SIS i SIR epidemiološki modeli temeljeni na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu

Štivić, Ira

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike, smjer: Financijska matematika i statistika

Ira Štivić

SIS i SIR epidemiološki modeli temeljeni na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike, smjer: Financijska matematika i statistika

Ira Štivić

SIS i SIR epidemiološki modeli temeljeni na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2021.

Sadržaj

1 Uvod

Razne prirodne i društvene pojave odvijaju se na slučajan način. Evoluciju slučajnih pojava kroz vrijeme modeliramo slučajnim procesima. Jedan od najvažnijih, ali i najjednostavnijih modela slučajne evolucije su Markovljevi lanci. S obzirom na jednostavnu strukturu Markovljevih lanaca, možemo dosta reći o njihovom ponašanju kroz vrijeme, te ih primijeniti u raznim područjima. Jednostavnim rječnikom, Markovljevo svojstvo glasi: "prošlost i budućnost međusobno su nezavisne u odnosu na poznatu sadašnjost". Ukoliko razmislimo o ovoj tvrdnji, dolazimo do zaključka kako pomoću vjerojatnosti i očekivanih vrijednosti možemo predvidjeti buduće ponašanje lanaca.
Znanost koja proučava pojavu bolesti i zaraze naziva se epidemiologija. Epidemijom nazivamo iznenadno, kratkotrajno i naglo širenje bolesti. Na širenje zarazne bolesti utječu razni faktori poput uzročnika zaraze, načina prenošenja, razdoblja prije i tijekom zaraznosti individue, podložnosti i otpornosti na zaraznu bolest. Međutim, osim ovih faktora, na širenje i tijek epidemije utječu i društveni, kulturalni, ekonomski, demografski i geografski faktori. Mehanizam prijenosa zaraznih bolesti, te širenje bolesti kroz lanac zaraza dobro je proučen i poznat za većinu zaraznih bolesti s kojima se znanost dosada susrela. Ipak, postoje situacije u kojima je teško razumjeti širenje zaraznih bolesti zbog velike složenosti ljudske populacije. U tom slučaju veoma su korisni matematički modeli koji daju formalnu strukturu epidemiološkim modelima i mogućnost razumijevanja uzorka širenja zaraze, kao i predviđanja daljnjeg tijeka širenja u populaciji.U današnje vrijeme, često se koriste usporedbe epidemija dviju ili više zaraznih bolesti u istoj populaciji ili usporedbe epidemije iste zarazne bolesti u različitim populacijama.
U ovom radu detaljnije ćemo se baviti SIS i SIR epidemiološkim modelima koji se temelje na matematičkom modelu Markovljevih lanaca u diskretnom vremenu. Važno je napomenuti da će procesi kojima ćemo modelirati ove epidemiološke modele biti stohastički. Stohastički modeli u obzir uzimaju slučajni karakter različitih faktora koji utječu na biološke procese, npr. broj rođenih, broj umrlih, emigracije, imigracije i ekološke promjene. Kako bismo predvidjeli stohastičko ponašanje biološkog procesa, moramo poznavati konačnodimenzionalne distribucije procesa. To najčešće nije moguće pa zato promatramo neke druge analitičke metode poput računanja prosjeka i varijance distribucije te numeričkih simulacija uzoraka.
U sljedećim poglavljima navesti ćemo neke važne definicije, teoreme i svojstva iz opće teorije Markovljevih lanaca u diskretnom vremenu, te objasniti na koji način se pomoću njih dolazi do SIS i SIR epidemioloških modela.

2 Markovljevi lanci

U ovom poglavlju bavit ćemo se Markovljevim lancima s konačnim skupom stanja S u diskretnom vremenu ($t \in \{0, 1, 2, ...\}$). Obzirom da ćemo u definicijama koristiti vjerojatnost, iskažimo prvo njenu definiciju.

Definicija 2.1. Neka je Ω neprazan prostor elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra skupova na njemu. Funkciju

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

zovemo **vjerojatnost** na Ω ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:
A1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$,
A2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
A3. ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ čim je $i \neq j$, tada vrijedi

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Definicija 2.2. Slučajni proces $(X_t, t \in T)$ je familija slučajnih varijabli na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pri čemu je t element parametarskog skupa ili skupa indeksa $T \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija 2.3. Neka je S prebrojiv skup. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S je **Markovljev lanac** ako vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{1}$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

U kontekstu epidemioloških modela koje ćemo razraditi u nastavku rada, za Markovljev lanac koristit ćemo oznaku $(X_t, t \in \mathbb{N})$. U nastavku rada na nekim mjestima ćemo koristiti kraticu **ML** za označavanje Markovljevog lanca. Svojstvo u relaciji (1) nazivamo **Markovljevo svojstvo**. Ukoliko sadašnjost označimo s n, onda trenutak *n+1* označava neposrednu budućnost, a vremenski trenutci *0, 1, . . . , n-1* predstavljaju prošlost. Markovljevo svojstvo govori sljedeće: *ponašanje Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno na njegovo ponašanje u sadašnjosti i prošlosti, jednako je ponašanju Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti uvjetno samo na sadašnjost.*
Pogledajmo još jedan način iskazivanja Markovljevog svojstva:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0 | X_n = i) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \frac{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0 | X_n = i)
\end{aligned}$$

Dakle, prošlost i budućnost su nezavisne s obzirom na poznatu sadašnjost.

Definicija 2.4. Matrica P=(p_{ij} : $i, j \in S$) naziva se **stohastičkom matricom** ako je $p_{ij} \geq 0$ za sve $i, j \in S$, te

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S. \tag{2}$$

Definicija 2.5. Neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ vjerojatnosna distribucija na S, te neka je P=(p_{ij} : $i, j \in S$) stohastička matrica. Slučajni proces X=(X_n : $n \geq 0$) definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s prostorom stanja S je **homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i prijelaznom matricom P** ako vrijedi:
i) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i, \forall i \in S$,
ii) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij}, \forall n \geq 0, \forall i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$.

Obzirom da se nećemo baviti nehomogenim Markovljevim lancima, homogene Markovljeve lance ćemo kraće zvati samo Markovljevi lanci. Također, zbog jednostavnosti Markovljev lanac iz definicije (2.5) možemo zvati **(λ, P)-Markovljevim lancem**.

Markovljeve lance u diskretnom vremenu svrstavamo u klasu procesa za koje vjerojatnost prijelaza iz jednog stanja u drugo zadajemo **funkcijom prijelaznih vjerojatnosti** definiranom pravilom $p(i, s; j, t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_s = i)$, za stanja $i, j \in S$ i trenutke $s, t \in \mathbb{N}_0$ takve da je $s < t$.
Interpretacija funkcije prijelaznih vjerojatnosti je sljedeća: ako se u trenutku s ML nalazio u stanju i, $p(i, s; t, j)$ je vjerojatnost da se u trenutku t nađe u stanju j, tj. prijeđe u stanje j.
Prisjetimo se, svaki slučajan proces u potpunosti je određen svojim konačnodimenzionalnim distribucijama. Iz tog razloga, za ML će važnu ulogu igrati distribucija slučajne varijable X_0 i **funkcija 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti**, za stanja $i, j \in S$ i $n \in \mathbb{N}_0$, definirana pravilom

$$p(i, n; n + 1, j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i). \tag{3}$$

Ukoliko (3) ne ovisi o vremenu, tj. ako za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \neq m$, vrijedi da je

$$p(i, n; n + 1, j = p(i, m; m + 1, j), \tag{4}$$

kažemo da se radi o (vremenski) **homogenom** Markovljevom lancu. U tom slučaju, funkcija 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti ovisi samo o stanju $i \in S$ iz kojeg lanac polazi i stanju $j \in S$ u kojeg lanac dolazi, te uvodimo oznaku

$$p(i, n; n + 1, j) = p_{ij}.$$

Za homogen ML 1-koračne prijelazne vjerojatnosti $p_{ij}, i, j \in S$, možemo zapisati u formi matrice koju nazivamo **matrica 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti** i označavamo ju s P. Matrica P je stohastička matrica sa svojstvima iz definicije 2.4. Za $S = \mathbb{N}$, matrica 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti ima sljedeći oblik:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Za ML X s početnom distribucijom λ i matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti P kažemo da je (λ, P)-ML, jer je prema teoremu 2.6 ML u potpunosti određen s λ i P. Može se pokazati da vrijedi i obrat.
Pokažimo sada rezultat (3) teoremom.

Teorem 2.6. *Markovljev lanac $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S je potpuno određen poznavanjem distribucije slučajne varijable X_0 i funkcije 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti (3).*

Dokaz. Zbog jednostavnosti, uvest ćemo sljedeću oznaku: $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$, za stanje $i \in S$. Sada distribuciju slučajne varijable X_0 možemo zapisati kao vektor vjerojatnosti $\lambda = (\lambda_i, i \in S)$. Dakle, pretpostavljamo da znamo λ, ali i da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ i proizvoljne $i, j \in S$ znamo 1-koračne prijelazne vjerojatnosti $p(i, n; n+1, j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$. Pokazat ćemo da je to dovoljno da za svaki proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ možemo odrediti distribuciju slučajnog vektora $(X_0, \ldots, X_n)$.
Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $i_0, \ldots, i_n \in S$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) \\
&= \mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&\overset{\text{MS}}{=} p(i_{n-1}, n-1; n, i_n) \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= p(i_{n-1}, n-1; n, i_n) \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1} | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}) \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}) \\
&\overset{\text{MS}}{=} p(i_{n-1}, n-1; n, i_n) p(i_{n-2}, n-2; n-1, i_{n-1}) \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}) \\
&= \ldots = \\
&= p(i_{n-1}, n-1; n, i_n) p(i_{n-2}, n-2; n-1, i_{n-1}) \cdots p(i_0, 0; 1, i_1) \lambda_{i_0}
\end{aligned}$$

Obzirom da vjerojatnost oblika $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)$ na ovakav način možemo odrediti za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $i_0, \ldots, i_n \in S$, dolazimo do zaključka da distribucija slučajne varijable X_0 i funkcija 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti (3) u potpunosti određuju konačnodimenzionalne distribucije ML X. Q.E.D.

Matricu n-koračnih prijelaznih vjerojatnosti označavamo s P^n. Višekoračne prijelazne vjerojatnosti homogenog (λ, P)-ML X, tj. vjerojatnosti oblika $\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i)$ za proizvoljne $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, $i, j \in S$ su oblika:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_m = j | X_n = i) = \\
&= \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{m-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} j} = (P^m)_{ij} = p_{ij}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Primjer 1. *Pretpostavimo da neka jedinka u populaciji tijekom epidemije može biti podložna (S) ili zaražena (Z) nekom zaraznom bolesti. Pretpostavimo da zaraznost jedinke može trajati maksimalno sedam dana, tj. jedan tjedan. Vrijedi:*

- *ako je ovaj tjedan podložna, idući tjedan će biti podložna (S) ili zaražena (Z) s vjerojatnostima 0.7 i 0.3 redom,*
- *ako je ovaj tjedan zaražena, idući tjedan će biti podložna (S) ili zaražena (Z) s vjerojatnostima 0.2 i 0.8 redom.*

Zdravstveno stanje jedinke možemo modelirati slučajnom varijablom koja vrijednostima iz skupa $\{S, Z\}$ pridružuje vrijednosti npr. $\{0, 1\}$ redom. Evolucija njezinog zdravstvenog stanja kroz vrijeme, tj. u tjednima, modelirana je slučajnim procesom $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ gdje je X_n slučajna varijabla kojom je opisano zdravstveno stanje jedinke n-tog tjedna.
Obrazložit ćemo zašto slučajni proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ možemo smatrati Markovljevim lancem. Odredit ćemo njegov skup stanja i matricu 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti.
Skup stanja slučajnog procesa $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ kojim modeliramo zdravstveno stanje jedinke je skup $S = \{0, 1\}$, pri čemu 0 označava da je jedinka podložna zaraznoj bolesti i 1 da je zaražena tom bolesti.
Uočimo: uvjetno na poznato zdravstveno stanje jedinke n-ti tjedan (sadašnjost), distribucija slučajne varijable kojom modeliramo zdravstveno stanje jedinke u tjednu $(n+1)$ (budućnost), neovisna je o zdravstvenim stanjima u tjednima $(n-1), (n-2), \ldots$ (prošlost). Dakle, zdravstveno stanje jedinke ima Markovljevo svojstvo pa ga možemo modelirati Markovljevim lancem $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ s nekom početnom distribucijom λ i matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Kako bismo bolje razumjeli strukturu i evoluciju ML, važno je znati koji su putevi kroz prostor stanja mogući. Prirodno je zapitati se koja stanja lanac može posjetiti krenuvši iz nekog zadanog stanja.

Definicija 2.7. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prostorom stanja S i prijelaznom matricom P. Za $B \subset S$ definiramo **prvo vrijeme pogađanja** tog skupa kao

$$T_B = min\{n \geq 0 : X_n \in B\}, \tag{5}$$

uz konvenciju da je $min\emptyset = +\infty$. U slučaju da je $B = \{j\}$, za $j \in S$, jednostavnije pišemo T_j.

Definicija 2.8. Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j **dostižno** iz i, u oznaci $i \to j$, ako vrijedi

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0.$$

Riječima, stanje j je dostižno iz stanja i ako lanac s pozitivnom vjerojatnošću posjeti j krenuvši iz i. Vrijedi i $i \to i$. Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 2.9 (Kriterij o dostižnosti). *Sljedeća svojstva su ekvivalentna:*

1. $i \to j$,
2. $p_{ij}^{(n)} > 0$, *za neki* $n \geq 0$,
3. $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0$, *za neka stanja* $i_1, \dots, i_{n-1}$.

Definicija 2.10. Stanja $i, j \in S$ **komuniciraju**, u oznaci $i \leftrightarrow j$, ako vrijedi $i \to j$ i $j \to i$.

Definicija 2.11. Markovljev lanac X je **ireducibilan** ako se prostor stanja S sastoji od samo jedne klase komuniciranja, tj. za sve $i, j \in S$ vrijedi $i \leftrightarrow j$.

Za podskup $C \subset S$ kažemo da je **zatvoren** ako za svako stanje $i \in C$ vrijedi

$$\mathbb{P}_i(T_{S \setminus C} = \infty) = 1.$$

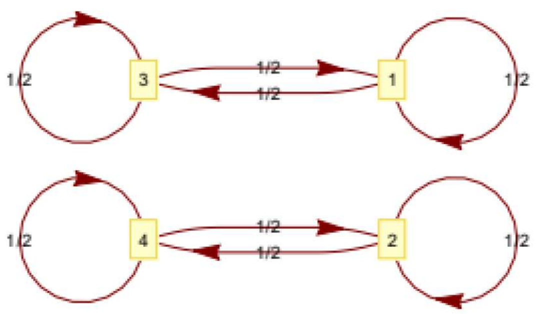
Riječima, skup C je zatvoren ako lanac, startavši iz $i \in C$, ne može izaći iz skupa C. Međutim, u zatvoren skup se može ući.

Definicija 2.12. Za stanje $j \in S$ kažemo da je **apsorbirajuće** ako je $\{j\}$ zatvoren skup.

Primjer 2. *Promotrimo ML sa skupom stanja* $S = \{1, 2, 3, 4\}$ *i matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Shematski prikaz stanja i 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti prikazan je sljedećom slikom:



Vidimo da je skup stanja S dekomponiran na dvije klase komuniciranja

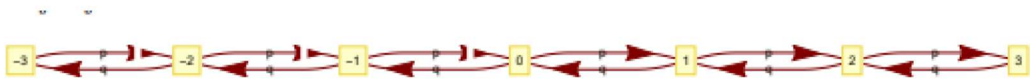
$$C_1 = \{1, 3\}, C_2 = \{2, 4\}.$$

Dekompozicija skupa stanja na klase komuniciranja je zanimljiv problem ukoliko matrica 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti sadrži nul-elemente. Ako su svi elementi matrice 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti različiti od nule,onda sva stanja međusobno komuniciraju.

Primjer 3. *Promotrimo ML kojim modeliramo igru na sreću u kojoj se nakon svake odigrane partije igračev imetak povećava za 1kn s vjerojatnošću p ili smanjuj za 1 kn s vjerojatnošću q, pri čemu je $p + q = 1$. Također, ova igra nema nikakvih barijera, tj. kumulativno igrač može osvojiti ili izgubiti neograničenu svotu novca. Radi se o ML sa skupom stanja $\mathbb{Z}$ i 1-koračnim prijelaznim vjerojatnostima*

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i + 1, \\ q, & j = i - 1, \\ 0, & inače. \end{cases}$$

Na sljedećoj slici prikazan je shematski prikaz podskupa $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ skupa stanja S i pripadnih 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti:

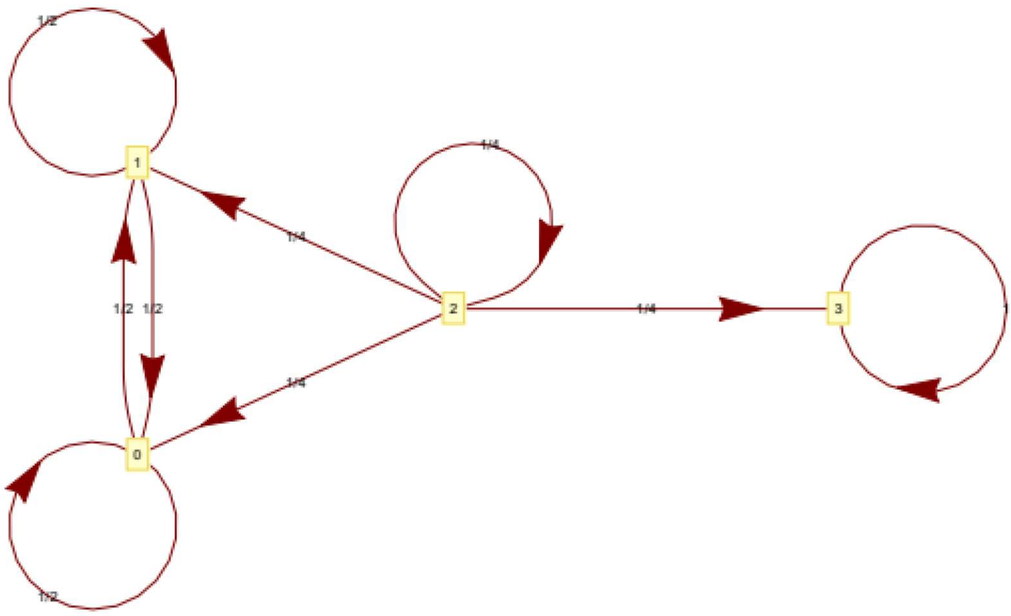


Vidimo da za bilo koja dva stanja $i, j \in S$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(n)} > 0$ pa stoga $i \to j$. Dakle, zaključujemo da je ovaj ML ireducibilan.

Primjer 4. *Markovljev lanac $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2, 3\}$ zadan je sljedećom matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti:*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Shematski prikaz skupa stanja i 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti prikazan je sljedećom slikom:



Vidimo da $0 \leftrightarrow 1$*, da stanje 2 nije dostižno niti iz jednog drugog stanja, te da je stanje 3 apsorbirajuće. Dakle, skup stanja dekomponiran je na tri klase komuniciranja:*

$$C_0 = \{0,1\}, C_1 = \{2\}, C_2 = \{3\},$$

pa ovaj ML nije ireducibilan. Uočimo da je 3 apsorbirajuće stanje, a C_0 *zatvorena klasa pa je za stanje* $i \in C_0 \cup C_2$

$$\mathbb{P}(T_{S \setminus C_0 \cup C_2} = \infty | X_0 = i) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = \infty | X_0 = i) = 1 - 0 = 1,$$

što možemo interpretirati na sljedeći način: ako je ML startao iz stanja $i \in C_0 \cup C_2 = \{0,1,3\}$*, vjerojatnost da u konačnom vremenu posjeti stanje 2 je nula.*

Nadalje, reći ćemo nešto više o vjerojatnostima da Markovljev lanac bude apsorbiran u nekom stanju ili podskupu stanja, te očekivanom vremenu apsorpcije. Neka je $B \subset S$ podskup skupa stanja, te T_B vrijeme pogađanja skupa B. Vjerojatnosti pogađanja (u konačnom vremenu) definiramo s

$$h_i^B = \mathbb{P}_i(T_B < \infty).$$

Ako je B zatvoren podskup od S, onda su h_i^B **apsorpcijske vjerojatnosti**. Ako je B zatvoren podskup od S, onda je očekivano vrijeme do apsorpcije Markovljevog lanca definirano s

$$g_i^B = E[T_B | X_0 = i].$$

Iskažimo sada definiciju vremena zaustavljanja Markovljevog lanca i jako Markovljevo svojstvo.

Definicija 2.13. Slučajna varijabla $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ zove se **vrijeme zaustavljanja** ako je za sve $n \geq 0$

$$\{T \leq n\} = \sigma(X_0, \ldots, X_n),$$

tj. događaj $\{T \leq n\}$ ovisi samo o $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

Teorem 2.14 (Jako Markovljevo svojstvo)**.** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i matricom prijelaznih vjerojatnosti P, te neka je T vrijeme zaustavljanja za taj proces. Tada je, uvjetno na $\{X_T = i\}$, slučajni proces $(X_{T+n}, n \in \mathbb{N}_0)$ Markovljev lanac s početnom distribucijom*

$$\delta^i = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases}$$

i matricom prijelaznih vjerojatnosti P. Osim toga, Markovljev lanac $(X_{T+n}, n \in \mathbb{N}_0)$, uvjetno na $\{X_t = i\}$, nezavisan je od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_T$.

U sljedećem dijelu ovog poglavlja upoznat ćemo se s terminima povratnog i prolaznog stanja. Stanja u povratna i prolazna klasificiramo s obzirom na to vraća li se Markovljev lanac beskonačno mnogo puta u neko stanje ili ne.

Definicija 2.15. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Za stanje $i \in S$ **prvo vrijeme povratka** Markovljevog lanca definiramo s

$$T_i = T_i^{(1)} = min\{n > 0 : X_n = i\}.$$

Definicija 2.16. Stanje $i \in S$ je **povratno** ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$. Stanje $i \in S$ je **prolazno** ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$.

Uvedimo sada $\mathbb{P}_j$-distribuciju vremena T_i:

$$f_{ji}^{(n)} = \mathbb{P}_j(T_i = n), n \geq 1, i, j \in S,$$

te $f_{ji}^{(0)} = 0$. Stavimo

$$f_{ji} := \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(T_i = n) = P_j(T_i < \infty).$$

Tada, za $j = i$ vrijedi $f_{ii} = \mathbb{P}_i(T_i < \infty)$ i to je vjerojatnost povratka u stanje i, dok je za $j \neq i$, f_{ji} vjerojatnost dolaska u stanje i iz početnog stanja j. Zaključujemo kako je $i \in S$ povratno stanje ako i samo ako je $f_{ii} = 1$.
Uvedimo sada funkcije izvodnice nizova $(f_{ji}^{(n)} : n \geq 0)$ i $(p_{ji}^{(n)} : n \geq 0)$:

$$F_{ji}^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} s^n, 0 < 1, \tag{6}$$

$$\mathbb{P}_{ji}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} s^n, 0 < 1. \tag{7}$$

Propozicija 2.1 (Dekompozicija u prvom vremenu posjeta).
(a) Za $i \in S$ vrijedi

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)},$$

te za $0 < s < 1$,

$$\mathbb{P}_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}. \tag{8}$$

(b) Za $j \neq i$ vrijedi

$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}, n \geq 1,$$

te za $0 < s < 1$,

$$\mathbb{P}_{ji}(s) = F_{ji}(s)\mathbb{P}_{ii}(s).$$

Ovu propoziciju navodimo bez dokaza, ali ćemo navesti bitan rezultat iz dokaza koji će nam poslužiti za dokaz sljedeće propozicije:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)}} = \frac{1}{1 - f_{ii}}, \tag{9}$$

gdje obje strane mogu biti beskonačne.

Propozicija 2.2. *Stanje $i \in S$ je povratno ako i samo ako vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.*

Dokaz. Ako je stanje $i \in S$ povratno, tada je $f_{ii} = 1$, pa iz (9) slijedi da je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$. Slično se pokaže i obrat. Q.E.D.

Proučimo sada na koji način broj posjeta nekom stanju ovisi o tome je li ono povratno ili prolazno.
Neka je N_i broj posjeta stanju $i \in S$. Preciznije, $N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = i\}}$.
Očekivani broj posjeta Markovljevog lanca stanju i, uz početno stanje $j \in S$, možemo izračunati na sljedeći način:

$$E_j N_i = E_j\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=i\}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E_j \mathbf{1}_{\{X_n=i\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}. \tag{10}$$

U slučaju da je $j = i$, stanje i je povratno ako i samo ako je $E_i N_i = +\infty$, odnosno očekivani broj posjeta stanju i je beskonačan. U suprotnom, stanje i je prolazno ako i samo ako je $E_i N_i < +\infty$. Tada je $N_i < \infty$ $\mathbb{P}$-g.s.
Definirali smo prvo vrijeme povratka Markovljevog lanca u neko stanje i. Definirajmo sada n-to vrijeme posjeta stanju i:

$$T_i^{(n)} = \begin{cases} min\{k > T_i^{(n-1)} : X_k = i\}, T_i^{(n-1)} < \infty, \\ \infty, T_i^{(n-1)} \geq \infty \end{cases} , n \geq 2$$

Želimo izračunati $\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty), n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty) &= \mathbb{P}_j(T_i^{(n-1)} < \infty, T_I^{(n)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_j(T_I^{(n-1)} < \infty)\mathbb{P}(T_i^{(n)} < \infty | T_I^{(n-1)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_j(T_i^{(n-1)} < \infty)\mathbb{P}_i(T_i^{(1)} < \infty). \qquad (11)
\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo jako Markovljevo svojstvo, te dolazimo do zaključka: uvjetno na $\{X_{T_i^{(n-1)}}\}$, $(X_{T_i^{(n-1}+m}, m \geq 0)$ je Markovljev lanac nezavisan od $X_0, \ldots, X_{T_i^{(n-1)}}$. Tada indukcijom iz (11) slijedi:

$$\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty) = f_{ji} f_{ii}^{n-1}, n \geq 1.$$

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \geq 1$. Tada je zbog 11:

$$\mathbb{P}_j(T_i^{(n+1)} < \infty) = \mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty)\mathbb{P}_i(T_i^{(1)} < \infty) = f_{ji} f_{ii}^{n-1} f_{ii} = f_{ji} f_{ii}^n.$$

Teorem 2.17. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- *(i)* $i \in S$ *je povratno*
- *(ii)* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$
- *(iii)* $E_i N_i = \infty$
- *(iv)* $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$.

Dokaz se može pronaći u [8].

Napomena 2.1. Iz gornjeg teorema slijedi da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

- (i) $i \in S$ je prolazno
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$
- (iii) $E_i N_i < \infty$
- (iv) $\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = 1$

Propozicija 2.3. *Neka je* $i \in S$ *povratno stanje, te neka* $i \leftrightarrow j$. *Tada je i* $j \in S$ *povratno stanje.*

Definicija 2.18. Stanje $i \in S$ je **pozitivno povratno** ako je $E_i(T_i^{(1)}) = E(T_i^{(1)} | X_0 = i) < \infty$.

Iz gornje definicije slijedi $\mathbb{P}(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i) = 1$, tj. svako pozitivno povratno stanje je povratno.

Definicija 2.19. Stanje $i \in S$ koje je povratno, ali nije pozitivno povratno, zove se **nul povratno stanje**.

Teorem 2.20. *Neka je Markovljev lanac X ireducibilan i povratan. tada za sve $i \in S$ vrijedi $\mathbb{P}(T_i < \infty) = 1$.*

Dokaz se može pronaći u [8].
U sljedećih nekoliko definicija i teorema reći ćemo nešto o stacionarnoj distribuciji Markovljevih lanaca koja će biti usko povezana s njihovim graničnim distribucijama.

Definicija 2.21. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se **stacionaran proces** ako za sve $k \geq 0$ i sve $n \geq 0$ slučajni vektori $(X_0, X_1, \ldots, X_k)$ i $(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$ imaju istu distribuciju (u odnosu na vjerojatnost $\mathbb{P}$).

Definicija 2.22. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i, i \in S)$ na S je **stacionarna distribucija** (ili **invarijantna** distribucija) Markovljevog lanca X, odnosno prijelazne matrice P ako vrijedi

$$\pi = \pi P, \tag{12}$$

odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, \forall j \in S. \tag{13}$$

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 2.23. *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ (π, P)-Markovljev lanac gdje je π stacionarna distribucija za P. Tada je X stacionaran proces. Preciznije, X je stacionaran uz vjerojatnost $\mathbb{P}_\pi = \sum_{i \in S} \pi_i \mathbb{P}_i$. Nadalje, za svaki $m \geq 0$, proces $(X_{m+n} : n \geq 0)$ je ponovno (π, P)-Markovljev lanac.*

Propozicija 2.4. *Neka je S konačan skup stanja, te pretpostavimo da za neki $i \in S$,*

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \forall j \in S.$$

Tada je $\pi = (\pi_j : j \in S)$ stacionarna distribucija.

Dokaz. Vrijedi

$$\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1,$$

pa je π vjerojatnosna distribucija. Zamjena limesa i sume je opravdana zbog toga što je S konačan. Nadalje,

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n+1)} \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}.$$

Dakle, π je stacionarna distribucija. Q.E.D.

Primjer 5. *Promotrimo ML* $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *sa skupom stanja* $S = \{1, 2\}$ *i matricom 1-koračnih prijelaznih vjerojatnosti*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovaj ML je ireducibilan i povratan, a rješavanjem sustava jednadžbi $\pi = \pi P$ *uz* $\pi_1 + \pi_2 = 1$ *slijedi da je* $\pi = (1/2, 1/2)$ *njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Međutim, uočavamo da je*

$$P^{2n} = I, n \in \mathbb{N}_0$$
$$P^{2n+1} = P, n \in \mathbb{N}_0,$$

gdje je I *jedinična matrica drugog reda. Dakle,* $lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ *ne postoji niti za jedan drugi par stanja* $i, j \in S$ *pa ovaj lanac, iako ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju, nema graničnu distribuciju.* □

Definicija 2.24. Neka je X Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Za stanje $i \in S$, označimo s $d(i)$ najveći zajednički djelitelj skupa $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)>0}\}$, gdje je $d(i) = 1$ ako je taj skup prazan. Kažemo da je stanje i **aperiodično** ako je $d(i) = 1$. U suprotnom je i **periodično** stanje, a $d(i)$ zove se **period** od i.

Propozicija 2.5. *Stanje* $i \in S$ *je aperiodično ako i samo ako postoji* $n_0 = n_0(i)$ *takav da je* $p_{ii}^{(n)} > 0$*, za sve* $n \geq n_0$.

Propozicija 2.6. *Za sva stanja* $i, j \in S takva da i \leftrightarrow j$*, vrijedi* $d(i) = d(j)$.

Na samome kraju ovog poglavlja reći ćemo nešto o ergodskom teoremu koji je rezultat o graničnom ponašanju srednjih vrijednosti vezanih uz Markovljev lanac u vremenu. Prvo ćemo navesti jaki zakon velikih brojeva bez dokaza, a zatim ergodski teorem.

Teorem 2.25. *Neka je* $(Y_n : n \geq 1)$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, takvih da je* $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$*, te stavimo* $\mu = \mathbb{E}(Y_1)$*. Tada je*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

Teorem 2.26 (Ergodski teorem)**.** *Pretpostavimo da je Markovljev lanac* $X = (X_n : n \geq 0)$ *ireducibilan i pozitivno povratan, te neka je* π *njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je* f *nenegativna ili ograničena realna funkcija definirana na* S*. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j\right) = 1. \tag{14}$$

Ergodski teorem kaže da je za gotovo sve putove granično vremensko usrednjenje jednako prostornom usrednjenju.

3 SIS i SIR epidemiološki modeli

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako izgledaju jednostavni SIS (*eng.* Susceptible-Infected-Susceptible) i SIR (*eng.* Susceptible-Infected-Recovered) epidemiološki modeli bez broja rođenih i umrlih u populaciji, deterministički SIS i SIR epidemiološki modeli koji uzimaju u obzir broj rođenih i umrlih u promatranoj populaciji, te stohastičke modele za SIS i SIR epidemiološke modele.
Postoje razne zarazne bolesti poput ospica, rubeole i vodenih kozica koje se modeliraju svrstavanjem jedinki populacije u kategorije ovisno o njihovoj reakciji na bolest: zdrav, zaražen i imun. Bolesti koje su uzrokovane bakterijama i virusima ne mogu se modelirati na isti način na razini populacije nego se modeliraju indirektno kroz broj zaraženih jedinki. Navedimo i objasnimo stanja (faze) bolesti kako bismo lakše razumjeli modele koje ćemo promatrati:

- S - podložan zarazi (*eng.* susceptible); jedinke koje nisu zaražene, ali su sposobne dobiti bolest i postati zarazne,
- I - zaražen (*eng.* infected); jedinke koje su zaražene i zarazne, tj. mogu prenijeti bolest drugim jedinkama
- R - oporavljen (*eng.* recovered); jedinke koje su bile zaražene bolešću, te su se oporavile i pritom stekle trajni ili privremeni imunitet na preboljenu bolest

Modeli koji uključuju ova tri stanja nazivaju se **SIR epidemiološkim modelima**:

$$S \to I \to R,$$

podložan $\to$ zaražen $\to$ oporavljen; implicira oporavak uz stečeni imunitet.

Postoje razne varijacije SIR epidemiološkog modela, ovisno o tome hoće li se jedinka nakon zaraze oporaviti i razviti imunitet ili ne. Ukoliko je jedinka podložna zarazi, zatim zaražena bolešću, ali nema oporavka od iste, onda govorimo o **SI epidemiološkom modelu**:

$$S \to I,$$

podložan $\to$ zaražen; ne implicira oporavak.

Ukoliko je jedinka podložna zarazi, zatim zaražena i na koncu ponovno podložna zarazi, odnosno nije razvila imunitet na spomenutu bolest, onda govorimo o **SIS epidemiološkom modelu**:

$$S \to I \to S,$$

podložan $\to$ zaražen $\to$ podložan; implicira oporavak, ali bez stečenog imuniteta.

Navedimo sada potrebne oznake za dane modele:

- $S(t)$ - broj podložnih jedinki u populaciji u vremenskom trenutku t,
- $I(t)$ - broj zaraženih jedinki u populaciji u vremenskom trenutku t,
- $R(t)$ - broj oporavljenih jedinki u populaciji u vremenskom trenutku t,

- N - konstantna veličina populacije
- β - očekivani broj kontakata u jedinici vremena koje je ostvarila zaražena osoba,
- b - broj umrlih (jednak broju rođenih),
- γ - stopa oporavka,
- $\frac{1}{\gamma}$ - prosječni period zaraze.

Pogledajmo sada primjere za SI, SIS i SIR epidemiološke modele u kojima pretpostavljamo da nema rađanja i umiranja, kako bismo osigurali konstantnu veličinu populacije.

3.1 SIS i SIR epidemiološki modeli bez rađanja i umiranja

U ovom dijelu rada objasnit ćemo jednostavne SI, SIS i SIR modele na primjerima. Uzmimo u ovom slučaju da je $b = 0$.

Primjer 6 (**SI epidemiološki model**). *Jednostavni SI epidemiološki model bez podataka o broju rođenih i umrlih u populaciji je sljedećeg oblika:*

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N}SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N}SI, \end{aligned} \tag{15}$$

gdje je $S(0) > 0, I(0) > 0$ i $S(0) + I(0) = N$.
Dakle, $S(t) + I(t) = N$. Ako zamijenimo S s $N - I$, diferencijalna jednadžba za I glasi:

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(1 - \frac{I}{N}).$$

Ova jednadžba pokazuje logistički rast u odnosu na prijenosni kapacitet (kapacitet prijenosa bolesti) u populaciji. Može se pokazati da $I(t) \to N$, tj. broj zaraženih konvergira prema broju populacije, što znači da u konačnici sve jedinke postaju zaražene. Ovakvi epidemiološki modeli primjenjivi su na visoko zarazne bolesti poput gripe.

Primjer 7 (SIS epidemiološki model). *Jednostavni SIS epidemiološki model bez podataka o broju rođenih i umrlih u populaciji je sljedećeg oblika:*

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N}SI + \gamma I, \qquad \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I, \tag{16}$$

gdje je γ stopa oporavka, $S(0) > 0, I(0) > 0$ i $S(0) + I(0) = N$.
Kao i u prethodnom primjeru, ukoliko S zamijenimo s $N - I$, diferencijalna jednadžba za I glasi:

$$\frac{dI}{dt} = (\beta - \gamma)I(1 - \frac{\beta}{(\beta - \gamma)N}I), \beta \neq \gamma.$$

Ukoliko je $\beta > \gamma$, zaražena populacija približava se broju $\frac{(\beta-\gamma)N}{\beta}$, a podložna populacija približava se broju $\frac{\gamma N}{\beta}$. U ovom slučaju, bolest ostaje endemska, tj. karakteristična za određeno područje.
Ukoliko je $\beta \leq \gamma$, zaražena populacija približava se nuli, tj. epidemija ne opstaje.
SIS epidemiološki modeli uglavnom se primjenjuju na spolno prenosive bolesti poput gonoreje i sifilisa, gdje se jedinke mogu izliječiti od bolesti, ali odmah nakon oporavka ponovno postaju podložne istima.

Prije navođenja posljednjeg primjera, uvest ćemo jednu bitnu definiciju:

Definicija 3.1. Broj sekundarnih infekcija koje uzrokuje jedna zaražena jedinka tijekom zaraznog perioda naziva se osnovni reprodukcijski broj u oznaci $\mathcal{R}$.

Dakle, $\mathcal{R}$ iz prethodne definicije predstavlja omjer prosječnog broja kontakata u jedinici vremena koje je ostvarila zaražena jedinka i stope oporavka zaraženih jedinki. Specijalno, u ovom modelu označavamo ga s $\mathcal{R}_0$ i računamo kao $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

Primjer 8 (SIR epidemiološki model)**.** *Jednostavni SIR epidemiološki model bez podataka o rođenim i umrlim u populaciji je sljedećeg oblika:*

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N}SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N}SI - \gamma I = I(\frac{\beta}{N}S - \gamma), \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I, \end{aligned} \tag{17}$$

gdje je $S(0) > 0, I(0) > 0, > R(0) \geq 0$ i $S(0) + I(0) + R(0) = N$.
Dakle, $S(t) + I(t) + R(t) = N$. Obzirom da se $R(t)$ može izraziti preko $S(t)$ i $I(t)$, dovoljno je promatrati samo varijable S i I. Primijetimo,

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\gamma N}{\beta S},$$

što možemo integrirati kako bismo dobili sljedeće:

$$I(t) = N - R(0) - S(t) + \frac{\gamma N}{\beta} \ln \frac{S(t)}{S(0)}.$$

Uočimo da se $S(t)$ smanjuje i $I(t)$ postiže maksimum kada vrijedi $S(t) = \frac{\gamma N}{\beta}$. Uz pretpostavku da je $S(t)$ padajuća funkcija od t, ako je $S(0) > \frac{\gamma N}{\beta}$, onda $I(t)$ postiže maksimum i dolazi do epidemije, a zatim opada prema nuli. S druge strane, ako je $S(0) \leq \frac{\gamma N}{\beta}$, tada $I(t)$ opada prema nuli i ne dolazi do epidemije. Broj zaraženih jedinki mora se približiti nuli, inače dolazimo do kontradikcije jer $R(t) \to \infty$.
Granična vrijednost od $S(t)$, definirana kao $\lim_{t\to\infty} S(t) = S(\infty)$, mora zadovoljavati sljedeću implicitnu jednadžbu:

$$S(\infty) = N - R(0)\frac{\gamma N}{\beta} \ln \frac{S(\infty)}{S(0)}.$$

Granična vrijednosti ovisi o početnim uvjetima, ali je uvijek pozitivna, tj. $S(\infty) > 0$. Dinamika SIR epidemiološkog modela ovisi o omjeru

$$\mathcal{R} = \frac{\beta S(0)}{\gamma N} = \mathcal{R}_0 x*,$$

gdje je $x* = \frac{S(0)}{N}$ i označava udio podložnih jedinki u populaciji, a $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ je osnovni reprodukcijski broj. Parametar $\mathcal{R}$ nekad se naziva i efektivnom stopom.

Napomenimo još da je u osnovne modele moguće uključiti dodatna stanja kako bi bili što realniji i primjenjiviji. Na primjer, latentno stanje je period nakon izlaganja bolesti, ali prethodno zarazi I. Često se označava s E pa se takav model naziva SEIR epidemiološkim modelom. Također, često se u dječje bolesti uključuje stanje u kojem novorođenčad prvenstveno ima imunitet na određene bolesti koji stvara pomoću antitijela dobivenih putem pupčane vrpce kao posljedicu majčine prethodne izloženosti bolesti. S vremenom se taj imunitet gubi, te dijete postaje podložno tim bolestima. Ovakvo stanje označava se s M. Ukoliko su sva navedena stanja uključena u model, govorimo o MSEIR epidemiološkom modelu.
Ono što je još važno spomenuti je masovno cijepljenje. Cijepljenje smanjuje ili eliminira mogućnost direktne ili indirektne zaraze. Cijepljene jedinke su zaštićene od direktne zaraze, a manji broj zaraženih jedinki smanjuje vjerojatnost da će necijepljena podložna osoba doći u kontakt s boleščću. Ovakav efekt naziva se *imunitet krda*. Kako bi program cijepljenja bio učinkovit, udio imuniziranih, u oznaci p, mora biti takav da ostatak populacije $(1-p)N$ bude manji od praga koji je potreban kako bi se bolest nastavila širiti.
Na početku epidemije vrijedi $S(0) \approx N$. Dakle, ako je pN podložnih jedinki cijepljeno, tada je $S(0) \approx (1-p)N$ i $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0(1-p)$. Kako bi se epidemija spriječila, nužno je da vrijedi $\mathcal{R}_0(1-p) < 1$. Procijenjena minimalna vrijednost za p pronalazi se rješavanjem jednadžbe $p = \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0}$.
Međutim, masovno cijepljenje može imati negativne posljedice. Nakon provođenja masovnog cijepljenja, prosječna dob u kojoj jedinka prvi put dobije neku zaraznu bolest se povećava ukoliko se radi o cjepivu koje ne stvara trajni imunitet na zaraznu bolest. Prisjetimo se:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} SI + \cdots \text{ ili } \frac{1}{S}\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} I + \cdots .$$

Vrijednost $F = \frac{\beta I}{N}$ naziva se stopom dobivanja bolesti za populaciju zaraženih I i stopu prijenosa bolesti $\frac{\beta}{N}$. Recipročna vrijednost od F je prosječno vrijeme prije dobivanja bolesti, tj. prosječna dob zaraze. Ovu vrijednost možemo smatrati prosječnom dobi u kojoj se osoba zarazi nekom boleščću. Označava se s $A = \frac{N}{\beta I}$. Cijepljenje smanjuje broj zaraženih jedinki I, što povećava prosječnu dob zaraze A. Treba napomenuti kako je cijepljenje preventivna mjera, te ukoliko za neku zaraznu bolest ne postoji cjepivo ili lijek, može se potegnuti za drugim strategijama suzbijanja širenja zaraze kao što je izolacija sumnjivih slučajeva. Ovakve strategije koristile su se pri pojavi SARS-a 2003. godine, kao i pojavi bolesti Covid-19 2020.godine.

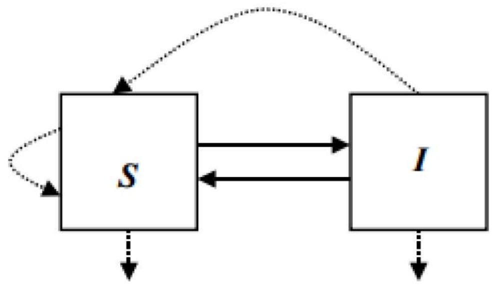
3.2 Deterministički SIS i SIR epidemiološki modeli

3.2.1 SIS epidemiološki model

U SIS epidemiološkom modelu, jedinke iz promatrane populacije, koje su podložne nekoj zaraznoj bolesti, nakon kontakta sa zaraženom jedinkom i same postaju zaražene, te zarazne. Međutim, nakon zaraze i preboljene bolesti, ne stvaraju imunitet na istu. Dakle, nakon faze zaraznosti, ponovno se vraćaju u stanje podložnosti bolesti. Uvest ćemo neke jednostavne pretpostavke kako bismo objasnili ovaj model:

- nema vertikalnog prijenosa bolesti, tj. podrazumijeva se da su se sve jedinke rodile podložne
- nema smrti povezanih s boleščću.

Jednostavnim dijagramom ćemo prikazati dinamiku SIS modela.



Slika 1: Dijagram dinamike determinističkog SIS modela

Pune strijelice u dijagramu označavaju zarazu i oporavak jedinki, a isprekidane strijelice bilježe smrti i rođenja.

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju dinamiku SIS modela baziranog na gore navedenim pretpostavkama su sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N}SI + (b+\gamma)I \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N}SI - (b+\gamma)I, \end{aligned} \tag{18}$$

gdje su oznake odgovarajuće ranije spomenutima. Početni uvjeti zadovoljavaju sljedeće: $S(0) > 0, I(0) > 0$ i $S(0) + I(0) = N$. Također pretpostavljamo da je stopa umrlih jednaka stopi rođenih kako bi populacija bila konstantan broj. Dinamika SIS modela određena je ranije spomenutim osnovnim reprodukcijskim brojem $\mathcal{R}_0$. Za ovakav model, osnovni reprodukcijski broj definiran je na sljedeći način:

$$\mathcal{R}_0 = \tfrac{\beta}{b+\gamma}.$$

Dakle, to je broj sekundarnih infekcija nastalih prenošenjem zaraze s jedne zaražene jedinke u potpuno podložnoj populaciji, a broj $\frac{1}{b+\gamma}$ je duljina zaraznog perioda prilagođena za broj umrlih.
Sljedeći teorem, koji navodimo bez dokaza, govori o asimptotskim svojstvima ovakvog SIS modela.

Teorem 3.2. *Neka su $S(t)$ i $I(t)$ rješenja modela (18). Tada vrijedi:*

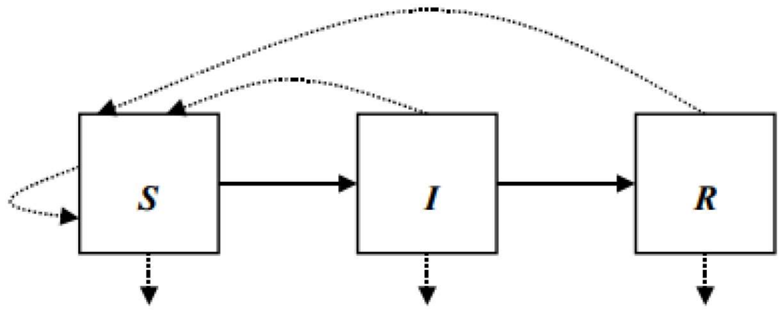
1. *ako je $\mathcal{R}_0 \leq 1$, onda vrijedi $\lim_{t\to\infty}(S(t), I(t)) = (N, 0)$ (ravnoteža bez bolesti),*

2. *ako je $\mathcal{R}_0 > 1$, onda vrijedi $\lim_{t\to\infty}(S(t), I(t)) = (\frac{N}{\mathcal{R}_0}, N(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}))$ (endemska ravnoteža).*

Više detalja o danom modelu može se naći u [6].

3.2.2 SIR epidemiološki model

U SIR epidemiološkom modelu, jedinke iz promatrane populacije postaju zaražene nekom boleš́cu, ali nakon toga stvaraju imunitet na tu istu bolest.
Jednostavnim dijagramom prikazat ćemo dinamiku SIR modela.



Slika 2: Dijagram dinamike determinističkog SIR modela

Kao i u prethodnom slučaju, pune strijelice označavaju zarazu, oporavak i imunost jedinki, a isprekidane strijelice bilježe smrti i rođenja u populaciji.

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju dinamiku SIR modela su sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N}SI + b(I+R)\\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N}SI - (b+\gamma)I\\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - bR,\end{aligned} \tag{19}$$

gdje je $\beta > 0, \gamma > 0, b \geq 0$ i totalna populacija zadovoljava $N = S(t)+I(t)+R(t)$. Početni uvjeti zadovoljavaju sljedeće: $S(0) > 0, I(0) > 0, R(0) \geq 0$ i $S(0)+I(0)+R(0) = N$. Pretpostavljamo da je stopa umrlih jednaka stopi rođenih kako bi populacija bila konstantan broj. Također, kao i u prethodnom modelu, dinamika SIR modela određena je osnovnim reprodukcijskim brojem (3.2.1) i stopom rođenih b. Sljedeći teorem, koji navodimo bez dokaza, govori o asimptotskim svojstvima ovakvog SIR modela.

Teorem 3.3. *Neka su $S(t), I(t)$ i $R(t)$ rješenja modela (19). Tada vrijedi:*

1. *ako je $\mathcal{R}_0 \leq 1$, onda je $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ (ravnoteža bez bolesti),*
2. *ako je $\mathcal{R}_0 > 1$, onda je*

$$\lim_{t\to\infty}(S(t), I(t), R(t)) = (\frac{N}{\mathcal{R}_0}, \frac{bN}{b+\gamma}(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}), \frac{\gamma N}{b+\gamma}(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}))$$

(endemska ravnoteža),

3. *pretpostavimo da je $b = 0$. Ako je $\mathcal{R}_0 \frac{S(0)}{N} > 1$, onda postoji početni porast u broju zaraženih $I(t)$ (epidemija), ali ako je $\mathcal{R}_0 \frac{S(0)}{N} \leq 1$, onda se $I(t)$ monotono smanjuje prema nuli (ravnoteža bez bolesti).*

Veličinu $\mathcal{R}_0 \frac{S(0)}{N}$ zovemo **efektivni reprodukcijski broj (efektivna stopa)**. To je prosječan broj sekundarnih infekcija nastalih prenošenjem zaraze s jedne zaražene jedinke u periodu zaraznosti na početku epidemije. Obzirom da se udio zaraženih mijenja tijekom epidemije, efektivni reprodukcijski broj se obično definira kao $\mathcal{R}_0 \frac{S(t)}{N}$. Ako govorimo o slučaju (3) iz 3.3, bolest postepeno iščezne iz populacije, ali ako je efektivni reprodukcijski broj veći od 1, dolazi do izbijanja epidemije.

3.3 SIS i SIR Markovljevi lanci

U ovom dijelu rada bavit ćemo se stohastičkim modelima za SIS i SIR epidemiološke modele koji su temeljeni na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu. Neka $\mathcal{S}(t), \mathcal{I}(t)$ i $\mathcal{R}(t)$ predstavljaju diskretne slučajne varijable koje redom označavaju broj podložnih, broj zaraženih i broj imunih jedinki u trenutku t. U epidemiološkom modelu temeljenom na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu, vrijedi sljedeće: $t \in \{0, \triangle t, 2\triangle t, \dots\}$ i $\mathcal{S}(t), \mathcal{I}(t), \mathcal{R}(t) \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$.
Pojasnimo sada pobliže posebno SIS, a zatim i SIR epidemiološki model.

3.3.1 Stohastički SIS epidemiološki model

U SIS modelu postoji samo jedna nezavisna slučajna varijabla $\mathcal{I}(t)$ jer je $\mathcal{S}(t) = N - \mathcal{I}(t)$, gdje je N konstantna veličina populacije. Jednodimenzionalne distribucije stohastičkog procesa $\{\mathcal{X}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ dane su s:

$$p_i(t) = \mathbb{P}(\mathcal{X}(t) = i),$$

gdje je $i = 0, 1, 2, \dots, N$ i $t = 0, \triangle t, 2\triangle t, \dots$ i $\sum_{i=0}^{N} p_i(t) = 1$, $\forall t$. Neka je $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_N(t))^\top$ distribucija od $\mathcal{X}(t)$. Stohastički proces ima Markovljevo svojstvo ako vrijedi:

$$\mathbb{P}(\mathcal{X}(t + \triangle t) | \mathcal{X}(0), \mathcal{X}(\triangle t), \dots, \mathcal{X}(t)) = \mathbb{P}(\mathcal{X}(t + \triangle t) | \mathcal{X}(t)).$$

Dakle, Markovljevo svojstvo znači da proces u trenutku $t + \triangle t$ ovisi samo o procesu u prethodnom trenutku t.
Kako bismo mogli u potpunosti formulirati SIS model temeljen na ML u diskretnom vremenu (*eng.* DTMC- Discrete time Markov chain), potrebno je definirati vezu između stanja $\mathcal{X}(t)$ i $\mathcal{X}(t + \triangle t)$. Veza između ova dva stanja počiva na temeljnim pretpostavkama SIS epidemiološkog modela i definirana je pomoću matrice prijelaznih vjerojatnosti. Vjerojatnost prijelaza iz stanja $\mathcal{I}(t) = i$ u stanje $\mathcal{X}(t + \triangle t) = j$, $i \to j$, u vremenu $\triangle t$, definirana je kao

$$p_{ji}(t) = \mathbb{P}(\mathcal{X}(t + \triangle t) = j | \mathcal{X}(t) = i).$$

Ukoliko prijelazna vjerojatnost $p_{ji}(t + \triangle t, t)$ ne ovisi o vremenu t, kažemo da je proces homogen. Stohastički proces za SIS epidemiološki model je homogen zbog toga što je deterministički model autonoman. Autonomnost determinističkog SIS modela znači da konstantnu veličinu populacije N možemo zamijeniti s $S = N - I$ kako bismo dobili jednu diferencijsku jednadžbu, koju treba riješiti, umjesto dvije. Kako bismo smanjili broj prijelaza u vremenu $\triangle t$, dodajemo još jednu pretpostavku. Izabiremo vremenski korak $\triangle t$ dovoljno mali takav da se broj zaraženih u intervalu $\triangle t$ mijenja za najviše jedan. Ukoliko bismo prikazivali prijelaz među stanjima, to bi izgledalo ovako: $i \to i + 1$, $i \to i - 1$ ili $i \to i$. Dakle, mogući scenariji su sljedeći: ili dolazi do nove zaraze, rođenja ili smrti, ili oporavka u vremenskom intervalu $\triangle t$. Dakako, postoji mogućnost da se posljednja pretpostavka korigira ukoliko se vremenski korak ne može izabrati proizvoljno malim. U posljednjoj pretpostavci, potrebno je definirati prijelazne vjerojatnosti za sve moguće

prijelaze koji se mogu dogoditi: $i \to i+2$, $i \to i+3$ itd. U najjednostavnijem slučaju, ako postoje samo tri mogućnosti prijelaza, onda su prijelazne vjerojatnosti definirane pomoću stopa definiranih u determinističkom SIS modelu, pomnoženih s $\triangle t$.
Prijelazne vjerojatnosti za model temeljen na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu su sljedećeg oblika:

$$p_{ji}(\triangle t) = \begin{cases} \frac{\beta i(N-i)}{N}\triangle t, & j = i+1 \\ (b+\gamma)i\triangle t, & j = i-1 \\ 1 - [\frac{\beta i(N-i)}{N} + (b+\gamma)i]\triangle t, & j = i \\ 0, & j \neq i+1, i, i-1. \end{cases}$$

Vjerojatnost nove infekcije, $i \to i+1$, je $\frac{\beta i(N-i)}{N}\triangle t$. Vjerojatnost smrti ili oporavka, $i \to i-1$, je $(b+\gamma)i\triangle t$, a vjerojatnost da nema promjene u stanju, $i \to i$, je $1-[\frac{\beta i(N-i)}{N}+(b+\gamma)i]\triangle t$. Obzirom da rođenje podložne jedinke mora biti popraćeno smrću, kako bi se veličina populacije održala konstantnom, ova vjerojatnost nije potrebna u formulaciji determinističkog, ali ni stohastičkog procesa.
Kako bismo pojednostavili notaciju, ali i povezali SIS epidemiološki proces s procesom rađanja i umiranja, prijelazna vjerojatnost za novu zarazu označena je s $b(i)\triangle t$, a prijelazna vjerojatnost smrti ili oporavka s $d(i)\triangle t$. Tada funkcija prijelaznih vjerojatnosti izgleda ovako:

$$p_{ji}(\triangle t) = \begin{cases} b(i)\triangle t, & j = i+1, \\ d(i)\triangle t, & j = i-1, \\ 1 - [b(i)+d(i)]\triangle t, & j = i, \\ 0, & j \neq i+1, i, i-1. \end{cases}$$

Suma ove tri prijelazne vjerojatnosti jednaka je 1 zbog toga što ti prijelazi predstavljaju sve moguće promjene u stanju i tijekom intervala $\triangle t$. Kako bismo se osigurali da će nam prijelazne vjerojatnosti uvijek biti unutar intervala $[0,1]$, vremenski korak $\triangle t$ mora biti dovoljno mali tako da vrijedi

$$max_{i \in \{1,\ldots,N\}}\{[b(i)+d(i)]\triangle t\} \leq 1.$$

Primjenom Markovljevog svojstva i prethodnih prijelaznih vjerojatnosti, vjerojatnosti oblika $p_i(t+\triangle t)$ mogu se izraziti u terminima vjerojatnosti u trenutku t. U trenutku $t+\triangle t$, vrijedi:

$$p_i(t+\triangle t) = p_{i-1}(t)b(i-1)\triangle t + p_{i+1}(t)d(i+1)\triangle t + p_i(t)(1-[b(i)+d(i)]\triangle t), \tag{20}$$

za $i = 1, 2, \ldots, N$, gdje je $b(i) = \beta_i(N-i)/N$ i $d(i) = (b+\gamma)i$.
Nadalje, definirat ćemo matricu prijelaznih vjerojatnosti. Napomenimo kako će stanja u matrici biti poredana od 0 do N. Na primjer, element na poziciji $(1,1)$ će biti prijelazna vjerojatnost iz stanja 0 u stanje 0, tj. $p_{00}(\triangle t) = 1$, a element na poziciji $(N+1, N+1)$ će biti prijelazna vjerojatnost iz stanja N u stanje N,

tj. $p_{NN}(\triangle t) = 1 - [b+\gamma]N\triangle t = 1 - d(N)\triangle t$. Označimo matricu prijelaznih vjerojatnosti s $P(\triangle t)$. $P(\triangle t)$ će biti trodijagonalna matrica dimenzije $(N+1) \times (N+1)$. Matrica je sljedećeg oblika:

$$P(\triangle t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d(1)\triangle t & 1-(b+d)(1)\triangle t & b(1)\triangle t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d(2)\triangle t & 1-(b+d)(2)\triangle t & b(2)\triangle t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d(N-1)\triangle t & 1-(b+d)(N-1)\triangle t & b(N-q)\triangle t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d(N)\triangle t & 1d(N)\triangle t \end{bmatrix},$$

gdje je $(b+d)(i) = b(i) + d(i)$, za $i = 1, 2, \ldots, N$. Matrica $P(\triangle t)$ je stohastička matrica pa je zbroj elemenata u redovima jednak 1.
Sada smo u potpunosti formulirali SIS epidemiološki proces temeljen na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu $\{\mathcal{X}(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Ukoliko je dan početni vektor redak vjerojatnosti $p(0)$, slijedi da je $p(\triangle t) = p(0)P(\triangle t)$. Tada je izraz (20) izražen pomoću matričnog i vektorskog zapisa sljedećeg oblika:

$$p(t+\triangle t) = p(t)P(\triangle t) = p(0)P^{n+1}(\triangle t), \tag{21}$$

gdje je $t = n\triangle t$. Diferencijske jednadžbe za aritmetičku sredinu i momente višeg reda ovog epidemiološkog procesa mogu se dobiti izravno iz diferencijske jednadžbe (20). Na primjer, očekivana vrijednost za $\mathcal{X}(t)$ je $E(\mathcal{X}(t)) = \sum_{i=0}^{N} ip_i(t)$. Množeći jednadžbu 20 s i i sumirajući po i, dobijemo sljedeće:

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}(t+\triangle t)) &= \sum_{i=0}^{N} ip_i(t+\triangle t) \\ &= \sum_{i=1}^{N} ip_{i-1}(t)b(i-1)\triangle t + \sum_{i=0}^{N-1} ip_{i+1}(t)d(i+1)\triangle t \\ &+ \sum_{i=0}^{N} ip_i(t) - \sum_{i=0}^{N} ip_i(t)b(i)\triangle t - \sum_{i=0}^{N} ip_i(t)d(i)\triangle t. \end{aligned}$$

Ako pojednostavimo i supstituiramo izraze $\beta_i(n-i)/N$ i $(b+\gamma)i$ s $b(i)$ i $d(i)$, dobijemo:

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}(t+\triangle t)) &= E(\mathcal{X}(t)) + \sum_{i=1}^{N} p_{i-1}(t)\frac{\beta(i-1)(N-(i-1))}{N}\triangle t \\ &- \sum_{i=0}^{N-1} p_{i+1}(t)(b+\gamma)(i+1)\triangle t \\ &= E(\mathcal{X}(t)) + [\beta - (b+\gamma)]\triangle t E(\mathcal{X}(t)) - \frac{\beta}{N}\triangle t E(\mathcal{X}^2(t)), \end{aligned}$$

gdje je $E(\mathcal{X}^2(t)) = \sum_{i=0}^{N} i^2 p_i(t)$. Dakle, diferencijska jednadžba za aritmetičku sredinu ovisi o drugom momentu. S druge strane, diferencijske jednadžbe za drugi moment i momente višeg reda ovise o momentima još viših redova. Zbog toga se ove jednadžbe ne mogu riješiti ukoliko ne dodamo još pretpostavki vezanih uz momente višeg reda.

Međutim, kako je $E(\mathcal{X}^2(t)) \geq E^2(\mathcal{X}(t))$, aritmetička sredina zadovoljava sljedeću nejednakost:

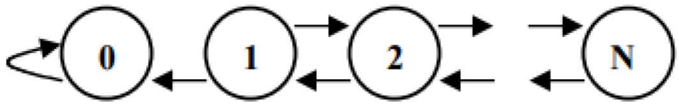
$$\frac{E(\mathcal{X}(t+\triangle t)) - E(\mathcal{X}(t))}{\triangle t} \leq [\beta - (b+\gamma)]E(\mathcal{X}(t)) - \frac{\beta}{N}E^2(\mathcal{X}(t)). \tag{22}$$

S obzirom da $\triangle t \to 0$, vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{dE(\mathcal{X}(t))}{dt} &\leq [\beta - (b+\gamma)]E(\mathcal{X}(t)) - \frac{\beta}{N}E^2(\mathcal{X}(t)) \\ &= \frac{\beta}{N}[N - E(\mathcal{X}(t))]E(\mathcal{X}(t)) - (b+\gamma)E(\mathcal{X}(t)). \end{aligned} \tag{23}$$

Desna strana jednadžbe (23) je jednaka kao diferencijska jednadžba za $I(t)$ u (18) ukoliko se u (18) $I(t)$ i $S(t)$ zamijene s $E(\mathcal{I}(t))$ i $N - E(\mathcal{I}(t))$, redom. Diferencijska nejednakost implicira da je aritmetička sredina slučajne varijable $\mathcal{I}(t)$ u stohastičkom SIS procesu manja od rješenja za $I(t)$ determinističkih diferencijskih jednadžbi u (18).

Određena svojstva SIS modela temeljenog na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu slijede direktno iz teorije o Markovljevim lancima. Shematski prikaz SIS modela temeljenog na Markovljevim lancima možemo vidjeti na sljedećoj slici:



Slika 3: Shematski prikaz stanja SIS epidemiološkog modela

gdje su $i = 0, 1, \ldots, N$ zaražena stanja. Stanja $\{0, 1, \ldots, N\}$ mogu se podijeliti u dva skupa. Jedan skup sadrži povratno tanje $\{0\}$, a drugi prolazna stanja $\{1, \ldots, N\}$. Stanje 0 s prikazanog digrafa je apsorbirajuće stanje. S obzirom da krenuvši iz stanja 0 ne možemo doći do nijednog drugog stanja, skup $\{0\}$ je zatvoren. Primijetimo da u drugom skupu stanja iz svakog stanja možemo doći u preostala, ali skup $\{1, \ldots, N\}$ nije zatvoren jer je $p_{01}(\triangle t) > 0$.

Za prolazna stanja možemo pokazati da elementi matrice prijelaznih vjerojatnosti imaju sljedeće svojstvo:

Neka je $P^n = [p_{ij}^{(n)}]_{i,j \in S}$, gdje je $p_{ij}^{(n)}$ (i, j)-ti element n-te potencije matrice prijelaznih vjerojatnosti, P^n. Tada je $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ za svako stanje j i svako prolazno stanje i. Limes matrice P^n kada $n \to \infty$ je stohastička matrica, gdje su svi stupci 0 osim prvog koji sadrži sve jedinice. Iz jednadžbe (21) i teorije Markovljevih lanaca slijedi da je

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = (1, 0, \ldots, 0),$$

gdje je $t = n\triangle t$.

Prethodni rezultat implicira da se populacija u SIS epidemiološkom modelu temeljenom na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu približava ravnoteži bez bolesti bez obzira na veličinu osnovnog reprodukcijskog broja.

3.3.2 Stohastički SIR epidemiološki model

Neka su $\mathcal{S}(t), \mathcal{I}(t)$ i $\mathcal{R}(t)$ diskretne slučajne varijable koje označavaju broj podložnih, zaraženih i imunih jedinki u populaciji u trenutku t, redom. SIR epidemiološki model temeljen na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu je dvodimenzionalni proces koji sadrži dvije varijable, $\mathcal{S}(t), \mathcal{I}(t)$. Slučajna varijabla $\mathcal{R}(t)$ je oblika $\mathcal{R}(t) = N - \mathcal{S}(t) - \mathcal{I}(t)$. Dvodimenzionalni proces $\{X(t)\}_{t=0}^{\infty} = \{(\mathcal{S}(t), \mathcal{I}(t))\}_{t=0}^{\infty}$ ima dvodimenzionalnu marginalnu distribuciju oblika

$$p_{(s,i)}(t) = \mathbb{P}(\{\mathcal{S}(t) = s, \mathcal{I}(t) = i\}).$$

Ovakav proces također ima Markovljevo svojstvo i homogen je.
Prijelazne vjerojatnosti mogu se definirati koristeći pretpostavke iz formulacije determinističkog SIR modela. Prvo pretpostavimo da $\triangle t$ možemo izabrati dovoljno mali tako da se najviše jedna promjena u stanju dogodi tijekom vremenskog intervala $\triangle t$. Dakle, može se dogoditi ili jedna nova zaraza, rođenje, smrt ili oporavak. Prijelazne vjerojatnosti dane su na sljedeći način:

$$p_{(s+k,i+j),(s,i)}(\triangle t) = \mathbb{P}((\triangle\mathcal{S}, \triangle\mathcal{I}) = (k,j) | (\mathcal{S}(t), \mathcal{I}(t)) = (s,i)),$$

gdje je $\triangle\mathcal{S} = \mathcal{S}(t + \triangle t) - \mathcal{S}(t)$. Dakle, vrijedi:

$$p_{(s+k,i+j),(s,i)}(\triangle t) = \begin{cases} \beta is/N\triangle t, & (k,j) = (-1,1) \\ \gamma i\triangle t, & (k,j) = (0,-1) \\ bi\triangle t, & (k,j) = (1,-1) \\ b(N-s-i)\triangle t, & (k,j) = (1,0) \\ 1 - \beta is/N\triangle t & \\ -[\gamma i + b(N-s)]\triangle t, & (k,j) = (0,0) \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Vremenski korak $\triangle t$ mora biti dovoljno mali tako da sve prijelazne vjerojatnosti leže u intervalu $[0,1]$. Obzirom da su sada stanja prikazana u uređenim parovima, matrica prijelaznih vjerojatnosti je puno složenija nego u SIS modelu, a njezina forma ovisi o tome kako su stanja (s,i) poredana. Međutim, ukoliko primijenimo Markovljevo svojstvo, tada diferencijsku jednadžbu, koju vjerojatnost $p_{(s,i)}(t+\triangle t)$ zadovoljava, možemo izraziti u terminima prijelaznih vjerojatnosti,

$$\begin{aligned} p_{(s,i)}(t+\triangle t) = {} & p_{(s+1,i-1)}(t)\frac{\beta}{N}(i-1)(s+1)\triangle t + p_{(s,i+1)}(t)\gamma(i+1)\triangle t \\ & + p_{(s-1,i+1)}(t)b(i+1)\triangle t + p_{(s-1,i)}(t)b(N-s+1-i)\triangle t \\ & + p_{(s,i)}(t)(1 - [\frac{\beta}{N}is + \gamma i - b(N-s)]\triangle t). \end{aligned} \tag{24}$$

Shematski prikaz SIR modela temeljenog na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu leži na dvodimenzionalnoj rešetci. Može se pokazati da je stanje $(N,0)$ apsorbirajuće ($p_{(N,0),(N,0)}(\triangle t) = 1$), a da su sva ostala stanja prolazna. Asimptotski, svi putevi u uzorku se s vremenom apsorbiraju u stanje bez bolesti $(N,0)$.

Diferencijske jednadžbe za aritmetičku sredinu i momente višeg reda mogu se izvesti iz (24) slično kao što smo to učinili u SIS modelu. Primjerice, uzmemo $E(\mathcal{S}(t)) = \sum_{s=0}^{N} s p_{(s,i)}(t)$ i $E(\mathcal{I}(t)) = \sum_{i=0}^{N} i p_{(s,i)}(t)$. Naime, diferencijske jednadžbe za SIR epidemiološki model nije moguće riješiti direktno jer ovise o momentima višeg reda.

3.4 Neka svojstva stohastičkih SIS i SIR epidemioloških modela temeljenih na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu

3.4.1 Vjerojatnost izbijanja epidemije

Izbijanje epidemije događa se u trenu kada se broj slučajeva zaraze naglo poveća. Za procjenu vjerojatnosti izbijanja epidemije koriste se model jednostavne slučajne šetnje (za Markovljeve lance u diskretnom vremenu) i proces rađanja i umiranja (za Markovljeve lance u neprekidnom vremenu).
Neka je $X(t)$ slučajna varijabla koja označava poziciju (stanje) u trenutku t u skupu $\{0, 1, 2, \ldots\}$ u modelu slučajne šetnje. Neka je stanje 0 apsorbirajuće, a sva ostala stanja u skupu prolazna. Ako je $X(t) = x$, onda se u sljedećem vremenskom intervalu može dogoditi jedan od sljedećih poteza: pomak udesno $x \to x + 1$ s vjerojatnošću p ili pomako ulijevo $x \to x - 1$ s vjerojatnošću q, uz iznimku kod stanja 0 gdje nema pomaka, tj. $p + q = 1$. U modelu slučajne šetnje, proces se ili približava stanju 0 ili beskonačnosti. Vjerojatnost apsorbcije u stanje 0 ovisi o p i q, te početnoj poziciji. Neka je $X(t) = x_0 > 0$. Tada se može pokazati sljedeće:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X(t) = 0) = \begin{cases} 1, & p \leq q, \\ (\frac{q}{p})^{x_0}, & p > q. \end{cases} \tag{25}$$

Rezultat (25) također vrijedi za proces rađanja i umiranja kod Markovljevih lanaca u diskretnom i u neprekidnom vremenu, gdje su b i d supstituirani s λi i μi, a i označava poziciju (stanje) u trenutku t u skupu $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Pretpostavljamo da je $X(0) = N$. U ovom procesu, prijelazne vjerojatnosti zadovoljavaju sljedeće:

$$p_{i+j,i}(\triangle t) = \begin{cases} \lambda i \triangle t + o(\triangle t), & j = 1, \\ \mu i \triangle t + o(\triangle t), & j = -1, \\ 1 - (\lambda + \mu) i \triangle t + o(\triangle t), & j = 0. \end{cases}$$

U rezultatu (25) λ zamjenjuje vjerojatnost p, a μ vjerojatnost q. Ukoliko je $\lambda \leq \mu$, vjerojatnost apsorpcije je jednaka 1. U slučaju da je $\lambda > \mu$, vjerojatnost apsorpcije smanjuje se na $(\mu/\lambda)^{x_0}$. Tada je vjerojatnost opstanka stanovništva jednaka $1 - (\mu/\lambda)^{x_0}$. Na ovaj način možemo aproksimirati vjerojatnost izbijanja epidemije u SIS i SIR modelima temeljenima na Markovljevim lancima u diskretnom, ali i neprekidnom vremenu. Aproksimacija se poboljšava s porastom populacije N i smanjenjem početnog broja zaraženih jedinki.
Neka je početni broj zaraženih jedinki i_0 mali i veličina populacije N velika. Tada se "funkcija rođenja" i "funkcija smrti" za SIS epidemiološki model mogu zadati na sljedeći način:

$$b(i) = \frac{\beta}{N} i(N - i) \approx \beta i,$$
$$d(i) = (b + \gamma) i.$$

Ukoliko primijenimo gore navedene aproksimacije funkcija i rezultat (25), tada dobijemo aproksimaciju $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{b+\gamma}{\beta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$, odnosno

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}(t) = 0) \approx \begin{cases} 1, & \mathcal{R}_0 \leq 1, \\ (\frac{1}{\mathcal{R}_0})^{i_0}, & \mathcal{R}_0 > 1. \end{cases}$$

Dakle, slijedi da je vjerojatnost izbijanja epidemije jednaka

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}(t) > 0) \approx \begin{cases} 0, & \mathcal{R}_0 \leq 1, \\ 1 - (\frac{1}{\mathcal{R}_0})^{i_0}, & \mathcal{R}_0 > 1. \end{cases} \tag{26}$$

Procjene prikazane u (26) odnose se na stohastičke SIS i SIR modele samo u vremenskim intervalima $t \in [T_1, T_2]$. Zbog toga što je 0 apsorbirajuće stanje, s vremenom će u stohastičkom modelu limes vjerojatnosti da je broj zaraženih jednak nuli otići u 1, tj. $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{I}(t) = 0) = 1$. Dakle, obzirom da je 0 apsorbirajuće stanje, ovaj stohastički proces se asimptotski približava jedinstvenoj stacionarnoj distribuciji koja je prema teoremu (3.2) ravnotežno stanje bez bolesti $(N, 0)$. Raspon vremenskih intervala za koje (26) vrijedi može biti velik kada je N velik i i_0 mali.

3.4.2 Očekivano vrijeme trajanja epidemije

Trajanje epidemije odgovara vremenu do apsorbcije, tj. vremenu T dok ne vrijedi $\mathcal{I}(T) = 0$. Za stohastički SIS model vrijedi da je vjerojatnost apsorpcije jednaka 1, bez obzira na vrijednost $\mathcal{R}_0$. Međutim, ovisno o početnom broju zaraženih jedinki i, veličini populacije N i vrijednost $\mathcal{R}_0$, vrijeme do apsorbcije može biti veoma kratko ili veoma dugo. Izvest ćemo sustav jednadžbi koji se može riješiti tako da se dobije očekivano vrijeme apsorpcije za stohastički SIS model.
Neka T_i označava slučajnu varijablu kojom modeliramo vrijeme do apsorpcije i neka

$$\tau_i = E_i(T_i)$$

označava očekivano vrijeme do apsorpcije počevši od početnog broja zaraženih jedinki i, $i = 0, 1, \ldots, N$. Označimo momente višeg reda s

$$\tau_i^r = E_i(T_i^r),$$

za $i = 0, 1, \ldots, N$. Primijetimo da je $\tau_0 = 0 = \tau_0^r$. Tada očekivano vrijeme do apsorpcije, u modelu temeljenom na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu, zadovoljava sljedeću diferencijsku jednadžbu:

$$\begin{aligned} \tau_i = &\, b(i)\triangle t(\tau_{i+1} + \triangle t) + d(i)\triangle t(\tau_{i-1} + \triangle t) \\ &+ (1 - [b(i) + d(i)]\triangle t)(\tau_i + \triangle t), i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{27}$$

SIS model temeljen na Markovljevim lancima u neprekidnom vremenu također zadovoljava jednaku relaciju kao i (27), osim što se na kraj svake jednadžbe s desne strane dodaje izraz $o(\triangle t)$ koji označava funkciju od $\triangle t$ koja opada u nulu brže od $\triangle t$. Ukoliko pojednostavimo (27), dobijemo sustav diferencijskih jednadžbi za očekivano trajanje epidemije

$$d(i)\tau_{i-1} - [b(i) + d(i)]\tau_i + b(i)\tau_{i+1} = -1,$$

gdje je $b(i) = i(N - i)(\beta_i/N)$ i $d(i) = (b + \gamma)i$. Slične diferencijske jednadžbe primjenjuju se na momente višeg reda u modelu temeljenom na Markovljevim lancima u neprekidnom vremenu:

$$d(i)\tau^r_{i-1} - [b(i) + d(i)]\tau^r_i + b(i)\tau^r_{i+1} = -r\tau^{r-1}_i.$$

Aritmetička sredina i momenti višeg reda mogu se izraziti u matričnoj formi. Neka je $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N)^\top$, $\tau^r = (\tau^r_1, \tau^r_2, \ldots, \tau^r_N)^\top$ i $\tau^1 = \tau$. Tada je

$$D\tau = -\mathbf{1}, D\tau^r = -r\tau^{r-1},$$

gdje je $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ i

$$D = \begin{bmatrix} -[b(1)+d(1)] & b(1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d(2) & -[b(2)+d(2)] & b(2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d(N) & -d(N) \end{bmatrix}.$$

Matrica D nije singularna jer je ireducibilna, dijagonalno dominantna. Objasnimo pobliže ovu tvrdnju.

Definicija 3.4. Za neku matricu A kažemo da je **reducibilna** ako postoji permutacijska matrica P takva da je matrica $P^{-1}AP$ oblika:

$$\begin{bmatrix} X & O \\ Y & Z \end{bmatrix},$$

gdje su X i Z kvadratne matrice i O nul-matrica. U suprotnom, kažemo da je A **ireducibilna.**

Iz oblika matrice D vidimo da je ireducibilna zbog toga što bi u blok-strukturi prema definiciji (3.4) i Y bila nul-matrica, a takva matrica bi bila singularna jer nije invertibilna. Također, ukoliko pogledamo strukturu matrice D, jasno je vidljivo da su elementi na glavnoj dijagonali, te elementi koji na neki način "prate" tu dijagonalu na pozicijama jedno mjesto lijevo i desno od nje, jedini elementi koji su različiti od 0 pa u tom smislu matricu nazivamo dijagonalno dominantnom. Sada vidimo da će matrica D biti regularna. Ukoliko bismo sada riješili sustave jednadžbi, čiji su matrični zapisi $D\tau = -\mathbf{1}, D\tau^r = -r\tau^{r-1}$, dobili bismo jedinstvena rješenja τ i τ^r.

Pogledajmo jednostavan primjer koji pokazuje očekivano vrijeme trajanja epidemije u SIS epidemiološkom modelu.

Primjer 9. *Neka je veličina populacije* $N = 50$ *i osnovni reprodukcijski broj* $\mathcal{R}_0 = 1.5$. *Tražimo očekivano vrijeme trajanja epidemije. Znamo da vrijedi* $\tau = D^{-1}\mathbf{1}$. *Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobije se da je očekivano vrijeme trajanja epidemije, za velik broj zaraženih u populaciji* i, $\tau_i \approx 160$.
Ukoliko uzmemo $N = 100$ *i* $\mathcal{R}_0 = 1.5$, *za očekivano vrijeme trajanja epidemije (za velike* i*) dobijemo* $\tau_i \approx 3500$. *Važno je napomenuti da* τ *ovisi o vremenskim jedinicama u kojima promatramo epidemiju. Primjerice, ako u prethodna dva primjera stavimo da su mjerne jedinice dani, tada je za prvi slučaj* $\tau_i \approx 160 \approx 5.3$ *mjeseci, a za drugi slučaj* $\tau_i \approx 3500 \approx 68.5$ *godina.*

U prethodnom primjeru vidimo da su procjene vremena trajanja epidemije puno veće nego što je to uobičajeno, što implicira da bolest opstaje umjesto da izumire. Za $N \geq 100$ i $\mathcal{R}_0 \geq 2$, ako dođe do izbijanja epidemije s dovoljno velikim brojem zaraženih jedinki, tada se rezultati stohastičkog SIS modela jako približavaju predviđanjima determinističkog SIS modela, tj. bolest postaje endemična.

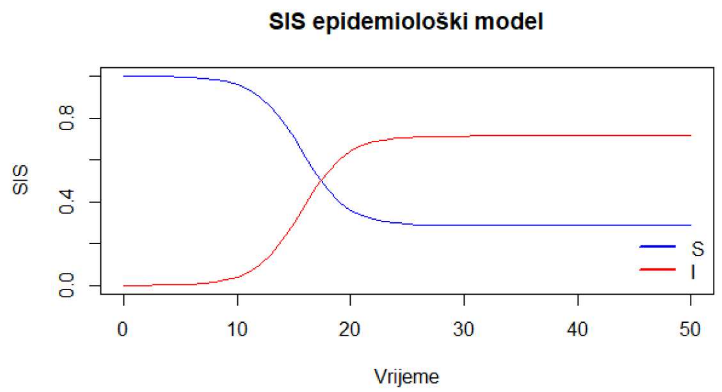
3.5 Simulacije SIS i SIR epidemioloških modela

U ovom poglavlju pogledat ćemo kako bi izgledale simulacije SIS i SIR epidemioloških modela, tj. proučiti grafove koji prikazuju krivulje podložnih jedinki (S) i zaraženih jedinki (I) za SIS model, ovisno o različitim vrijednostima parametara γ i β, te graf koji prikazuje krivulje za $S(t)$, $I(t)$ i $R(t)$ za određene parametre γ i β.

3.5.1 Simulacija SIS epidemiološkog modela

Promotrimo situaciju u kojoj imamo populaciju koju čini $N = 25007$ jedinki. Pretpostavit ćemo da je broj zaraženih jedinki $I = 7$, a broj podložnih $S = 25000$. Uzmimo vremenski period od 50 dana, dakle promatramo krivulju rasta ili pada broja podložnih i zaraženih jedinki tijekom tih 50 dana, ovisno o prosječnom očekivanom broju kontakata β koje je ostvarila zaražena jedinka i stopi oporavka od zarazne bolesti γ.

Primjer 10. *Neka je $N = 25007$, $S = 25000$, $I = 7$, $\beta = 0.7$, $\gamma = 0.2$ i $\mathcal{R}_0 = 3.5$. Uočimo da je $\mathcal{R}_0 > 1$, što prema teoremu (3.2) znači da će bolest postati endemska. Pogledajmo sada grafički prikaz ovakve situacije:*



Slika 4: Simulacija SIS modela za $\beta = 0.7$ i $\gamma = 0.2$

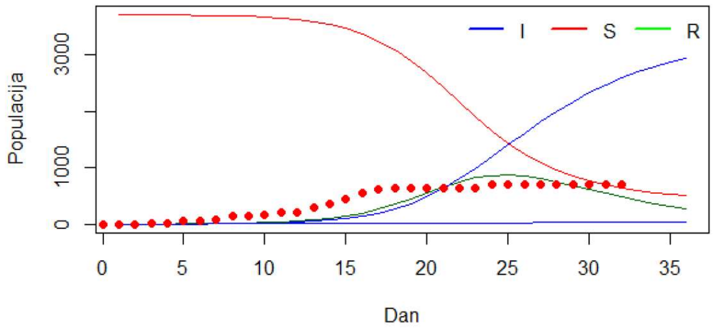
Iz prethodnog grafa možemo uočiti sljedeće: na y-osi označen je udio zaraženih i podložnih jedinki, a na x-osi vrijeme izraženo u danima. Primijetimo da udio podložnih jedinki kreće s tek nešto manje od 100%, a udio zaraženih nešto više od nula s obzirom na početne vrijednosti koje smo uzeli. Možemo vidjeti da dolazi do naglog pada udjela podložnih jedinki, te naglog rasta udjela zaraženih jedinki. Negdje oko 18. dana trajanja epidemije udio podložnih i zaraženih jedinki su jednaki, nakon čega dolazi do kraćeg pada u udjelu podložnih, tj. kraćeg rasta u udjelu zaraženih jedinki. Oko 23. dana epidemije dolazi do stagniranja udjela podložnih i zaraženih jedinki, te ostaju jednaki kroz ostatak promatranog razdoblja.

3.5.2 Simulacija SIR epidemiološkog modela

Primjer 11. *Proučimo situaciju u kojoj kroz vremenski period od 34 dana promatramo širenje bolesti Covid-19 među 3711 osoba na brodu Diamond Princess 2020.godine. Zaraza počinje sa samo jednom zaraženom osobom. U sljedećoj tablici navodimo broj zaraženih osoba tijekom danih 34 dana (uzimamo u obzir samo slučajeve zaraze potvrđene PCR testom).*

Dan	*Broj zaraženih*
0	*1*
1	*1*
2	*1*
3	*10*
4	*10*
5	*20*
6	*61*
7	*64*
8	*70*
9	*135*
10	*135*
11	*174*
12	*218*
13	*218*
14	*285*
15	*355*
16	*454*
17	*542*
18	*621*
19	*634*
20	*634*
21	*634*
22	*634*
23	*634*
24	*634*
25	*705*
26	*705*
27	*705*
28	*705*
29	*705*
30	*705*
31	*705*
32	*705*
33	*712*

Neka je $\beta = 0.03, \gamma = 0.2$. Dakle, očekivani broj kontakata u jedinici vremena koje ostvari zaražena osoba iznosi 0.03, a stopa oporavka zaraženih osoba u jedinici vremena iznosi 0.2. Podaci navedeni u tablici mogu se pronaći u [10]. Sada *pomoću ovih podataka i korištenjem R-koda za simuliranje SIR modela, dobijemo sljedeći graf:*



Slika 5: Simulacija SIR modela za epidemiju bolesti Covid-19 na brodu Diamond Princess za $\beta = 0.03, \gamma = 0.2$

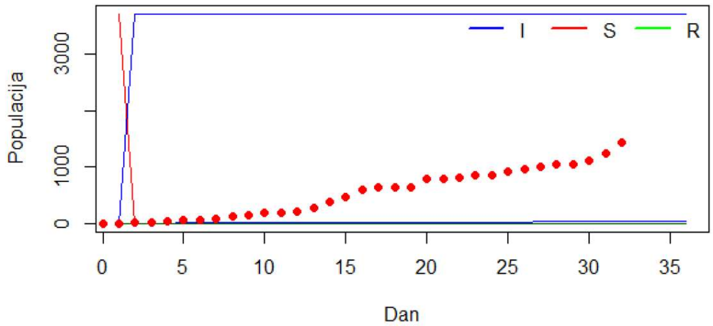
Napomenimo da su crvene točkice na grafičkom prikazu stvaran broj zaraženih prema danim podacima. Iz grafa možemo vidjeti da bi broj ljudi podložnih epidemiji na kraju promatranog razdoblja bio ispod 1000, a broj zaraženih bi se povećao na gotovo 3000. Možemo vidjeti da je broj oporavljenih u ovoj simulaciji također u padu prema kraju promatranog razdoblja. Razlog ovakvom rezultatu je taj što izbijanje epidemije ne mora zahvatiti cijelu populaciju. Ishod epidemije dosta ovisi o prijenosu zaraze i stopi oporavka. Ukoliko bismo mijenjali vrijednosti parametara β *i* γ*, dobili bismo nešto drukčije rezultate. Primjerice, ako povećamo vrijednost* γ*, kao rezultat ćemo dobiti manji broj zaraženih. U suprotnom, došlo bi do povećanja broja zaraženih upravo zbog toga što* γ *predstavlja stopu oporavka zaraženih jedinki u SIR modelu. Dakle, ako povećamo stopu oporavka, usporit će se prijenos zaraze i na taj način smanjiti i broj zaraženih. To možemo protumačiti i na sljedeći način: ukoliko se poveća broj oporavljenih koji su bili zaraženi, smanjuje se mogućnost širenja zaraze, te se skraćuje vrijeme trajanja epidemije.*

Pogledajmo sada primjer u kojem ćemo ponovno promatrati brod Diamond Princess, ali s nekim podacima koje ćemo proizvoljno izabrati u istom vremenskom periodu, uz drukčiji β, ali isti γ, te usporedimo dobiveni rezultat sa stvarnim podacima.

Primjer 12. *Proučimo situaciju u kojoj kroz vremenski period od 34 dana promatramo širenje bolesti Covid-19 među 3711 osoba na brodu Diamond Princess 2020.godine. Zaraza počinje sa samo jednom zaraženom osobom. U sljedećoj tablici navodimo broj zaraženih osoba tijekom danih 34 dana (napomenimo kako podaci ne odgovaraju stvarnima nego su proizvoljno izabrani kako bismo vidjeli neki drugi mogući scenarij).*

Dan	*Broj zaraženih*
0	*1*
1	*1*
2	*7*
3	*18*
4	*39*
5	*63*
6	*66*
7	*89*
8	*127*
9	*135*
10	*181*
11	*181*
12	*218*
13	*279*
14	*371*
15	*462*
16	*586*
17	*633*
18	*641*
19	*641*
20	*792*
21	*792*
22	*813*
23	*844*
24	*844*
25	*912*
26	*966*
27	*1013*
28	*1057*
29	*1057*
30	*1112*
31	*1242*
32	*1242*
33	*1431*

Neka je $\beta = 0.01, \gamma = 0.2$. Dakle, očekivani broj kontakata koje u jedinici vremena ostvari zaražena osoba iznosi 0.01, a stopa oporavka zaraženih osoba u jedinici vremena iznosi 0.2. Pogledajmo sljedeći grafički prikaz dobiven korištenjem ovih podataka i R koda za simuliranje SIR modela:



Slika 6: Simulacija SIR modela za epidemiju bolesti Covid-19 na brodu Diamond Princess za $\beta = 0.01, \gamma = 0.2$

Primijetimo da su crvene točkice na grafičkom prikazu stvaran broj zaraženih prema danim podacima. Iz danog grafičkog prikaza vidimo da bismo u ovakvoj situaciji završili u poprilično ekstremnom stanju. Naime, broj podložnih bi pao na 0 negdje oko 2. dana razvoja epidemije, a broj zaraženih bi istovremeno naglo porastao dok ne bi dosegnuo maksimum, tj. dok svi putnici na brodu ne bi bili zaraženi.

4 Literatura

[1] L. J. S. ALLEN, *An Introduction to Mathematical Biology,* Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Pearson Education Inc., 2007.

[2] L. J. S. ALLEN, *An Introduction to Stohastic Epidemic Models In: Brauer, F., van der Driessche, P. and Wu, J., Eds., Mathematical Epidemiology,* Springer, Berlin, 2008.

[3] L. J. S. ALLEN, *An Introduction to Stohastic Processes with Applications to Biology,* Texas Tech University, Lubbock Texas, Taylor & Francis Group, LLC, 2010.

[4] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK, *Uvod u vjerojatnost i statistiku,* Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[5] D. BRIUK, A. ERBA, T. LAMESSA, *Asymptotically Autonomous System in Mathematical Model of SIS Model Determined by Reproductive number,* College of Natural and Computational Science, Department of Applied Mathematics, Woalita Sodo University, International Research Journal of Natural Sciences, 2020.

[6] A. GRAY, D. GREENHALGH, L. HU, x. MAO, J. PAN, *A Stohastic Differential Equation SIS Epidemic Model*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.

[7] H. W. HETHCOTE, *Three Basic Epidemiological Models In: Levin S. A., Hallan T. G., Gross L. J., Applied Mathematical Ecology, Biomathematics vol.18*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1989. `http://www.mtholyoke.edu/~tchumley/m333/ThreeBasicModels.pdf`

[8] Z. VONDRAČEK, *Markovljevi lanci (web materijali),* PMF Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2013.

[9] Z. VONDRAČEK, *Slučajni procesi (web materijali),* PMF Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2018.

[10] WIKIPEDIA, *COVID-19 Pandemic on Diamond Princess*, the free encyclopedia `https://en.wikipedia.org/wiki/COVID-19_pandemic_on_Diamond_Princess`

Sažetak

U ovom radu opisani su SIS i SIR epidemiološki modeli temeljeni na Markovljevim lancima u diskretnom vremenu. U uvodu je objašnjena uloga Markovljevih lanaca u matematici, kao i u primjeni na biološke procese. Prvo poglavlje sadrži važne definicije i svojstva Markovljevih lanaca, te primjere koji prikazuju kako se navedena teorija koristi. U sljedećem poglavlju navodimo diferencijske jednadžbe kojima su opisani jednostavni SIS i SIR epidemiološki modeli, diferencijske jednadžbe koje deterministički SIS i SIR epidemiološki modeli zadovoljavaju, te važnost ovakvih modela u primjeni. Zatim su detaljnije opisani stohastički SIS i SIR epidemiološki modeli, diferencijske jednadžbe na kojima se temelje, te neka važna svojstva navedenih modela. U posljednjem poglavlju dajemo nekoliko simulacija stohastičkih modela obrađenih u ovom radu.

Ključne riječi: Markovljev lanac, Markovljevo svojstvo, prijelazna vjerojatnost, matrica prijelaznih vjerojatnosti, povratno i prolazno stanje, epidemiološki model

Abstract

This paper describes SIS and SIR epidemic models based on discrete time Markov chains. In the introduction, we explain the role of Markov chains in mathematics, as well as in application to biological processes. The first chapter contains important definitions and properties of Markov chains, as well as some examples which illustrate the use of Markov theory. In the next chapter we state some differential equations which describe simple SIS and SIR epidemic models, differential equations which deterministic SIS and SIR epidemic models satisfy and the importance of these models in application. Then, we describe the stohastic SIS and SIR epidemic models in more detail, differential equations on which they are based on and some important properties of these listed models. In the final chapter, we give a few simulations of the stohastic models covered in this paper.

Key words: Markov Chain, Markov property, transition probability, transition matrix, recurrent and transient state, epidemic model

5 Životopis

Moje ime je Ira Štivić, rođena sam 08.07.1994. godine u Osijeku. Od 2001. do 2009. godine pohađala sam OŠ Josipovac, nakon čega upisujem I. gimnaziju u Osijeku. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2013. godine. Iste godine upisala sam Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku na Sveučilištu J. J. Strossmayera u Osijeku. Preddiplomski studij završila sam 2019. godine, te iste godine upisala Diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na županijskim natjecanjima iz hrvatskog i engleskog jezika, gdje sam postigla vrlo dobre rezultate. Također, osam godina sam trenirala rukomet, te sudjelovala na raznim športskim međuškolskim natjecanjima i natjecanjima na razini državnih ženskih rukometnih liga.