Normalna zakrivljenost plohe

Baričević, Ema

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ema Baričević

Normalna zakrivljenost plohe

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ema Baričević

Normalna zakrivljenost plohe

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2021.

Sadržaj

Normalna zakrivljenost plohe

Sažetak

U ovom završnom radu upoznat ćemo se s normalnom zakrivljenošću plohe. Najprije ćemo definirati neke osnovne pojmove lokalne teorije krivulja, kao što su parametrizirana krivulja, Frenetov trobrid i Frenetove formule krivulje. Navest ćemo definiciju plohe, odnosno regularne plohe te ćemo definirati prvu, odnosno drugu fundamentalnu formu plohe, kao i operator oblika plohe. Normalna zakrivljenost u točki plohe u smjeru tangencijalnog vektora v_p se računa kao kvocijent skalarnog produkta vektora v_p i vektora dobivenog djelovanjem operatora oblika plohe na vektor v_p i kvadrata norme vektora v_p. Geometrijski, takva zakrivljenost predstavlja zakrivljenost krivulje dobivene kao presjek plohe i ravnine koju razapinju vektor v_p i vektor plošne normale. Rad ćemo završiti iskazom i dokazom dva važna teorema vezana uz normalnu zakrivljenost plohe.

Ključne riječi: parametrizirana krivulja, regularna ploha, operator oblika ploha, normalna zakrivljenost plohe.

Normal curvature of a surface

Abstract

In this final paper we will analyze the normal curvature of a surface. First we will define the basic concepts of local theory of curves, i.e. a parametrized curve, Frenet frame field and Frenet formulas for parametrized curve. After that we will define what is surface, regular surface and we will say something more about the first and the second fundamental form, as well as about the shape operator of a surface. The normal curvature of a surface in a point on a surface in a direction of tangent vector v_p is calculated as the quotient of inner product of vectors v_p and vector obtained by the shape operator applied on a vector v_p, and squared norm of vector v_p. Geometrically, such curvature represents the curvature of a curve obtained as the intersection of a surface and plane determined by a tangent vector v_p and surface normal. We finish this work with two important theorems related to the normal curvature of a surface.

Keywords: parametrized curve, regular surface, shape operator, normal curvature of a surface.

Uvod

Tema ovog završnog rada je normalna zakrivljenosti plohe. Normalna zakrivljenost plohe se određuje u točki plohe u smjeru tangencijalnog vektora. Njezinu brojčanu vrijednost računamo kao kvocijent skalarnog produkta vektora v_p i vektora dobivenog djelovanjem operatora oblika plohe na vektor v_p i kvadrata norme vektora v_p. Geometrijska interpretacija normalne zakrivljenosti krivulje na plohi u točki plohe u smjeru vektora v_p predstavlja zakrivljenost krivulje dobivene kao presjek plohe i ravnine u točki plohe koju razapinju vektor v_p i vektor plošne normale u toj točki. Takva krivulja naziva se normalni presjek plohe. Ukoliko normalna zakrivljenost plohe u smjeru tangencijalnog vektora iščezava onda kažemo da je tangencijalni vektor asimptotskog smjera. Pomoću asimptotskog smjera definiramo specijalne krivulje na plohi koje nazivamo asimptotskim krivuljama. To je dakle, krivulja duž koje normalna zakrivljenost plohe iščezava ili geometrijski, krivulja duž koje su normalni presjeci plohe pravci.
Završni rad sastoji se od tri poglavlja. U prvom poglavlju definiramo parametrizirane krivulje te njihovu duljinu, te potom i Frenet-Serretove[1] formule. U drugom poglavlju upoznajemo se s plohama te definicijama i teoremima iz područja lokalne teorije ploha potrebnima za ostatak rada. U trećem poglavlju definiramo pojam normalne zakrivljenosti ploha i njezinu geometrijsku interpretaciju. Nadalje iskazujemo i dokazujemo vezu normalne zakrivljenosti s glavnim zakrivljenostima plohe, tj. Eulerov[2] teorem i teorem kojim su dani uvjeti da krivulje na plohi koje imaju zajedničku točku imaju jednaku zakrivljenost u toj točki, odnosno Meusnierov[3] teorem.

[1] Jean Frédéric Frenet(1816.-1900.), francuski matematičar, astronom, metereolog, te suotkrivač Frenet-Serretove formule. Napisao je šest od devet formula u svom doktorskom radu 1847. godine
Joseph Alfred Serret(1819.-1885.), francuski matematičar otkrio Frenet-Serret-ove formule 1851. godine

[2] Leonhard Euler(1707.-1783.), švicarski matematičar, fizičar, astronom, geograf, logičar i inžinjer. U diferencijalnoj geometriji dao prvu formulu zakrivljenosti ploha tzv. Eulerov poučak

[3] Jean-Baptiste (1754.-1793.), francuski matematičar.

1 Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja

Najprije ćemo dati kratak pregled osnovnih pojmova lokalne teorije krivulja. Svi teoremi i definicije preuzete su iz [2], odnosno [1].

Definicija 1.1. *Glatko preslikavanje* $p : I \to \mathbb{R}^n$, *gdje je* $I = \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ *se naziva parametrizirana krivulja, ili kraće samo krivulja, u* $\mathbb{R}^n$

Parametrizirane krivulje u $\mathbb{R}^3$ pisat ćemo pomoću koordinatnih funkcija, tj. kao

$$p(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

a za njene derivacije

$$\frac{dp}{dt}(t) = \dot{p}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$\frac{d^2p}{dt^2}(t) = \ddot{p}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)), itd.$$

Napomena 1.1. *Sve krivulje promatrane u radu su glatke krivulje (klase* C^∞*).*

Navest ćemo nekoliko primjera parametriziranih krivulja:

Primjer 1.1. *Pravac u prostoru* $\mathbb{R}^n$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

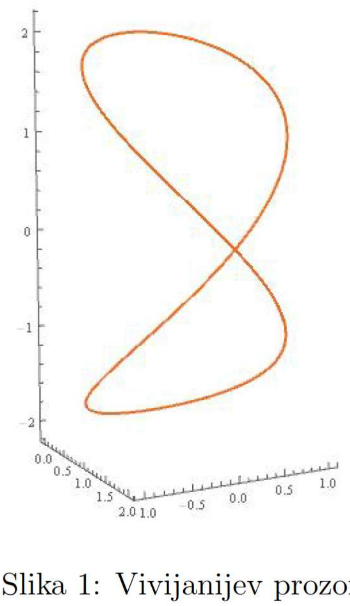
$$p(t) = r + tq, r, q \in \mathbb{R}^n.$$

Primjer 1.2. *Kružnica* $s : [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$ *radijusa* r *sa središtem u točki* $T = (p, q)$,

$$s(t) = (p + r\cos t, q + r\sin t).$$

Primjer 1.3. *Vivijanijev prozor (Vivijanijeva krivulja)* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$p(t) = r(1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}).$$



Slika 1: Vivijanijev prozor

Definicija 1.2. *Ako je $\dot{p}(t) \neq 0, t \in I$ onda za krivulju $p : I \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je regularna u točki $p(t)$. U protivnom, za točku $p(t)$ kažemo da je singularna točka krivulje. Krivulja p je regularna krivulja, ako je regularna u svakoj svojoj točki.*

Definicija 1.3. *Za regularnu krivulju $p : I \to \mathbb{R}^n$ vektor $\dot{p}(t)$ zovemo tangencijalnim vektorom krivulje p u točki $p(t)$. Krivulja p je parametrizirana duljinom luka ako vrijedi*

$$||\dot{p}(t)|| = 1, t \in I.$$

Pravac koji prolazi točkom $p(t)$ i kojemu je $\dot{p}(t)$ vektor smjera nazivamo tangentom krivulje p u točki $p(t)$.

Napomena 1.2. *Za derivaciju krivulje p parametrizirane parametrom duljine luka koristit ćemo oznaku $p'(s)$, a za derivaciju krivulje parametrizirane općim parametrom, oznaku $\dot{p}(t)$.*

Jedna od jednostavnijih ali i najvažnijih geometrijskih veličina vezane za krivulje je njezina duljina. Izraz za računanje duljine parametrizirane krivulje nad intervalom $\langle a, b\rangle$ dan je sljedećom definicijom.

Definicija 1.4. *Neka je $p : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ krivulja. Tada je duljina krivulje p nad intervalom $\langle a, b\rangle$*

$$s = \int_a^b ||\dot{p}(t)|| dt.$$

Definicija 1.5. *Krivulju $\tilde{p} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ zovemo reparametrizacijom krivulje $p : I \to \mathbb{R}^n$ ako postoji glatki difeomorfizam $\zeta : \tilde{I} \to I$ takav da vrijedi $\tilde{p} = p \circ \zeta$ tj.*

$$\tilde{p}(\tilde{t}) = p(\zeta(\tilde{t})) = p(t), \tilde{t} \in \tilde{I}, t \in I.$$

Teorem 1.1. *Svaka se regularna krivulja može parametrizirati parametrom duljinom luka.*

Dokaz. Pogledati [2] (poglavlje 1, str. 8). □

Kako istu krivulju možemo zadati različitim parametrizacijama, duljina krivulje očito ne ovisi o izboru parametrizacije. Za krivulje parametrizirane parametrom duljine luka, vrlo je jednostavno izračunati duljinu. Ako je $p : I \to \mathbb{R}^n$, $I = \langle a, b\rangle$ krivulja parametrizirana duljinom luka, tada je njezina duljina

$$s = \int_a^b dt = b - a.$$

Definicija 1.6. *Za krivulju p u $\mathbb{R}^3$ parametriziranu duljinom luka definiramo funkciju $\kappa : I \to \mathbb{R}$ kao*

$$\kappa(s) = ||p''(s)||.$$

Funkcija κ se naziva zakrivljenost (fleksija) krivulje p u točki $p(s)$.

Propozicija 1.1. *Za regularnu krivulju p u $\mathbb{R}^3$ parametrizirana općim parametrom t, zakrivljenost κ dana je izrazom*

$$\kappa(t) = \frac{||\dot{p}(t) \times \ddot{p}(t)||}{||\dot{p}(t)||^3}.$$

Dokaz. Pogledati [2] (poglavlje 1, str. 16). □

Za krivulju $p : I \to \mathbb{R}^3$ parametriziranu duljinom luka možemo definirati tri specijalna vektorska polja. To su:

- jedinično tangencijalno polje od p: $T(s) = p'(s)$,
- jedinično polje vektora glavnih normala: $N(s) = \frac{p''(s)}{||p''(s)||}$, $p''(s) \neq 0$,
- jedinično polje binormala $B(s) = T(s) \times N(s)$.

Normiranost polja binormala slijedi zbog normiranosti i međusobne ortogonalnosti tangencijalnog polja i polja glavnih normala. Desnu ortonormiranu bazu $(T(s), N(s), B(s))$ prostora svih vektora u točki $p(s)$ zovemo **Frenetovim(Frenet-Serretovim) trobridom** krivulje p.

Krivulje za koje u svakoj točki možemo konstruirati prateći Frenetov trobrid $(T(t), N(t), B(t))$ nazivamo **dopustivim**. Točnije, krivulje parametrizirane duljinom luka su dopustive ako i samo ako je $p''(s) \neq 0$, tj. $\kappa(s) \neq 0, s \in I$. Analogno vrijedi i za krivulje parametrizirane općim parametrom. Također dopustiva krivulja je regularna (ali obrat ne vrijedi).

Definicija 1.7. *Za krivulju $p : I \to \mathbb{R}^3$ parametriziranu parametrom duljine luka funkciju $\tau : I \to \mathbb{R}$ zadanu s*

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

nazivamo torzijom krivulje p u točki $p(s)$.

Teorem 1.2 (Frenetove formule)**.** *Neka je p dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka s. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N. \end{aligned}$$

Dokaz. Pogledati [2] (poglavlje 1, str. 17). □

2 Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha

U ovom poglavlju navodimo pojmove iz lokalne teorije ploha koji su potrebni za razumijevanje rada. Potrebna teorija je preuzeta iz [2].

2.1 Ploha

Definicija 2.1. *Podskup $M \subset \mathbb{R}^3$ je ploha ako za svaku točku $r \in S$ postoji otvorena okolina $V \subset \mathbb{R}^3$ i glatko homeomorfno preslikavanje $\mathbf{k} : U \to V \cap S$, gdje je $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup. Ploha je regularna ako je diferencijal preslikavanja $\mathbf{k}$ injektivan (kažemo i da je $\mathbf{k}$ je regularno).*

Funkcija $\mathbf{k} : U \to V \cap S$ definirana s

$$\mathbf{k}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

se naziva **parametrizacija** ili **karta plohe M**. Parcijalne derivacije karte $\mathbf{k}$ po parametru u, odnosno v, označavamo s $\mathbf{k}_u$, odnosno $\mathbf{k}_v$. Osim toga, diferencijal preslikavanja k biti će injektivan onda i samo onda ako je njegova jezgra trivijalna. Jezgra će biti trivijalna ako su $\mathbf{k}_u$ i $\mathbf{k}_v$ nezavisni, odnosno ako vrijedi $\mathbf{k}_u \times \mathbf{k}_v \neq 0$.

Definicija 2.2. *Neka je M regularna ploha i $r \in M$. Tangencijalni vektor plohe u točki r je vektor $v_r \in T_r\mathbb{R}^3$ ako postoji krivulja $p : I \to M$, takva da je*

$$p(0) = r, \quad p'(0) = v_r.$$

Kroz rad ćemo za skup svih tangencijalnih vektora u točki r rabiti oznaku T_rM, a zovemo ga tangencijalna ravnina plohe M u točki r.

2.2 Prva fundamentalna forma plohe

Pomoću prve fundamentalne forme mjerimo duljinu luka krivulja na plohi, također određujemo kut između dviju krivulja na plohi i računamo površinu (omeđenog) dijela plohe.

Definicija 2.3. *Prva fundamentalna forma plohe M u točki $r \in M$ je simetričan, bilinearan funkcional $I : T_rM \times T_rM \to \mathbb{R}$ definiran s*

$$I(v_r, w_r) = v_r \cdot w_r$$

U nastavku ćemo izvesti prikaz prve fundamentalne forme plohe pomoću karte plohe $\mathbf{k} : U \to \mathbb{R}^3$. Kako je $v_r \in T_rM$, to postoji krivulja p takva da je $p(0) = r, p'(0) = v_R$. Neka je $r = \mathbf{k}(u_0, v_0)$ i $p(t) = \mathbf{k}(u(t), v(t))$. Tada vrijedi

$$v_r = p'(0) = \mathbf{k}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{k}_v(u_0, v_0)v'(0).$$

Iz toga slijedi,

$$I(v_r) = v_r \cdot v_r = \mathbf{k}_u^2(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2\mathbf{k}_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{k}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \mathbf{k}_v^2(u_0, v_0)(v'(0))^2.$$

Uočimo da se u prikazu fundamentalne forme preko karte javljaju skalarni produkti parcijalnih derivacija karte, što predstavlja motivaciju za sljedeću definiciju.

Definicija 2.4. *Neka je $\boldsymbol{k} : U \to \mathbb{R}^3$ karta plohe. Definiramo funkcije $E,\ F,\ G : U \to \mathbb{R}$ s*

$$
\begin{aligned}
E &= \boldsymbol{k}_u^2(u_0, v_0),\\
F &= \boldsymbol{k}_u(u_0, v_0) \cdot \boldsymbol{k}_v(u_0, v_0),\\
G &= \boldsymbol{k}_v^2(u_0, v_0).
\end{aligned}
$$

Tada je $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ prva fundamentalna forma u karti $\boldsymbol{k}$. Funkcije $E,\ F,\ G$ se nazivaju ***fundamentalne veličine prvog reda (koeficijenti prve fundamentalne forme*** *u karti $\boldsymbol{k}$.*

2.3 Druga fundamentalna forma plohe

Za regularnu plohu M neka je $\mathbf{k} : U \to \mathbb{R}^3$ karta za koju vrijedi $\mathbf{k}(U) \subseteq M$. Tangencijalnu ravninu T_rM plohe M u točki r a razapinju vektori $\mathbf{k}_u$ i $\mathbf{k}_v$. Stoga je jedinični vektor normale te ravnine zadan kao

$$
n = \frac{\mathbf{k}_u \times \mathbf{k}_v}{||\mathbf{k}_u \times \mathbf{k}_v||}.
$$

Vektor n se zove **standardni jedinični vektor normale** karte $\mathbf{k}$.

Definicija 2.5. *Preslikavanje $M_r : T_rM \to T_r\mathbb{R}^3$ oblika*

$$
M_r(v_r) = -D_{v_r} n(r)
$$

nazivamo ***operator oblika plohe*** *M* ***u točki*** *r.*

Nakon što smo definirali operator oblika u točki plohe, možemo definirati i drugu fundamentalnu formu plohe.

Definicija 2.6. *Druga fundamentalna forma plohe M u točki $r \in M$ je simetričan, bilinearan funkcional $II : T_rM \times T_rM \to \mathbb{R}$ definiran s*

$$
II(v_r, w_p) = M_r(v_r) \cdot w_r.
$$

Analogno kao kod prve fundamentalne forme dobivamo

$$
\begin{aligned}
II(v_r) &= M(v_r) \cdot v_r\\
&= M_r(\mathbf{k}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{k}_u(u_0, v_0)(u'(0))^2 + M_r(\mathbf{k}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{k}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0)\\
&+ \mathbf{k}_u(u_0, v_0) \cdot M_r(\mathbf{k}_v(u_0, v_0))u'(0)v'(0) + M_r(\mathbf{k}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{k}_v(u_0, v_0)(v'(0))^2.
\end{aligned}
$$

te definiramo sljedeće specijalne funkcije.

Definicija 2.7. *Funkcije $L,\ M,\ N : U \to \mathbb{R}$ definirane s*

$$
\begin{aligned}
L &= M_r(\boldsymbol{k}_u(u_0, v_0)) \cdot \boldsymbol{k}_u(u_0, v_0),\\
M &= M_r(\boldsymbol{k}_u(u_0, v_0)) \cdot \boldsymbol{k}_v(u_0, v_0) = \boldsymbol{k}_u(u_0, v_0) \cdot M_r(\boldsymbol{k}_v(u_0, v_0)),\\
N &= M_r(\boldsymbol{k}_v(u_0, v_0)) \cdot \boldsymbol{k}_v(u_0, v_0),
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\mathrm{k} : U \to \mathbb{R}^3$ karta plohe, zovemo ***fundamentalnim veličinama drugog reda (koeficijenti druge fundamentalne forme)*** *plohe M u karti $\boldsymbol{k}$.*

3 Normalna zakrivljenost ploha

Operator oblika plohe mjeri nagib krivulje na plohi u različitim smjerovima, te je korisno uvesti i funkcije koja će mjeriti odstupanje plohe od njezine tangencijalne ravnine. U tu svrhu definiramo **normalna zakrivljenost** plohe, a prirodno je definiramo pomoću operatora oblika. Definicije i teoremi, odnosno propozicije su preuzeti iz [2], odnosno [3].

Definicija 3.1. *Funkciju $k_n(v_r) : T_rM \to \mathbb{R}$ zadanu s*

$$k_n(v_r) = \frac{M_r(v_r) \cdot v_r}{v_r \cdot v_r}$$

nazivamo normalna zakrivljenost plohe M u točki r u smjeru tangencijalnog vektora v_r.

Ukoliko su tangencijalni vektori v_r i w_r kolinearni, odnosno ako vrijedi $v_r = \lambda w_r$, onda

$$k_n(w_r) = \frac{M_r(w_r) \cdot w_r}{w_r \cdot w_r} = \frac{M_r(\lambda v_r) \cdot \lambda v_r}{\lambda v_r \cdot \lambda v_r} = \frac{\lambda^2 M_r(v_r) \cdot v_r}{\lambda^2 v_r \cdot v_r} = k_n(v_r).$$

Navest ćemo i teorem kojim su dani uvjeti za krivulje koje leže na plohi i prolaze istom točkom da imaju jednaku zakrivljenost u toj točki. Najprije ćemo navesti propoziciju koja će nam biti potrebna za dokaz teorema.

Propozicija 3.1. *Neka je p krivulja na plohi M, tj. glatko preslikavanje $p : I \to M$, $p(I) \subset M$. Tada vrijedi*

$$p'' \cdot n_p = M_r(p') \cdot p', \tag{3.1}$$

gdje je $n_p := n|_{p(I)}$ restrikcija plošne normale na područje krivulje $p(I)$ na plohi.

Dokaz. Vidjeti [2] (poglavlje 3, str. 73). □

Teorem 3.1 (Meusnierov teorem). *Neka je v_r tangencijalni vektor na plohi M u točki r te neka je p krivulja na plohi M takva da je $p(0) = r$ i $p'(0) = v_r$. Tada*

$$k_n(v_r) = \kappa(p(0)) \cos\theta$$

gdje je $\kappa(p(0))$ zakrivljenost krivulje p u točki 0, te θ je kut između vektora glavne normale krivulje p u točki 0 i restrikcije jediničnog normalnog polja na p. Sve krivulje plohe M koje prolaze točkom r plohe i imaju isti tangencijalni vektor i isti vektor glavne normale u toj točki, imaju u toj točki istu zakrivljenost.

Dokaz. Za jedinični vektor $v_r \in T_rM$ postoji krivulja $p : I \to M$ takva da vrijedi $p(0) = r$ i $p'(0) = v_r$. Znamo da je $p''(s) = \kappa(s)N(s)$, N je polje glavnih normala od p. Koristit ćemo jednakost iz 3.1. Slijedi

$$\begin{aligned} k(_n v_r) &= M_r(v_r) \cdot v_r \\ &= M(p'(0)) \cdot p'(0) \\ &= p''(0) \cdot n(r) \\ &= \kappa N(0) \cdot n(r). \end{aligned}$$

Neka vektor glavne normale krivulje $N(0)$ i vektor normale plohe $n(r)$ u točki r zatvaraju isti kut α. Slijedi

$$N(0) \cdot n(r) = \cos\alpha,$$

Uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo

$$k_n(v_r) = \kappa(0)\cos\alpha,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa(0) = \frac{k_n(v_r)}{\cos\alpha}}.$$

□

Krivulju koja je nastala presjekom plohe M ravninom π određenom sa zadanim tangencijalnim vektorom v_r i plošnom normalom $n(r)$, nazivamo **normalnim presjekom** plohe M u točki r u smjeru v_r. Za normalan presjek plohe M vrijedi $\kappa(0) = \pm k_n(v_r)$.

Propozicija 3.2 (**Geometrijska interpretacija normalne zakrivljenosti**). *Normalna zakrivljenost od M u r u smjeru v_r jednaka je, do na predznak, zakrivljenosti normalnog presjeka plohe M u r u smjeru vektora v_r.*

Svojstvene vrijednosti operatora oblika plohe se nazivaju glavnim zakrivljenostima plohe, dok se pridruženi svojstveni vektori nazivaju glavnim vektorima (smjerovima) plohe. Vrijedi sljedeći teorem.

Korolar 3.1. *Glavne zakrivljenosti m_1, m_2 plohe su minimum i maksimum normalne zakrivljenosti i obratno.*

Glavni vektori plohe su linearno nezavisni, te mogu poslužiti kao baza tangencijalne ravnine plohe. Normalnu zakrivljenost plohe u smjeru vektora v_r možemo povezati s glavnim zakrivljenostima plohe u tocki r, te kutom koji vektor v_r zatvara s glavnim vektorima plohe.

Teorem 3.2 (**Eulerov teorem**). *Neka su e_1, e_2 jedinični glavni vektori plohe M u točki r i neka je*

$$v_r = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2$$

jedinični tangencijalni vektor u r. Tada je

$$k_n(v_r) = m_1\cos^2\alpha + m_2\sin^2\alpha,$$

gdje su m_1, m_2 glavne zakrivljenosti plohe M u r.

Dokaz. Neka je v_r proizvoljan tangencijalni vektor plohe M prikazan u bazi $\{e_1, e_2\}$ kao

$$v_r = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2.$$

Direktnim računom za normalnu zakrivljenost u smjeru vektora v_r dobivamo

$$\begin{aligned} k_n(v_r) &= M_r(v_r)\cdot v_r \\ &= M_r(\cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2)\cdot(\cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2) \\ &= \cos^2\alpha(M_r(e_1)\cdot e_1) + \cos\alpha\sin\alpha(M_r(e_1)\cdot e_2 + S_r(e_2)\cdot e_1) + \sin^2\alpha(M_r(e_2)\cdot e_2) \\ &= m_1\cos^2\alpha + m_2\sin^2\alpha. \end{aligned}$$

□

Napomena 3.1. *Normalna zakrivljenost plohe u smjeru glavnih vektora je jednaka upravo glavnim zakrivljenostima plohe, odnosno $k_n(e_1) = m_1, k_n(e_2) = m_2$.*

Neka je $\mathbf{k} : U \to M$ karta regularne plohe M te $v_r \in T_rM$. Tada postoji krivulja $p : I \to M$ na plohi M takva da je $p(0) = r$, $p'(0) = v_r$, gdje je $p(I) \subset \mathbf{k}(U)$ i možemo ju zapisati u karti kao $p(t) = \mathbf{k}(u(t), v(t))$. Pomoću fundamentalnih veličina E, F, G, L, M, N s obzirom na kartu $\mathbf{k}$, možemo izračunati njezinu normalnu zakrivljenost u smjeru vektora v_r.

Propozicija 3.3. *Normalnu zakrivljenost plohe M u točki r u smjeru vektora $p'(0)$ zadana je s*

$$k_n(p'(0)) = \frac{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2.} \tag{3.2}$$

Za kraj rada iskoristi ćemo prethodno definirane pojmove i korištene teoreme na sljedećem primjeru.

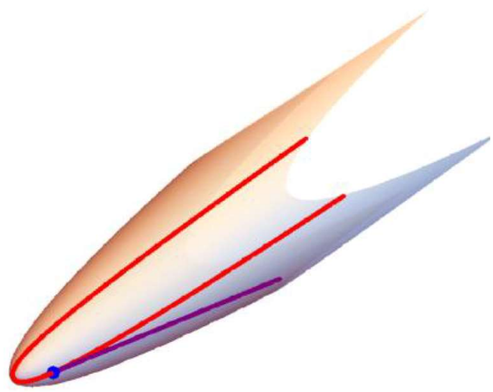
Primjer 3.1. *Izračunajmo normalnu zakrivljenost plohe $\mathbf{k}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ u smjeru tangencijalnog vektora krivulje $p(t) = k(t^2, t)$ u točki koja odgovara parametru $t = 1$.*

Gledamo tangencijalni vektor krivulje zadane u karti, pa za određivanje normalne zakrivljenosti koristimo formulu (3.2).
Odredimo koeficijente prve i druge fundamentalne forme

$$\begin{aligned}
&k_u = (1, 0, 2u), \quad k_v = (0, 1, 2v) \\
&E = 1 + 4u^2, \quad F = 4uv, \quad G = 1 + 4v^2 \\
&W = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \\
&k_{uu} = (0, 0, 2), \quad k_{uv} = (0, 0, 0), \quad k_{vv} = (0, 0, 2) \\
&L = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}
\end{aligned}$$

Kako je $u(t) = t^2$ i $v(t) = t$ za $t = 1$ imamo

$$k_n(p'(1)) = \frac{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} = \frac{\frac{2}{3}4 + \frac{2}{3}}{5 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 5} = \frac{10}{123}.$$



Slika 2: Ploha s istaknutom krivuljom i tangencijalnim vektorom u točki krivulje u čijem smjeru računamo normalnu zakrivljenost

Literatura

[1] A. Gray, E. Abbena, S.Salamon, *Modern differential geometry of curves and surfaces*, Chapman and Hall/CRC, 2017

[2] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, skripta, Matematički odsjek Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu, 2016.

[3] J. Sedlar *Diferencijalna geometrija*, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, 2016.