SIR model širenja epidemije

Sabljo, Josipa

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Josipa Sabljo

SIR model širenja epidemije

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Josipa Sabljo

SIR model širenja epidemije

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Dragan Jukić

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovome radu proučavat ćemo matematički model prijenosa zarazne bolesti u nekoj populaciji poznat pod nazivom SIR model. Najprije ćemo se baviti osnovnim pretpostavkama koje SIR model zahtjeva te na osnovu njih ćemo konstruirati sustav nelinearnih običnih diferencijalnih jednadžbi proučavanog modela. U drugom poglavlju detaljno ćemo analizirati SIR model. Pokazat ćemo da epidemija uvijek izumire, da možemo izračunati maksimalan broj zaraženih tijekom epidemije te dobiti približnu vrijednost maksimalnog broja osjetljivih osoba u populaciji. Na kraju ćemo uvesti i diskretnu verziju SIR modela koja je vrlo korisna zbog načina prikupljanja podataka iz stvarnog svijeta.

Ključne riječi: SIR model, epidemija, diskretan, sustav diferencijalnih jednadžbi

SIR model of epidemic spread

Abstract

In this paper, we will study a mathematical model of infectious disease transmission in a population known as the SIR model. We will first deal with the basic assumptions required by the SIR model and on the basis of which we will construct a system of nonlinear ordinary differential equations of the studied model. In the second chapter, we will analyze the SIR model in detail. We will show that an epidemic is always extinct, that we can calculate the maximum number of infected during an epidemic and obtain an approximate value of the maximum number of susceptible in the population. Finally, we will introduce a discrete version of the SIR model which is very useful due to the way we collect real world data.

Key words: SIR model, epidemic, discrete, system of differential equations

Contents

Uvod

SIR model je klasični matematički model prijenosa bolesti unutar populacije kojeg su razvili Ronald Ross, McKendrick i drugi početkom dvadesetog stoljeća. Takav model pokušava predvidjeti stvari poput širenja bolesti, ukupnog broja zaraženih ili trajanja epidemije te procijeniti razne epidemiološke parametre poput reproduktivnog broja. SIR model izveden je pretpostavljajući nekoliko čvrstih pretpostavki. Postoje stotine radova gdje autori proširuju ovaj osnovni model u mnogim smjerovima ublažujući neke pretpostavke. U ovom se radu usredotočujemo na jedan od najjednostavnijih modela širenja epidemije koji je dobro polazište za daljne proučavanje. Taj tip modela pretpostavlja da širenje bolesti ovisi o veličini populacije te da nitko nije otporan na bolest u početku, ali jednom stečen imunitet ostaje trajan. Model SIR djeluje tako da sve pojedince u populaciji u bilo kojem trenutku smjesti u jednu od tri skupine: osobe osjetljive na bolest, zaražene osobe i "uklonjene" jedinke. Pojedinci se mogu premještati iz jedne klase u drugu. Na primjer, pojedinac se može premjestiti iz zaražene u uklonjenu klasu nakon oporavka. SIR model može se modificirati kako bi uzeo u obzir promjene ukupne populacije tijekom vremena. Ovdje, međutim, gledamo model s konstantnom populacijom. Ova je pretpostavka razumna za epidemije niske smrtnosti koje teku svojim tijekom mnogo brže nego što se ljudska populacija može reproducirati.

1 SIR model

1.1 Osnovne pretpostavke

Pri proučavanju epidemije, zajednica koja je podložna mogućoj epidemiji, dijeli se u četiri podskupine:

1 **Podložni zarazi**(S, *engl. suspectible*) - osobe koje trenutno nisu zaražene, ali mogu postati.

2 **Zaraženi**(I, *engl. infected*) - osobe koje su trenutno zaražene i sposobne prenositi bolest na druge.

3 **Uklonjeni**(R, *engl. removed*) - osobe koje su imale bolest i koje su umrle, ili su se oporavile i stekle trajni imunitet, ili su izolirane dok ne nastupi smrt, oporavak ili trajni imunitet.

4 **Latentno zaraženi**(L, *engl. latently infected*) - osobe koje su trenutno zaražene, ali ne mogu prenositi bolest na druge osobe

Budući da većina epidemija obično kratko traje (nekoliko tjedana ili mjeseci) u usporedbi s normalnim životnim vijekom pojedinca, razumna je pretpostavka da stanovništvo zajednice ostaje konstantno. Dakle, tijekom epidemije nema rađanja, smrti iz drugih uzroka i imigracije ili emigracije te se ova pretpostavka navodi kao sljedeći aksiom:

Aksiom 1.

Postoji pozitivna konstanta N takva da je $S(t)+L(t)+I(t)+R(t) = N$ za sve t gdje je N ukupna veličina populacije, a $S(t)$ broj osjetljivih, $L(t)$ broj latentno zaraženih, $I(t)$ broj zaraženih i $R(t)$ broj "uklonjenih" u vremenenskom trenutku t.

Nadalje, pretpostavimo da je brzina promjene osjetljive populacije proporcionalna stopi kontakata između zaraznih i osjetljivih osoba. Epidemija se brže širi kada je količina ljudske interakcije veća. Za jednostavne modele obično se pretpostavlja da je stopa kontakta proporcionalna populaciji osjetljivih i zaraznih jedinki. U matematičkom smislu, druga osnovna pretpostavka je sljedeća:

Aksiom 2.

Postoji pozitivna konstanta β takva da je $\frac{\partial S}{\partial t} = S'(t) = -\beta I(t)S(t)\ \forall t$.

Konstanta β naziva se stopa zaraze. $\frac{\partial S}{\partial t}$ je uvijek negativan (ili možda nula) jer se broj osoba podložnih zarazi vremenom smanjuje. Ovaj model pretpostavlja da bolest koja se istražuje ima zanemarivo i kratko latentno razdoblje, to jest pojedinac može prenijeti bolest čim je zaražen što je navedeno u sljedećem aksiomu:

Aksiom 3.

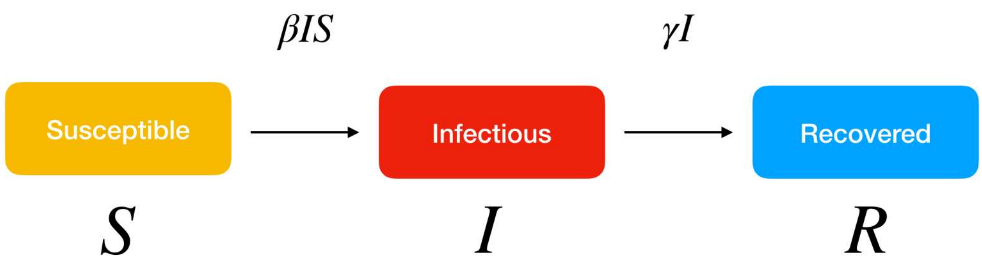
$L(t) = 0 \ \forall t.$

Skupina infektivnih jedinki povećava se zarazom ranije osjetljivih osoba, a smanjuje uklanjanjem nekih jedinki koje ili umiru od bolesti, oporavljaju se od nje i stječu trajni imunitet ili su izolirane od preostale populacije tijekom njihove bolesti. Ovaj općenitiji model pretpostavlja da je stopa prijelaza iz I u R klasu poporcionalna broju zaraznih jedinki. U matematičkom smislu, novi je aksiom sljedeći:

Aksiom 4.

Postoji pozitivna konstanta γ takva da je $R'(t) = \gamma I(t)$ za sve t.

Konstanta γ naziva se stopa oporavka, a omjer $p = \gamma/\beta$ je relativna stopa oporavka.



Slika 1: Klase unutar SIR modela i stope prijelaza pojedinace iz klase u klasu

1.2 Sustav diferencijalnih jednadžbi

Za SIR model koji zadovoljava prethodne aksiome vrijedi

$$I = N - S - R \tag{1}$$

iz čega slijedi

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0 - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial t} = \beta IS - \gamma I \tag{2}$$

gdje je N, broj osoba u zajednici, konstanta.

Pod pretpostavkom da epidemija započinje u zajednici od N osoba s pozitivnim brojem inficiranih jedinki I_0 i osjetljivih jedinki $S_0 = N - I_0$, matematički SIR model je sljedeći sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta IS \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta IS - \gamma I \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I \tag{3.3}$$

sa početnim uvjetima

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = R_0 = 0 \tag{4}$$

i relacijom

$$S(t) + L(t) + I(t) + R(t) = N \quad \forall t \geq 0. \tag{5}$$

2 Analiza SIR modela

2.1 Limesi od R, S i I

Budući da je γ pozitivan i I nenegativan, $\frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I$ je uvijek nenegativno pa je R(t) monotona rastuća funkcija.

Budući da je $\beta > 0$ te S i I nenegativni, imamo $\frac{\partial S}{\partial t} \leq 0$ za sve t. Stoga je S(t) monotono padajuća funkcija, odnosno populacija osjetljivih može se samo smanjivati kako vrijeme prolazi.

Brzina promjene zaraženih osoba opisana je jednadžbom $\frac{\partial I}{\partial t} = I(\beta S - \gamma)$. Predznak ove brzine ovisi o predznaku $\beta S - \gamma$. Broj inficiranih osoba može se povećati samo kada je $\frac{\partial I}{\partial t}$ pozitivan, odnosno u trenucima kada je

$$S > \gamma/\beta = p. \tag{6}$$

Konkretnije, ako je početna razina populacije osjetljivih S_0 ispod relativne stope oporavka p, tada nema epidemije. Tada je broj zaraženih uvijek manji od početnog broja I_0 i opada kako vrijeme prolazi. Bolest izumire jer se zaražene osobe uklanjaju (oporavkom ili smrću) brže nego što nastaju izvori daljnje infekcije. Dakle, postoji kritična vrijednost koju početna osjetljiva populacija mora premašiti da bi postojala epidemija. Primjerice, ako je dovoljno visok postotak stanovništva uspješno cijepljen protiv bolesti, epidemije neće biti (vidi [3]). Držeći osjetljivu populaciju fiksnom, infekcija se može širiti samo ako je relativna stopa uklanjanja dovoljno mala.

Broj uklonjenih, osjetljivih i infektivnih osoba mora uvijek biti između 0 i N, gdje je N broj osoba u populaciji koja se promatra. Funkcija R(t) je ograničena odozgo s N i monotono raste. Dakle, $\lim_{t\to\infty} R(t)$ postoji. Označimo ovaj broj s R_∞.

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = R_\infty \leq N \tag{7}$$

Slično tome, S(t) je nerastuća funkcija koja mora ostati veća ili jednaka 0, odnosno postoji nenegativni broj S_∞ takav da je

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S_\infty \geq 0 \tag{8}$$

Razmotrimo graničnu vrijednost broja infektivnih osoba. Iz jednadžbe (1) imamo

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}(N - S(t) - R(t) = N - \lim_{t\to\infty} S(t) - \lim_{t\to\infty} R(t) = N - S_\infty - R_\infty = I_\infty \tag{9}$$

2.2 Bolest uvijek izumire

Koristeći jednadžbe (3.1) i (3.3) dobiva se sljedeća jednadžba

$$\frac{\partial S}{\partial R} = \frac{-\beta IS}{\gamma I} = \frac{-\beta}{\gamma} S = \frac{-1}{p} S \tag{10}$$

koja prikazuje odnos između broja osjetljivih i broja uklonjenih tijekom epidemije koji postoji kad god u populaciji još uvijek ima infektivnih osoba. Diferencijalna jednadžba (10) lako se riješava i dobiva se

$$S = S_0 e^{(-1/p)R} \tag{11}$$

Budući da je $R(t) \leq R_\infty \leq N$ za svaki t, imamo $e^{(-1/p)R} \geq e^{(-1/p)R}$ iz čega slijedi

$$S(t) \geq S_0 e^{(-1/p)N}, \quad \forall t \tag{12}$$

Nadalje, desna je strana jednadžbe (12) strogo pozitivan broj pa imamo

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S_\infty > 0 \tag{13}$$

Iz čega proizlazi zaključak da će u zajednici uvijek biti ljudi (njih S_∞) koji će izbjeći bolest. Epidemija će izumrijeti, ali ne zato što više nema osjetljivih pojedinaca nego zbog manjka novozaraženih.

2.3 Maksimalan broj zaraženih

Iako ne možemo eksplicitno riješiti SIR sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, možemo dobiti rješenje za I_{max} (vidi [1]). Dijeljenjem jednadžbe (3.2) sa (3.1) dobiva se sljedeća jednadžba

$$\frac{\partial I}{\partial S} = \frac{I(\beta S - \gamma)}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S} = -1 + \frac{p}{S} \tag{14}$$

gdje je $I \neq 0$.
Separacijom varijabli u diferencijalnoj jednadžbi (14) i integriranjem dobivamo

$$\int 1\, dI = \int -1 + \frac{p}{S}\, dS. \tag{15}$$

Daljnjim rješavanjem integrala pronalazimo sljedeće rješenje jednadžbe

$$I = -S + p\log S + C \tag{16}$$

gdje je C konstanta. Iz činjenice da u trenutku t = 0 postoje I_0 zaraženih i S_0 osjetljivih osoba slijedi

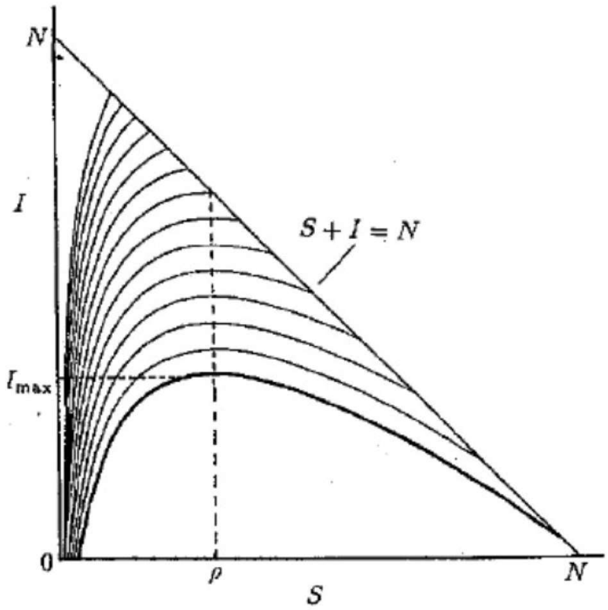
$$C = I_0 + S_0 - p \log S_0 = N - p \log S_0. \tag{17}$$

Sada možemo jednadžbu (16) zapisati kao

$$I = N - S + p \log \frac{S}{S_0} \tag{18}$$

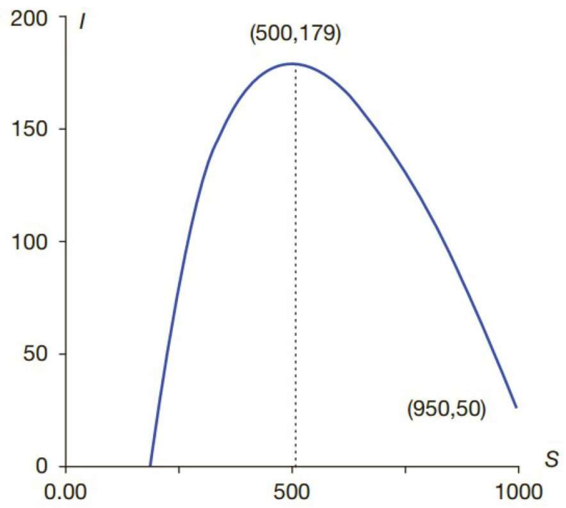
I_{max} se postiže kada je $dI/dt = 0$, odnosno kada je $S = \gamma/\beta = p$. Zamjenom varijable S dobivamo

$$I_{max} = N - p + p \log \frac{p}{S_0} \tag{19}$$



Slika 2: Krivulje rješenja

Rješenje sustava kojeg definiraju jednadžbe (3.1) i (3.2) dano je s $I = g(S) = N - S + p \log \frac{S}{S_0}$. Nas zanima samo prvi kvadrant (S,I)-ravnine. Na slici 2. su prikazane krivulje rješenja sa različitim vrijednostima S_0 i I_0. Budući da je g$(S_0) = I_0 > 0$ i $\lim_{S \to 0^+} g(S) = -\infty$, krivulja siječe pravac $I = 0$ za neku pozitivnu vrijednosti S manju od S_0. Kako jedine kritične točke sustava leže na pravcu $I = 0$, krivulja rješenja se mora približavati $(S_\infty, 0)$ kako t raste. Zaključujemo, $I_\infty = 0$.



Slika 3: Graf od $I = N - S + p \log \frac{S}{S_0}$ sa $N = 1000$, $p = 500$ te $S_0 = 950$. Ovdje je S_∞ oko 186, a I_{max} je oko 179.

Budući da je S nerastuća funkcija, putanja krivulje se prati s desna na lijevo kako se t povećava. Druga derivacija od $g(S)$,

$$g''(S) = -\frac{p}{S^2} \tag{20}$$

je uvijek negativna. Dakle, graf od $I = g(S)$ je konkavan i postiže svoj maksimum kada je $dI/dS = 0$, a to se događa kada je $S = p$. Odnos između I i S prikazan je na slici 3. Početno stanje populacije predstavlja točka (S_0, I_0) na ovoj krivulji. Ako ta točka padne lijevo od isprekidane crte $S = p$, tada se epidemija neće dogoditi jer se tada $I(t)$ monotono smanjuje prema nuli. S druge strane, ako je $S_0 > p$, tada broj infektivnih osoba raste sve dok S ne bude manji od p, a nakon toga opada ka nuli.

2.4 Maksimalan broj osjetljivih i ukupan broj zaraženih

Iz jednadžbe (9) proizlazi $S_\infty = N - I_\infty - R_\infty$, a maloprije je pokazano da $I_\infty = 0$. Dakle,

$$S_\infty = N - R_\infty \tag{21}$$

Znamo da

$$S(t) = S_0 e^{(-1/p)R(t)} \tag{22}$$

i ako pustimo $t \to \infty$, dobivamo

$$S_\infty = S_0 e^{(-1/p)R_\infty} \tag{23}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (21) u jednadžbu (23) dobivamo

$$S_\infty = S_0 e^{(-1/p)(N - S_\infty)} \tag{24}$$

iz čega slijedi da je S_∞ rješenje jednadžbe

$$S_0 e^{(-1/p)(N-x)} - x = 0 \tag{25}$$

Navedena jednadžba ne može se riješiti analitički, ali se može pokazati da postoji jedinstveno pozitivno rješenje i njegova vrijednost se može aproksimirati. Definirajmo funkciju

$$f(x) = S_0 e^{(-1/p)(N-x)} - x \quad za \quad x \geq 0 \tag{26}$$

Primjetimo da

$$f(0) = S_0 e^{(-1/p)N} > 0 \tag{27}$$

i

$$f(N) = S_0 - N < 0 \tag{28}$$

Kako je f neprekidna funkcija, po teoremu srednje vrijednosti postoji barem jedan x^* iz segmenta [0,N] takav da je f(x^*)=0. Dakle, postoji pozitivno rješenje dane jednadžbe.
Promotrimo derivaciju od f:

$$f'(x) = \frac{S_0}{p} e^{(-1/p)(N-x)} - 1 = \frac{f(x) + x}{p} - 1 \tag{29}$$

Uvrstivši x* dobivamo

$$f'(x^*) = \frac{f(x^*) + x^*}{p} - 1 = \frac{0 + x^*}{p} - 1 = \frac{x^*}{p} - 1 \tag{30}$$

Budući da je $x^* = S_\infty < p$ (što je vidljivo na slici 2.), zaključujemo da $f'(x^*) < 0$. Ako postoje dva ili više rješenja, tada po Rolleovom teorem postoji točka između rješenja u kojoj je derivacija jednaka 0. Derivacija je negativna za oba rješenja jednadžbe, a druga je derivacija $f''(x) = \frac{S_0}{p^2} e^{(-1/p)(N-x)} - 1$ uvijek pozitivan broj pa $f'(x)$ mora uvijek biti negativna između korijena. Ova kontradikcija pokazuje da ne može biti više od jednog korijena. Tako dolazimo do temeljnog teorema za ovaj generalizirani epidemijski model.

Teorem 1. (o pragu epidemije) *Ako je $S_0 < \gamma/\beta$, tada $I(t)$ monotono pada prema 0. Ako je $S_0 > \gamma/\beta$, onda se broj infektivnih osoba povećava kako t raste, a zatim monotono pada do nule. Limes od $S(t)$ kada $t \to \infty$ postoji i jedinstveno je pozitivno rješenje jednadžbe*

$$S_0 e^{(\frac{\beta}{\gamma})(N-x)} - x = 0. \tag{31}$$

Aproksimacija S_∞

Posljednja jednadžba nema eksplicitno rješenje, ali postoje razne metode kojima se može izračunati približna vrijednost rješenja. Jedna od takvih metoda je metoda bisekcije.
Pretpostavimo da imamo neprekidnu funkciju definiranu na zatvorenom intervalu $[0, N]$ sa svojstvom da je $f(0) > 0$ i $f(N) < 0$. Prema teoremu o srednjoj vrijednosti, postoji $x \in [0, N]$ takav da je $f(x) = 0$. Zadani interval se dijeli na dva jednaka dijela, odnosno na $[0, \frac{N}{2}]$ i $[\frac{N}{2}, N]$.

Ako je $f(\frac{N}{2}) < 0$, tada postoji rješenje između 0 i $\frac{N}{2}$, a ako je $f(\frac{N}{2}) > 0$, postoji rješenje između $\frac{N}{2}$ i N. U oba slučaja rješenje nastavljamo tražiti na intervalu duljine $\frac{N}{2}$. Ispitivanjem središnje točke ovog intervala na isti način, možemo suziti pretragu na interval duljine $\frac{N}{4}$. Nastavljanjem ovog postupka k puta nastaje interval duljine $\frac{N}{2k}$, koji sadrži korijen od $f(x) = 0$. Odabirom dovoljno velikog k možemo pronaći numeričku vrijednost rješenja sa željenim stupnjem točnosti.

Ukoliko smo izračunali približnu vrijednost od S_∞, onda možemo reći da je ukupan broj jedinki koje će biti zaražene tijekom epidemije opisan sljedećom jednadžbom

$$I_{total} = I_0 + S_0 - S_\infty \tag{32}$$

Gledajući ovu jednadžbu čak i bez izvoda, vidimo da je jednadžba prilično intuitivna.

2.5 Aproksimacija broja oboljelih osoba

Zapišimo jednadžbu (3.3) kao

$$\frac{\partial R}{\partial t} = r(N - S - R) \tag{33}$$

Koristeći jednadžbu (22) dobivamo

$$\frac{\partial R}{\partial t} = r(N - R - S_0 e^{(-1/p)R}) \tag{34}$$

Eksponencijalnu funkciju e^x razvijmo u Taylorov red:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!} + ... \tag{35}$$

Aproksimirajmo eksponencijalnu funkciju e^x s prva tri člana Taylorovog reda

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{36}$$

Za $x = (-1/p)R$ i aproksimacijom eksponencijalne funkcije u jednadžbi (34) dobivamo

$$\frac{\partial R}{\partial t} \sim r(N - R - S_0(1 - \frac{R}{p} + \frac{R^2}{2p^2})) \tag{37}$$

Kada neka epidemija završi derivacija od R jednaka je nuli. Ako je izvorna zaražena populacija vrlo mala, tada je broj početnih osjetljivih osoba blizu ukupne populacije. Dakle, $S_0 \sim N$. Kako je dR/dt = 0 i $R = R_\infty$ dobivamo

$$r(S_0 - R_\infty - S_0(1 - \frac{R_\infty}{p} + \frac{R_\infty^2}{2p^2})) \sim 0 \tag{38}$$

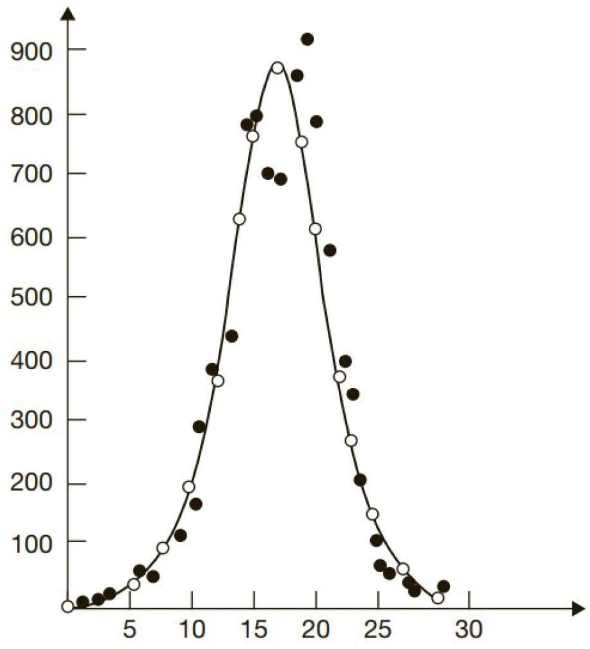
Navedeni izraz će biti približan nuli kada je

$$R_\infty \sim 2p(1 - \frac{p}{S_0}) \tag{39}$$

Ovim izrazom dobivamo približan broj ljudi koji su oboljeli. Budući da se epidemija javlja samo ako je $S_0 > p$, neka je v pozitivan broj takav da je $S_0 = p + v$. Tada jednadžba (39) glasi

$$R_\infty \sim \frac{2pv}{p+v} \tag{40}$$

Ako je v mali u usporedbi s p, tada je $p/(p+v) \sim 1$, a $R_\infty \sim 2v$. Drugim riječima, ukupna veličina epidemije je oko $2v$ slučajeva. Početna populacija osjetljivih, $p + v$, tada je smanjena na $p + v - 2v = p - v$.
Ovo posljednje opažanje, kao i Teorem o pragu epidemije, otkrili su Kermack i McKendrick 1927 (vidi [2]). Njih dvojica su uspoređivali svoje predviđeni rezultati sa stvarnim rezultatima epidemije (kuga u Bombayu 1905.-1906. godine). Ova usporedba prikazana je na slici 4.



Slika 4: Usporedba predviđene krivulje dR/dt i stvarnih podataka o broju umrlih po tjednima od kuge (čvrste točke) u Bombayu. Izračunata krivulja odgovara otprilike stvarnim rezultatima.

3 Diskretna verzija SIR modela

Podaci iz stvarnog svijeta o epidemijama prikupljaju se u diskretnim vremenskim intervalima, obično svaki dan, tjedan ili mjesec. Stoga je korisno ispitati diskretnu verziju SIR modela. Ako S_k, I_k, L_k, R_k označavaju broj osjetljivih, zaraženih, latentno zaraženih i uklonjenih osoba na početku k-tog vremenskog intervala, tada aksiomi kontinuiranog SIR modela u diskretnom slučaju glase:

Diskretan aksiom 1.

Postoji pozitivna konstanta N takva da je $S_k + I_k + L_k + R_k = N$ za sve $k \geq 0$.

Diskretan aksiom 2.

Postoji pozitivna konstanta β takva da je $S_{k+1} - S_k = -\beta I_k(t) S_k$ za sve $k \geq 0$.

Diskretan aksiom 3.

$L_k = 0$ za sve $k \geq 0$.

Diskretan aksiom 4.

Postoji pozitivna konstanta γ takva da je $R_{k+1} - R_k = \gamma I_k$ za sve $k \geq 0$.

Tada dinamički sustav za diskretnu verziju SIR modela širenja epidemije je

$$S_{k+1} - S_k = -\beta I_k S_k \tag{41.1}$$

$$I_{k+1} - I_k = \beta I_k S_k - \gamma I_k \tag{41.2}$$

$$R_{k+1} - R_k = \gamma I_k \tag{41.3}$$

gdje su β i γ prikladno odabrane konstante. Kod ovakvo definiranih diferencijalnih jednadžbi moguće je da broj zaraženih premaši ukupnu populaciju N, a broj osjetljivih osoba postane negativan. Da bismo izbjegli takve komplikacije, zamjenimo prve dvije jednadžbe sa sljedećim jednadžbama.

$$S_{k+1} = maximum(0, S_k + \beta I_k S_k) \tag{42.1}$$

$$I_{k+1} = I_k - \gamma I_k + minimum(S_k, \beta I_k S_k) \quad gdje \quad 0 < r < 1 \tag{42.2}$$

Koristeći stvarne podatke o infekciji, epidemiolozi parametriziraju SIR model širenja zaraze. Pod parametriziranjem podrazumijeva se procjena parametara β i γ iz podataka. Ti su parametri ključni za razumijevanje prirode bolesti i otkrivanje starategije za kontrolu zaraze. Glavne metode parametrizacije modela su metoda najmanjih kvadrata, metoda maksimalne vjerojatnosti i Bayesova metoda. Pri parametriziranju problem može nastati ukoliko dođe do nedovoljnog prijavljivanja oboljenja, odnosno ukoliko se ne broje sve zaražene osobe. Na primjer, većina ljudi koji imaju gripu prebole ju doma i ne posjete liječnika. U tom slučaju, treba procijeniti i stopu nedovoljnog prijavljivanja oboljenja.

References

[1] M. Olinick, *Mathematical Modeling in the Social and Life Sciences*, Wiley, New York, 2014.

[2] J.D Murray, *Mathematical Biology: I: An Introduction*, SpringerVerlag, Berlin, 2001.

[3] F. C. Hoppensteadt, C. S. Peskin, *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences*, Springer Science+Business Media, Inc., Berlin, 2002.