dijametralno suprotno točki R. Analogno točkom S prolaze i ostale dvije paralele. □

Točku S zovemo *Steinerovom točkom.*

Literatura

[1] H. Halas, M. Bombardelli, *Izotomične točke trokuta*, Matematičko fizički list, 239 (2010), 3, 158-165.

[2] Z. Kolar-Begović, G. Knez, *Brocardove figure trokuta*, Matematičko fizički list, 68 (269), 2017, 17-23.

[3] D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 1994.

[4] D. Veljan, *Cevin teorem i "osobite" točke trokuta*, Matematičko-fizički list, broj 174, 1993, str. 65-71.