Specijalne funkcije

Škrobar, Dino

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Dino Škrobar

Specijalne funkcije

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Dino Škrobar

Specijalne funkcije

Diplomski rad

mentorica: izv.prof.dr.sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2016.

Sadržaj

Uvod

Specijalne funkcije su posebna vrsta funkcija u matematici koje su otkrivene prilikom rješavanja određenih problema u fizici ili tehničkim znanostima kao što su naprimjer Besselove funkcije. Druge su pak nastale jer se ukazala potreba za izračunavanjem nepoznatih vrijednosti u matematici. Tako je gama funkcija nastala iz potrebe da se pronađe način kako računati faktorijele za bilo koji realni broj. Riemannova zeta funkcija i hipergeometrijske funkcije nastale su iz redova potencija elementarnih funkcija.

Općenito, specijalne funkcije dijele se u dvije skupine: funkcije u obliku određenih integrala (gama i beta funkcija) te funkcije u obliku beskonačnih konvergentnih redova (Riemannova zeta funkcija, hipergeometrijske funkcije, Besselove funkcije). Može se pokazati da se većina specijalnih funkcija može zapisati u oba oblika. Zanimljiva je činjenica da su za većinu specijalnih funkcija egzaktne vrijednosti poznate samo za neke točke pa se vrijednosti izračunavaju numerički ili nekom drugom aproksimacijom. Stoga su se vrijednosti specijalnih funkcija redovito navodile u raznim matematičkim tablicama, a danas se njihove vrijednosti vrlo jednostavno mogu izračunati pomoću računala.

Već smo spomenuli gama i beta funkciju, Riemannovu zeta funkciju, hipergeometrijske i Besselove funkcije kojima ćemo se baviti u ovom radu. Pojasnit ćemo kako se došlo do svake od funkcija, definirati ih te navesti najosnovnija svojstva i rezultate za čije su razumijevanje dovoljna osnovna znanja iz diferencijalnog i integralnog računa.

Treba istaknuti kako se u literaturi trigonometrijske funkcije često ubrajaju u specijalne, a u nekoj literaturi i logaritamska funkcija se navodi kao specijalna funkcija, a razlog je što se za točno određene parametre i u točno određenim vrijednostima pojedine specijalne funkcije ponašaju baš kao i trigonometrijske, odnosno logaritamska funkcija.

Poglavlje 1

Gama funkcija

Početkom osamnaestog stoljeća Daniel Bernoulli[1] i Christian Goldbach[2] bavili su se u svojim radovima proučavanjem interpolacije redova te su se susreli s problemom proširenja faktorijela na realne brojeve. 1729. godine Leonhard Euler[3] šalje u svom pismu Goldbachu rješenje toga problema u vidu gama funkcije čime počinje njeno sustavno istraživanje. Početkom devetnaestog stoljeća Adrien-Marie Legendre[4] uveo je naziv "gama funkcija" i oznaku Γ. Gama funkciju su kroz povijest proučavali brojni poznati matematičari: Stirling[5], Gauss[6], Weierstrass[7], Riemann[8] koji je imao velik doprinos proučavanju primjena gama funkcije. Ipak jedan od najvažnijih teorema, koji govori o karakterizaciji gama funkcije, dokazali su tek 1922. Harald Bohr[9] i Johannes Mollerup[10]. Primjene gama funkcije su brojne, u teoriji brojeva, vjerojatnosti i integralnom računu, o čemu će biti više u nastavku rada.

1.1 Definicija i osnovni rezultati

Definicija 1.1.1. Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zadanu formulom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

zovemo gama funkcija.

Integral (1.1) konvergira samo za pozitivne realne brojeve (dokaz se može naći u [3]) pa je stoga i gama funkcija definirana samo za pozitivne realne brojeve. Općenito se gama funkcija može definirati i za sve kompleksne brojeve kojima je realni dio pozitivan (vidjeti

[1]Daniel Bernoulli (1700. - 1782.) - švicarski matematičar i fizičar
[2]Christian Goldbach (1690. - 1764.) - njemački matematičar
[3]Leonhard Euler (1707. - 1783.) - švicarski matematičar i fizičar
[4]Adrien-Marie Legendre (1752. - 1833.) - francuski matematičar
[5]James Stirling (1692. - 1770.) - škotski matematičar
[6]Carl Friedrich Gauss (1777. - 1855.) - njemački matematičar
[7]Karl Weierstrass (1815. - 1897.) - njemački matematičar
[8]Bernhard Riemann (1826. - 1866.) - njemački matematičar
[9]Harald Bohr (1887. - 1951.) - danski matematičar
[10]Johannes Mollerup (1872. - 1937.) - danski matematičar

[2] ili [10]), ali u ovom radu bavit ćemo se gama funkcijom definiranom na skupu realnih brojeva.

Ako u (1.1) uvrstimo supstituciju $t = u^2$ dobijemo sljedeći, u primjenama često korišteni, oblik gama funkcije

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

U sljedećem je teoremu dokazana činjenica da je $\Gamma(1) = 1$, kao i da gama funkcija zadovoljava funkcijsku jednadžbu $f(x+1) = xf(x)$.

Teorem 1.1.2. *Za $x \in \mathbb{R}_+$ vrijedi*

$$\Gamma(1) = 1, \tag{1.2}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.3}$$

Dokaz. Dokaz jednakosti (1.2) svodi se na rješavanje nepravog integrala:

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t}\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-t}\big|_0^n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-n}+1\right]\\ &= 0+1 = 1.\end{aligned}$$

Funkcijsku jednadžbu (1.3) dokazujemo rješavanjem nepravog integrala. Neka je $x \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^{x+1-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll} u = t^x & \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = xt^{x-1}\mathrm{d}t & v = -e^{-t}\end{array}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-t^xe^{-t}\Big|_0^n - \int_0^n -xt^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right]\\ &= -\lim_{n\to\infty} n^xe^{-n} + \lim_{n\to\infty} x\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Uzastopnom primjenom L'Hospitalovog pravila dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} n^xe^{-n} = 0.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} x\int_0^n t^{x-1}e^{-t}dt = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$$

slijedi da je $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. □

Gama funkcija nije jedina funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu $f(x+1) = xf(x)$. Primjer funkcije koja također zadovoljava istu jednadžbu je $x \longmapsto \sin(2k\pi x)\Gamma(x), k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (vidjeti [11]). Bohr i Mollerup pronašli su uvjet pod kojim će gama funkcija biti jedina koja zadovoljava spomenutu funkcijsku jednadžbu.

Teorem 1.1.3. ***(Bohr-Mollerupov teorem)*** *Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funkcija za koju vrijedi:*

(i) $f(1) = 1$,

(ii) $f(x+1) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$,

(iii) $\log f$ *je konveksna funkcija na* $\mathbb{R}_+$[11].

Tada je $f(x) = \Gamma(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Dokaz ove tvrdnje može se naći u [2].

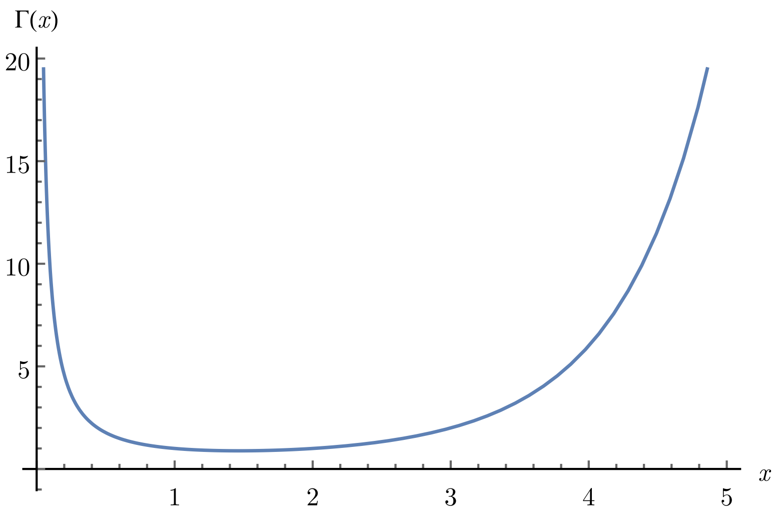
Uzastopnom primjenom Teorema 1.1.2 jednostavno se dobije da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

što nam pokazuje kako je vrijednost gama funkcije u prirodnom broju n jednaka umnošku prvih $n-1$ prirodnih brojeva.
Primjenom istog teorema može se vidjeti da za $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi sljedeća jednakost

$$\Gamma(n+x) = (n+x-1)(n+x-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x).$$

Navedena jednakost pokazuje kako se izračunavanje gama funkcije u bilo kojem pozitivnom realnom broju može svesti na izračunavanje vrijednosti gama funkcije u nekom realnom broju iz intervala $\langle 0, 1\rangle$. Osim toga, taj izraz opravdava činjenicu da se gama funkcija smatra proširenjem faktorijela na realne brojeve.



Slika 1.1: Graf gama funkcije za pozitivne realne brojeve

Na slici 1.1. prikazan je graf gama funkcije u koordinatnoj ravnini na kojem su očite dvije stvari. Vidi se da gama funkcija na skupu $\mathbb{R}_+$ ima lokalni minimum te na istom tom skupu gama funkcija nije injektivna (horizontalni test).

[11] Funkcija $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako vrijedi $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, za sve $x, y \in \langle a, b\rangle$ i $\lambda \in [0, 1]$.

1.2 Proširenje gama funkcije na negativne realne brojeve

U ovom ćemo poglavlju pokazati kako se gama funkcija može dodefinirati tako da bude definirana u svim realnim brojevima. U tu svrhu koristit ćemo funkcijsku jednadžbu (1.3). Ideja je prvo pokušati definirati gama funkciju u 0, zatim u negativnim cijelim brojevima te konačno u preostalim negativnim realnim brojevima.

Neka je $x = 0$. Kako za gama funkciju vrijedi (1.3) trebalo bi vrijediti

$$\Gamma(1) = 0 \cdot \Gamma(0).$$

Prema (1.2) je $\Gamma(1) = 1$ pa imamo

$$1 = 0 \cdot \Gamma(0)$$

što jednostavno nije moguće.
Dakle, gama funkciju nećemo moći definirati u nuli.

Za $x \neq 0$ funkcijsku jednadžbu (1.3) možemo zapisati na način

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada za $-n$ imamo sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned}\Gamma(-n) &= \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \frac{\Gamma(-n+2)}{-n(-n+1)} \\ &= \cdots = \frac{\Gamma(-n+n+1)}{-n(-n+1)\cdots(-n+n)} = \frac{\Gamma(1)}{0}.\end{aligned}$$

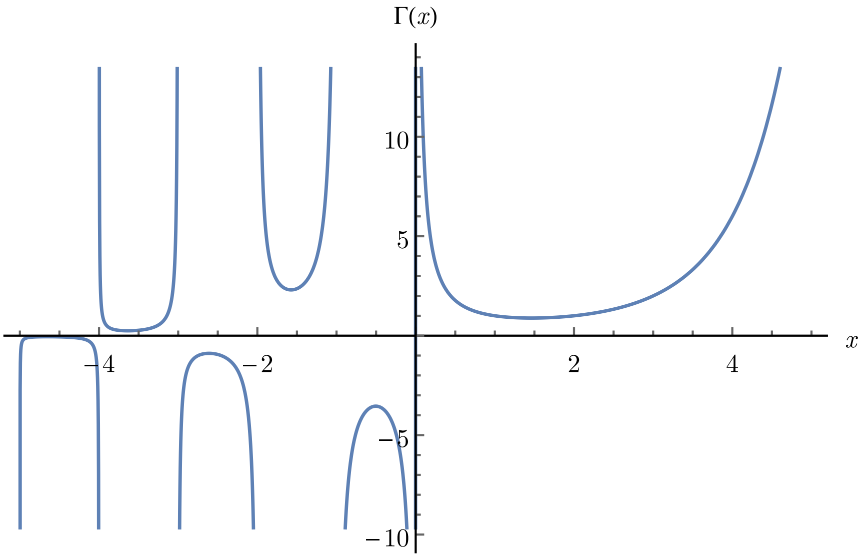
Prema tome, kada bi gama funkcija bila definirana u negativnim cijelim brojevima ta vrijednost bi trebala biti jednaka $\Gamma(1)/0 = 1/0$ što je nemoguće jer u nazivniku zdesna ne možemo imati 0.
Dakle, niti u negativnim cijelim brojevima nećemo moći definirati gama funkciju.

Bilo koji negativan realni broj možemo zapisati u obliku $-n - x$ pri čemu je $n \in \mathbb{N}_0$ i $x \in \langle 0, 1\rangle$. Uvrstimo li to u funkcijsku jednadžbu (1.3) imamo sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned}\Gamma(-n-x) &= \frac{\Gamma(-n-x+1)}{-n-x} = \frac{\Gamma(-n-x+2)}{(-n-x)(-n-x+1)} \\ &= \cdots = \frac{\Gamma(-x)}{(-n-x)(-n-x+1)\cdots(-x-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1-x)}{(-n-x)(-n-x+1)\cdots(-x-1)(-x)}.\end{aligned}$$

Gornji izraz je dobro definiran pa je njime i definirana gama funkcija za negativne realne brojeve koji nisu cijeli.

Sada kada smo gama funkciju definirali na cijelom skupu realnih brojeva možemo prikazati i njen graf koji se nalazi na slici 1.2.



Slika 1.2: Graf gama funkcije proširene na negativne realne brojeve

Teorem 1.2.1 (**Eulerova produktna formula**).
Neka je $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$*. Vrijedi sljedeća formula*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{1.4}$$

Dokaz ovog teorema dosta je složen i postoji nekoliko pristupa njegovom dokazivanju pa ga u ovom radu nećemo navoditi, a zainteresirani dokaze mogu vidjeti u [4], [5] ili [14].

Eulerova produktna formula važna je zbog sljedeće izravne posljedice.

Korolar 1.2.2. *Gama funkcija nema nultočaka.*

Dokaz. Ako pretpostavimo da postoji $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$ takav da je $\Gamma(x) = 0$ onda bi prema (1.4) trebalo vrijediti

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x} \\ 0 &= \frac{\pi}{\sin \pi x}. \end{aligned}$$

No prethodna tvrdnja ne može vrijediti jer izraz zdesna nikada neće biti 0 jer u nazivniku ne može biti 0. Stoga zaključujemo da gama funkcija nema nultočaka. □

Primjer 1.2.3. *Izračunajmo vrijednosti gama funkcije u točkama* $x = 1/2$ *i* $x = -1/2$*.*

Rješenje. Ako u (1.4) uvrstimo $x = 1/2$ dobijemo

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi,$$

iz čega slijedi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Uvrstimo sada u (1.4) $x = -1/2$. U tom slučaju dobijemo

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{-\sin\frac{\pi}{2}} \tag{1.5}$$

Primijenimo li na $\Gamma(3/2)$ funkcijsku jednadžbu (1.3) te kako znamo vrijednost $\Gamma(1/2)$ slijedi da je

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Uvrstimo li dobiveno u (1.5) slijedi

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

1.3 Specijalne vrijednosti gama funkcije

U ranijim smo poglavljima izračunali da je $\Gamma(1) = 1, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ te smo pokazali da je $\Gamma(n) = (n-1)!$ za $n \in \mathbb{N}$. U sljedećim primjerima donosimo vrijednosti gama funkcije u nekim karakterističnim točkama.

Primjer 1.3.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ i $k \in \mathbb{N}$. Uzastopnom primjenom funkcijske jednadžbe* (1.3) *može se pokazati da vrijedi (cijeli izvod vidjeti u [13]):*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{k}\right) = \frac{(nk+1-k)\cdot(nk+1-2k)\cdots(1+k)\cdot 1}{k^n}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right).$$

Specijalno, za $k = 2, 3, 4$ imamo sljedeće izraze:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},\\ \Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1\cdot 4\cdots(3n-5)\cdot(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),\\ \Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1\cdot 5\cdots(4n-7)\cdot(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Slično se može pokazati da vrijedi i

$$\Gamma\left(-n - \frac{1}{k}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot k^{n+1}}{1\cdot(1+k)\cdots(nk+1-k)\cdot(nk+1)}\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Točne vrijednosti gama funkcije u točkama $1/n, n \in \mathbb{N}, n > 2$ niti danas nisu pronađene. Poznato je pak da su $\Gamma(1/3)$ i $\Gamma(1/4)$ transcendentni brojevi. Te tvrdnje dokazali su Le Lionnais[12] 1983. i Chudnovsky[13] 1984. Postoje rezultati koji omogućavaju računanje približnih vrijednosti gama funkcije u tim točkama (vidjeti [2] ili [5]). Neke od približno izračunatih vrijednosti navedene su u nastavku.

[12] Francois Le Lionnais (1901. - 1984.) - francuski matematičar i kemičar

[13] Gregory Volfovich Chudnovsky (r. 1952.) - ukrajinsko-američki matematičar, koautor algoritma za izračunavanje znamenaka broja π koji se koristi danas pomoću kojega je π izračunat na 12.1 trilijun decimala

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2.6789385347077476337,$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.6256099082219083119,$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \approx 4.5908437119988030532,$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \approx 5.5663160017802352043.$$

Na slici 1.2 koja prikazuje graf gama funkcije mogli smo vidjeti postojanje lokalnih ekstrema gama funkcije. Korištenjem neke od metoda za približno izračunavanje vrijednosti gama funkcije (vidjeti [1]) mogu se izračunati točke lokalnih ekstrema i vrijednosti gama funkcije u tim točkama, a neki su prikazani u tablici 1.1.

n	x_n	$\Gamma(x_n)$
0	$+1.462$	$+0.886$
1	-0.504	-3.545
2	-1.573	$+2.302$
3	-2.611	-0.888
4	-3.635	$+0.245$

Tablica 1.1: Lokalni ekstremi i vrijednosti gama funkcije u lokalnim ekstremima

Poglavlje 2

Beta funkcija

Slično kao i gama funkciju, beta funkciju definirat ćemo kao integral. Ipak, dvije su bitne razlike u odnosu na gama funkciju. Beta funkcija je naime funkcija dviju varijabli, a drugo definirat ćemo je kao određeni integral, a ne kao nepravi što je bio slučaj kod gama funkcije. Beta funkcija se često naziva *Eulerovim integralom prve vrste* i može se pokazati da on konvergira za dva pozitivna realna broja. Izrazito je bitan izraz koji povezuje beta i gama funkciju (*Eulerov integral druge vrste*) jer će omogućiti dodefiniranje beta funkcije i u točkama za koje definicijski integral ne konvergira.

2.1 Definicija i osnovni rezultati

Definicija 2.1.1. Funkciju $\mathcal{B} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zadanu formulom

$$\mathcal{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

zovemo beta funkcija.

Za početak ćemo pokazati nekoliko bitnih svojstava beta funkcije. Prvo među njima je simetričnost.

Propozicija 2.1.2. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{B}(x,y) = \mathcal{B}(y,x). \tag{2.2}$$

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Prema (2.1) je

$$\mathcal{B}(y,x) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Sada supstitucijom $u = 1-t$ imamo

$$\mathcal{B}(y,x) = -\int_1^0 (1-u)^{y-1}u^{x-1}\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\mathrm{d}u = \mathcal{B}(x,y).$$

□

Sljedeća propozicija daje nam zapis beta funkcije u kojem se kao podintegralna funkcija pojavljuje produkt potencija trigonometrijskih funkcija.

Propozicija 2.1.3. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{B}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t \mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Uvedimo supstituciju $t = \sin^2\theta$. Tada je $(1-t) = \cos^2\theta$, a $\mathrm{d}t = 2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$. Sada slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(x-1)}\theta \cos^{2(y-1)}\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

□

Beta funkciju povezali smo s trigonometrijskim funkcijama, a sada ćemo je povezati s gama funkcijom.

Teorem 2.1.4. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{2.4}$$

Dokaz ovog teorema nije složen, svodi se na raspisivanje izraza $\Gamma(x)\Gamma(y)$ prema Definiciji 1.1, uvođenje polarnih koordinata te primjenu ranije navedenih svojstava gama funkcije. Cijeli dokaz može se naći u [13].

U prethodnim smo poglavljima pokazali da se gama funkcija može dodefinirati u negativnim realnim brojevima koji nisu cijeli brojevi. Također smo pokazali da se ne može definirati u nuli. Stoga se prethodni teorem koristi kako bi se beta funkcija dodefinirala u točkama za koje definicijski integral ne konvergira. Ranije smo utvrdili u kojim točkama gama funkcija nije definirana pa slijedi da se beta funkcija neće moći dodefinirati u točkama:

- $(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$,
- $(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\}), x + y = 0$,
- $(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\}), x + y \in \mathbb{Z}_-$.

Osim gore navedenih tvrdnji iz Teorema 2.1.4 slijede sljedeća dva rezultata.

Korolar 2.1.5. *Beta funkcija nema nultočaka.*

Ova tvrdnja je očita zbog činjenice da gama funkcija nema nultočaka.

Korolar 2.1.6. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi*

$$\mathcal{B}(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\mathcal{B}(x, y). \tag{2.5}$$

Dokaz. Prema (2.4) za $x+1$ i y imamo

$$\mathcal{B}(x+1, y) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)},$$

što je prema (1.3) jednako

$$\mathcal{B}(x+1, y) = \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{x}{x+y}\mathcal{B}(x, y).$$

□

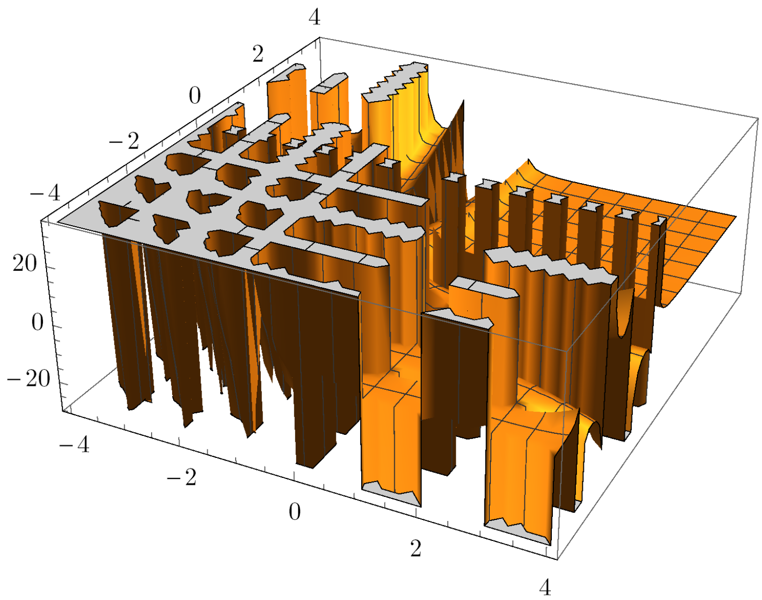
Primjer 2.1.7. *Izračunajmo vrijednost beta funkcije u točkama* $(1/2, 1/2)$ *i* $(-1/2, 3/2)$*.*

Rješenje. $\mathcal{B}(1/2, 1/2)$ računamo koristeći (2.4):

$$\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi.$$

Za izračunavanje $\mathcal{B}(-1/2, 3/2)$ koristimo (2.4) i funkcijsku jednadžbu (1.3):

$$\mathcal{B}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\pi.$$



Slika 2.1: Graf beta funkcije

2.2 Specijalne vrijednosti beta funkcije

U sljedećim primjerima prikazat ćemo vrijednosti beta funkcije u nekim karakterističnim točkama.

Primjer 2.2.1. *Neka je* $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$. *Tada koristeći* (2.4) *slijede jednakosti:*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,1) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x}, \\ \mathcal{B}(x,1-x) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \end{aligned}$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz (1.4).

Primjer 2.2.2. *Neka je* $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$ *te* $n \in \mathbb{N}$. *Tada koristeći* (2.4) *te* (1.3) *dobijemo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,n) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(n)}{\Gamma(x+n)} &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(n)}{(n+x-1)(n+x-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x)} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n+x-1)(n+x-2)\cdots(x+1)x}. \end{aligned}$$

Za $m, n \in \mathbb{N}$ *pak primjenom* (2.4) *dobijemo jednakost:*

$$\mathcal{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Poglavlje 3

Riemannova zeta funkcija

Patterson u svojoj knjizi *An Intruduction to the theory of the Riemann zeta-function* navodi kako teorija o Riemannovoj zeta funkciji predstavlja jedno od najljepših područja u matematici. Zeta funkciju prvi je definirao Euler sredinom osamnaestog stoljeća i to samo za realne brojeve što ćemo mi prikazati u ovom radu. Sredinom devetnaestog stoljeća Riemann je pokazao da se zeta funkcija može definirati i za kompleksne brojeve uz određene uvjete. Osim toga Riemann je zaslužan za jednu od najvažnijih primjena Riemannove zeta funkcije, a tiče se određivanja prostih brojeva o čemu će biti riječi u nastavku. Ipak najzanimljivija je činjenica o ovoj funkciji *Riemannova hipoteza*, koju je postavio sam Riemann, ali je do dana današnjeg nitko nije dokazao.

3.1 Definicija Riemannove zeta funkcije

Za razumijevanje Riemannove zeta funkcije bitno nam je na početku upoznati se s pojmom Dirichletova reda. Općenito, svaki red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}, \qquad a_n \in \mathbb{R}, \qquad p > 0$$

naziva se Dirichletov red. Nama će za Riemannovu zeta funkciju biti važan sljedeći red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p > 0.$$

Kod redova nas najčešće zanima njihova konvergencija pa stoga navodimo sljedeću lemu koja govori o konvergenciji gore navedenog reda.

Lema 3.1.1. *Dirichletov red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3.1}$$

konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \in \langle 0, 1]$.

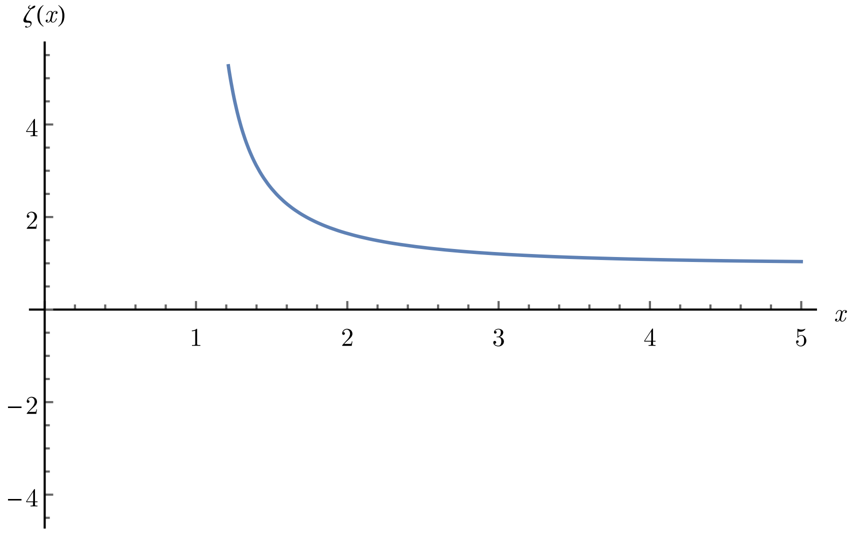
Ova lema dokazuje se prilično jednostavno primjenom Cauchyevog integralnog kriterija konvergencije redova. Dokaz se može naći u [9].

Definicija 3.1.2. Funkciju $\zeta : \langle 1, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{3.2}$$

nazivamo Riemannova zeta funkcija.

Kao što vidimo, izraz kojim smo definirali Riemannovu zeta funkciju zapravo je Dirichletov red iz Leme 3.1.1 gdje smo pokazali da red konvergira za $x > 1$. Upravo stoga je Riemannova zeta funkcija definirana na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$. Općenito, Riemannova zeta funkcija može se definirati za sve kompleksne brojeve z za koje je $\mathrm{Re}z > 1$. Ovaj pristup detaljno je objašnjen u [12] i [16].



Slika 3.1: Graf Riemannove zeta funkcije

3.2 Funkcijska jednadžba

Slično kao i kod gama i beta funkcije, nameće se potreba pronalaženja načina kako definirati Riemannovu zeta funkciju za sve realne brojeve. U ovom ćemo poglavlju prikazati dva rezultata koje ćemo koristiti upravo u tu svrhu. Prvi rezultat omogućava nam računanje vrijednosti Riemannove zeta funkcije u točkama iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$.

Lema 3.2.1. *Alternirajući red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}. \tag{3.3}$$

konvergira apsolutno za $p \in \langle 1, \infty \rangle$, *konvergira za* $p \in \langle 0, 1]$, *a divergira za* $p \in \langle -\infty, 0]$.

Dokaz ove leme svodi se na jednostavnu primjenu Leibnitzovog kriterija konvergencije redova za alternirajuće redove. Više o konvergenciji ovog reda može se naći u [7]. Osim toga, napomenimo da apsolutna konvergencija povlači konvergenciju pa to znači da (3.3) konvergira za $p > 0$.

Propozicija 3.2.2. *Neka je $x \in \langle 0, \infty \rangle, x \neq 1$. Tada vrijedi*

$$\zeta(x) = \frac{1}{1 - 2^{1-x}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^x}. \tag{3.4}$$

Dokaz. Vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{1-x})\zeta(x) &= \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2^x}\right)\left(\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \cdots - 2\left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{1^x} - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} - \frac{1}{6^x} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^x}. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Sada smo dobili sljedeći izraz

$$\zeta(x) = \frac{1}{1 - 2^{1-x}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^x}. \tag{3.6}$$

Lema 3.2.1 nam osigurava da je (3.5) konvergentan za $x > 0$ pa je (3.6) dobro definiran za sve $x > 0$, osim za $x \neq 1$ jer bi u tom slučaju imali nulu u nazivniku. □

Sada ćemo iskazati funkcijsku jednadžbu koju zadovoljava Riemannova zeta funkcija, a omogućava izračunavanje njenih vrijednosti u negativnim realnim brojevima i nuli. Osim toga, funkcijska jednadžba će nam dati vezu između Riemannove zeta funkcije i gama funkcije zbog čega ćemo lakše dokazati neka zanimljiva svojstva Riemannove zeta funkcije.

Teorem 3.2.3. *Za $x < 1$ Riemannova zeta funkcija zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$\zeta(x) = 2(2\pi)^{x-1} \sin \frac{\pi x}{2} \Gamma(1 - x)\zeta(1 - x). \tag{3.7}$$

Funkcijska jednadžba (3.7) može se dokazati na nekoliko načina, a u [16] može se naći čak sedam različitih načina. Navedena funkcijska jednadžba pokazat će se bitnom u zaključivanju o postojanju nultočaka Riemannove zeta funkcije te u postavljanju Riemannove hipoteze o kojima će biti riječi u sljedećem poglavlju.

3.3 Nultočke i Riemannova hipoteza

Kako bismo mogli donijeti zaključke o nultočkama Riemannove zeta funkcije, morat ćemo se prisjetiti kako smo definirali Riemannovu zeta funkciju. U prvom smo poglavlju Riemannovu zeta funkciju definirali izrazom (3.2). Lema 3.1.1 je pak tvrdila da red iz definicije konvergira samo za $x > 1$. To znači da je za $x > 1$ suma tog reda konačna, a kako su svi članovi reda pozitivni, suma je također pozitivna. Dakle, na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ Riemannova zeta funkcija neće imati nultočaka.

Promatrajmo što se događa na intervalu $\langle -\infty, 1 \rangle$. Vrijednosti Riemannove zeta funkcije računamo na temelju funkcijske jednadžbe (3.7). Korolar 1.2.2 tvrdi kako gama funkcija nema nultočaka. Nadalje, prethodno smo objasnili da Riemannova zeta funkcija nema nultočaka za $x > 1$. Prema tome, desna strana funkcijske jednadžbe (3.7) bit će 0 ako i samo ako je

$$\sin \frac{\pi x}{2} = 0,$$

a to će biti za $x = -2, -4, -6, \ldots$.
Dakle, na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$ Riemannova zeta funkcija imat će nultočke $-2n, n \in \mathbb{N}$ i nazivaju se trivijalne nultočke jer je vrlo jednostavno dokazati njihovu egzistenciju.

Niti jedno od prethodnih razmatranja nije nam dalo odgovora o postojanju nultočaka u intervalu $[0, 1\rangle$. Vrijednosti Riemannove zeta funkcije u promatranom intervalu možemo računati pomoću (3.6), ali ne možemo ništa reći o postojanju nultočaka jer ne možemo dokazati za koji bi x suma reda (3.5) bila 0. Stoga se pruga određena pravcima $x = 0$ i $x = 1$ za Riemannovu zeta funkciju naziva kritična pruga, a interval $[0, 1\rangle$ kritični interval. Problemom postojanja nultočaka u kritičnoj prugi bavio se sam Riemann te je 1859. postavio poznatu Riemannovu hipotezu.

Riemann je zeta funkciju promatrao na skupu kompleksnih brojeva. Sve tvrdnje koje smo mi do sada izrekli za realne brojeve vrijede i za kompleksne brojeve uz određena ograničenja (vidjeti [12] ili [16]). Riemannova hipoteza, premda postavljena još u devetnaestom stoljeću, niti danas nije dokazana premda svi izračuni upućuju na njenu istinitost.

Riemannova hipoteza: Sve netrivijalne nultočke $z \in \mathbb{C}$ Riemannove zeta funkcije leže na pravcu $\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}$.

Netrivijalnim nultočkama smatraju se sve nultočke u kritičnoj prugi. Do sredine dvadesetog stoljeća matematičari su pronašli oko tisuću netrivijalnih nultočaka i sve su one ležale na kritičnom pravcu. Razvojem računala i računalnih programa, pronađeno je oko 10^{13} netrivijalnih nultočaka Riemannove zeta funkcije koje sve leže na kritičnom pravcu. Ipak, kao što je ranije spomenuto, premda svi izračuni upućuju na njenu istinitost, točan matematički dokaz Riemannove hipoteze ne postoji.

Riemannovom hipotezom bavili su se brojni matematičari među kojima i tri dobitnika Fieldsove medalje[1]: Atle Selberg[2], Enrico Bombieri[3] i Alain Connes[4]. Ipak, niti jedan je nije uspio dokazati.

S obzirom na to da smo mi Riemannovu zeta funkciju definirali samo za realne brojeve, zanimaju nas samo realne nultočke u kritičnoj prugi. Zanimljivo, pokazuje se da Riemannova zeta funkcija nema realnih nultočaka u kritičnoj prugi. Ako bismo slijedili Riemannovu hipotezu, mogli bismo pretpostaviti da je (jedina) nultočka $x = 1/2$, ali može se pokazati da je $\zeta(1/2) \approx -1.4603545088095868$.

[1]Fieldsova medalja najveća je nagrada u svijetu matematike. Dodjeljuje se najboljim matematičarima mlađima od 40 godina za izuzetan doprinos razvoju matematike. Često se naziva i "matematički Nobel".
[2]Atle Selberg (1917. - 2007.) - norveški matematičar
[3]Enrico Bombieri (r. 1940.) - talijanski matematičar
[4]Alain Connes (r. 1947.) - francuski matematičar

3.4 Specijalne vrijednosti Riemannove zeta funkcije

U prethodnim smo poglavljima pokazali da je $\zeta(-2n) = 0, n \in \mathbb{N}$. Osim toga, pojasnili smo da Riemannova zeta funkcija nije definirana u $x = 1$ obzirom da (3.2) i (3.5) divergiraju za $x = 1$. Može se pokazati da vrijedi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \zeta(1+\varepsilon) = \infty,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \zeta(1+\varepsilon) = -\infty.$$

Vrijednostima Riemannove zeta funkcije u parnim brojevima bavio se Euler koji je dokazao da vrijedi (dokaz se može vidjeti u [12]):

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}, \qquad n \in N \tag{3.8}$$

pri čemu su B_{2n} Bernoullijevi brojevi. Bernoullijevi brojevi mogu se definirati na brojne načine, mi ovdje navodimo jedan jednostavniji način koji koristi razvoj funkcije u red potencija.

Definicija 3.4.1. Bernoullijevi brojevi u oznaci B_n definiraju se izrazom

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < 2\pi.$$

Razvijmo stoga funkciju $\frac{x}{e^x-1}$ u red potencija za $|x| < 2\pi$.. Funkciju e^x u nazivniku razvijemo u Taylorov red, oduzmemo 1 te skratimo s x iz brojnika pa imamo

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \cdots}.\end{aligned}$$

Podijelimo li sada brojnik i nazivnik prema pravilu za dijeljenje polinoma slijedi nam izraz

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots,$$

koji se može zapisati na ekvivalentan način iz kojeg odmah slijede vrijednosti Bernoullijevih brojeva

$$\underbrace{1}_{B_0} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{B_1} x \underbrace{+\frac{1}{6}}_{B_2} \frac{x^2}{2!} + \underbrace{0}_{B_3} \frac{x^3}{3!} \underbrace{-\frac{1}{30}}_{B_4} \frac{x^4}{4!} + \underbrace{0}_{B_5} \frac{x^5}{5!} \underbrace{+\frac{1}{42}}_{B_6} \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Pokaže se da su svi Bernoullijevi brojevi s neparnim indeksima trivijalni, dakle jednaki 0. Prvih nekoliko Bernoullijevih brojeva iznose

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}, \qquad B_6 = \frac{1}{42}, \qquad \cdots.$$

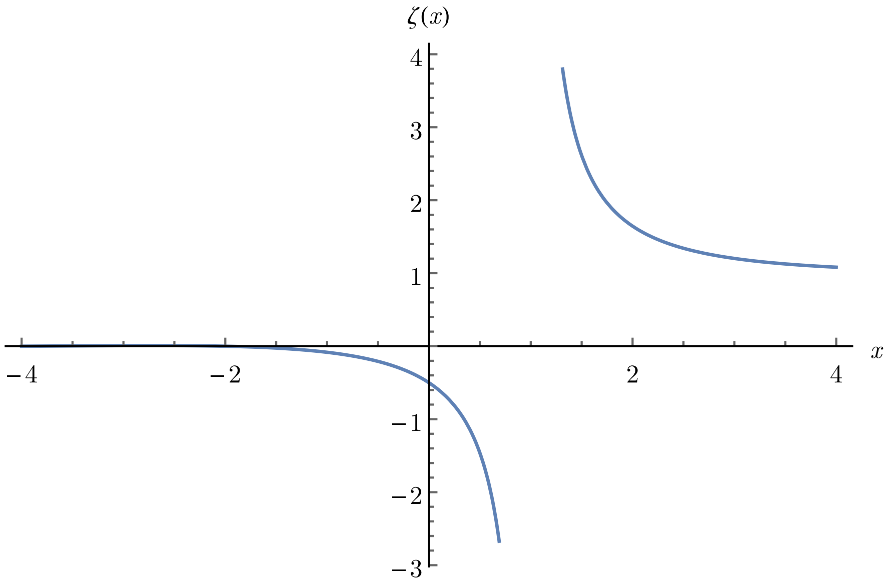
Sada na temelju poznavanja prvih nekoliko Bernoullijevih brojeva i izraza (3.8) slijede vrijednosti Riemannove zeta funkcije u prvih nekoliko parnih prirodnih brojeva

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Nadalje, recimo kako ne postoje točne vrijednosti Riemannove zeta funkcije u neparnim brojevima već se one približno izračunavaju integralnim ili numeričkim formulama. Jedina poznata činjenica, koju je dokazao Apéry, je da je $\zeta(3) \approx 1.202$ iracionalan broj. Upravo zbog njega, ovaj broj naziva se Apéryjeva konstanta.

Nigdje dosada nismo spominjali vrijednosti Riemannove zeta funkcije u nuli. Ova vrijednost izračunava se na temelju funkcijske jednadžbe (3.7) uz određene transformacije jer bismo s desne strane dobili $\zeta(1)$ za što smo rekli da nije definirano. Postupak je složen pa ga ne navodimo, može se vidjeti u [12], a kao rezultat se dobije činjenica kako je $\zeta(0) = -1/2$.

Sada konačno možemo prikazati i graf Riemannove zeta funkcije na cijelom skupu realnih brojeva.



Slika 3.2: Graf Riemannove zeta funkcije

Poglavlje 4

Hipergeometrijske funkcije

Sve elementarne funkcije mogu se razviti u neki red potencija. Neki od tih redova su hipergeometrijski redovi ili neke njegove varijacije. Upravo iz hipergeometrijskog reda došlo se do hipergeometrijskih funkcija, a cijeli postupak izvođenja bit će prikazan u ovom poglavlju. U nastavku ćemo vidjeti da je kod definiranja hipergeometrijske funkcije bitno istaknuti dva parametra p i q koji će predstavljati broj parametara u brojniku, odnosno broj parametara u nazivniku. Pojam hipergeometrijskog reda prvi puta uporabio je Wallis[1], a hipergeometrijskim funkcijama kasnije su se bavili Euler, Barnes[2], Riemann i Gauss.

4.1 Hipergeometrijski red

Definicija 4.1.1. Red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ naziva se hipergeometrijski red ako je $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ racionalna funkcija u varijabli n.

Definicija nam dakle govori da $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ treba biti oblika

$$R(n) = \frac{P(n)}{Q(n)},$$

pri čemu su $P(n)$ i $Q(n)$ polinomi u varijabli n. Faktoriziramo li sada razlomak $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ dobit ćemo

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)x}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)(n+1)}, \qquad n = 0,1,2,... \tag{4.1}$$

U faktorizaciji nam se pojavljuju x u brojniku i $(n+1)$ u nazivniku. Varijabla x upućuje na to da polinom u brojniku ne mora biti normiran. Faktor $(n+1)$ u nazivniku može se, ali i ne mora pojaviti u postupku faktorizacije. Ako se ne pojavi, dovoljno je u brojniku dodati faktor $(n+1)$ što se može uzmemo li za $a_i = 1$ za neki indeks i. Cilj uvođenja faktora $(n+1)$ u nazivniku je uvođenje $n!$ u hipergeometrijski red, a što će nam biti prikladno za uvođenje hipergeometrijskih funkcija. Sada se rekurzivno iz (4.1) dobije sljedeći izraz

$$c_n = \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n x^n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n n!}c_0, \tag{4.2}$$

[1]John Wallis (1616. - 1703.) - engleski matematičar
[2]Ernest Barnes (1874. - 1953.) - engleski matematičar

pri čemu je $(a)_n$ tzv. Pochhammerov simbol i definira se kao

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Dogovorno se uzima da je $(a)_0 = 1$. Pocchamerov simbol može se definirati i u terminima gama funkcije (vidjeti [8]) na sljedeći način:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ a(a+1)\cdots(a+n-1), & n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Uočimo da $b_i, i = 1, ..., n$ ne mogu biti 0 ili negativni cijeli brojevi jer bismo u protivnome dobili 0 u nazivniku.

Koristimo li prethodne oznake, hipergeometrijski red možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}. \tag{4.3}$$

Ovaj način zapisa doveo je do definicije hipergeometrijskih funkcija.

4.2 Hipergeometrijska funkcija

Definicija 4.2.1. Generalizirana hipergeometrijska funkcija definirana je izrazom

$${}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_p \\ b_1, b_2, ..., b_q \end{array}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}. \tag{4.4}$$

U (4.4) p označava broj parametara u brojniku, a q broj parametara u nazivniku. Za različite vrijednosti parametara p i q definiramo različite hipergeometrijske funkcije. Općenito, za neke p i q govorimo o generaliziranoj hipergeometrijskoj funkciji kako i piše u prethodnoj definiciji.

Zbog jednostavnosti, za hipergeometrijske funkcije uvodi se oznaka

$${}_pF_q(a_1, a_2, ..., a_p; b_1, b_2, ..., b_q; x)$$

te ćemo je i mi koristiti u nastavku.

Obzirom da je generalizirana hipergeometrijska funkcije definirana kao red zanima nas područje konvergencije tog reda.

Teorem 4.2.2. *Red* (4.4) *apsolutno konvergira*

(i) za svaki $x \in \mathbb{R}$ ako je $p \leq q$,

(ii) za $x \in R$ takav da je $|x| < 1$ ako je $p = q + 1$.

Red divergira za sve $x \neq 0$ ako je $p > q + 1$.

Dokaz ovog teorema provodi se D'Alambertovim kriterijem za konvergenciju reda, a može ga se vidjeti u [2].

Najzanimljivija hipergeometrijska funkcija je tzv. Gaussova hipergeometrijska funkcija. Riječ je o hipergeometrijskoj funkciji s parametrima $p = 2$ i $q = 1$, a često se u literaturi upravo na nju misli kada se govori o hipergeometrijskoj funkciji.

Definicija 4.2.3. Gaussova hipergeometrijska funkcija ${}_2F_1(a, b; c; x)$ definirana je izrazom

$$
{}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n, \qquad |x| < 1. \tag{4.5}
$$

Činjenica da je (4.5) definirana samo za $|x| < 1$ posljedica je Teorema 4.2.2. Kao i kod prethodno razmatranih specijalnih funkcija, i ovdje se postavlja pitanje proširenja funkcije na cijeli skup realnih brojeva. U tu svrhu navodimo sljedeći teorem koji se još naziva i Eulerova integralna reprezentacija po Euleru koji ga je prvi dokazao.

Teorem 4.2.4. *Neka je $c > b > 0$. Tada za $x \in [1, \infty\rangle$ vrijedi*

$$
{}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} \mathrm{d}t. \tag{4.6}
$$

Dokaz. Prisjetimo se kako se binomni teorem može generalizirati za realne eksponente. [3] Raspišemo li izraz $(1 - xt)^{-a}$ imamo sljedeću jednakost

$$
(1 - xt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a)_n}{n!} (-xt)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n t^n. \tag{4.7}
$$

Neka je $|x| < 1$. Sada desnu stranu izraza (4.6) možemo zapisati na sljedeći način

$$
\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} \mathrm{d}t.
$$

Dobiveni integral je beta integral (2.1.1) koji se prema (2.1.4) može zapisati kao

$$
\frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)}
$$

što ako sada uvrstimo umjesto integrala dobijemo

$$
\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \Gamma(n+b)}{n! \Gamma(n+c)} x^n.
$$

Sada iskoristimo (1.3) pa iz prethodne jednakosti slijedi

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (n+b-1)(n+b-2)\cdots(b+1)b\Gamma(b)}{n!(n+c-1)(n+c-2)\cdots(c+1)c\Gamma(c)} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n =_2 F_1(a, b; c; x).
\end{aligned}
$$

Teorem smo dokazali za $|x| < 1$, ali može se pokazati da je integral iz teorema dobro definiran i za $|x| \geq 1$ (vidjeti [2]) pa teorem vrijedi i za $|x| \geq 1$. $\square$

[3] Neka su $x, y, a \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi: $(x+y)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^{a-n} y^n$ pri čemu je $\binom{a}{n} = \frac{(n+1)_{a-n}}{(a-n)!}$.

4.3 Specijalne vrijednosti hipergeometrijskih funkcija

Za početak donosimo nekoliko rezultata o Gaussovoj hipergeometrijskoj funkciji. Iskazat ćemo teorem koji olakšava izračunavanje vrijednosti Gaussove hipergeometrijske funkcije za $x = 1$ i parametre $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dokaze oba teorema može se naći u [2].

Teorem 4.3.1. ***(Gaussova sumacijska formula)*** *Neka je $c - a - b > 0$. Tada vrijedi*

$$ {}_2F_1(a, b; c; 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. $$

Korolar 4.3.2. ***(Chu[4]-Vandermondeova[5] formula)*** *Neka je $c - a + n > 0, n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi*

$$ {}_2F_1(-n, a; c; 1) = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}. $$

Osim navedenih formula, zahvaljujući činjenici da se mnoge elementarne funkcije mogu razviti u red potencija, izračunavanje vrijednosti Gaussove hipergeometrijske funkcije za fiksne parametre a, b i c te proizvoljan $x, |x| < 1$ dosta je olakšano.

Primjer 4.3.3. *Raspišemo li ${}_2F_1(1, 1; 2; -x)$ prema Definiciji 4.5 imamo sljedeći niz jednakosti*

$$ \begin{aligned} {}_2F_1(1, 1; 2; -x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{(2)_n n!} (-x)^n \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! n!}{(n+1)! n!} (-1)^n x^{n+1} && x \neq 0 \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} && x \neq 0. \end{aligned} $$

Uočimo da je suma zdesna razvoj funkcije $\ln(1 + x)$ *u Taylorov red oko točke* 0. *Prema tome slijedi da je*

$$ {}_2F_1(1, 1; 2; -x) = \frac{1}{x} \ln(1 + x), \qquad |x| < 1, x \neq 0. $$

Slično vrijedi i za generaliziranu hipergeometrijsku funkciju. Za različite vrijednosti parametara p i q te $a, b, c \in \mathbb{R}$ mogu se pokazati zanimljive jednakosti za $|x| < 1$.

Primjer 4.3.4. *Promatrajmo funkciju ${}_1F_0(a; \_\_; x)$. Za nju vrijedi*

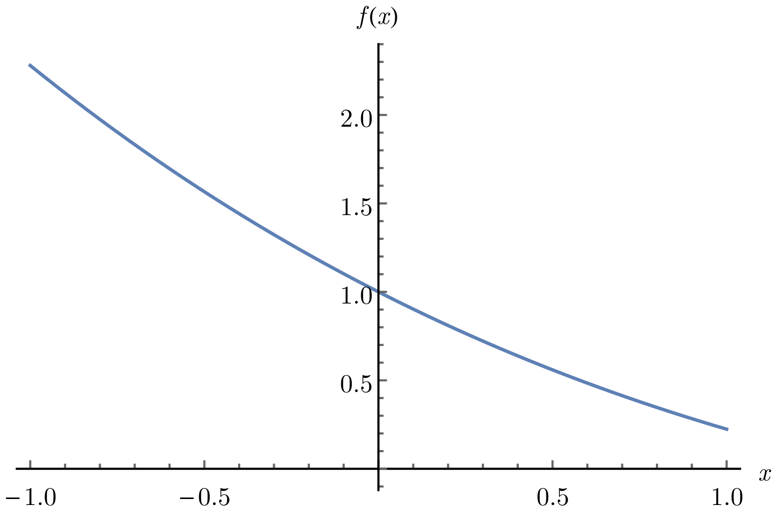
$$ {}_1F_0(a; \_\_; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n $$

Uočimo da je suma zdesna jednaka sumi (4.7) *iz dokaza Teorema 4.2.4 za* $t = 1$. *Stoga slijedi jednakost*

$$ {}_1F_0(a; \_\_; x) = (1 - x)^{-a}. $$

[4]Zhu Shijie (Chu Shih-chieh), (1249. - 1314.) - kineski matematičar

[5]Alexandre Théophile Vandermonde (1735. - 1796.) - francuski matematičar i kemičar



Slika 4.1: Graf funkcije ${}_2F_1(1,1;2;-x)$

Primjer 4.3.5.

$$ {}_0F_0(\_\_;\_\_;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x. $$

Primjer 4.3.6.

$$ \begin{aligned} {}_0F_1\left(\_\_;\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)_n n!} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} (2n!)}{2^{2n-1}(1\cdot 3\cdots(2n-1))n!(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} $$

Uočimo da je suma zdesna razvoj funkcije $\cos x$ *u Taylorov red oko točke* 0. *Prema tome, vrijedi*

$$ {}_0F_1\left(\_\_;\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4}\right) = \cos x. $$

Poglavlje 5

Besselove funkcije

U ovom poglavlju govorit ćemo o Besselovim funkcijama koje imaju važne primjene u fizici. Besselovim funkcijama bavilo se nekoliko generacija obitelji Bernoulli. Prve verzije Besselovih funkcija u svojim radovima spominje Johann Bernoulli[1], kasnije su se pojavile i u radovima njegova brata Jacoba Bernoullija [2], a u današnjem obliku definirao ih je Johannov sin Daniel Bernoulli. Ipak, prvi koji je sistematizirao dotadašnja istraživanja o Besselovim funkcijama bio je Friedrich Bessel [3] pa su funkcije dobile ime po njemu. Slično kao i kod hipergeometrijskih funkcija, Besselove funkcije ćemo razlikovati obzirom na red i na vrstu.

5.1 Besselove funkcije prve vrste

Definicija 5.1.1. Neka je $\nu \in \mathbb{R}$. Funkcija $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naziva se *Besselovom funkcijom reda ν prve vrste* i definira se izrazom

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu+2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Tako naprimjer za $\nu = 0, 1$ razlikujemo

- Besselovu funkciju nultog reda prve vrste

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}x\right)^{2n}}{n!\Gamma(n+1)} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \tag{5.1}$$

- Besselovu funkciju prvog reda prve vrste

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}x\right)^{2n+1}}{n!\Gamma(n+2)} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots$$

Iz Definicije 5.1.1 vidimo da je za ν paran broj Besselova funkcija parna, a za ν neparan neparna funkcija. Mi ćemo se u ovom radu baviti Besselovim funkcijama nultog reda, ali ne samo prve, već i druge vrste.

---

[1] Johann Bernoulli (1667. - 1748.) - švicarski matematičar
[2] Jaccob (James) Bernoulli (1654. - 1705.) - švicarski matematičar
[3] Friedrich Bessel (1784. - 1846.) - njemački matematičar i fizičar

5.2 Besselova diferencijalna jednadžba

Derivirajmo za početak (5.1) po varijabli x. Dobijemo sljedeće

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_0(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} - \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \cdots = -J_1(x). \tag{5.2}$$

Uočimo također da vrijedi i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xJ_1(x)) = x\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots\right) = xJ_0(x) \tag{5.3}$$

Ako sada (5.3) zapišemo koristeći (5.2) dobijemo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_0(x)\right) + xJ_0(x) = 0,$$

Kao što vidimo, J_0 zadovoljava sljedeću diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0, \tag{5.4}$$

koja se naziva *Besselova jednadžba nultog reda.*

Rješenje diferencijalne jednadžbe (5.4) koje je linearno nezavisno od rješenja J_0 naziva se *Besselova funkcija nultog reda druge vrste.* Može se pokazati (vidjeti [6]) da je to drugo, partikularno rješenje Besselove jednadžbe nultog reda dano izrazom

$$Y_0(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \cdots. \tag{5.5}$$

Uočimo da je $Y_0(x)$ dobro definirana samo za $x > 0$ jer za $x \leq 0$ funkcija ln nije definirana.

Zanima nas što se događa s J_0 i Y_0 za male, odnosno velike x. Primijetimo da za $x \to 0, J_0(x) \to 1$ pa posljedično za $x \to 0, Y_0(x) \to \ln x$. Kako bismo analizirali što se događa kada $x \to \infty$ uvedimo supstituciju $u = y\sqrt{x}$. Besselova jednadžba (5.4) tada ima oblik

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = -\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)u.$$

Kako za $x \to \infty, \dfrac{1}{4x^2} \to 0$ jednadžba ima oblik

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = -u.$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe drugog reda je

$$u = C\cos(x - \lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

pa ako vratimo uvedenu supstituciju slijedi da se za $x \to \infty$ rješenje Besselove jednadžbe nultog reda ponaša kao funkcija

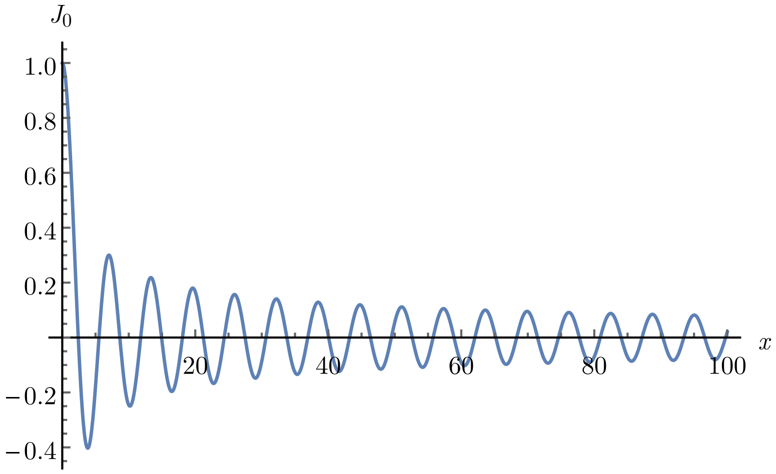
$$y = \frac{C\cos(x - \lambda)}{\sqrt{x}}, \qquad C, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Konkretno, može se pokazati (vidjeti [6]) da vrijedi

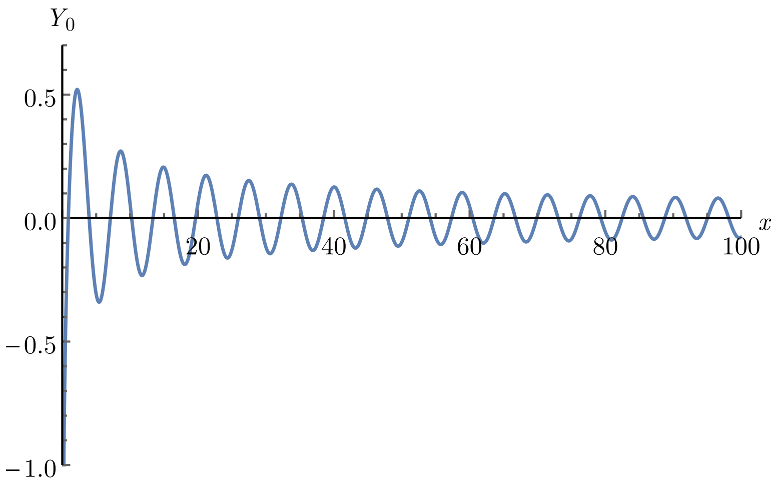
$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + p(x) \right),$$
$$Y_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + q(x) \right),$$

pri čemu za $x \to \infty$, $p(x), q(x) \to 0$.

Upravo navedeni rezultati razlog su zašto grafovi Besselovih funkcija s porastom x poprimaju oblik sinusoide, odnosno kosinusoide.



Slika 5.1: Graf Besselove funkcije nultog reda prve vrste



Slika 5.2: Graf Besselove funkcije nultog reda druge vrste

Već smo rekli kako su J_0 i Y_0 linearno nezavisna rješenja Besselove jednadžbe nultog reda. Stoga se opće rješenje može zapisati kao

$$y = \alpha J_0(x) + \beta Y_0(x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x > 0.$$

U nastavku navodimo dva rezultata vezana uz nultočke Besselove funkcije nultog reda prve vrste. Prvo navodimo lemu koju nećemo dokazivati s obzirom da je dokaz tehnički zahtjevan, ali se može vidjeti u [6].

Lema 5.2.1. *Jednadžba* $J_n(x) = 0$ *ima barem jedno realno rješenje u intervalu* $\langle a, a + k\pi\rangle, k > 1$ *za dovoljno veliki* a.

Teorem 5.2.2. *Jednadžba* $J_0(x) = 0$ *ima beskonačno mnogo realnih rješenja.*

Dokaz. Prema Lemi 5.2.1 u svakom od intervala

$$\langle a, a + k\pi\rangle, \langle a + k\pi, a + 2k\pi\rangle, \cdots, \qquad k > 1$$

za dovoljno veliki a postoji barem jedna realna nultočka. Kako promatranih intervala ima beskonačno mnogo, slijedi da i realnih nultočaka mora biti beskonačno mnogo. □

Može se pokazati (vidjeti [6]) da je svaka od beskonačno mnogo realnih nultočaka jednostruke kratnosti.

5.3 Besselovi integrali

Besselove funkcije mogu se zapisati u obliku integrala koji se nazivaju *Besselovi integrali.* Mi ćemo u ovom poglavlju promatrati integralni zapis Besselove funkcije nultog reda prve vrste, dakle J_0.

Ako razvijemo funkciju $e^{ix\sin\varphi}$ po potencijama od x dobijemo sljedeći red

$$e^{ix\sin\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix\sin\varphi)^n}{n!}.$$

Integriramo li sada obje strane prethodne jednakosti po φ u granicama od 0 do 2π dobit ćemo

$$\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \int_0^{2\pi} \sin^n\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Kako je sinus neparna funkcija vrijedi

$$\int_0^{2\pi} \sin^n\varphi \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 0, & n \text{ neparan,} \\ \dfrac{1\cdot 3\cdots(n-3)(n-1)}{2\cdot 4\cdots(n-2)n} \cdot 2\pi, & n \text{ paran,} \end{cases}$$

pa je

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{ix\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi &= 2\pi \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \cdots \right) \\ &= 2\pi J_0(x). \end{aligned}$$

Prema tome slijedi da je Besselov integral za J_0

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi,$$

odnosno ako promatramo samo realni dio

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \varphi) \mathrm{d}\varphi.$$

Poglavlje 6

Primjene specijalnih funkcija

6.1 Primjene u integralnom računu

Gama i beta funkcija mogu se vrlo efikasno koristiti za pojednostavljenje izračunavanja određenih integrala. Jedan od najpoznatijih primjera su Wallisovi integrali.

Primjer 6.1.1. *Neka je $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva i neka je opći član zadan na sljedeći način*

$$W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x.$$

Odredite točnu vrijednost članova niza $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Integrali W_n nazivaju se Wallisovi integrali prema matematičaru Johnu Wallisu koji je prvi uspio točno odrediti vrijednosti tih integrala. Te vrijednosti izračunao je i Euler znatno jednostavnijom metodom koristeći gama i beta funkcije.

Ako u (2.1.1) *uzmemo* $x = \dfrac{n+1}{2}$ *i* $y = \dfrac{1}{2}$ *dobijemo izraz*

$$B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \mathrm{d}t = 2W_n. \tag{6.1}$$

Sada primjenom jednakosti (2.4) *imamo:*

$$B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Moramo razlikovati dva slučaja u ovisnosti je li n paran ili neparan broj.
Ako je $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0$, onda vrijedi

$$B\left(\frac{2k+1+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = B\left(k+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)}.$$

Koristeći (1.3) i (1.6) dobivamo

$$\begin{aligned}
B\left(k+1,\frac{1}{2}\right) &= \frac{k!\sqrt{\pi}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{k!\sqrt{\pi}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{2^{k+1}k!}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}.
\end{aligned}$$

Sada je zbog (6.1)

$$\begin{aligned}
W_{2k+1} &= \frac{1}{2}B\left(k+1,\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2^{k+1}k!}{1\cdot 3\cdots(2k+1)} \\
&= \frac{2^k k!}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Ako je $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, onda vrijedi

$$B\left(\frac{2k+1}{2},\frac{1}{2}\right) = B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+1\right)}.$$

Opet primjenom (1.3) i (1.6) dobivamo

$$\begin{aligned}
B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{k!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)\pi}{2^k k!}.
\end{aligned}$$

Po (6.1) slijedi

$$\begin{aligned}
W_{2k} &= \frac{1}{2}B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^{k+1}k!}\pi.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Sada konačno možemo vrlo jednostavno odrediti vrijednosti Wallisovih integrala:

n	0	1	2	3	4	5	6
W_n	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5\pi}{32}$

Tablica 6.1: Vrijednosti Wallisovih integrala za $n = 0, 1, 2, 4, 5, 6$

Uočimo da za $n = 0$ vrijednost Wallisovog integrala predstavlja površinu polukruga radijusa 1, dok za $n = 2$ predstavlja četvrtinu površine kruga radijusa 1.

6.2 Primjene u vjerojatnosti

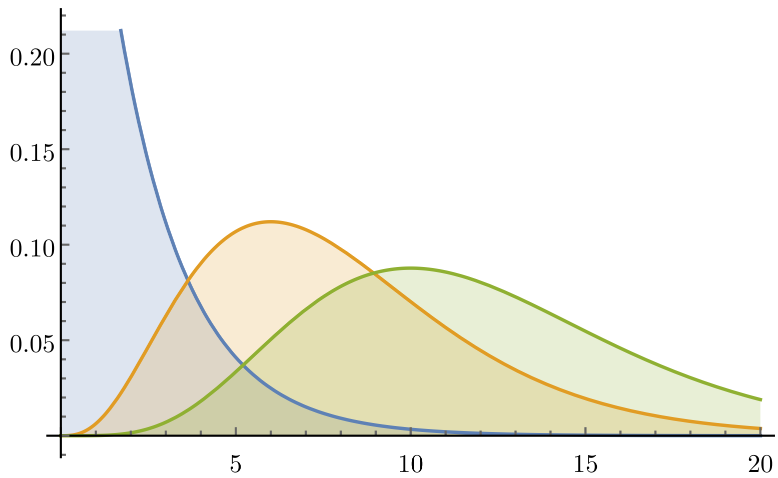
Primjer 6.2.1. *Kažemo da slučajna varijabla* X *ima* gama distribuciju *s parametrima* $\alpha > 0, \lambda > 0$ *i pišemo* $X \sim \Gamma(\alpha, 1/\lambda)$ *ako je* $\mathrm{Im}X = \langle 0, \infty \rangle$ *i funkcija gustoće dana izrazom*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & inače; \end{cases}$$

pri čemu je $\Gamma(\alpha)$ *gama funkcija (vidjeti Definiciju 1.1). Može se pokazati da vrijedi*

$$\mathrm{E}X = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}X = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Gama distribucijom može se modelirati iznos potraživanja klijenta od nekog osiguravajućeg društva. Detaljnije o gama distribuciji može se vidjeti u [15].



Slika 6.1: Graf funkcije gustoće gama distribucije za $\beta = 2$ te $\alpha = 1, 4, 6$

Primjer 6.2.2. *Kažemo da slučajna varijabla* X *ima* beta distribuciju *s parametrima* $\alpha > 0, \beta > 0$ *i pišemo* $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$ *ako je* $\mathrm{Im}X = \langle 0, 1 \rangle$ *i funkcija gustoće dana izrazom*

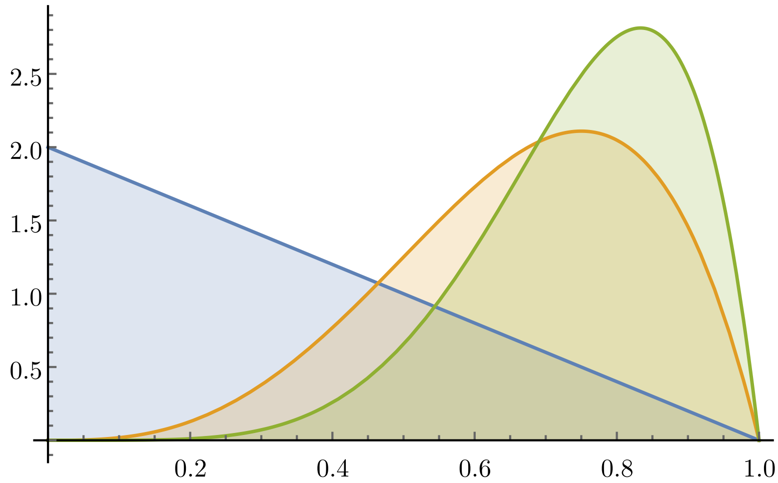
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1; \\ 0, & inače; \end{cases}$$

pri čemu je $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ *beta funkcija (vidjeti definiciju 2.1.1). Može se pokazati da vrijedi*

$$\mathrm{E}X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \qquad \mathrm{Var}X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

Za parametre $\alpha = \beta = 1$ beta *distribucija odgovara uniformnoj distribuciji.*

Detaljnije o beta distribuciji može se vidjeti u [15].



Slika 6.2: Graf funkcije gustoće beta distribucije za $\beta = 2$ te $\alpha = 1, 4, 6$

6.3 Primjene u teoriji brojeva

Riemannova zeta funkcija može se definirati i sljedećim izrazom

$$\zeta(x) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1} \tag{6.4}$$

pri čemu produkt ide po svim p prostim brojevima.
Euler je pokazao da su (3.2) i (6.4) ekvivalentni izrazi. Također, može se pokazati da (6.4) konvergira za $x > 1$ baš kao i (3.2). Dokazi obje tvrdnje mogu se naći u [16].

Ako se prisjetimo, Riemannova zeta funkcija nije definirana za $x = 1$ jer (3.2) divergira za $x = 1$, dakle suma toga reda divergira ka ∞. Sada zbog ekvivalentnosti izraza (3.2) i (6.4) za $x = 1$ imamo:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots &= \prod_{p} \frac{p}{p-1} \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots} \end{aligned}$$

Kako lijeva strana gornje jednakosti konvergira u beskonačno, znači da i desna strana konvergira u beskonačno, a to je moguće ako brojnik zdesna konvergira u beskonačno. To znači da u tom brojniku moramo imati beskonačno mnogo faktora što pak dokazuje da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva. Detaljnije o primjena Riemannove zeta funkcije u teoriji brojeva može se vidjeti u [12] ili [16].

6.4 Primjene u fizici

Od navedenih specijalnih funkcija najveću primjenu u fizici imaju Besselove funkcije. Mi ćemo u ovom poglavlju samo nabrojati te primjene, ali ih nećemo detaljno objašnjavati jer bi to zahtijevalo modeliranje određenih fizikalnih pojava diferencijalnim jednadžbama, a sami postupci su preopširni za ovaj rad. Modeliramo li problem titranja kružne membrane, problem potencijalne jame te problem ogiba na okrugloj pukotini diferencijalnim jednadžbama, u sva tri slučaja dobivene bit će Besselove jednadžbe nultog reda. Navedeni problemi vrlo su detaljno objašnjeni u [6].

Zaključak

U ovom smo radu prikazali pet specijalnih funkcija: gama funkciju, beta funkciju, Riemannovu zeta funkciju, hipergeometrijske funkcije te Besselove funkcije. Ono što je zajedničko svim funkcijama promatranima u ovom radu je to što se s njihovim izučavanjem krenulo još u sedamnaestom i osamnaestom stoljeću, ali niti danas neki rezultati o njima nisu poznati ili dokazani. Tako smo vidjeli da su egzaktne vrijednosti gama i beta funkcije poznate samo za neke točke, a slično je i s vrijednostima Besselovih funkcija. Također, naveli smo Riemannovu hipotezu, za koju ne postoji matematički dokaz da je istinita premda svi izračuni upućuju na njenu istinitost.

U radu smo također iskazali tvrdnje koje povezuju promatrane specijalne funkcije s elementarnim funkcijama. Pokazali smo da su hipergeometrijske funkcije za točno određene parametre jednake nekim elementarnim funkcijama. Pokazali smo se Besselove funkcije asimptotski ponašaju kao trigonometrijske funkcije sinus i kosinus. Svakako je bitno istaknuti važnost gama funkcije jer se pomoću nje mogu izračunati preostale četiri promatrane funkcije.

Primjene specijalnih funkcija su zaista brojne. U radu smo naveli primjere korištenja specijalnih funkcija u izračunavanju određenih integrala, u modeliranju vjerojatnosti te modeliranju diferencijalnim jednadžbama u fizici. Izrazito je bitna Riemannova zeta funkcija u teoriji brojeva jer upravo zahvaljujući njoj, možemo dokazati da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

Bibliografija

[1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function*, Dover Publications, New York, 1964.

[2] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Cambridge University Press, Camridge, 1999.

[3] E. Artin, *The Gamma Function*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[4] R.El Attar, *Special Functions and Orthogonal Plynomials*, Lulu Press, USA, 2006.

[5] W.W. Bell, *Special functions for Scientists and Engineers*, D, Van Nostrand Company Ltd, Reinhold, New York, 1969.

[6] F. Bowman, *Introduction to Bessel functions*, Dover Publications, New York, 1958.

[7] B.P. Demidovič, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1974.

[8] D. Jankov, *Integral expressions for series of functions of hypergeometric and Bessel types*, PhD Thesis, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2011.

[9] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek , 2000.

[10] H. Kraljević, *Odabrana poglavlja teorije analitičkih funkcija*, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2010., (javno dostupno: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/an_funk_2010_11.pdf`)

[11] M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger, *Iterative Functional Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[12] S. J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann Zeta Function*, Cambridge University Press, Camridge, 1988.

[13] M. Ribičić Penava, D. Škrobar, *Gama i beta funkcije*, Osječki matematički list, 15(2), str. 93. - 111, 2015.,

[14] B. Riemann, *Über die Anzal der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859.

[15] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[16] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1988.

Sažetak

Specijalne funkcije su posebna vrsta funkcija u matematici koje su otkrivene ili definirane prilikom rješavanja određenih problema u matematici i fizici. Općenito ih dijelimo prema tome kako su definirane: u obliku određenih integrala ili u obliku beskonačnih konvergentnih redova.

U ovom diplomskom radu proučavane su sljedeće specijalne funkcije: gama i beta funkcija koje u obje definirane kao određeni integrali te Riemannova zeta funkcija, hipergeometrijske funkcije i Besselove funkcije koje su definirane kao redovi. Osim definicije, za svaku su specijalnu funkciju navedeni najbitniji rezultati kao što su karakteristične funkcijske jednadžbe, najvažnija svojstva te su iskazane veze s drugim specijalnim, ali i elementarnim funkcijama.

Završni dio diplomskog rada bavi se primjenama proučavanih specijalnih funkcija. Prikazana je uporaba gama i beta funkcije u računanju točnih vrijednosti određenih integrala te u teoriji vjerojatnosti. Besselove funkcije pokazuju se važnima u fizici jer se pojavljuju kao rješenja diferencijalnih jednadžbi kojima se modeliraju brojne pojave u prirodi. Riemannova zeta funkcija koristi se najviše u teoriji brojeva, a posebno je bitna u dokazu tvrdnje da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

Ključne riječi. gama funkcija, beta funkcija, Riemannova zeta funkcija, Riemannova hipoteza, hipergeometrijske funkcije, Besselove funkcije prve vrste

Summary

Special functions are special type of functions in mathematics, discovered or defined in solving certain problems in mathematics and physics. Generally, there are two types of special functions: one defined in term of definite integrals and in a form of infinite convergent series.

This paper is about five special functions: Gamma and Beta functions which are both defined as definite integrals and Riemann zeta function, Hypergeometric functions and Bessel functions which are defined as infinite convergent series. Some important properies and characteristic functional equations are given in this paper for every of defined functions.

The final part of this paper gives some of the most important applications of defined functions. Gamma and Beta functions are both used in solving definite integrals and also in Probability Theory. Bessel functions are often used in Physics and Riemann zeta function in Number Theory. Riemann zeta function is very important in proof that there are infinitely many prime numbers.

Key words. gamma function, beta function, Riemann zeta function, Riemann's hypothesys,hypergeometric functions, Bessel's functions of first kind, Bessel equation of zero order

Životopis

Rođen sam 5. prosinca 1992. u Reutlingenu, Njemačka. Osnovnu školu "Grigor Vitez" završio sam 2007. kada sam upisao III. Gimnaziju Osijek (prirodoslovno-matematički program). Srednju školu završio sam 2011. kada sam položio i Državnu maturu te upisao Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku. Godine 2014. završio sam Preddiplomski studij izradom završnog rada *Gama i beta funkcije* te sam stekao akademski stupanj prvostupnika matematike. Iste godine upisujem Diplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, smjer Financijska matematika i statistika. Osim toga, nogometni sam sudac od 2008., a od 2013. položio sam ispit za saveznog nogometnog suca (najviše zvanje koje nogometni sudac može steći).