Primjene diferencijalnog i integralnog računa u fizici

Tucak-Roguljić, Ivana

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:371425

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Tucak-Roguljić

Primjene diferencijalnog i integralnog računa u fizici

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Tucak-Roguljić

Primjene diferencijalnog i integralnog računa u fizici

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Burazin
Komentor: dr. sc. Jelena Jankov

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom radu promatrat ćemo derivacije i integrale funkcije jedne varijable te njihovu primjenu u fizici. Najprije ćemo definirati derivaciju pomoću limesa te povezati neprekidnost i derivabilnost. S primjenom derivacija u fizici krećemo od problema brzine kod kojeg ćemo uvesti pojam akceleracije i razjasniti kružno gibanje. Zatim ćemo korištenjem derivacije proučiti jakost električne struje i linearnu gustoću mase. Interpretacijom problema površine uvest ćemo pojam integrala. Nakon toga, pojasnit ćemo vezu neprekidnosti i integrabilnosti te svojstva integrala. U nastavku ćemo dokazati Newton-Leibnizovu formulu koja je jedan od osnovih teorema integralnog računa. Na kraju, kao primjenu integrala u fizici analizirat ćemo rad sile te moment i težište nekog sustava.

Ključne riječi

derivacija, integral, neprekidnost, brzina

Applications of differential and integral calculus in physics

Abstract

In this paper, derivatives and integrals of a function of a single variable, and their application in physics will be observed. We will first define derivative by using limit and establish a connection between continuity and derivability. With the application of derivatives in physics, we start from the problem of velocity, in which we introduce the concept of acceleration and a clarification of circular motion. Then, using derivative, we will study current strength and linear mass density. By interpreting the surface problem, we introduce the notion of integrals. After that, we will explain the connection between continuity and integrability and the properties of integrals. Further, we will prove the Newton-Leibniz formula which is one of the basic theorems of integral calculus. Finally, as an application of integrals in physics, we will analyze the work of force, as well as the moment and center of gravity of a system.

Key words

derivation, integral, continuity, velocity

Sadržaj

Uvod **1**

1 Derivacija funkcije jedne varijable **2**
1.1 Temeljni pojmovi 2
1.2 Problem brzine 5
1.3 Jakost električne struje 8
1.4 Linearna gustoća mase 10

2 Integral funkcije jedne varijable **11**
2.1 Temeljni pojmovi 11
2.2 Rad sile 16
2.3 Momenti i težište 19

Literatura **23**

Uvod

Diferencijalni i integralni račun jednim imenom nazivamo infinitezimalni račun. Razvili su ga istovremeno i neovisno jedan o drugome Issac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz u 17. stoljeću. Newton ga je otkrio u mehanici promatrajući brzinu gibanja tijela, tzv. problem brzine. Leibniz je do otkrića infinitezimalnog računa došao baveći se problemom pronalaženja tangente na zadani graf funkcije u nekoj točki. Otkriće je omogućilo rješavanje mnogih problema pred kojima je do tada matematika bila nemoćna. Također, pomoću derivacija i integrala opisali smo mnogo fizikalnih zakona i prirodnih pojava važnih za razumijevanje svijeta oko nas. Zbog toga infinitezimalni račun ima veliki spektar primjene u prirodnim znanostima. Glavni cilj ovoga rada je pobliže objasniti primjene u fizici.

U prvom dijelu rada bavit ćemo se diferencijalnim računom. Započinjemo s temeljnim pojmovima bez kojih ne bismo mogli definirati pojam derivacije. Pomoću teorema dat ćemo vezu neprekidnosti i derivabilnosti. Poslije toga krenut ćemo s primjenom diferencijalnog računa u fizici. Detaljno ćemo objasniti problem brzine kojim se bavio Newton. U istom poglavlju definirat ćemo akceleraciju, te ćemo posebno proučiti i kružno gibanje. Zatim ćemo preko derivacije definirati jakost struje i linearnu gustoću mase te dati odgovarajuće primjere.

U drugom dijelu rada proučavat ćemo integralni račun. Kako bismo uveli pojam integrala motivirat ćemo se problemom površine, tj. pomoću Darbouxovih suma definirat ćemo određeni integral. Poslije toga, navest ćemo neka svojstva određenih integrala. Preko primitivnih funkcija definirat ćemo neodređeni integral. Nadalje ćemo iskazati i dokazati Newton-Leibnizovu formulu koja povezuje diferencijalni i integralni račun. Na kraju rada objasnit ćemo primjenu integralnog računa u fizici pomoću rada sile, momenta sustava i formula za težište. Za svaku od primjena navest ćemo primjere i formule koje koristimo za njih.

1 Derivacija funkcije jedne varijable

1.1 Temeljni pojmovi

Za bolje razumijevanje završnog rada potrebno je dobro poznavati pojmove poput limesa, neprekidnosti i derivacije funkcije, stoga ćemo ih na samom početku rada definirati.

Definicija 1. *Za funkciju $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u točki $x_0 \in (a, b)$ ako*

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in (a, b))\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Napomena 1. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren, neprekidna je u točki $x_0 \in I$ ako i samo ako vrijedi*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicija 2. *Kažemo da je $x \in \mathbb{R}$ gomilište ili točka gomilanja skupa $D \subseteq \mathbb{R}$ ako postoji niz (x_n), takav da je*

$$x_n \in D,\ x_n \neq x \ i\ \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Skup svih točaka gomilanja skupa D označavamo s D'.

Definicija 3. *$L \in \mathbb{R}$ je limes ili granična vrijednost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D'$ ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definicija 4. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f derivabilna u točki $x_0 \in (a, b)$ ako postoji*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ako gornji limes postoji zovemo ga derivacija funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$.

Napomena 2. *Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je derivabilna na (a, b) ako je derivabilna u svakoj točki $x_0 \in (a, b)$.*

Napomena 3. *Supstitucijom $x = x_0 + \Delta x$ izraz (1) možemo zapisati kao*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definicija 5. *Kažemo da je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna slijeva u $x_0 \in (a, b)$ ako postoji*

$$f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definicija 6. *Kažemo da je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna zdesna u $x_0 \in (a, b)$ ako postoji*

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Napomena 4. *Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna je u $x_0 \in (a, b)$ onda i samo onda ako postoje $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ te vrijedi*

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Primjer 1. *Pokažimo da je funkcija* $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, *derivabilna u svakoj točki svoje domene i vrijedi* $f'(x) = 2x$.
Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ *proizvoljna točka. Tada je*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Time smo pokazali derivabilnost funkcije $f(x) = x^2$.

Definicija 7. *Ako je* $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabilna u točki* $x_0 \in (a, b)$ *onda njezinu derivaciju zovemo derivacija drugog reda funkcije* f *i označavamo s* $f''(x_0)$ *ili* $f^{(2)}(x_0)$.
Analogno derivaciju n*-tog reda funkcije* f, $n \in \mathbb{N}$, *definiramo induktivno kao derivaciju derivacije reda* $n - 1$:

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' ,$$

gdje se nultom derivacijom smatra funkcija f.

Uz pojam derivacije funkcije prirodno se veže pojam neprekidnosti. Neprekidnost je bitna jer bez tog uvjeta na funkciju često dolazi do problema kod računanja u prekidima funkcije. Također, neprekidnost je nužna za gotovo sve numeričke metode kojima rješavamo jednadžbe. U sljedećem teoremu dana je veza derivabilnosti i neprekidnosti.

Teorem 1 (Teorem o neprekidnosti derivabilne funkcije)**.** *Ako je funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabilna u točki* $x_0 \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren, onda je i neprekidna u toj točki.*

Dokaz: Po Napomeni 1, f je neprekidna u $x_0 \in I$ ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

slijedi da je f neprekidna u $x_0 \in I$. □

Napomena 5. *Obrat teorema ne vrijedi, tj. neprekidna funkcija ne mora biti derivabilna.*

Primjer 2. *Pokažimo da je funkcija* $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$, *neprekidna u točki* $x_0 = 0$, *ali nije derivabilna u toj točki. Prema definiciji derivacije imamo da je*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Uvrštavanjem točke $x_0 = 0$ *slijedi*

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}.$$

Pogledajmo što se događa s limesima slijeva i zdesna u točki $x_0 = 0$. Znamo da je dana funkcija f po djelovima linearna pa ju možemo zapisati kao

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0, \end{cases}$$

te imamo

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Budući da je $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, prema Napomeni 4 funkcija nije derivabilna u $x_0 = 0$.

Uočimo da ako funkcija nije neprekidna nema smisla provjeravati da li je derivabilna. Možemo reći da je neprekidnost nužan uvjet za postojanje derivacije.

Teorem 2. *Neka su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren, derivabilne u proizvoljnoj točki $x \in I$. Tada:*

1. *$f + g$ je derivabilna u točki x i vrijedi:*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

2. *$f - g$ je derivabilna u točki x i vrijedi:*

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

3. *$f \cdot g$ je derivabilna u točki x i vrijedi:*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

4. *Ako je $g(x) \neq 0$, onda je $\frac{f}{g}$ derivabilna u točki x i vrijedi:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Dokaz: 1. Uvedimo funkciju $F(x) := f(x) + g(x)$. Tada je

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

2. Tvrdnja se dokazuje analogno kao tvrdnja 1, za $F(x) := f(x) - g(x)$.

3. Za funkciju $F(x) := f(x) \cdot g(x)$ imamo

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}.$$

Ukoliko dodamo i oduzmemo izraz $f(x+\Delta x)g(x)$ u brojniku, dobivamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

Iskoristili smo da je derivabilna funkcija f ujedno i neprekidna te da zato vrijedi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$.

4. Neka je $F(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$. Funkcija F dobro je definirana jer imamo pretpostavku da je $g(x) \neq 0$. Tada je

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}.$$

Oduzmemo li i dodamo izraz $f(x)g(x)$ u brojniku, imamo da je

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)} \\ &= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x)} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

□

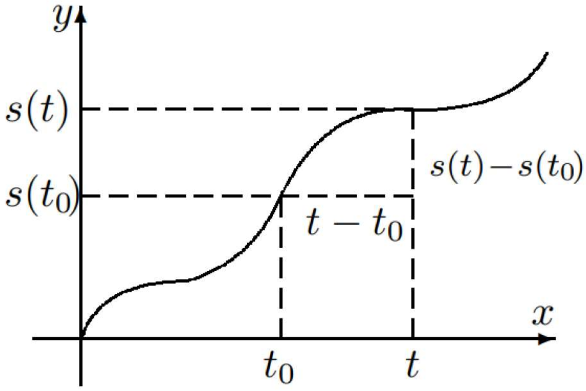
1.2 Problem brzine

Kako bi bolje razumjeli pojam derivacije, možemo ga interpretirati pomoću problema brzine. Njime se bavio Newton[1] promatrajući gibanje nekog tijela u nekom vremenskom intervalu. Pretpostavimo da se tijelo giba jednoliko po pravcu. Time smo zadali funkciju jedne varijable, tj. svakom trenutku t pridružili smo položaj tijela $s(t)$ u tom trenutku. Promatramo li vremenski interval $[t_0, t]$, prijeđeni put proporcionalan je duljini intervala $t - t_0$ pa brzina ima konstantnu vrijednost

$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

[1] Isaac Newton (Woolsthorpe, 25. prosinca 1642. – Kensington, 20. ožujka 1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom.

Kod jednolikog gibanja po pravcu trenutna brzina jednaka je prosječnoj brzini u svakom trenutku. Kada se tijelo ne giba po pravcu već po nekoj krivulji koja je opisana funkcijom s kao na slici 1, trenutna brzina nije konstantna. Ne možemo ju mjeriti kao prosječnu, ali ju određujemo tako da funkciju s u okolini točke t_0 aproksiramo pravcem.



Slika 1: Graf funkcije $y = s(t)$

Primijetimo da kada uzimamo sve manje okoline točke t_0, tj. vremenske intervale $[t_0, t]$, onda će prosječna brzina sve više odgovarati trenutnoj brzini. Trenutnu brzinu tijela u trenutku t_0 definiramo kao

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0).$$

Trenutna brzina je derivacija funkcije položaja u trenutku t_0, odnosno mjera promjene položaja po jedinici vremena.

Prisjetimo se da je ubrzanje ili akceleracija fizikalna veličina koja opisuje promjenu brzine kroz vrijeme. Sada, poznavajući pojam derivacije, akceleraciju možemo definirati kao derivaciju brzine ili drugu derivaciju položaja tijela u trenutku t_0:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

odnosno

$$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0).$$

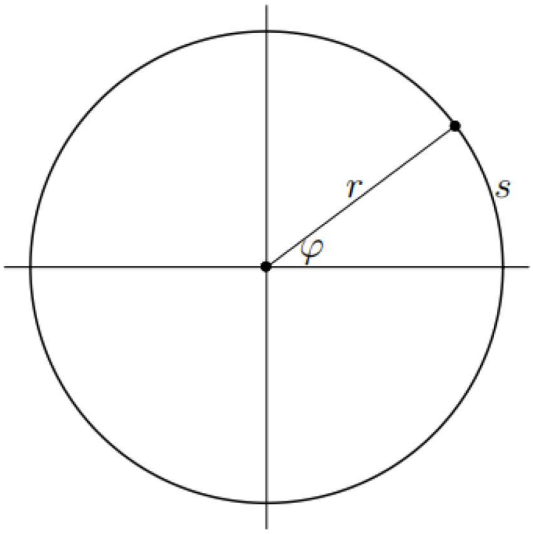
Do sada nismo precizirali po kojoj se krivulji tijelo giba. Razmotrimo sada slučaj gibanja kod kojeg se tijelo giba po kružnici. Kako bi pojasnili kružno gibanje, smjestit ćemo kružnicu u koordinatni sustav u ravnini tako da u ishodištu koordinatnog sustava bude središte kružnice.

Neka je r duljina dužine koja spaja ishodište koordinatnog sustava i točku na kružnici kojom prolazi tijelo u trenutku t. Tada je $\varphi(t)$ kut kojeg r zatvara s pozitivnim dijelom x osi. Položaj tijela u trenutku t jedinstveno je određen s $\varphi(t)$ pa kutnu brzinu $\omega(t)$ možemo definirati kao promjenu kuta po vremenu, tj.

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Mjerna jedinica za kutnu brzinu je radijan u sekundi.

Označimo sa $s(t)$ duljinu luka kružnice koju je do trenutka t tijelo prešlo. Sada možemo



Slika 2: Kružno gibanje tijela

povezati linearnu i kutnu brzinu na način

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r = \omega(t) \cdot r.$$

Kod kružnog gibanja razlikujemo dvije vrste akcelearacije. Kutna akceleracija je brzina promjene kutne brzine po vremenu i definira se kao

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Mjerimo ju u radijanima po sekundi na kvadrat. Tangencijalna akceleracija je derivacija linearne brzine po vremenu i dana je izrazom

$$a_t(s) = \frac{dv}{dt}.$$

Mjerna jedinica je metar po sekundi na kvadrat.

Primjer 3. *Slobodni pad je jednoliko ubrzano gibanje pod utjecajem gravitacijske sile. Srednja vrijednost gravitacijskog ubrzanja g iznosi $9,81m/s^2$ i koristi se kao konstanta. Zanima nas koliko vremena treba lopti da padne na zemlju ako ju ispustimo sa zgrade visoke 20m početnom brzinom od $10m/s$?*
Radi se o jednoliko ubrzanom gibanju, tj. akceleracija je konstanta i iznosi $g = 9,81m/s^2$. Po definiciji akceleracije je

$$g = \frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

Kako bi se riješili derivacije, integrirat ćemo jednakost (2):

$$\int dv = \int g dt.$$

Integriranjem dobivamo da je

$$v(t) = gt + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Znamo da je u trenutku $t = 0$ lopta imala neku početnu brzinu v_0. Možemo uvrstiti taj početni uvjet kako bi dobili konstantu c_1:

$$v(0) = v_0 = g \cdot 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = v_0.$$

Sada imamo jednadžbu koja povezuje brzinu, akceleraciju i vrijeme:

$$\boxed{v(t) = gt + v_0.} \tag{3}$$

Nadalje ćemo iskoristiti da je brzina derivacija puta po vremenu, tj.

$$v(t) = \frac{ds}{dt},$$

te ćemo to uvrstiti u jednadžbu (3) i integrirati jednakost

$$\int ds = \int vdt = \int (gt + v_0)dt.$$

Integriranjem slijedi da je

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pretpostavit ćemo da je lopta do trenutka $t = 0$ prešla neki put s_0 kako bi odredili i drugu integracijsku konstantu:

$$s(0) = s_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = s_0.$$

Tada je

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.}$$

Kada uvrstimo podatke $s(t) = 20m, g = 9,81m/s^2, v_0 = 10m/s, s_0 = 0m$ imamo

$$\frac{9,81}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t - 20 = 0.$$

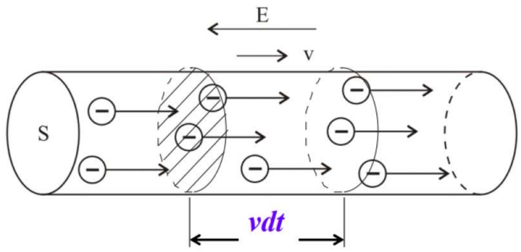
Rješenja kvadratne jednadžbe su $t_1 = 1,24s$ i $t_2 = -3,28s$. Budući da vrijeme promatramo kao nenegativnu varijablu za rješenje ćemo uzeti $t = 1,24s$.
Uočimo da nigdje nije bila zadana masa lopte što nam govori da brzina padanja tijela ne ovisi o njegovoj težini.

1.3 Jakost električne struje

Primjenu pojma derivacije u fizici susrećemo i kod elektromagnetizma. Električni naboj je veličina koja opisuje svojstvo da čestice međusobno djeluju električnim silama. Mjerna jedinica za električni naboj je kulon(C). Označimo li s $Q(t)$ količinu naboja u trenutku t tada jakost struje u trenutku t definiramo kao promjenu količine naboja u jedinici vremena:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}. \tag{4}$$

Pogledajmo kako izračunati jakost električne struje u vodiču.



Slika 3: Vodič kroz koji teče električna struja

Na slici 3 prikazan je vodič poprečnog presjeka S u kojem se elektroni gibaju jednoliko. Pretpostavimo da ima n elektrona po jedinici volumena, tj. n označava brojčanu koncentraciju[2] elektrona. Kako se elektroni gibaju konstantnom brzinom v onda će za vremenski interval dt prevaliti put

$$s = vdt.$$

Poprečnim presjekom vodiča za vremenski interval dt proći će n slobodnih elektrona, tj. onoliko koliko ih ima unutar valjka visine vdt. Volumen valjka iznosi $Svdt$, a broj čestica unutar njega $nSvdt$. Kako svaki elektron ima elementarni električni naboj e onda je promjena količine naboja dQ kroz valjak u vremenskom intevalu dt dana s

$$dQ = neSvdt,$$

a jakost struje kao

$$I = \frac{dQ}{dt} = nSve.$$

Mjerna jedinica za jakost struje je Amper(A) i ona je jedna od sedam osnovnih SI jedinica.

Primjer 4. *Količina naboja koja prolazi kroz poprečni presjek bakrene žice u trenutku t zadana je s $Q(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 7C$.*

(a) Odredimo jakost električne struje u trenutku $t = 2s$.

(b) U kojem je trenutku jakost struje najmanja?

Rješenje:

(a) Po formuli (4) vrijedi $I(t) = \frac{dQ}{dt}$. Kako bi odredili jakost električne struje trebamo količinu naboja u trenutku t koja je opisana funkcijom Q derivirati po varijabli t:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 3t^2 - 12t + 15.$$

Jakost električne struje u trenutku $t = 2s$ iznosi

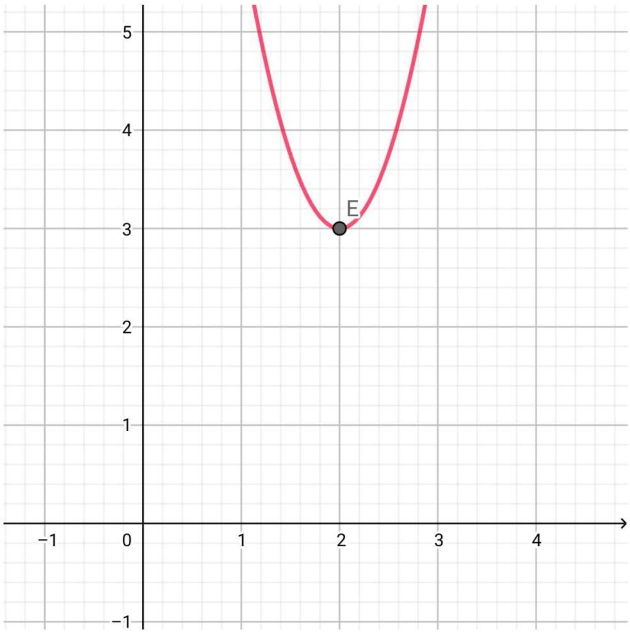
$$I(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 15 = 3A.$$

(b) Jakost struje je najmanja kada funkcija koja ju opisuje postiže minimum. Minimum funkcije se nalazi u tjemenu parabole

$$I(t) = 3t^2 - 12t + 15,$$

pošto je to kvadratna funkcija s pozitivnim vodećim koeficijentom.

[2]Brojčana (brojevna) koncentracija je omjer broja tvari i volumena. Mjerna jedinica je m^{-3}.



Slika 4: Graf funkcije $y = I(t)$

Iz grafa funkcije I ili koristeći formule za tjeme parabole, možemo zaključiti da je jakost struje najmanja u trenutku $t = 2s$ i iznosi $3A$.

1.4 Linearna gustoća mase

Promotrimo ravnu žicu duljine l. Pretpostavit ćemo da je žica tanka, tj. da je jednodimenzionalan objekt i da ju možemo prikazati krivuljom. Zbog pretpostavke da je žica ravna za tu krivulju možemo uzeti segment $[0, l]$. Označimo s $m(x)$ masu za dio žice koji se nalazi na segmentu $[x_0, x] \subseteq [0, l]$. Tada možemo odrediti srednju linearnu gustoću mase dijela žice koji je duljine $\Delta x = x - x_0$ izrazom

$$\frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}. \tag{5}$$

Korištenjem (5) definiramo linearnu gustoću mase u točki $x_0 \in [0, l]$ tako da uzimamo sve kraće segmente $[x_0, x]$:

$$\rho(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x} = m'(x_0).$$

Mjerna jedinica za linearnu gustoću mase je kilogram po metru.

Napomena 6. *Ako je funkcija gustoće $\rho : [0, l] \to \mathbb{R}$ konstantna, onda kažemo da je žica homogena. U suprotnom kažemo da je žica nehomogena.*

Primjer 5. *Masa prvih x metara žice je $2x^2 + 1$ kg. Izračunajmo linearnu gustoću za $x = 2$, te odredimo gdje je gustoća najmanja, a gdje najveća.*
Funkcijom $m(x) = 2x^2 + 1$ opisana je masa dijela žice $[0, x]$. Linearna gustoća nehomogene žice u točki x dana je s

$$\rho(x) = \frac{dm}{dx} = 4x.$$

Zanima nas gustoća u točki $x = 2$ pa slijedi da je

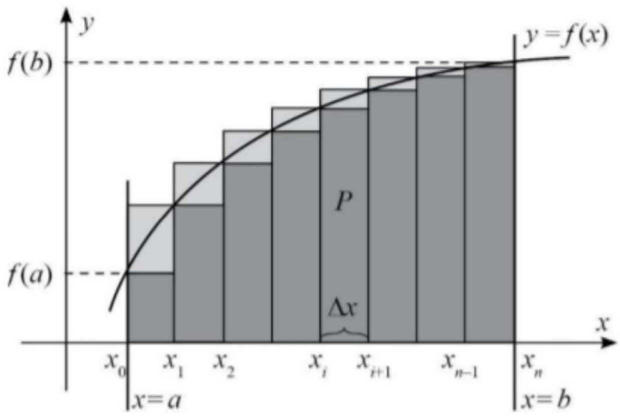
$$\rho(2) = 8kg/m.$$

Uočimo da je ρ linearna rastuća funkcija. Iz toga slijedi da je gustoća najmanja na početku žice, a najveća na njezinom kraju.

2 Integral funkcije jedne varijable

2.1 Temeljni pojmovi

Za računanje površine geometrijskih likova poput trokuta ili pravokutnika dovoljno je znati duljine stranica i formulu za površinu. Međutim, kako ćemo izračunati površinu lika koji je omeđen nekim proizvoljnim krivuljama, npr. površinu ispod grafa funkcije $y = f(x)$ kao na slici 5?



Slika 5: Graf funkcije $y = f(x)$

Pretpostavimo da je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena i rastuća funkcija. Neka je $\rho = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ekvidistantna subdivizija segmenta [a,b], t.d. je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Iz ovog slijedi da je duljina svakog podintervala $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, dana s

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Pravokutnike čija je širina jednaka Δx i visina jednaka vrijednosti funkcije f u lijevim krajevima podintervala nazivamo "upisani pravokutnici". Suma površina takvih pravokutnika iznosi

$$s(f, \rho) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x. \tag{6}$$

Analogno možemo promatrati "opisane pravokutnike" , odnosno one kojima je visina jednaka vrijednosti funkcije f u desnim krajevima podintervala. Suma njihovih površina jednaka je

$$S(f, \rho) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x. \tag{7}$$

Uočimo da su visine pravokutnika, odnosno vrijednosti funkcije f u lijevim i desnim rubovima, redom, odgovarali minimumu i maksimumu funkcije f na tom podintervalu. Ukoliko nemamo rastuću funkciju kao što smo pretpostavili na početku, funkcija f ekstreme može postizati u bilo kojoj točki podintervala. Zbog omeđenosti funkcije f, za $i = 1, 2, \ldots, n$ postoje brojevi

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

i pri tome je očito $m_i \leq M_i, i = 1, \ldots, n$.
Sada (6) i (7) možemo zapisati na sljedeći način:

$$s(f, \rho) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x,$$

$$S(f, \rho) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x.$$

Broj $s(f, \rho)$ naziva se donja Darbouxova suma, a $S(f, \rho)$ gornja Darbouxova suma.

Primjer 6. *Izračunajmo donju i gornju Darbouxovu sumu funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $0 < a < b$, definirane s $f(x) = x^2$.*

Neka je $x_i := a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, \ldots, n$, ekvidistantna subdivizija segmenta $[a, b]$. Kako je f rastuća funkcija na $[a, b]$, vrijedi

$$m_i = f(x_{i-1}) = (a + (i-1)h)^2,$$

$$M_i = f(x_i) = (a + ih)^2.$$

Sada je donja Darbouxova suma

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)h)^2 h.$$

Nakon kvadriranja binoma dobijemo

$$s_n = na^2h + 2ah^2 \sum_{i=1}^{n} (i-1) + h^3 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2.$$

Koristeći formulu za sumu prvih n prirodnih brojeva slijedi

$$s_n = na^2h + 2ah^2 \frac{(n-1)n}{2} + h^3 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Nakon uvrštavanja $h = \frac{b-a}{n}$, konačno je

$$s_n = \frac{(b-a)^3}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) + a(b-a)^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + a^2(b-a).$$

Preostaje odrediti gornju Darbouxovu sumu:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (a + ih)^2 h.$$

Kvadriranjem binoma slijedi

$$S_n = na^2h + 2ah^2 \sum_{i=1}^{n} i + h^3 \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Nadalje ćemo upotrijebiti formulu za sumu prvih n prirodnih brojeva i formulu za sumu kvadrata prvih n prirodnih brojeva:

$$S_n = na^2h + 2ah^2 \frac{n(n+1)}{2} + h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Uvrštavanjem $h = \frac{b-a}{n}$ *dobivamo*

$$S_n = \frac{(b-a)^3}{3}\big(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\big) + a(b-a)^2\big(1 + \frac{1}{n}\big) + a^2(b-a).$$

Definicija 8. *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *i* $\mathcal{R}$ *skup svih razdioba segmenta* $[a,b]$*. Tada postoje brojevi:*

$$I_*(f;a,b) = \inf\{S(f,\rho) : \rho \in \mathcal{R}\},$$
$$I^*(f;a,b) = \sup\{s(f,\rho) : \rho \in \mathcal{R}\}.$$

Kažemo da je broj $I_*(f;a,b)$ *donji Riemannov integral, a* $I^*(f;a,b)$ *gornji Riemannov integral.*

Definicija 9. *Za omeđenu funkciju* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *kažemo da je integrabilna u Riemannovom smislu ili R-integrabilna na segmentu* $[a,b]$ *ako je*

$$I_*(f;a,b) = I^*(f;a,b). \tag{8}$$

Tada se (8) naziva određeni integral funkcije f *na segmentu* $[a,b]$ *i pišemo*

$$I(f;a,b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Pri tome funkciju $f(x)$ nazivamo podintegralna funkcija gdje je x varijabla po kojoj se integrira. Za segment [a, b] kažemo da je područje integracije, tj. da je točka a donja granica integracije i b gornja granica integracije.
Sljedeći teorem daje vezu neprekidnosti i R-integrabilnosti.

Teorem 3 (Riemannov teorem)**.** *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Ako je* f *neprekidna na* $[a,b]$ *onda je i R-integrabilna na [a,b].*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Trebamo pokazati da postoji neka subdivizija ρ segmenta $[a,b]$ za koju vrijedi $S(f,\rho) - s(f,\rho) < \epsilon$. Kako je svaka neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ ujedno i uniformno neprekidna, postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

za sve x, y iz segmenta $[a,b]$ za koje je $|x-y| < \delta$. Neka je $\rho = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ subdivizija segmenta $[a,b]$ takva da joj je dijametar $\delta(\rho) < \delta$. Po Bolzano-Weierstrassovom teoremu znamo da neprekidna funkcija preslikava segment na segment. Dakle, postoje točke $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ za koje je $f(x') \le f(x) \le f(x'')$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Sada je

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x'),$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x'').$$

Primijetimo da je $M_i - m_i = |f(x'') - f(x')|$. Iz uniformne neprekidnosti funkcije f imamo da je $M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}$, iz čega vrijedi

$$S(f,\rho) - s(f,\rho) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \epsilon,$$

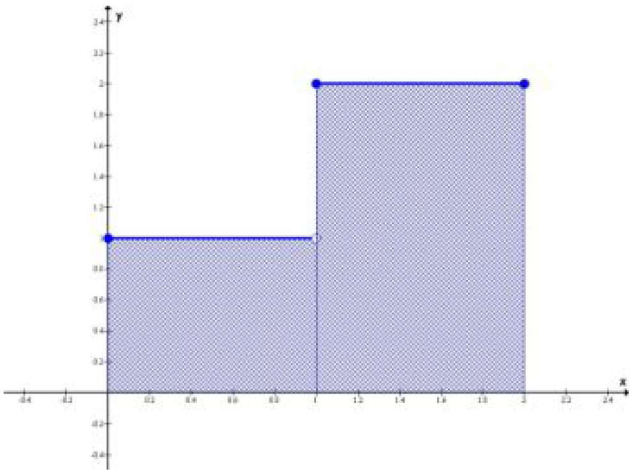
□

što je i trebalo pokazati.

Napomena 7. *Obrat Riemannovog teorema ne vrijedi, tj. postoje funkcije koje su R-integrabilne na nekom segmentu, ali imaju prekid na tom segmentu.*

Primjer 7. *Ispitajmo integrabilnost funkcije $f : [0, 2] \to R$ definirane na sljedeći način:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 2, & x \in [1,2]. \end{cases}$$



Slika 6: Graf funkcije $f(x)$

Funkcija f ima prekid u točki $x = 1$, ali iz grafa funkcije vidimo da iscrtanu površinu, koja odgovara integralu funkcije f, možemo izračunati kao sumu površina dva pravokutnika:

$$P = P_1 + P_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3,$$

tj.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 1dx + \int_1^2 2dx = 1 \cdot (1-0) + 2 \cdot (2-1) = 3.$$

Pri rješavanju integrala često koristimo njihova svojstva. Nabrojimo sada svojstva određenih integrala:

1. Konstantna funkcija $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ je integrabilna na segmentu [a, b] te vrijedi

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

2. Ako je $c \in [a, b]$ i f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$ tada je f integrabilna i na segmentima $[a, c]$ i $[c, b]$ te vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Ako su f i g integrabilne funkcije na segmentu [a, b], onda su i funkcije $f + g, f - g$ integrabilne na segmentu [a, b] te vrijedi

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

4. Ako je f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$ i $c \in \mathbb{R}$, onda je funkcija $c \cdot f$ integrabilna na segmentu [a, b] te vrijedi

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

5. Ako su f i g integrabilne funkcije na segmentu $[a, b]$ takve da je $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$, onda vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

6. Ako je f integrabilna funkcija na $[a, b]$, tada je i funkcija $|f|$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ te vrijedi

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Teorem 4. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada postoji točka $c \in [a, b]$ takva da je*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Definicija 10. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Primitivna funkcija funkcije f na $[a, b]$ je svaka funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi*

$$F'(x) = f(x), x \in [a, b].$$

Skup svih primitivnih funkcija funkcije f nazivamo neodređenim integralom funkcije f i pišemo $\int f(x)dx$.

Teorem 5. *Ako su $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ proizvoljne primitivne funkcije od $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $G(x) = F(x) + c$, $x \in [a, b]$.*

Sada ćemo iskazati i dokazati jedan od najbitnijih teorema za određene integrale koji povezuje diferencijalni i integralni račun.

Teorem 6 (Newton-Leibnizova formula). *Ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija onda je*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{9}$$

gdje je F primitivna funkcija funkcije f.

Dokaz. Za proizvoljnu točku $x \in [a,b]$ restrikcija neprekidne funkcije f na $[a,x]$ je neprekidna funkcija te prema Teoremu 3 slijedi i da je R-integrabilna. Tada je s

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \ x \in [a,b]$$

dobro definirana funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Primijetimo da je $F(a) = 0$.
Nadalje, pretpostavimo da je G neka druga primitivna funkcija od f na $[a,b]$. Prema Teoremu 5 postoji $c \in \mathbb{R}$ t.d. je

$$G(x) = F(x) + c, \ x \in [a,b].$$

Slijedi da je

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx,$$

što je i trebalo pokazati. □

Primjer 8. *Newton-Leibnizovu formulu možemo fizikalno interpretirati. Iz Poglavlja 1 znamo da je $v(t) = s'(t)$ pa je funkcija $s : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $v : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Ako pretpostavimo da se tijelo giba jednoliko i u pozitivnom smjeru tada je*

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a).$$

Primjer 9. *Koristeći Newton-Leibnizovu formulu izračunajmo*

$$\int_1^3 xdx.$$

Primitivna funkcija podintegralne funkcije $f(x) = x, x \in [1,3]$, je $F(x) = \frac{x^2}{2}$, te stoga imamo:

$$\int_1^3 xdx = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

2.2 Rad sile

Ako na tijelo djeluje konstantna sila F, onda će se pod utjecajem te sile tijelo pravocrtno gibati i prijeći put s. Tada rad definiramo kao umnožak sile koja djeluje na tijelo i prijeđenog puta, tj.

$$W := Fs.$$

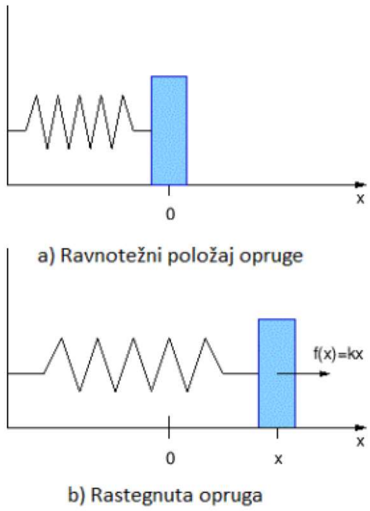
Kada sila F nije konstantna možemo ju opisati funkcijom $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdje je $[a,b]$ put koji tijelo prijeđe tijekom djelovanja sile, a iznos sile u pojedinoj točki puta odgovara vrijednosti funkcije f u toj točki. Podijelimo segment [a, b] na n jednakih dijelova $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tako da je $\Delta x = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n$. Silu F na podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$ aproksimirat ćemo s vrijednosti $f(\bar{x}_i)$ gdje je $\bar{x}_i$ neka točka tog podsegmenta. Slijedi da je obavljeni rad na tom podintervalu približno jednak $f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$. Ukupan rad na segmentu [a,b] približno je jednak

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{10}$$

Što je n veći, to je aproksimacija sve bolja. Kako je izraz (10) integralna suma funkcije f, rad sile možemo definirati kao

$$W := \int_a^b f(x)dx.$$

Primjer 10. *Duljina opruge iznosi 40cm. Kako bi opruga bila rastegnuta na 60cm, potrebna je sila od 50N. Odredimo rad potreban za rastezanje opruge do 50cm.*
Kako bismo odredili rad iskoristit ćemo Hookeov zakon sila, tj. da je sila opruge jednaka produktu koeficijenta elastičnosti materijala k i produljenja opruge x.



Slika 7: Hookeov zakon

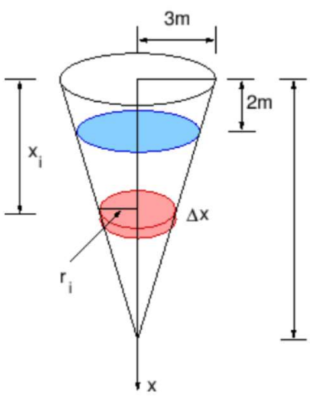
Da bi se opruga rastegnula za 20cm moramo djelovati silom od 50N iz čega slijedi da je $k = 250N/m$. *Sada je sila opruge dana izrazom*

$$f(x) = 250x.$$

Rad potreban za rastezanje opruge do 50cm je

$$W = \int_0^{0,1} 250x dx = 1.25 \ J.$$

Primjer 11. *Spremnik za kišnicu ima oblik obrnutog stošca polumjera baze 3m i visine 10m. U spremniku se nalazi voda do visine 8m. Odredimo rad koji se treba obaviti za pražnjenje spremnika na način da se voda ispumpa preko gornjeg ruba.*



Slika 8: Spremnik za kišnicu

Ako gledamo stožac od baze prema vrhu, vodom je ispunjen dio od 2 m do 10 m. Napravit ćemo ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[2, 10]$. *Neka je* $\Delta x = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$. *Time smo dio spremnika koji je ispunjen vodom podjelili na n jednakih dijelova gdje je i-ti dio,* $i = 1, \ldots, n$, *približno jednak cilindru polumjera baze* r_i *i visine* Δx:

$$V_i \approx r_i^2 \pi \Delta x.$$

Koristeći sličnost trokuta iz slike 8 vidimo da je

$$\frac{r_i}{10 - x_i} = \frac{3}{10},$$

tj.

$$r_i = \frac{3}{10}(10 - x_i).$$

Prema tome je volumen i-tog djela dan s

$$V_i \approx \frac{9}{100}(10 - x_i)^2 \pi \Delta x.$$

Koristeći formulu $m = \rho V$ *gdje je* m *masa vode, a* ρ *gustoća vode koja iznosi* $\rho = 1000 kg/m^2$, *slijedi*

$$m_i \approx 90(10 - x_i)^2 \pi \Delta x.$$

Za podizanje i-tog dijela vode potrebno je savladati silu teže G_i *koja iznosi*

$$G_i = m_i g \approx 2774(10 - x_i)^2 \Delta x,$$

pri čemu je $g = 9,81 m/s^2$ *gravitacijsko ubrzanje. Put koji svaka čestica prijeđe u i-tom dijelu jednak je* x_i, *pa je rad za ispumpavanje i-tog dijela vode približno jednak*

$$W_i \approx G_i x_i \approx 2774 x_i (10 - x_i)^2 \Delta x.$$

Sada je rad za ispumpavanje cijelog spremnika

$$W = 2774 \int_2^{10} (10 - x)^2 x dx \approx 1.90 \cdot 10^6 J.$$

2.3 Momenti i težište

Kako bi bolje razumjeli pojam težišta krenimo s jednostavnim primjerom. Neka se sustav sastoji od tanke šipke zanemarive mase na čijim se krajevima nalaze utezi mase m_1 i m_2. Smjestimo šipku na x-os tako da je koordinata prve mase x_1, a koordinata druge mase x_2. Zadatak nam je pronaći točku koja ima koordinatu x_t takvu da oslanjanjem u toj točki dobijemo šipku u ravnotežnom položaju. Za to će nam biti potreban Arhimedov zakon poluge prema kojem je poluga u ravnoteži ako su umnošci masa i njihovih udaljenosti od točke oslonca jednaki, tj.

$$m_1(x_t - x_1) = m_2(x_2 - x_t).$$

Sada je koordinata težišta dana s

$$x_t = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Težište se često naziva i centar mase. Za m_1x_1 i m_2x_2 kažemo da su momenti masa m_1 i m_2, dok je $M := m_1x_1 + m_2x_2$ moment sustava u odnosu na ishodište.
U slučaju da imamo n masa $m_1, \ldots, m_n$ na položajima $x_1, \ldots, x_n$ formula za koordinatu težišta je

$$x_t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Označit ćemo s $M := \sum\limits_{i=1}^{n} m_ix_i$ moment sustava u odnosu na ishodište i s $m := \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ ukupnu masu sustava.
Proučimo sustav koji se nalazi u koordinatom sustavu u ravnini. Imamo n masa $m_1, \ldots, m_n$ s koordinatama $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Analogno kao i u prethodnim situacijama definirat ćemo moment sustava u odnosu na x-os kao

$$M_x := \sum_{i=1}^{n} m_iy_i,$$

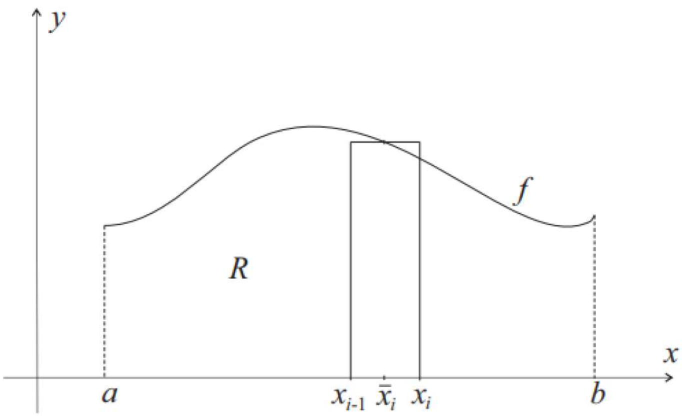
te moment sustava obzirom na y-os izrazom

$$M_y := \sum_{i=1}^{n} m_ix_i.$$

Poštujući princip da se momenti ne mijenjaju premještanjem ukupne mase u ishodište, koordinate težišta dane su s

$$x_t = \frac{M_y}{m}, \quad y_t = \frac{M_x}{m}.$$

Nadalje ćemo promatrati tanku, homogenu ploču R koja je konstantne površinske gustoće mase ρ i nalazi se ispod grafa funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$.
Za pronalazak koordinata težišta i momenta ploče R koristit ćemo činjenicu da ako je R simetrična obzirom na neki pravac, onda se težište ploče nalazi na tom pravcu. Taj postulat naziva se princip simetrije. Na primjer, iz njega slijedi da se težište pravokutnika nalazi u sjecištu njegovih dijagonala.



Slika 9: Ploča R

Za početak napravimo ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[a, b]$ takvu da je širina svakog podsegmenta $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, te iz toga imamo da je težište i-tog podsegmenta dano s

$$\bar{x_i} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}.$$

Prema principu simetrije točka $(\bar{x_i}, \frac{1}{2}f(\bar{x_i}))$ je težište i-tog pravokutnika, a masa tog pravokutnika jednaka je umnošku gustoće ρ i površine, tj.

$$m_i = \rho f(\bar{x_i})\Delta x.$$

Analogno kao i u prethodnim slučajevima slijedi da je moment oko y-osi dan s

$$M_y^i = \rho f(\bar{x_i})\Delta x \bar{x_i}.$$

Iz ovog slijedi da je moment ploče R oko y-osi:

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x_i} f(\bar{x_i})\Delta x,$$

što predstavlja integralnu sumu funkcije $x \mapsto \rho f(x)x$. Shodno tome, moment sustava u odnosu na y-os možemo definirati kao

$$M_y := \rho \int_a^b x f(x) dx.$$

Moment oko x-os definiran je s

$$M_x^i = \rho f(\bar{x_i})\Delta x \frac{1}{2} f(\bar{x_i}),$$

pa slijedi

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \rho \frac{1}{2}(f(\bar{x_i}))^2 \Delta x.$$

Konačno, moment sustava u odnosu na x-os dan je izrazom

$$M_x := \frac{1}{2}\rho\int_a^b f^2(x)dx.$$

Ako iskoristimo princip po kojem se momenti ne mijenjaju kada premjestimo cjelokupnu masu u ishodište, dobit ćemo koordinate težišta $(\bar{x}, \bar{y})$. Najprije ukupnu masu ploče R označimo s

$$m := \rho P = \rho\int_a^b f(x)dx.$$

Tada je $M_y = m\bar{x}, M_x = m\bar{y}$, odnosno

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}, \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}. \tag{11}$$

Napomena 8. *Koordinate težišta ovise samo o funkciji f kojom je zadan oblik ploče, a ne ovise o gustoći što se intuitivno da naslutiti zbog homogenosti ploče.*

Primjer 12. *Izračunajmo koordinate težišta tanke homogene ploče koja je oblika gornje polukružnice radijusa 2.*
Zbog principa simetrije je $\bar{x} = 0$ te preostaje izračunati $\bar{y}$.
Jednadžba gornje polukružnice dana je s $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2]$. Iz (11) slijedi da je

$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-2}^2 f^2(x)dx}{\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)dx},$$

što možemo lako izračunati:

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}dx = 2\pi,$$

$$\int_{-2}^2 f^2(x)dx = \int_{-2}^2 |4 - x^2|dx = \frac{32}{3}.$$

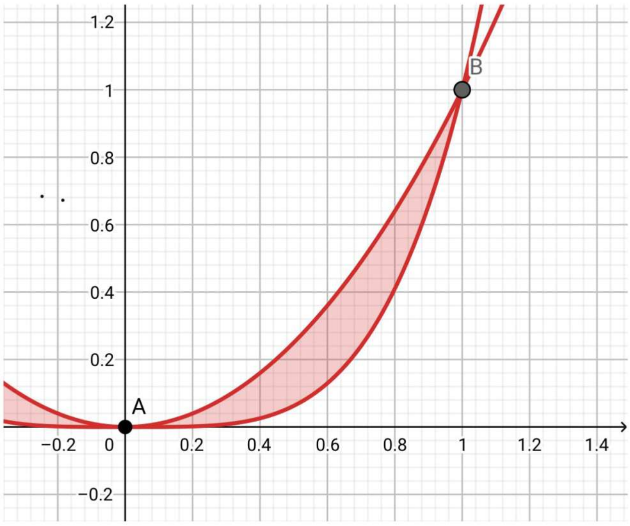
Dakle, tražene koordinate težišta ploče su $(0, \frac{8}{3\pi})$.

Neka je sada R homogena ploča koja se nalazi u koordinatnom sustavu između grafova funkcija f i g pri čemu su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) \geq g(x), x \in [a, b]$. Analogno kao ranije, može se zaključiti da su koordinate težišta dane formulama

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x(f(x) - g(x))dx}{\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\displaystyle\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx}{\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx}.$$

Primjer 13. *Izračunajmo koordinate težišta područja omeđenog krivuljama $y = x^2$ i $y = x^4$ na segmentu $[0, 1]$.*



Slika 10: Područje omeđeno krivuljama $y = x^2$ i $y = x^4$

Površina područja prikazanog na slici 10 iznosi:

$$\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{2}{15}.$$

Zbog toga je

$$\bar{x} = \frac{15}{2}\int_0^1 x(x^2 - x^4)dx = \frac{5}{8},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15}\int_0^1 (x^4 - x^8)dx = \frac{4}{675}.$$

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 1 (funkcije jedne varijable)*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Kurepa, *Matematička analiza 2 (diferenciranje i integriranje)*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[3] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijanog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[4] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[5] J. Stewart, *Calculus 7th Edition*, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008

[6] J. Planinić, *Osnove fizike 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[7] Hugh D. Young, Roger A. Freedman, *University Physics*, Pearson, 2012.

[8] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2*, Prirodoslovno matematički fakultet-Matematički odsjek, Zagreb, 2018.