Trapezno i Simpsonovo pravilo

Bibković, Marin

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marin Bibković

Trapezno i Simpsonovo pravilo

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marin Bibković

Trapezno i Simpsonovo pravilo

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Suzana Miodragović
Komentor: doc. dr. sc. Marija Miloloža Pandur

Osijek, 2021.

Trapezoidal and Simpson's rule

Sažetak

Tema ovog završnog rada je numerička integracija. Promatramo trapezno pravilo te generalizirano trapezno pravilo kao najjednostavniju metodu numeričke integracije. Obrađujemo Newton-Cotesovu formulu, te poseban slučaj te formule, koji predstavlja Simpsonovo pravilo i njegovu generalizaciju. Kroz primjere i zadatke ćemo prikazati rješenja postavljenih problema.

Ključne riječi

Numerička integracija, aproksimacija integrala, Lagrangeov interpolacijski polinom, trapezno pravilo, generalizirano trapezno pravilo, Newton-Cotesova formula, Simpsonovo pravilo, generalizirano Simpsonovo pravilo.

Summary

The topic of this final paper is numerical integration. We consider the trapezoidal rule and the generalized trapezoidal rule as the simplest method of numerical integration. We deal with the Newton-Cotes formula, and a special case of that formula, which represents Simpson's rule and its generalization. Through examples and tasks we will show solutions to the problems posed.

Keywords

Numerical integration, integral approximation, Lagrange interpolation polynomial, trapezoidal rule, generalized trapezoidal rule, Newton-Cotes formula, Simpson's rule, generalized Simpson's rule.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se numeričkom integracijom. Numerička integracija se koristi kada prilikom rješavanja određenih integrala primitivnu funkciju nije moguće odrediti pomoću standardnih metoda, ili u situacijama kada je podintegralna fukcija zadana u samo konačnom broju točaka. Kod numeričke integracije promatramo najčešće neprekidnu funkciju, te određujemo približnu vrijednost određenog integrala interpolacijom podintegralne funkcije. Osnova većine rada je materijal iz udžbenika Numerička matematika, za koju je zaslužan R. Scitovski. Glavni zadatak ovog rada jeste opisati metode za numeričko rješavanje određenih integrala. Najjednostavnije metode su trapezno pravilo i generalizirano trapezno pravilo i njih ćemo obraditi u drugom poglavlju. Najvažnija metoda za rješavanje određenih integrala je Newton-Cotesova formula koja je opisana u trećem poglavlju. Zadnja metoda koja će se u radu obraditi je Simpsonovo pravilo. U radu sve numeričke rezultate zaokružujemo na 5 decimala.

1 Numerička integracija

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, označimo sa G njenu primitivnu funkciju, tada se Riemannov integral na domeni od f, tj. na segmentu $[a, b]$ računa koristeći N-L formulu:

$$I := \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Prilikom rješavanja stvarnih problema, najčešće nije moguće primjeniti navedenu formulu, iz sljedećih razloga:
1. primitivnu funkiju G nije moguće odrediti osnovnim metodama;
2. pointegralna funkcija je poznata samo u konačno mnogo točaka.

Međutim, da bi približno izračunali vrijednost integrala I, moramo aproksimirati podintegralnu funkciju f jednostavnijom funkcijom ϕ, za koju znamo izračunati $\int_a^b \phi(x)dx$, te tada dobivamo aproksimaciju integrala I tako da računamo

$$I^* := \int_a^b \phi(x)dx.$$

Prilikom aproksimacije funkcije f treba voditi računa i o zadanoj točnosti $\epsilon > 0$, tj. želimo da vrijedi:

$$\triangle I^* := |I - I^*| < \epsilon,$$

gdje je $\triangle I^*$ apsolutna pogreška integracije.
Podsjetimo se pojma interpolacije funkcije. Pretpostavimo da je zadana vrijednost funkcije f u $n + 1$ točki $x_0, ..., x_n \in [a, b]$ koje zovemo čvorovima interpolacije tj. poznate su vrijednosti $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, n$.
Za funkciju ϕ se koriste različite vrste interpolacijskih funkcija, a bira se obično u klasi polinoma, trigonometrijskih, eksponencijalnih, racionalnih ili nekih drugih jednostavnih funkcija. U ovom radu koristimo samo Lagrangeov interpolacijski polinom. Treba pronaći interpolacijski polinom P_n stupnja n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

tako da bude $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Možemo uzeti Lagrangeov interpolacijski polinom n-tog stupnja

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Medjutim za određivanje vrijednosti interpolacijskog polinoma u Lagrangeovom obliku u nekoj točki $x \neq x_i$ zahtijeva veliki broj računskih operacija, pa time i značajno vrijeme rada. Lagrangeov polinom prvog stupnja glasi:

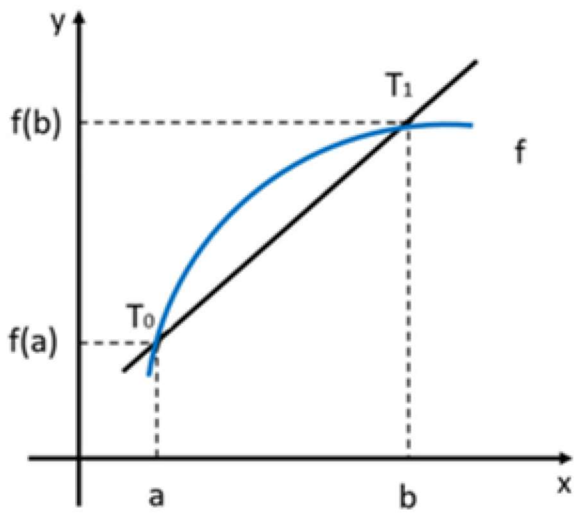
$$P_1(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

2 Trapezno pravilo

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija koju interpoliramo Lagrangeovim polinomom prvog stupnja, koristeći se čvorovima interpolacije, $x_0 = a$, $x_1 = b$. Formula za taj polinom glasi:

$$P_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Graf od P_1 je pravac koji prolazi kroz dvije točke, $T_0 = (a, f(a))$ i $T_1 = (b, f(b))$, što je prikazano na Slici 1. Dakle, f smo aproksimirali linearnom funkcijom.



Slika 1: Trapezno pravilo

Lako dobivamo da je aproksimacija integrala $I = \int_a^b f(x)dx$ jednaka

$$\begin{aligned} I^* = \int_a^b P_1(x)dx &= \int_a^b \Big(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\Big)dx \\ &= f(a) \cdot x \,\Big|_a^b + \frac{(x-a)^2}{2}\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\Big|_a^b = \\ &= f(a) \cdot b - f(a) \cdot a + \frac{f(b) - f(a)}{2(b-a)}((b-a)^2 - 0) = (b-a)\Big(f(a) + \frac{f(b)}{2} - \frac{f(a)}{2}\Big) = \\ &= (b-a)\Big(\frac{f(a) + f(b)}{2}\Big) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \end{aligned}$$

Promotrimo Sliku 1 i formulu za I^*. Broj $\frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b))$, za nenegativnu funkciju f, predstavlja klasičnu formulu za površinu trapeza s duljinom osnovica $f(a)$ i $f(b)$ te duljinom visine $b - a$, zbog čega koristimo naziv trapezno pravilo. Dakle, površinu lika ispod grafa nenegativne funkcije f na segmentu $[a, b]$ aproksimiramo s površinom spomenutog trapeza. Pri tome apsolutna pogreška $|I - I^*|$ predstavlja veličinu površine između pravca kroz točke T_0 i T_1 i grafa funkcije f nad $[a, b]$.

Navedimo sada iskaz teorema koji će nam trebati u dokazu sljedećeg teorema koji je ovdje zbog toga jer ćemo pomoću njega jasno vidjeti i kolika je pogreška aproksimacije nastala kada koristimo trapezno pravilo.

Teorem 1. *Neka je $f \in C^{n+1}[a,b]$ funkcija čije su vrijednosti poznate u $n+1$ točaka x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$,*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad y_i = f(x_i),$$

i neka je P_n odgovarajući interpolacijski polinom.
Tada za svaki $\bar{x} \in [a,b]$ postoji $\xi \in \langle a,b \rangle$, tako da je $f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)\cdots(\bar{x}-x_n)$.

Dokaz. Vidi [Jukić i Scitovski (2004.), str 28].

Teorem 2. *Neka je $f \in C^2[a,b]$. Tada postoji $c \in \langle a,b \rangle$, tako da je:*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12}f''(c). \tag{1}$$

Dokaz. Korištenjem Teorema 1 za $n = 1$ dobivamo da za svaki $x \in [a,b]$ postoji $\zeta(x) \in (a,b)$ tako da je

$$E := I - I^* = \int_a^b (f(x) - P_1(x))dx = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)dx.$$

Kako je $(x-a)(x-b) \leq 0$ za sve $x \in [a,b]$, koristeći poopćeni teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa [1] zaključujemo da postoji $c \in \langle a,b \rangle$ takav da je:

$$E = \frac{f''(c)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \begin{vmatrix} x = a + (b-a)t \\ dx = (b-a)dt \\ x \to a \Rightarrow t \to 0 \\ x \to b \Rightarrow t \to 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{f''(c)}{2}\int_0^1 (b-a)t(a+(b-a)t-b)(b-a)dt = \frac{(b-a)^3}{2}f''(c)\int_0^1 (t^2-t)dt =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{2}f''(c)\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\bigg|_0^1 = \frac{(b-a)^3}{2}f''(c)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c).$$

Zaključujemo da će dobivena pogreška E biti velika, ako je velik segment integracije $[a,b]$.

□

Formulu (1) nazivamo **trapezno pravilo.** Dakle,

$$I = I^* + E_1,$$

[1] Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$, a funkcija g integrabilna i to stalnog predznaka na tom segmentu, tada postoji međutočka $c \in [a,b]$ iz istog segmenta, takva da vrijedi:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

gdje je $I^* = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ i $E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c), c \in (a,b)$.
Da bi odredili što bolju aproksimaciju I^* integrala I, segment $[a,b]$ moramo podijeliti na što više podsegmenata, te onda na svaki zaseban dio primijeniti trapezno pravilo (1). Neka je zadano $n+1$ ekvidistantno raspoređenih točaka $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, tj. $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} =: h$ i $x_0 = a, x_n = b$, te funkcija $f \in C^2[a,b]$. Uočimo da navedenih n točaka dijeli segment $[a,b]$ na podsegmente jednakih duljina $h = \dfrac{b-a}{n}$. Neka je $y_i = f(x_i)$, za $i = 0, \ldots, n$. Nadalje, na svakom podsegmentu primjenjujemo trapezno pravilo. Za podsegment $[x_{i-1}, x_i]$ dobivamo:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i) - \frac{h^3}{12}f''(c_i) \text{ za neki } c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle.$$

Primjenom aditivnosti integrala po području integracije:

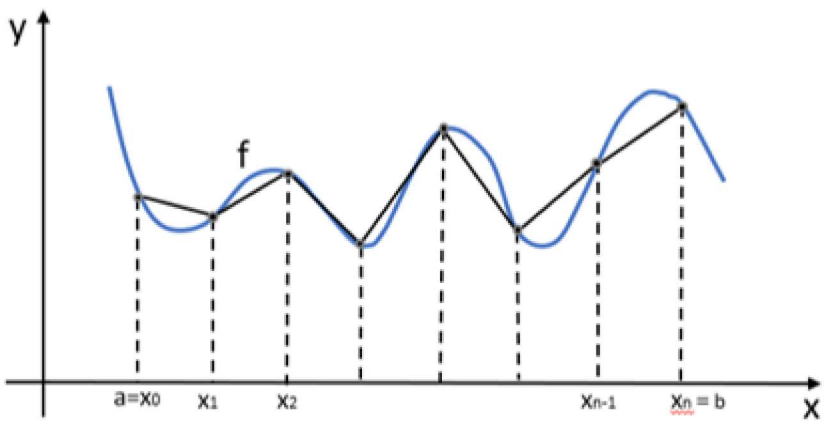
$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

slijedi

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i). \tag{2}$$

Kako je funkcija f'' neprekidna na intervalu $\langle a,b \rangle$, postoji neki $c \in \langle a,b \rangle$, takav da je

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = f''(c). \tag{3}$$



Slika 2: Generalizirano trapezno pravilo

Uvrstimo li (3) u (2) dobit ćemo **generalizirano trapezno pravilo** oblika (vidi Sliku 2):

$$I = I^* + E_n,$$

gdje je:

$$I^* = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n),$$

$$E_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(c).$$

Označimo s

$$M_2 := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Tada apsolutnu pogrešku $\triangle I^*$ aproksimacije I^* za unaprijed zadanu točnost $\epsilon > 0$ možemo ocjeniti s:

$$\triangle I^* = |E_n| \leq \frac{b-a}{12}h^2 M_2 < \epsilon.$$

Iz ocjene apsolutne pogreške možemo dobiti broj podsegmenata na koji treba podijeliti segment $[a, b]$, tj. broj n da bismo postigli točnost ϵ:

$$n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\epsilon}\cdot\frac{b-a}{12}}.$$

Prikažimo još algoritam koji računa približnu vrijednost integrala funkcije f primjenom generalizirane trapezne formule.

Algoritam 1 (Generalizirano trapezno pravilo)

Input: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, a, b, M_2, \epsilon > 0;$ $\quad \left(M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\right)$

1. Izračunati: $\quad n = \left\lfloor (b-a)\sqrt{\frac{M_2(b-a)}{12\epsilon}} \right\rfloor + 1;$
2. Uzeti: $\quad h = \frac{b-a}{n};$
3. Izračunati: $\quad Int = \frac{h}{2}\Big(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\cdot h)\Big);$

Output: n, Int.

2.1 Primjeri i zadaci

Primjer 1. *Izračunajte približnu vrijednost integrala* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}dx$ *primijenom generaliziranog trapeznog pravila koristeći 4 podsegmenta.*

Egzaktna vrijednost integrala je:

$$I = \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 2arctg(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Dijelimo segment $[0, 1]$ *na 4 podsegmenta, računamo* $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{4}$, *te* $x_i = i \cdot \frac{1}{4}$, $y_i = f(x_i) = \frac{2}{1+x_i^2}$.

Rezultate prikazujemo u sljedećoj tablici:

x_i	y_i
0	2
0.25	32/17
0.5	1.6
0.75	1.28
1	1

Primjenom generalizirane trapezne formule za aproksimaciju dobivamo:

$$I^* = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) = \frac{1}{8}(2 + 2 \cdot \frac{32}{17} + 2 \cdot 1.6 + 2 \cdot 1.28 + 1) \approx 1.56559$$

Dakle, apsolutna pogreška iznosi:

$$\triangle I^* = |I - I^*| \approx \left| \frac{\pi}{2} - 1.56559 \right| \approx 5.20632 \cdot 10^{-3},$$

dok relativna pogreška u postotku iznosi:

$$\frac{\triangle I^*}{I} \cdot 100\% = \frac{5.20632 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi}{2}} \cdot 100\% = 0.00331 = 0.331\%.$$

Zadatak 1. *Neka je* $I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\, dx$.

(a) Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala.

(b) Izračunajte aproksimaciju integrala koristeći trapeznu formulu.

(c) Na koliko podsegmenata treba podijeliti segment integracije tako da se generaliziranim trapeznim pravilom dobije aproksimacija uz točnost $\epsilon = 0.0005$*?*

(d) Izračunajte aproksimaciju generaliziranom trapeznom formulom koristeći 4 *podsegmenta. Na koliko decimala je točna aproksimacija integrala?*

Rješenje:

(a) Odredimo vrijednost integrala I koristeći neke uobičajene metode za rješavanje neodređenih integrala.

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}dx = \left| \begin{matrix} t = 1 + 2x & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ dx = \frac{dt}{2} & x = 1 \Rightarrow t = 3 \end{matrix} \right| = \int_1^3 \sqrt{t}\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3} = \sqrt{3} - \frac{1}{3} \approx 1.39872.$$

(b) Označimo granice integrala s $a = 0$ i $b = 1$.

Računamo aproksimaciju integrala I:

$$I^* = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = \frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.36603.$$

(c) Potrebno je odrediti broj podsegmenata n. Kako bi to napravili trebamo najprije odrediti $M_2 = \max\limits_{x\in[0,1]} |f''(x)|$.

Kako je $f(x) = \sqrt{1+2x}$, dobivamo da je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}\cdot 2. \end{aligned}$$

Za $x \in \langle 0,1]$ vrijedi $\quad 1+2x > 0 \ \Rightarrow\ (1+2x)^3 > 0 \Rightarrow \sqrt{(1+2x)^3} > 0$, pa je

$\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} > 0 / \cdot (-1) \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{(1+2x)^3}} < 0$ to jest $f''(x) < 0$ na segmentu $[0,1]$.

Prema tome, možemo odrediti da je $M_2 = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| -\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} \right| = \max\limits_{x\in[0,1]} \frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} =$ $\frac{1}{\sqrt{(1+2\cdot 0)^3}} = 1.$

Dakle, $n > (b-a)\sqrt{\frac{b-a}{12}\cdot\frac{M_2}{\epsilon}} = 1\cdot\sqrt{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{0.0005}} \approx 12.90994$, te dobivamo da je $n = 13$.

(d) Dijelimo segment $[0,1]$ na 4 podsegmenta, računamo $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$, te $x_i = i\cdot\frac{1}{4}$, a $y_i = f(x_i)$.
Prikažimo vrijednosti od x_i i y_i u tablici:

x_i	y_i
0	1
0.25	1.22474
0.5	1.41421
0.75	1.58114
1	1.73205

Tada generaliziranom trapeznom formulom dobivamo aproksimaciju integrala: $I^* = \frac{h}{2}\big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\big) \approx 1.39634.$

Kako je egzaktna vrijednost integrala jednaka $I = \sqrt{3} - \frac{1}{3} \approx 1.3987175 \Rightarrow \triangle \mathrm{I}^* = |I - I^*| = 0.00238 < 0.00500$, točne su samo dvije decimale, jer se samo one podudaraju kod stvarne i aproksimirane vrijednosti integrala I.

Zadatak 2. *Odredite potreban broj podsegmenata kako bi se primjenom generalizirane trapezne formule odredila približna vrijednost integrala* $I = \int_1^2 e^{-x^2} dx$ *uz točnost* $\epsilon = 0.003$. *Nakon toga, primjenom generalizirane trapezne formule, odredite približnu vrijednost integrala* I *uz danu točnost.*

Rješenje:

Promatrani integral nije elementarno rješiv, jer funkcija koja se dobije integriranjem, ne pripada u elementarne funkcije. Trebamo izračunati broj podsegmenata, korištenjem generalizirane trapezne formule. Iz granica integrala zaključujemo da je $a = 1$, a $b = 2$. Računamo prvu i drugu derivaciju podintegralne funkcije:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2}, \\ f'(x) &= e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}, \\ f''(x) &= -2e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2). \end{aligned}$$

Kako bi odredili točke ekstrema funkcije f'', odredimo derivaju trećeg reda i izjednačimo s nulom:
$f'''(x) = -2x \cdot e^{-x^2}(4x^2 - 2) + e^{-x^2} \cdot 8x = e^{-x^2} \cdot (-8^3 + 4x + 8x) = e^{-x^2} \cdot (12x - 8x^3) = 0.$
Dobivamo da je $f'''(x) = 0$ za $x_0 = 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, pa su u segmentu $[1, 2]$ kandidati za točku maksimuma $1, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}$.
Uvrštavamo navedene kandidate za nultočke u drugu derivaciju:

$$\begin{aligned} f''(1) &= 0.73500, \\ f''(2) &= 0.25000, \\ f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &= 0.89250, \end{aligned}$$

te zaključujemo da je $M_2 = \max_{x \in [1,2]} |\underbrace{e^{-x^2}(4x^2 - 2)}_{>0}| = \max_{x \in [1,2]} e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0.89250.$

Broj potrebnih podsegmenata je $n > (b - a)\sqrt{\frac{b - a}{12} \cdot \frac{M_2}{\epsilon}} = 4.97900 \Rightarrow n = 5$.
Dobiveni n predstavlja broj potrebnih podjela segmenta da bi produljenom trapeznom formulom izračunali aproksimaciju integrala, uz zadanu točnost $\epsilon = 0.003$.
Tada je $h = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{5}$, a $\quad x_i = a + i \cdot h \Rightarrow x_i = 1 + i \cdot \frac{1}{5}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

Prikažimo vrijednosti od x_i i y_i u tablici:

x_i	y_i
1	0.36788
1.2	0.23693
1.4	0.14086
1.6	0.0773
1.8	0.03916
2	0.01832

Tražena aproksimacija integrala je

$$I^* = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2\sum_{i=1}^{4} y_i + y_5) = 0.13747.$$

3 Nexton-Cotesova formula

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada u cilju što bolje aproksimacije funkcije, a samim time i aproksimacije integrala I, segment $[a, b]$ dijelimo na n jednako dugačkih segmenata čvorovima $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}, i = 0, 1, \ldots, n$. Funkciju f ćemo interpolirati s polinomom n-tog reda u Lagrangeovom obliku:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)p_k(x), \quad p_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Približnu vrijednost I^* integrala I možemo dobiti kao integral navedenog polinoma $P_n(x)$, s granicama a i b.

$$\begin{aligned}
I_n^* &= \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k)p_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b p_k(x)dx = \\
&= \tfrac{b-a}{b-a} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b p_k(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b p_k(x)dx}_{w_k} = \\
&= (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k), \text{ gdje je } w_k := \tfrac{1}{(b-a)} \int_a^b p_k(x)dx.
\end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju $x = a + (b - a)t$ te dobivamo sljedeći zapis:

$$\begin{aligned}
w_k &= \tfrac{1}{b-a} \int_a^b p_k(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = a + (b-a)t \\ dx = (b-a)dt \\ x \to a \Rightarrow t \to 0 \\ x \to b \Rightarrow t \to 1 \end{array} \right| = \tfrac{1}{b-a} \int_0^1 p_k(a + (b-a)t)(b-a)dt = \\
&= \int_0^1 p_k(a + (b-a)t)dt = \int_0^1 \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{a + (b-a)t - a - \frac{b-a}{n}i}{a + \frac{b-a}{n}k - a - \frac{b-a}{n}i} dt = \int_0^1 \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{\frac{b-a}{n}(nt-1)}{\frac{b-a}{n}(k-i)} dt =
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{nt-i}{k-i} dt.$$

Tada dobivamo, **Newton-Cotesovu formulu** (kvadraturna formula) n-tog reda za traženu aproksimaciju integrala I:

$$I_n^* = \int_a^b P_n(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k), \quad \text{gdje je } w_k = \int_0^1 \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{nt-i}{k-i} dt.$$

Primjenom Newton-Cotesove formule za $n = 1$ lako možemo izvesti formulu za trapezno pravilo.

$$\begin{aligned} I^* &= (b-a)\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k) = (b-a)\sum_{k=0}^{1} w_k f(x_k) = (b-a)\cdot(w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)) = \\ &= (b-a)\cdot(w_0 f(a) + w_1 f(b)). \\ w_0 &= \int_0^1 \prod_{i=0, i\neq 0}^{1} \frac{t-i}{0-i} dt = \int_0^1 \frac{t-1}{-1} dt = \left(\frac{-t^2}{2} + t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\ w_1 &= \int_0^1 \prod_{i=0, i\neq 1}^{1} \frac{t-i}{1-i} dt = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem w_0 i w_1 u gore navedenu formulu, dobivamo: $I^* = (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, a to upravo predstavlja trapezno pravilo.

U praksi se najčešće koriste tri tipa Nexton-Cotesove formule:

1. zatvorene formule $\rightarrow$ rubovi intervala a i b su čvorovi;
2. otvorene formule $\rightarrow$ rubovi intervala a i b nisu čvorovi;
3. poluotovrene formule $\rightarrow$ jedan od rubova, a ili b, je čvor, dok drugi rub nije čvor.

4 Simpsonovo pravilo

Promatramo neprekidnu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, te neka je $a = x_0 < x_1 = \frac{a+b}{2} < x_2 = b$, Tada je $h := x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \frac{b-a}{2}$. Izračunajmo težine iz Newton-Cotesove formule za $n = 2$:

$$w_0 = \int_0^1 \frac{2t-1}{-1}\frac{2t-2}{-2} dt = \int_0^1 (2t^2 - 3t + 1)dt = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{6}$$

$$w_1 = \int_0^1 2t\frac{2t-2}{-1} dt = \int_0^1 (-4t^2 + 4t)dt = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$w_2 = \int_0^1 t\frac{2t-1}{1}dt = \int_0^1 (2t^2 - t)dt = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Tada korištenjem zatvorene Newton-Cotesove formule dobivamo poznato Simpsonovo pravilo:

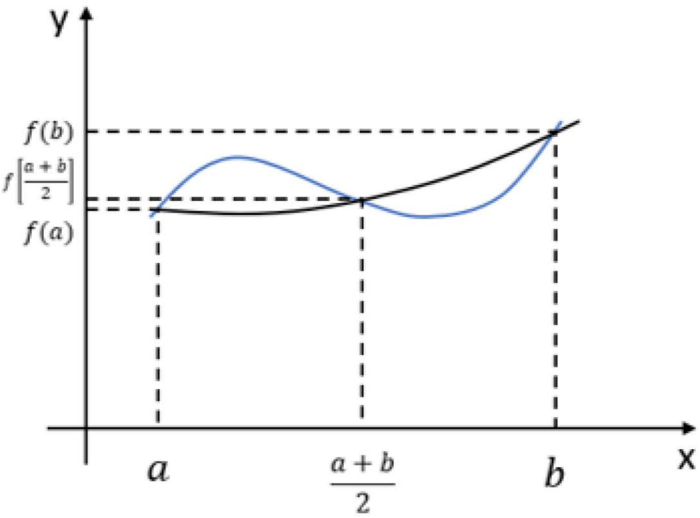
$$I^* = (b-a)(w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)) = (b-a)(w_0 f(a) + w_1 f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + w_2 f(b))$$

$$I^* = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big).$$

Iz Slike 3 zaključujemo da površinu ispod grafa funkcije f pomoću Simpsonovog pravila određujemo tako da funkciju f aproksimiramo kvadratnom funkcijom, podjelom segmenta na dva dijela (koristeći se s tri čvora). Tada traženu površinu dobivamo kao sumu lijevog i desnog područja od $\dfrac{a+b}{2}$.

Pogreška aproksimacije je jednaka [vidi Stoer (2002)]:

$$E = I - I^* = -\frac{1}{90}(b-a)^5 f^{(4)}(c) \text{ za neki c} \in \langle a, b \rangle.$$



Slika 3: Simpsonovo pravilo

Pogreška aproksimacije E će biti velika, ako je velik segment integracije $[a, b]$. Kako bismo postigli što bolju aproksimaciju I^* integrala I, segment $[a, b]$ podijelimo na paran broj $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ podsegmenata duljine $h = \frac{b-a}{n}$ s čvorovima u točkama $x_i = a + ih, i = 0, 1, ..., n$. Označimo s $y_i = f(x_i), i = 0, 1, ..., n$, te na svaka dva podsegmenta primijenimo Simpsonovo pravilo. Tada možemo lako pokazati da vrijedi **generalizirano Simpsonovo pravilo** (vidi Sliku 4):

$$I = I^* + E_n,$$

$$I^* = \frac{h}{3}\Big[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + \cdots + y_{2m-2})\Big].$$

$$E_n = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c) \text{ za neki } c \in \langle a, b \rangle.$$

Ovu formulu lako pamtimo, tj. $I^* = \frac{h}{3}$ (prvi član + zadnji član + $4 \cdot$ neparni članovi + $2 \cdot$ parni članovi).

Neka je $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$, te neka je unaprijed zadana točnost $\epsilon > 0$, tada lako možemo ocijeniti apsolutnu pogrešku $\triangle I^*$ aproksimacije I^*, tj.

$$\triangle I^* = |E_n| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4 < \epsilon.$$

Također, dobivamo broj podsegmenata koji je potreban da bi se postigla zadana točnost-

$$n > (b-a) \sqrt[4]{\frac{M_4}{\epsilon} \cdot \frac{b-a}{180}}.$$

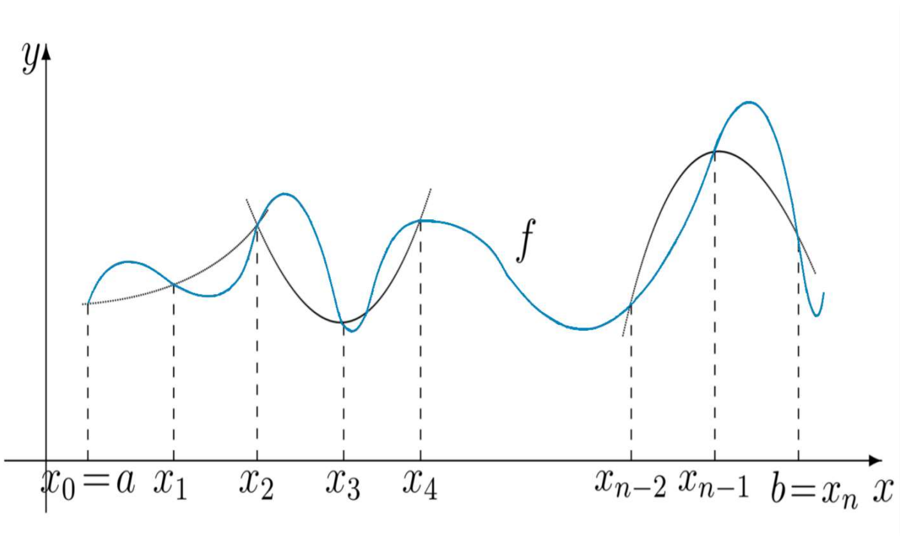
Navedimo još algoritam, koji pomoću generalizirane Simpsonove formule izračunava približnu vrijednost integrala funkcije f.

Algoritam 2 (Generalizirano Simpsonovo pravilo)

Input: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; a, b, M_4, $\epsilon > 0$; $\quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$

1. Izračunati: $n = \left\lfloor (b-a) \sqrt[4]{\frac{M_4}{\epsilon} \cdot \frac{b-a}{180}} \right\rfloor + 1;$
2. Ako je n neparan tada
3. $n = n + 1;$
4. Kraj ako
5. Staviti: $h = (b-a)/n; \quad n_1 = \frac{n}{2}$
6. Izračunati:

$$Int = \frac{h}{3} \Big(f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^{n_1} f(a + (2i-1)h) + 2 \sum_{i=1}^{n_1 - 1} f(a + 2ih) \Big);$$



Slika 4: Generalizirano Simpsonovo pravilo

Output: n, Int

4.1 Zadaci

Zadatak 3. *Neka je* $I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx$.

(a) Izračunajte aproksimaciju integrala koristeći Simpsonovo pravilo.

(b) Odredite broj na koji treba podijeliti segment integracije tako da se generaliziranim Simpsonovim pravilom dobije aproksimacija uz točnost $\epsilon = 0.0005$.

(c) Izračunajte aproksimaciju generaliziranim Simpsonovim pravilom koristeći 4 podsegmenta.

Rješenje:

(a) Granice integrala su $a = 0$ i $b = 1$, a podintegralna funkcija iznosi $f(x) = \sqrt{1+2x}$.

Računamo aproksimaciju po formuli:

$$I^* = \frac{b-a}{6} \cdot [f(a) + 4 \cdot f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)] = \frac{1}{6} \cdot (1 + 4\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 1.99815.$$

(b) Da bi odredili potreban broj podintervala na koji treba dijeliti interval integracije, odredimo četvrtu derivaciju podintegralne funkcije, jer nam je to potrebno prilikom izračuna M_4.
Dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+2x}, \\
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+2x}}, \\
f''(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1+2x}^3}, \\
f'''(x) &= \frac{3}{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2 = 3(1+2x)^{-\frac{5}{2}}, \\
f^{(4)}(x) &= 3(\frac{-5}{2})(1+2x)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2 = -15(1+2x)^{-\frac{7}{2}}
\end{aligned}$$

$$M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\frac{-15}{(1+2x)^{\frac{7}{2}}}| = \max_{x\in[0,1]} \frac{15}{(1+2x)^{\frac{7}{2}}} = \frac{15}{(1+2\cdot 0)^{\frac{7}{2}}} = 15.$$

Prethodne izračune uvrštavamo u formulu za n, pa vrijedi: $n > (b-a)\sqrt[4]{\frac{b-a}{180} \cdot \frac{M_4}{\epsilon}} = \sqrt[4]{\frac{15}{180 \cdot 0.0005}} \approx 3.59 \Rightarrow$ n treba biti barem 4.

(c) Podijelom intervala na četiri podintervala lako dobivamo: $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{4}$,
$x_i = a + ih = 0 + i\dfrac{1}{4} = i \cdot \dfrac{1}{4}, \;\; i = 0, 1, 2, 3, 4.$

Pomoću tablice prikazujemo sljedeće podatke:

x_i	y_i
0	1
0.25	1.22457
0.50	1.41421
0.75	1.58114
1	1.73205

Aproksimacija integrala I generaliziranim Simpsonovim pravilom daje:

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{4}{3} \cdot (y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4) \\ &= \frac{1}{12}(1 + 4(1.22457 + 1.58114) + 2 \cdot 1.41421 + 1.73205) \\ I^* &\approx 1.39867. \end{aligned}$$

U Zadatku 1 smo izračunali egzaktnu vrijednost integrala I koristeći neke uobičajene metode i dobili da je $I \approx 1.39872$. Za aproksimaciju I^* pomoću generalizirane Simpsonove formule smo dobili 1.39867, a pomoću generalizirane trapezne formule smo dobili 1.39634. Apsolutna pogreška u ovom zadatku iznosi: $\triangle I^* = |I - I^*| = |1.39872 - 1.39867| = 0.00005$, broj točnih decimala iznosi 3. Zaključujemo da primjenom generalizirane Simpsonove formule dobivamo manju apsolutnu pogrešku, imamo više točnih decimala aproksimacije, koristeći 4 podsegmenta.

Zadatak 4. *Odredite potreban broj podsegmenata kako bi odredili približnu vrijednost integrala* $I = \int_1^3 x^2 \ln x \, dx$ *uz točnost* $\epsilon = 0.005$:

(a) primjenom generalizirane trapezne formule,

(b) primjenom generalizirane Simpsonove formule.

Primjenom generalizirane Simpsonove formule odredite približnu vrijednost uz zadanu točnost.

Rješenje:

(a) Za podintegralnu funkciju $f(x) = x^2 \ln x$, odredimo drugu derivaciju kako bi izračunali M_2, pri čemu je $[a, b] = [1, 3]$.

Prve dvije derivacije funkcije f su:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x,$$
$$f''(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3.$$

Također jednostavnim računom dobivamo:
$M_2 = \max\limits_{x\in[1,3]} |f''(x)| = \max\limits_{x\in[1,3]} |2\ln x + 3| = \max\limits_{x\in[1,3]} (2\ln x + 3) = 2\ln 3 + 3 = 5.19720$, jer je f'' pozitivna i rastuća na $[1, 3]$.

Potreban broj podsegmenata iznosi: $n > (b-a)\sqrt{\frac{b-a}{12} \cdot \frac{M_2}{\epsilon}} = 26.32 \Rightarrow n = 27.$

Broj potrebnih podsegmenata je 27, pa je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{27}$, $x_i = 1 + i \cdot \frac{1}{27}$, $y_i = f(x_i) = x_i^2 \ln x_i$.

x_i	y_i	x_i	y_i
1	0	55/27	2.95237
29/27	0.08244	19/9	3.33018
31/27	0.18212	59/27	3.73265
11/9	0.29977	61/27	4.16015
35/27	0.43608	7/3	4.61307
37/27	0.59170	65/27	5.09174
13/9	0.76723	67/27	5.59651
41/27	0.96325	23/9	6.12771
43/27	1.18032	71/27	6.68567
5/3	1.41896	73/27	7.27070
47/27	1.67966	25/9	7.88311
49/27	1.96290	77/27	8.52319
17/9	2.26912	79/27	9.19123
53/27	2.59883	3	9.88751

Primjenom generalizirane trapezne formule dobivamo:

$$\begin{aligned} I_T^* &= \frac{h}{2}(y_o + 2 \cdot \sum_{i=1}^{26} y_i + y_{27}) = \frac{1}{27}(0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{26} y_i + 9.88751) \\ &= \frac{1}{27}(0 + 179.18132 + 9.88751) \\ &= 7.00250. \end{aligned}$$

(b) Korištenjem derivacije drugog reda iz prethodnog izračuna, određujemo derivacije višeg reda, tj. $f'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x}$, $\quad f^{(4)}(x) = \frac{-2}{x^2}$.

Nadalje, dobivamo:

$$M_4 = \max_{x\in[1,3]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[1,3]} \left|\frac{-2}{x^2}\right| = \max_{x\in[1,3]} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

Prema tome, potreban broj podsegmenata iznosi:

$$n > (b-a)\sqrt[4]{\frac{b-a}{180}\frac{M_2}{\epsilon}} = 2\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{180}\frac{2}{0.005}} = 2.90400.$$

Primjenom generalizirane Simpsonove formule dobivamo približnu vrijednost integrala I, uz $\epsilon = 0.005$, za n uzimamo 4 jer taj broj treba biti paran po formuli. Tada je $n = 4$, a $m = 2$, te $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

U sljedećoj tablici su prikazani podaci:

x_i	y_i
1	0
1.5	0.9123
2	2.77259
2.5	5.72682
3	9.88751

Primjenom generalizirane Simpsonove formule dobivamo:

$$I_S^* = \frac{h}{3}(y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)) = 6.99819.$$

Egzaktna vrijednost promatranog integrala je $I \approx 6.99862$, zaokružena na 5 decimala. Promatramo apsolutnu pogrešku u prvom slučaju i dobivamo:

$$\triangle I_T^* = |I - I_T^*| = |6.99862 - 7.00250| = 0.00388 < \epsilon,$$

te niti jedna decimala nije točna kod generaliziranog trapeznog pravila. Kod generaliziranog Simpsonovog pravila za apsolutnu pogrešku dobivamo:

$$\triangle I_S^* = |I - I_S^*| = |6.99862 - 6.99819| = 0.00043 < \epsilon,$$

tri decimale su točne kod ove aproksimacije. Uočimo da kod generalizirane trapezne formule dobivamo velik broj podsegmenata na koje treba podijeliti segment integracije, a dobivena aproksimacija ima veću apsolutnu pogrešku nego generalizirana Simpsonova formula koja dijeli segment integracije samo na nekoliko dijelova. Također, možemo promatrati relativne pogreške izražene u postotcima gornjih aproksimacija. Kod prve aproksimacije dobivamo:

$$\frac{\triangle I_T^*}{I}\cdot 100\% = \frac{0.00388}{6.99862}\cdot 100\% = 0.00055 = 0.055\%,$$

a kod druge aproksimacije dobivamo:

$$\frac{\triangle I_S^*}{I}\cdot 100\% = \frac{0.00043}{6.99862}\cdot 100\% = 0.00006 = 0.006\%.$$

Literatura

[1] M.K. Bakula, *Uvod u numeričku matematiku*, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu, 2009.

[2] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume I, Siam, USA, 2008.

[3] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Izmjenjeno i dopunjeno izdanje, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2015.

[4] N. Ujević, *Uvod u numeričku matematiku*, Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja, Sveučilište u Splitu, 2004.