Modeliranje financijskih instrumenata

Botkuljak, Juraj

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:308633

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-05**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Završni rad
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Juraj Botkuljak

Modeliranje financijskih instrumenata

(Modelling of financial instruments)

Sažetak. Ovaj rad nastoji dati teorijski pregled kvantitativnih i kvalitativnih modela korištenih pri modeliranju cijena vrijednosnica na financijskim tržištima, s naglaskom na modele koji se zasnivaju na geometrijskom Brownovom gibanju i hipotezi učinkovitih tržišta. U okviru analize, cilj je za uvedene modele (stvarne i ilustrativne) identificirati specifična svojstva koja potencijalno mogu služiti kao teorijska osnova za razvoj konkretnih metoda optimizacije investicijskih portfelja. Poseban fokus je u tom kontekstu stavljen na svojstvo ne-ergodičnosti geometrijskog Brownovog gibanja na kojem se temelji i metoda optimizacije portfelja razvijena u okviru ovog rada.

Ključne riječi. Financijska tržišta, kvantitativna analiza, geometrijsko Brownovo gibanje, ergodični procesi, teorija očekivane korisnosti, hipoteza učinkovitih tržišta

Abstract. This paper aims to provide a theoretical overview of selected models used in both quantitative and qualitative financial modeling, with an emphasis on the ones based on geometric Brownian motion and the efficient market hypothesis. The primary objective is to identify specific properties of such models which could potentially provide the theoretical basis of specialized portfolio optimization methods. Special attention is given to the non-ergodicity of geometric Brownian motion, which forms the basis of a proposed portfolio optimization method developed for the purposes of this paper.

Keywords. Financial markets, quantitative analysis, geometric Brownian motion, ergodic processes, expected utility theory, efficient market hypothesis

Osijek, rujan 2021.

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Teorijski okvir

Osnovni matematički objekt koji je polazišna točka stohastičkog pristupa modeliranju tržišta jest, kako i sam naziv sugerira, *slučajni (stohastički) proces.*

Slučajni proces.

Definicija. Slučajni proces (u oznaci $\{X_t\}$) familija je slučajnih varijabli $(X_t,\ t \in T)$, $T \subseteq \mathbb{R}$ definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicija. Za fiksni $\omega \in \Omega$, funkciju $t \mapsto X_t(\omega)$ nazivamo trajektorija (realizacija) slučajnog procesa $\{X_t\}$.

Napomena. U slučajevima kada T označava vremenske trenutke, ako je skup T

i. diskretan, govorimo o slučajnom procesu u diskretnom vremenu;
ii. neprekidan, govorimo o slučajnom procesu u neprekidnom vremenu.

Važno svojstvo slučajnih procesa koje omogućava generalizaciju zaključaka u vremenu jest stacionarnost.

Stacionarnost slučajnog procesa.

Definicija. Za slučajni proces $\{X_t\}$ kažemo da je stacionaran ako zajednička funkcija distribucije uzastopnih članova ne ovisi o vremenu, tj.

$$F_X(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = F_X(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau}), \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \tau \in \mathbb{R},\ \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$

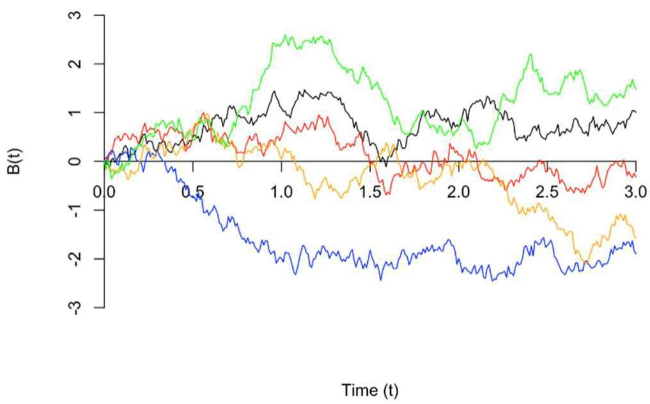
Od osobitog interesa za problematiku modeliranja financijskih instrumenata jest proces poznat kao standardno Brownovo gibanje ili Wienerov proces.

Standardno Brownovo gibanje (SBG).

Definicija. Slučajni proces $(B_t, t \geq 0)$ je standardno Brownovo gibanje ako vrijedi

i. za sve $n \in \mathbb{N}$ i svaki izbor $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ prirasti $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ su nezavisne slučajne varijable,
ii. za sve $0 \leq t < s < \infty$, $B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, s-t)$,
iii. $P(B_0 = 0) = 1$.

Primjer trajektorije SBG-a.



Iz (ii.) slijedi da su za jedinične vremenske intervale $\Delta t = 1$, prirasti iz distribucije $N(0,1)$. Za praktične primjene, to svojstvo je ograničavajuće, pa se SBG može generalizirati.

Generalizacija SBG.

Definicija. Ako je $(B_t, t \geq 0)$ SBG, proces definiran s

$$X_t = \mu t + \sigma B_t$$

nazivamo standardno Brownovo gibanje s driftom μ i volatilnosti σ^2.

Zbog činjenice da je SBG slučajni proces u neprekidnom vremenu, njegove trajektorije je nemoguće praktično opažati. Ipak, svojstva SBG-a omogućavaju adekvatnu aproksimaciju procesa u diskretnom vremenu na način da se SBG uzorkuje u diskretnim i jednakim vremenskim intervalima $\Delta t = 1$. Slučajni proces dobiven takvim uzorkovanjem je Gaussova slučajna šetnja.

Gaussova slučajna šetnja.

Definicija. Neka je $(X_t \sim \mathcal{N}(\mu,\ \sigma),\ t \in T), T \subseteq \mathbb{N}$ familija nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Slučajni proces definiran kao

$$G_t = \sum_{i=1}^{t-1} X_i,\ \ t \in T$$

je Gaussova slučajna šetnja s driftom μ i volatilnosti σ.

Primjer. Neka je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje s driftom μ i volatilnosti σ. Slučajni proces $(B_t',\ t \in T \subseteq \mathbb{N}_0)$ je Gaussova slučajna šetnja s driftom μ i volatilnosti σ.

Gaussova slučajna šetnja može se promatrati kao proces čija je vrijednost u svakom trenutku jednaka do tada akumuliranim (normalnim) prirastima. Dobivena trajektorija je funkcija $f: T \subseteq \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ odnosno niz kojeg ćemo, budući da domena označava diskretne vremenske trenutke, nazivati *vremenskim nizom*.

GEOMETRIJSKO BROWNOVO GIBANJE

Slučajni proces koji je osnova mnogih modela financijskih tržišta poznat je kao geometrijsko Brownovo gibanje.

Geometrijsko Brownovo gibanje (GBG).

Definicija. Za slučajni proces $(S_t, t \geq 0)$ kažemo da je geometrijsko Brownovo gibanje ako zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

gdje je μ relativni drift, a σ relativna volatilnost.

Rješavanje ove SDJ zahtjeva primjenu Itôvog računa, što je izvan domene ovog rada. Analitičko rješenje za $S_0 = 0$ dano je s

$$S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

Napomena. Primijetimo da logaritam GBG-a

$$\ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t$$

prati Brownovo gibanje s driftom $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ i volatilnosti σ.

Budući da se također radi o neprekidnom procesu, analizu praktično vršimo nad aproksimacijom GBG-a u diskretnom vremenu tj. nad eksponencijalno transformiranoj Gaussovoj slučajnoj šetnji. Demonstracija korištenja takve aproksimacije dana je u primjeru ispod.

GBG u praksi.

Primjer. Želimo objasniti kretanje tržišne vrijednosti neke državne obveznice uz pretpostavku da vrijednosti prate GBG. Vremenski interval uzorkovanja proizvoljno definiramo na način da promatramo cijenu na dnevnom zatvaranju burze (pretpostavljajući, radi jednostavnosti, da nema neradnih dana). Vremenski niz koji dobijemo takvim uzorkovanjem predstavlja trajektoriju eksponencijalne transformacije Gaussove slučajne šetnje, temeljem koje možemo o donositi zaključke pozadinskom GBG-u.

Napomena. Mnogi modeli (kao što je npr. Black-Scholes model) pretpostavljaju da cijene vrijednosnica prate GBG. Međutim, u praksi se sve češće primjenjuje modifikacija GBG-a u kojoj prirasti imaju Studentovu distribuciju (vidi [9]).

HIPOTEZA UČINKOVITIH TRŽIŠTA

Interesantna je implikacija pretpostavke da financijska tržišta modelira GBG: ako su pomaci u vrijednostima doista slučajni, tada ne može postojati metodologija kojom je moguće pouzdano predviđati buduća kretanja. Primijetimo međutim da tržišta ipak snažno reagiraju na važne sistemske događaje (kao što je npr. COVID-19), što ukazuje na suprotan zaključak – da su kretanja ipak predvidiva – jer se tržišne korekcije i utjecajan događaj nikada ne događaju istovremeno, tj. postoji vremenski razmak između takvog događaja i tržišne reakcije. To nas pak opažanje navodi na zaključak da tržišne kretnje nisu nezavisni događaji, već da ovise o nekim vanjskim varijablama - *dostupnoj informaciji*. Dostupna informacija obuhvaća svo relevantno znanje tržišnih dionika na temelju kojeg ono kolektivno formira očekivanja o budućnosti i kontinuirano, kroz ponudu i potražnju, usklađuje tržišne vrijednosti s tim očekivanjima.

Primjer.

Pretpostavimo da je neko poduzeće početkom 2020. godine izdalo obveznice za koje je tržišna kamata u tom trenutku jednaka 5%. Recimo potom da, u vremenu kada su rizici povezani s nepovoljnim implikacijama pandemije COVID-19 na globalnu ekonomiju postajali izraženiji, opazimo i proporcionalan rast tržišno uvjetovane kamate na razinu od 10%. Taj rast posljedica je činjenice da investitori, na temelju informacije koja im je dostupna, očekuju veću kompenzaciju za preuzeti rizik.

Iz navedenog možemo zaključiti da slučajna priroda tržišnih kretanja proizlazi iz *realizacije tržišnih očekivanja*. Očekivanja vezana uz budućnost osnova su tržišnog vrednovanja imovine, a budući da ponašanje velikih dinamičkih sustava nije moguće pouzdano predvidjeti, realizacije tih događaja mogu se razlikovati od prethodnih očekivanja. Te realizacije kaskadno imaju utjecaj na sljedeća očekivanja, što posljedično ima utjecaj na naredno vrednovanje imovine, odnosno tržišnu cijenu. Iz toga slijedi da opažena nepredvidivost tržišnih kretnji zapravo proizlazi iz nepredvidivosti realizacije budućih događaja relevantnih za pojedini financijski instrument.

Ako dodatno pretpostavimo da tržište u svakom trenutku imovinu vrednuje tako da ispravno zaključuje na temelju dostupne informacije, tada smo opisali mehanizam tržišnog utvrđivanja vrijednosti financijskih instrumenata poznat pod nazivom *hipoteza učinkovitih tržišta* (vidi [8]).

TEORIJA OČEKIVANE KORISNOSTI

Rani modeli odlučivanja kao središnju ideju imali su pretpostavku da će pojedinac, suočen s izborom između dvije situacije s nepoznatim ishodom – na koje ćemo se u ovom kontekstu referirati kao *oklade* – odabrati onu s većom očekivanom promjenom bogatstva. Na taj model ćemo se referirati kao model očekivane promjene bogatstva.

Očekivana promjena bogatstva.

Primjer. Pojedinac je suočen s izborom dvije oklade, prikazane u obliku slučajnih varijabli čija realizacija označava promjenu bogatstva x:

$$\Delta X_1 \sim \begin{pmatrix} 0.11x & -0.1x \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \; i \; \Delta X_2 \sim \begin{pmatrix} 0.8x & -0.75x \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Budući da je očekivana promjena bogatstva veća u slučaju oklade ΔX_2 tj.

$$E[\Delta X_2] = 0.025 > E[\Delta X_1] = 0.005,$$

model predviđa da bi racionalan pojedinac trebao preferirati okladu ΔX_2 u odnosu na okladu ΔX_1.

Ubrzo je uočeno da navedeni model nema previše smisla (uočio ga je i N. Bernoulli, vidi [7]): malo tko bi bio voljan riskirati 75% svog ukupnog bogatstva, bez obzira na to što je očekivani ishod povoljan. Nesklonost većine pojedinaca da prihvate ovu okladu ne proizlazi isključivo iz njene rizičnosti – proizlazi primarno iz toga što se, unutar konteksta u kojem ljudi odlučuju o stvarnim situacijama, radi o objektivno lošoj okladi. To ćemo detaljnije ilustrirati kasnije.

Sličan problem koji se također odnosi na problematičnost korištena očekivanja, dobro je ilustriran poznatim St. Petersburg paradoksom.

St. Petersburg paradoks.

Primjer. Pokušajmo pomoću teorije očekivanog bogatstva procijeniti minimalan iznos koju bi racionalni pojedinac bio spreman platiti za okladu X definiranu na sljedeći način

$$P(X = 2^n) = \frac{1}{2^{n+1}}, \;\; n \in \mathbb{N}_0$$

Navedena oklada ekvivalentna može se ilustrirati na sljedeći način: definiramo vrijednost potencijalni dobitak uz početni uvjet $p_0 = 1$. Igrač baca savršeni novčić:

i. ako padne glava, potencijalni dobitak udvostručuje se, tj. $p_{t+1} = 2\,p_t$;
ii. ako padne pismo, potencijalni dobitak isplaćuje se igraču.

Očekivanje ove oklade divergira, tj. $E(X) = \frac{1}{2^1}\cdot 2^0 + \frac{1}{2^2}\cdot 2^1 + \frac{1}{2^3}\cdot 2^2 \cdot \cdots = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+ \cdots = \infty$. Prema teoriji očekivanog bogatstva, racionalan pojedinac trebao bi biti spreman platiti bilo koju cijenu $C < \infty$ za takvu okladu.

U praksi, malo tko je spreman platiti iznos veći od, primjerice, 50 (novčanih jedinica) za igranje ove oklade. Prirodno rješenje ovog i prethodnog problema proizašlo je iz novog modela koji je zamijenio dotadašnji model očekivanog bogatstva – model očekivane korisnosti. Iako je ta tematika izvan domene ovog rada, grubo govoreći, model očekivane korisnosti pretpostavlja da racionalni pojedinac pri odlučivanju o situacijama s nepoznatim ishodom, ne razmatra nominalnu promjenu bogatstva, već promjenu ukupne korisnosti (vidi [6]). Korisnost je koncept uveden kako bi se formalizirala činjenica da dodatna jedinica bogatstva (npr. kuna) pojedincu niskog bogatstva *predstavlja više* nego pojedincu visokog bogatstva. Obično se korisnost definira kao logaritam bogatstva $\ln(x)$, ali moguće je koristiti bilo koju konkavnu rastuću funkciju kako bi se prikazala opadajuća percipirana vrijednost bogatstva.

Posljednjih godina, sve zastupljenije razmišljanje među matematičkim ekonomistima (osobito Ole Petersa s Londonskog matematičkog laboratorija) jest da koncept korisnosti ne zahvaća najbolje suštinu problema (i da za sobom povlači niz drugih problema, vidi [5]), te da se se opažene „anomalije" mogu adekvatnije objasniti konceptom koji je bio nepoznat u vremenu kada su ovi problemi bili aktualni – ergodičnost.

Iako se radi o nešto širem konceptu, za potrebe ovog rada, ergodičnost ćemo promatrati isključivo kao svojstvo slučajnih procesa.

Ergodičnost slučajnog procesa.

Definicija. Za slučajni proces u diskretnom vremenu $(X_t,\ t \in \mathbb{N})$ reći ćemo da je ergodičan ako njegov vremenski prosjek

$$\hat{\mu}_X(T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$$

konvergira kvadratno prema očekivanju, tj.

$$\lim_{T\to\infty} E\left[\left(E[X_T] - \hat{\mu}_X(T)\right)^2\right] = 0.$$

Ergodičnost je standardna pretpostavka u termodinamici i statističkoj fizici. Važnost ergodičnosti kao svojstva slučajnih procesa je u tome što nam omogućava zaključivanje o „tipičnoj" temporalnoj evoluciji slučajnog procesa na temelju njegova očekivanja, a to bitno olakšava račun. Potreba za eksplicitnim provjeravanjem ergodičnosti nije bila uočena više od 200 godina nakon formulacije fundamentalnih koncepata vjerojatnosti u 17. stoljeću – implicitna pretpostavka u tadašnjim modelima bila je da ergodičnost općenito vrijedi – zato i ne čudi inicijalni zaključak teorije očekivanog bogatstva da će pojedinac isključivo razmatati očekivanu vrijednost oklade.

U slučaju kada odluka pojedinca rezultira promjenom bogatstva na način bi uzastopni niz takvih oklada doveo do procesa koji nije ergodičan, očekivanje nije adekvatan alat s kojim pojedinac može donijeti za njega optimalnu odluku – očekivanje predstavlja prosječni ishod u slučaju kada više pojedinaca igra istu okladu, a prosječan ishod grupe igrača pojedincu ne predstavlja puno. Situacije koje ilustriraju da to zaista jest slučaj obrađene su u sljedećem odlomku.

Analiza svojstava

U svrhu analize svojstava i demonstracije tvrdnji spomenutih u prethodnoj cjelini, simulirat ćemo nekoliko situacija. Simulacije ćemo provoditi na način da promatramo evoluciju odabranih agregata (najčešće prosječnog ili medijalnog bogatstva) za N nezavisnih pojedinaca koji T puta uzastopno prihvaćaju određenu okladu.

1. MULTIPLIKATIVNE OKLADE

Multiplikativna oklada.

Definicija. Multiplikativne oklade su slučajni događaji čije realizacije odgovaraju multiplikativnoj (relativnoj) promjeni uloženog iznosa. Formalno ju definiramo kao slučajnu varijablu B koja modelira odnos osvojenog i uloženog iznosa.

Primijetimo da uz ovakvu definiciju, ukupni osvojeni iznos za ulog x može se modelirati slučajnom varijablom Bx.

Napomena. U daljnjem tekstu, kada nije drukčije navedeno, pojam oklade odnosit će se isključivo na multiplikativne oklade.

Specifikacija.

Promatramo okladu $B \sim \binom{0.5 \quad -0.4}{0.5 \quad 0.5}$ i definiramo slučajni vektor

$$X(T,N) = \big(X_1(T,N), \dots, X_N(T,N)\big)$$

čija k-ta komponenta $X_k(T,N)$ modelira bogatstvo k-tog od ukupno N pojedinaca nakon T odigranih oklada. Za $N \in \mathbb{N}$, promatrat ćemo vektorski proces $(X(T,N),\ T \in \mathcal{T})$ uz početni uvjet $X(0,N) \overset{g.s.}{=} \vec{1}$.

Definicija. Definiramo procjenitelja eksponencijalnog rasta bogatstva kao

$$\hat{g}(T,N) = \frac{1}{T} \ln \overline{X(T,N)}.$$

Lema. Za okladu B i vektorski proces $(X(T,N),\ T \in \mathcal{T})$ vrijedi

$$E\big[\overline{X(T,N)}\big] = E[1+B]^T E\big[\overline{X(1,N)}\big].$$

Dokaz. Očekivano bogatstvo pojedinca $(N=1)$ nakon oklade možemo izraziti u terminima bogatstva prije oklade kao

$$E[X(T,1)] = E[X(T-1,1)] + E[BX(T-1,1)] = E[X(T-1,1)] + E[B]E[X(T-1,1)] = E[X(T-1,1)](1+E[B])$$

Rješavanjem rekurzivne relacije dobivamo

$$E[X(T,1)] = E[1+B]^T E[X(1,N)].$$

Lako se vidi da je za jednostavni slučajni vektor $X = (X_1, \dots, X_n)$, $E[\bar{X}] = E[X_k]$, $\forall k = 1, .., n$, iz čega slijedi tvrdnja leme. ∎

Za skup $N \to \infty$ igrača kada je $T < \infty$, imamo

$$\lim_{N\to\infty} \hat{g}(T,N) = \frac{1}{T} \lim_{N\to\infty} \ln \overline{x(T,N)} = \frac{1}{T} \ln\left(\lim_{N\to\infty} \overline{x(T,N)}\right) \overset{\text{g.s.}}{=} \frac{1}{\mathrm{T}} \ln E\big[\overline{X(T,N)}\big] = \frac{1}{\mathrm{T}} \ln 1.05^T = 0.04879,$$

pa zaključujemo da je brzina eksponencijalnog rasta prosječnog bogatstva grupe pozitivna.

Procijenimo eksponencijalni rast za fiksni $N < \infty$ kada $T \to \infty$. U tu ćemo svrhu definirati slučajni vektor

$$B(T,N) = (B_1(T,N), \dots, B_N(T,N))$$

čija k-ta komponenta $B_k(T,N)$ modelira ishod T-te oklade k-tog od N pojedinaca. Budući da su oklade nezavisne, vrijedi da je $B(N,k) \overset{d}{=} B(N,t)$, $\forall t, k$.

Promatramo vektorski proces $(B(T,N), T \in \mathcal{T})$. Imamo

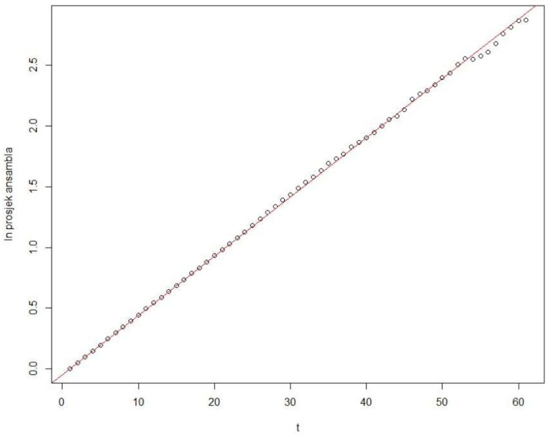
$$\lim_{T\to\infty} \hat{g}(T,N) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \ln \overline{x(T,N)}\right) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \ln \overline{\left(\prod_{t=1}^{T} \big(1+b(T,N)\big)\right)}\right) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \overline{\ln\big(1+b(T,N)\big)}\right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \ln(1+B_N)\right) \overset{g.s.}{=} E[\ln(1+B_N)] = -0.05268.$$

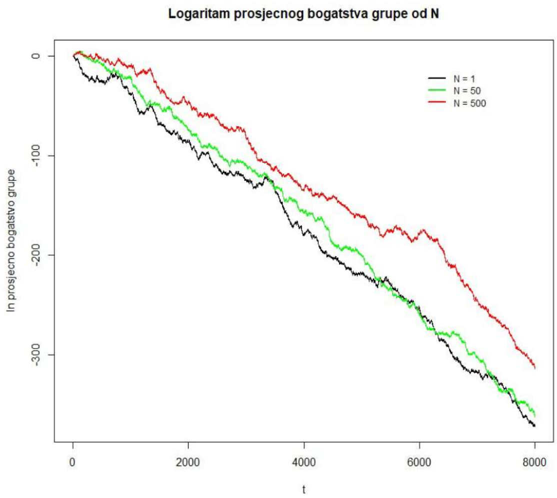
Uočavamo zanimljiv rezultat: bogatstvo grupe od $N < \infty$ pojedinaca dugoročno pada eksponencijalno, dok bogatstvo grupe s beskonačno mnogo pojedinaca raste eksponencijalno.

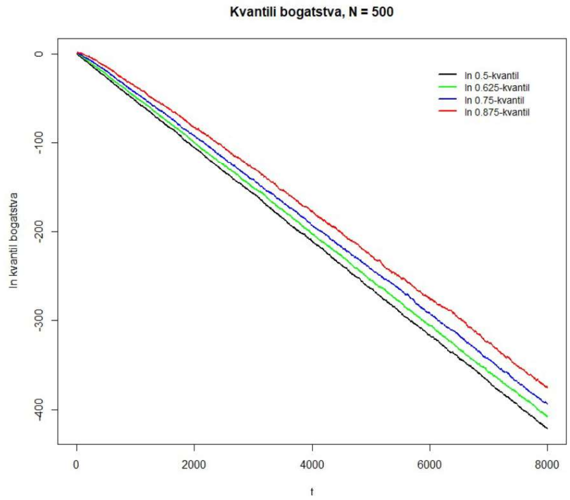
Simulacija. (grafovi su logaritamski)

Prosječno bogatstvo po pojedincu u velikoj grupi kratkoročno raste eksponencijalno: u uvjetima $N = 500\,000$ i $T = 80$ imamo

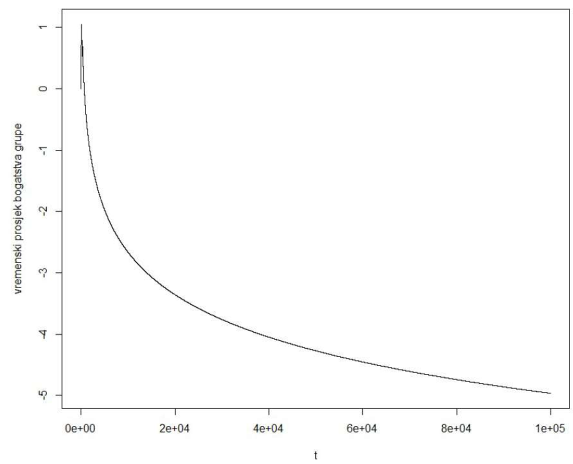


Međutim, na kraju ove simulacije, čak 81% pojedinaca je završilo s manjim bogatstvom nego prije simulacije, iako je prosječno bogatstvo raslo eksponencijalno. Razlog tomu je što bogatstvo pojedinca dugoročno gotovo sigurno pada eksponencijalno. Čak štoviše, za svaku konačnu grupu, prosječno bogatstvo u dugom roku eksponencijalno pada: u uvjetima $T = 8\,000$, $N \in \{1, 50, 500\}$ imamo





Razlog ovakvih rezultata su rijetke ali utjecajne uzastopne *pobjede* rijetkih pojedinaca koji „iskrivljuju“ prosjek na način da, zbog eksponencijalne dinamike rasta, drastično povećavaju varijancu. Budući da smo pokazali da proces nije ergodičan, nije iznenađujuće da vremenski prosjek bogatstva grupe dugoročno pada (za razliku od prosjeka): u uvjetima $N = 100\,000$ i $T = 50$ imamo



Budući da se radi o suštinski sličnim procesima, implikacije ne-ergodičnosti promatrane na primjeru jednostavne oklade nisu bitno drukčije i u slučaju kompleksnijih procesa – konkretno, geometrijskog Brownovog gibanja.

Specifikacija.

Definiramo okladu takvu da je bogatstvo N pojedinaca u trenutku T određeno slučajnim vektorom

$$X(T,N) = (X_1(T,N), \dots, X_N(T,N))$$

za koji vrijedi da je $(X_k(T,N), T \subseteq \mathcal{T})$ geometrijsko Brownovo gibanje, $\forall k = 1, \dots, N$. Procijenimo brzinu eksponencijalnog rasta $\hat{g}(T,N)$ posebno u slučajevima kada $N \to \infty; T < \infty$ i kada $T \to \infty; N < \infty$. Budući da kada je $X_k(0,N) \overset{g.s.}{=} 1$ i $T < \infty$, općenito vrijedi

$$E[X_k(1,N)] = e^{\mu T} \implies E[\overline{X(1,N)}] = e^{\mu T}$$

slijedi da je

$$\lim_{N\to\infty} \hat{g}(T,N) = \frac{1}{T} \lim_{N\to\infty} \ln \overline{\mathrm{X}(T,N)} \overset{\text{g.s.}}{=} \frac{1}{\mathrm{T}} \ln E[\overline{X(1,N)}] = \mu.$$

Za vremenski prosjek kada je $N < \infty$ može se pokazati (vidi [4]) da je

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \hat{g}(T,N) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$$

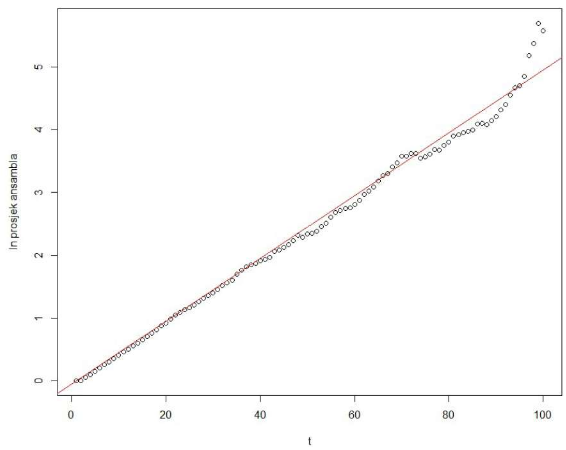
iz čega slijedi da za $\sigma \neq 0$ proces nije ergodičan. Od posebnog nam je interesa specifičan slučaj kada je

$$(\mu > 0) \wedge \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} < 0\right) \iff 0 < \mu < \frac{\sigma^2}{2}$$

jer je tada očekivana brzina eksponencijalnog rasta pozitivna, dok je vremenski prosjek brzine eksponencijalnog rasta negativan. Gruba interpretacija ovog rezultata jest da je očekivanje dobra mjera tipičnog ponašanja za relativno velik broj simulacija u kratkom roku, tj. kada je $N \gg T$. Međutim, za relativno mal broj simulacija u dugom roku, tj. kada je $T \gg N$, vremenski prosjek postaje adekvatnija mjera tipičnog ponašanja.

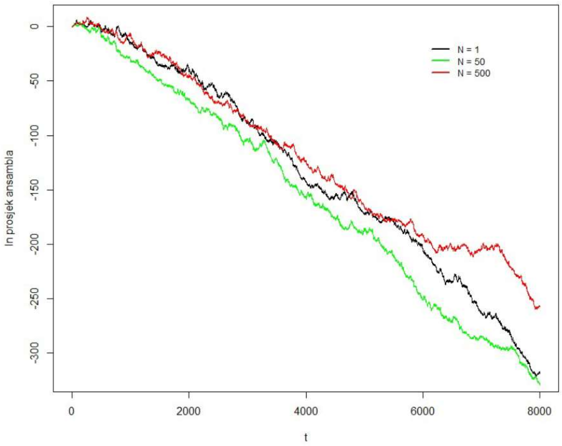
Simulacija. (grafovi su logaritamski)

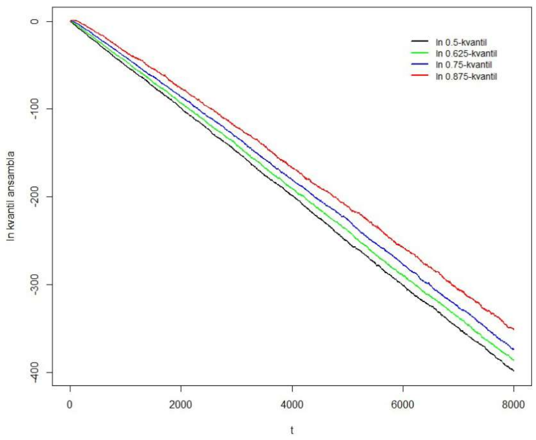
Simulaciju GBG-a provodimo s parametrima $\mu = 0.05$ i $\sigma^2 = 0.2$. Budući da je $\mu > 0$, za veliki broj simulacija očekujemo eksponencijalni rast prosjeka: u uvjetima $N = 500\,000$ i $T = 100$ imamo



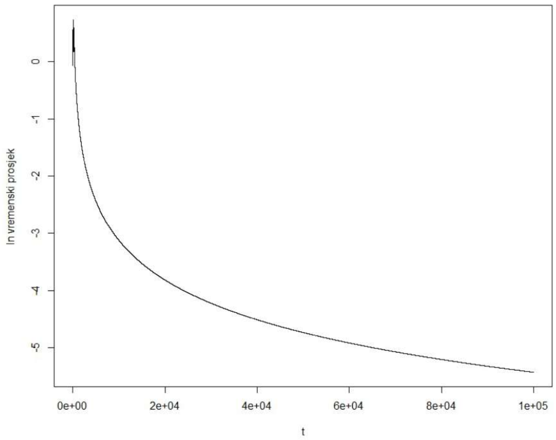
Ipak, vrijednost čak 87% trajektorija na kraju simulacije je ispod početne vrijednosti. Razlog tomu je log-normalna distribucija GBG-a i rastuća varijanca u vremenu.

Gotovo identičnu situaciju kao i u kod primjera oklade u prethodnoj simulaciji opažamo u dugom roku za konačne grupe: u uvjetima $N \in \{1, 50, 500\}$ i $T = 8\,000$ imamo





Isto tako, i vremenski prosjek pada u uvjetima $N = 50$ i $T = 100\,000$.



Interesantno je za napomenuti da je, prema nekim autorima, rastuću ekonomsku nejednakost u društvu moguće pripisati upravo ne-ergodičnosti procesa koji utječu na bogatstva pojedinaca.

DIVERSIFIKACIJA I METODA KONSTANTNOG ULOGA

Diversifikacija je tehnika optimizacije portfelja koja podrazumijeva minimizaciju korelacije među njegovim sastavnicama. Dio pozitivnih efekata diversifikacije na ukupan prinos može se dijelom pripisati ranije identificiranim svojstvima GBG-a, ponajviše onom koja se odnose na eksponencijalno rastući prosjek nezavisnih simulacija u kratkom roku. Minimiziranjem korelacije nastoje se stvarni uvjeti u što većoj mjeri približiti onima u kojima su simulacije nezavisne.

Kao alternativno rješenje, uvodimo osnovnu varijantu modela *metode konstantnog uloga*.

Metoda konstantnog uloga.

Radi jednostavnosti ćemo u ovom slučaju promatrati varijantu metode konstantnog uloga koja je primjenjiva na situacije u kojima

i. je negativno ukupno bogatstvo moguće;
ii. igrač nije obvezan uložiti svo svoje bogatstvo.

Definicija. Metoda konstantnog uloga podrazumijeva razdvajanje bogatstva $x(t)$ igrača na dva segmenta: iznos za ulaganje $y(t)$ i buffer $z(t)$ tj.

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t) + z(t) \\ y(t) &= c. \end{aligned}$$

Pretpostavljamo da igrač prihvaća niz oklada $B(t)$ te u svakoj ulaže iznos $y(t)$.
Prema definiciji je nakon oklade igrač realizirao zaradu od

$$P(t) = X(t)y(t) - y(t) = X(t)(y(t) - 1)$$

koju igrač potom, kako bi uvjet o konstantnosti $y(t)$ bio zadovoljen, pribrojava bufferu, tj. modificira segmente svog bogatstva na sljedeći način:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= y(t) \\ z(t+1) &= z(t) + T(t). \end{aligned}$$

U slučajevima kada je oklada neprekidna (npr. GBG), provodi se diskretizacija na način da se promatraju samo događaji koji odgovaraju proizvoljnim promjenama manjim od p i većim od p', $p < p'$ (tj. realizacije $X \notin \langle p, p' \rangle$) za koje vrijedi

$$P(X \leq p) = P(X \geq p').$$

Motivacija iza ovakvog ograničenja je ta da želimo proizvoljno definirati minimalan relativni rast koji ćemo definirati kao „uspjeh" i ekvivalentan pad kojeg ćemo definirati kao „neuspjeh". Uz ovako definiran uvjet promatramo diskretnu okladu koja ima distribuciju u kojoj je vjerojatnost pobjede jednaka

$$P(\{pobjeda\}) = P(\ln X \geq p \mid \ln X \notin \langle p, p' \rangle)$$

i vjerojatnost gubitka jednaka

$$P(\{gubitak\}) = P(\ln X \leq p \mid \ln X \notin \langle p, p' \rangle)$$

iz čega zbog $P(ln\, X \leq p) = P(ln\, X \geq p')$ slijedi da je

$$X \sim \begin{pmatrix} pobjeda & gubitak \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Specifičnost ove strategije je u tome što bogatstvo pojedinca koji ju primjenjuje na ne-ergodičnu okladu postaje ergodičan proces.

Ergodičnost metode konstantnog uloga (MKU).

Dokaz. Lako se pokaže da je slučajni proces $(B_t, t \in \mathcal{T})$ stacionaran, a budući da je ulog $x(t) = c$ konstantan u svakom trenutku, stacionaran je i slučajni proces $(P_t, t \in \mathcal{T})$, $P_t = B_t\, x(t) = B_t c$ koji modelira osvojeni iznos u trenutku t. Vrijedi

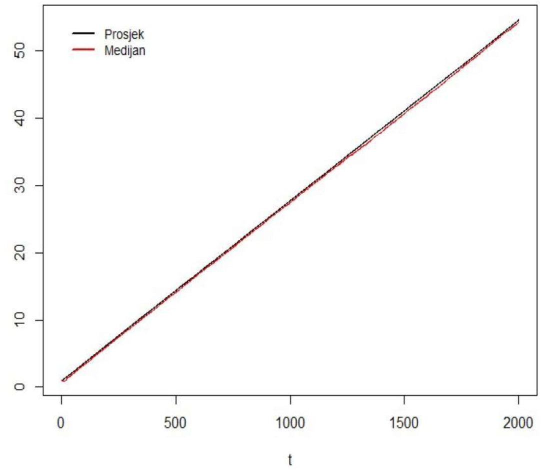
$$\lim_{T\to\infty}\left(\left(E[P] - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t\right)^2\right) = E[P]^2 - 2E[P]\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t + \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_t\right)^2 \overset{g.s.}{=} E[P]^2 - 2E[P]^2 + E[P]^2 = 0$$

čime smo pokazali ergodičnost slučajnog procesa koji modelira osvojeni iznos u trenutku t ako igrač na multiplikativnu okladu primjenjuje metodu konstantnog uloga. ■

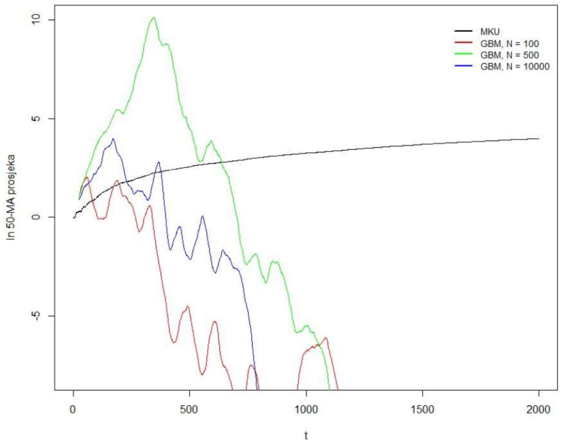
Primjenom ovakve metode, slučajni proces koji modelira bogatstvo igrača više nema eksponencijalan, nego linearan rast. Simulirajmo ovu metodu na GBG.

Simulacija. (grafovi su linearni, osim ako nije drukčije navedeno)

Simuliramo MKU na GBG s parametrima $\mu = 0.05$ i $\sigma^2 = 0.2$. U uvjetima $N = 10\,000$ i $T = 2000$ imamo linearan rast prosjeka i medijana

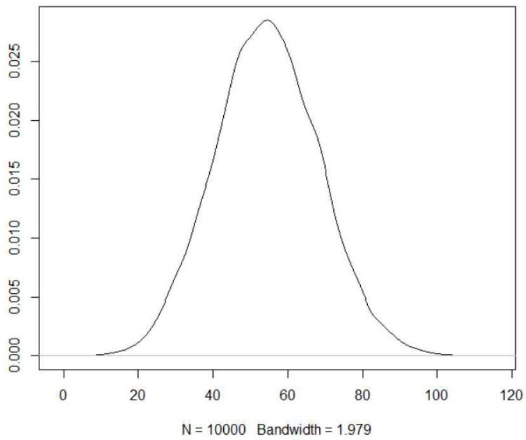


Usporedimo logaritam prinosa diversificiranih portfelja od $N \in \{100, 500, 10\,000\}$ sastavnica do vremena $T = 2\,000$ s logaritmom prinosa istih portfelja koji primjenjuju MKU.



Za portfelje koji primjenjuju MKU vidljiva je samo jedna krivulja budući da se radi o ergodičnom procesu, pa trajektorija prosjeka ne ovisi o N. Primjećujemo da u danim uvjetima, MKU nadmašuje prosjeke diversificiranih portfelja.

Također, nije iznenađujuće da u ovom slučaju uočavamo normalno distribuirano bogatstvo (a ne log-normalno) na kraju simulacije (Shapiro-Wilk p = 0.037): u uvjetima $N = 10\,000$ i $T = 2000$ imamo



Zaključak

Izneseni teorijski i empirijski rezultati opravdavaju daljnje istraživanje i razvoj metoda optimizacije portfelja temeljenih na međuodnosu dugoročnog vremenskog prosjeka i očekivanja eksponencijalnog rasta vrijednosti dionica, uz pretpostavku geometrijskog Brownovog gibanja. U kontekstu metode konstantnog uloga, buduća istraživanja mogu usporediti različite granice koje određuju pobjedu odnosno gubitak, te eventualno utvrditi optimalnu visinu uloga, prilikom čega bi bilo korisno inkorporirati aspekte predloženih rješenja St. Petersburg paradoksa koja se odnose na visinu uloga (i koja u okviru ovog rada nisu obrađena). Dodatno je moguće istražiti i razviti modele koji integriraju diversifikaciju i metodu konstantnog uloga.

Literatura

[1] C. M. GRINSTEAD, J. L. SNELL, Introduction to Probability, American Mathematical Society, SAD, 1997.

[2] A. O. Petters, X. Dong, An Introduction to Mathematical Finance with Applications, Springer, 2016.

[3] A.N. Shiryaev, Essentials of Stochastic Finance, World Scientific, 1999.

[4] O. Peters, W. Klein, Ergodicity breaking in geometric Brownian motion, 2012.

[5] O. Peters, The ergodicity problem in economics, Nature, 2019.

[6] Bernoulli, D. Exposition of a new theory on the measurement of risk. Econometrica 22, 23–36 (1954).

[7] Montmort, P. R. Essay d'analyse sur les jeux de hazard 2nd edn (Jacque Quillau, 1713; reprinted by American Mathematical Society, 2006).

[8] Eugene F. Fama, Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, The Journal of Finance, 1970.

[9] A. Peiró , The distribution of stock returns: international evidence, 2010.