Stabla odlučivanja

Šućur, Jurica

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Jurica Šućur

Stabla odlučivanja

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Jurica Šućur

Stabla odlučivanja

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2021.

Sadržaj

Uvod

Na pitanje bi li nešto promijenili iz svoje prošlosti poneki ljudi će odgovoriti da bi napravili sve isto, dok će poneki odmah pronaći trenutke u svom životu u kojima bi rado donijeli drugačiju odluku. Do odgovora na to pitanje ljudi dolaze tako što preispitaju posljedice odluka koje su ranije donijeli.
Svakodnevno donošenje odluka prisutno je u povijesti čovječanstva od samih početaka pa sve do danas. Već i prvi ljudi morali su odlučiti u kakvom zaklonu prenoćiti i u koje doba dana ići u lov kako bi najlakše došli do hrane. U današnjem užurbanom načinu života svakodnevnih odluka je sve više te samim time moraju bit donošene u što kraćem roku; primjerice kojim putem krenuti na posao kako bi izbjegli gužvu, što i kada jesti, što obući u ovisnosti u prigodi te kako najbolje iskoristiti slobodno vrijeme. Poneke odluke imaju puno veći značaj te samim time moraju biti donešene što racionalnije, kao npr. koju školu ili fakultet upisati te koji stan ili auto kupiti.
Već u 17. i 18. stoljeću matematičari Pascal, Fermat i Bernoulli pokušavaju tu racionalnost prevesti u matematičke izraze, dok tek 1931. godine počinje razvoj teorije odlučivanja kada Ramsey izdaje članak s osam aksioma koji, ako su ispoštovani, dovode do maksimalne očekivane korisnosti.
Kako bi osoba sa sigurnošću mogla donijeti najkvalitetniju odluku, trebala bi biti upoznata sa posljedicama svake moguće odluke. Različite mogućnosti izbora koje osoba koja odlučuje ima u situaciji prije odluke zvat ćemo *alternative* ili *akcije*, dok ćemo različite moguće situacije u kojima se možemo naći nakon donošenja neke odluke zvati *kriteriji* ili *stanja svijeta*. U radu ćemo opisati kako se kreira tablica odlučivanja te kako jednostavno tablicu odlučivanja zapisati koristeći stablo odlučivanja koje je puno preglednije i razumljivije od tablice. Kroz razne primjere stabala odlučivanja pokazat ćemo važnost korištenja ove metode u svakodnevici te u raznim područjima života. Na kraju rada definirat ćemo stav donositelja odluke prema riziku te ga povezati sa funkcijom korisnosti.

1 Tablica odlučivanja

U uvodu smo se upoznali sa pojmovima akcija i stanje svijeta. Općenito, pretpostavit ćemo da donositelj odluke zna sva stanja svijeta koja ćemo označiti s θ_1,θ_2,...,θ_n i da imamo konačan broj akcija $a_1, a_2, \ldots, a_n$ između kojih biramo jednu akciju. Tada opći oblik tablice odlučivanja izgleda ovako:

		Stanja svijeta			
		θ_1	θ_2	$\cdots$	θ_n
Akcije	a_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	a_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}

Tablica 1.1: Opći oblik tablice odlučivanja s m stupaca i n redaka

U tablici 1.1 x_{ij} označava posljedicu akcije a_i u stanju θ_j. Ako svakoj od posljedica pridružimo numeričku vrijednost, točnije $v(x_{ij}) := v_{ij}$, tada možemo uspoređivati posljedice i to tako da veća pridružena vrijednost sugerira da preferiramo tu posljedicu u odnosu na onu koja ima manju pridruženu vrijednost. Matematičkim rječnikom, ako je $v_{ij} > v_{kl}$, onda donositelj odluke preferira posljedicu x_{ij} u odnosu na x_{kl}.

Primjer 1.1. Nogometni klub želi dovesti igrača Luku iz konkurentskog kluba s kojim se bori za naslov prvaka. Od Luke se očekuje da će u narednoj sezoni biti jedan od najboljih igrača lige. Međutim, cijena za Luku je poprilično velika, a Luka je sklon ozljedama, pa uprava kluba razmišlja dovesti ga ili ga ostaviti u konkurentskom klubu. Ako Luka odigra cijelu sezonu bez ozljede, klub u kojem je Luka osvaja naslov prvaka, ali ako se Luka ozlijedi tada i ostatak momčadi gubi samopouzdanje i drugi klub osvaja naslov. Kako će uprava kluba odlučiti što je za njih najbolje?

Analizirajmo u nastavku navedeni primjer. Imamo dvije akcije između kojih uprava kluba bira najbolju za njih, a to su „dovesti Luku“ ili „ne dovesti Luku“. Također, imamo i dva moguća stanja svijeta koja ovise o Lukinom zdravstvenom stanju, tj. hoće li se Luka ozlijediti ili neće. Pogledajmo kako izgleda tablica odlučivanja za ovaj primjer.

		STANJA SVIJETA	
		Luka će se ozlijediti	**Luka se neće ozlijediti**
AKCIJE	**Dovesti Luku**	Novac potrošen, naslov nije osvojen	Novac potrošen, naslov osvojen
	Ne dovesti Luku	Novac nije potrošen, naslov osvojen	Novac nije potrošen, naslov nije osvojen

Tablica 1.2: Tablica odlučivanja za primjer 1.1

Da bi smo znali koja odluka je najbolja za upravu, moramo nekako vrednovati moguće posljedice. Pretpostavimo da upravu kluba zanima samo financijska strana posljedica. Ako za

Lukin transfer uprava kluba mora izdvojiti 50000kn, a naslov prvaka klubu donosi 150000kn tada bi tablica odlučivanja izgledala ovako:

		STANJA SVIJETA	
		Luka će se ozlijediti	**Luka se neće ozlijediti**
AKCIJE	**Dovesti Luku**	-50000 kn	+100000 kn
	Ne dovesti Luku	+150000 kn	0 kn

Tablica 1.3: Tablica odlučivanja s vrednovanim posljedicama za primjer 1.1

Kako bi saznali što će uprava učiniti moramo uzeti u obzir neke informacije o stanjima svijeta. Obzirom na to koliko poznajemo stanja svijeta, modele odlučivanja dijelimo na:

1. Odluke uz sigurnost
2. Odluke uz slabu nesigurnost ili rizik
3. Odluke uz jaku nesigurnost ili potpuno neznanje

Opišimo pobliže svaki od navedenih modela odlučivanja:

1. U odlukama uz sigurnost imamo točno jedno stanje svijeta te donositelj odluke tada donosi odluku koja maksimizira njegovo zadovoljstvo. U primjeru 1.1 to znači da točno znamo hoće li se Luka ozlijediti ili neće. Ako uprava zna da će se Luka ozlijediti neće ga dovesti u klub, a u suprotnom hoće. Primjetimo kako u odlučivanju vrlo često uvjet sigurnosti nije ispunjen, naročito kada donosimo odluke od velikog značaja u kojima gotovo uvijek imamo više od jednog stanja svijeta.

2. Kod odluka uz slabu nesigurnost ili rizik donositelj odluke ne zna posljedice svojih odluka, ali poznaje stanja svijeta i posljedice u svakom od stanja. Osim toga, donositelj odluke zna vjerojatnosti da se dogodi određeno stanje svijeta. U primjeru 1.1 to znači da poznajemo vjerojatnost da se Luka ozlijedi.

3. Kod donošenja odluka uz jaku nesigurnost ili potpuno neznanje donositelj odluke poznaje samo stanja svijeta, ali ne zna vjerojatnosti da se dogodi određeno stanje svijeta. U primjeru 1.1 to znači da ne znamo vjerojatnost da se Luka ozlijedi.

   No, pitanje je kako možemo uz jaku nesigurnost donijeti najbolju moguću odluku? U ovisnosti o tome je li donositelj odluke pesimist ili optimist i u kojoj mjeri, za ovaj slučaj postoje četiri najčešća kriterija za donošenje odluke, a to su:

   (a) Waldov pesimistični kriterij

   (b) Hurwitzov optimistično-pesimistični kriterij

   (c) Savageov minimizacijski kriterij

   (d) Laplaceov racionalni kriterij

   Više o svakom od ovih kriterija čitatelj može pronaći u [4] i [7].

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se samo odlukama koje se donose uz slabu nesigurnost ili rizik, jer samo u tom slučaju ima smisla koristiti stabla odlučivanja.
Kako bi naš primjer doveli u područje slabe nesigurnosti ili rizika pretpostavimo da je, nakon liječničkog pregleda i testa fizičke pripreme, procijenjena vjerojatnost da se Luka ozlijedi i da ona iznosi 40%. Koristeći klasičnu definiciju vjerojatnosti dobivamo da je očekivana dobit kluba u slučaju dovođenja Luke jednaka $0.4 * (-50000) + 0.6 * (100000) = 40000$ kuna, dok je očekivana dobit kluba u slučaju da Luka ostaje u konkurentskom klubu jednaka $0.4 * (150000) + 3/5 * 0 = 60000$ kuna. Zaključujemo kako je očekivana dobit kluba veća u slučaju da Luka ostane u konkurentskom klubu pa uprava neće dovesti Luku.

2 Stabla odlučivanja

2.1 Izrada i opis stabla odlučivanja

Kao što smo rekli u uvodu, zbog velikog broja akcija ili stanja svijeta, tablica odlučivanja često može biti izrazito nepregledna. Kako bi problem prikazali u jednostavnijem i preglednijem obliku koristimo stabla odlučivanja. Stablo odlučivanja je grafički prikaz procesa odlučivanja koji se sastoji od niza slijedno povezanih odluka. Kako bi pomoću stabla odlučivanja mogli donijeti najbolju moguću odluku potrebno je biti u uvjetima slabe nesigurnosti ili rizika, tj. moramo poznavati koje sve odluke možemo donijeti i posljedice tih odluka te nam također moraju biti poznate i vjerojatnosti da se svaka od posljedica dogodi.

Za ilustraciju uzmimo slučaj sa dvije akcije a_1 i a_2, te tri stanja svijeta θ_1, θ_2 i θ_3. Pogledat ćemo najprije tablicu odlučivanja, a potom ćemo kreirati stablo odlučivanja te pobliže opisati njegove dijelove.

		Stanja svijeta		
		θ_1	θ_2	θ_n
Akcije	a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
	a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}

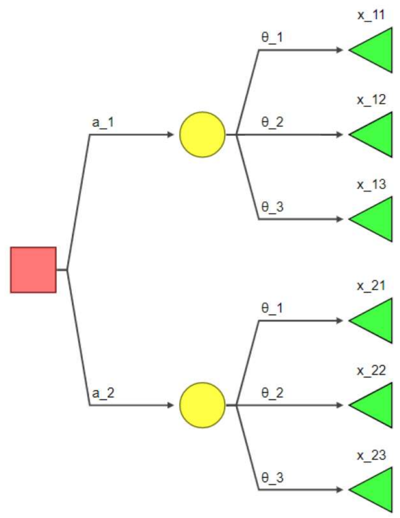
Tablica 2.1: Tablica odlučivanja s dvije akcije i tri stanja svijeta

Na *Slici* 2.1 vidimo kako se stablo odlučivanja sastoji od tri vrste čvorova i dvije vrste grana. Čvorovi se dijele na čvorove odluke, čvorove mogućih posljedica i završne čvorove, dok se grane dijele na grane alternativnih aktivnosti i grane mogućih posljedičnih stanja.

Čvor odluke je prikazan crvenim kvadratom i u tom čvoru donositelj odluke odabire za koju će se akciju odlučiti. Početni čvor stabla uvijek je čvor odluke, ali čvorovi odluke se u složenijim primjerima mogu naći i u drugim dijelovima stabla, tj. svugdje gdje je potrebno donijeti nekakvu odluku. Iz čvora odluke izlaze grane alternativnih aktivnosti.

Čvorovi mogućih posljedica su prikazani žutim krugovima i prikazuju moguće ishode svake od mogućnosti. U njima računamo očekivane vrijednosti grana koristeći klasičnu definiciju vjerojatnosti. U čvorove mogućih posljedica ulaze grane alternativnih aktivnosti, a iz njih izlaze grane mogućih posljedičnih stanja.

Završni čvorovi prikazani su zelenim trokutima i u njima završava svaka od alternativa. U završne čvorove ulaze grane mogućih posljedičnih stanja.

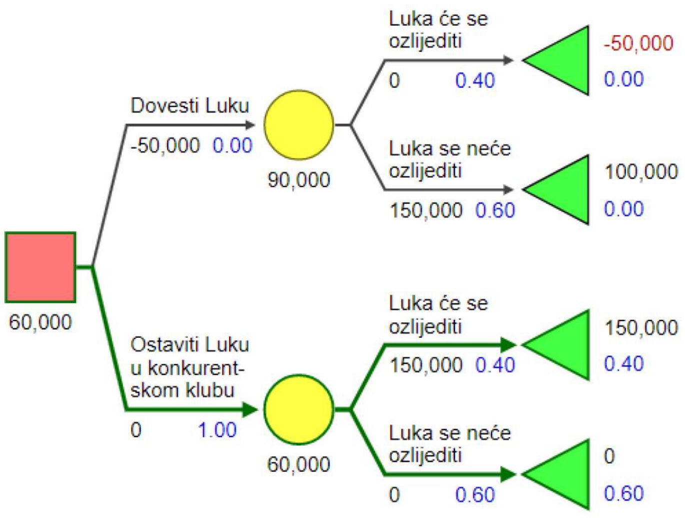


Slika 2.1: Stablo odlučivanja s dvije akcije i tri stanja svijeta

Grane alternativnih aktivnosti su grane koje izlaze iz čvora odluke. Da bi stablo odlučivanja imalo smisla, potrebno je da iz svakog čvora odluke izlaze barem dvije grane alternativnih aktivnosti. Na sljedećem primjeru vidjet ćemo da se na ovim granama nalazi profit ili trošak pripadne akcije, ovisno o tome jesmo li na dobitku ili gubitku. Grane alternativnih aktivnosti mogu završavati u bilo kojem od prethodno navedenih čvorova.

Grane mogućih posljedičnih stanja su grane koje izlaze iz čvora mogućih posljedica. Na sljedećem primjeru vidjet ćemo kako se na njima nalazi vjerojatnost svake od pripadnih posljedica. Grane mogućih posljedičnih stanja također mogu završavati u bilo kojem od prethodno navedenih čvorova.

Pogledajmo sada kako izgleda stablo odlučivanja za primjer 1.1:



Slika 2.2: Stablo odlučivanja za primjer 1.1

Za izradu stabla odlučivanja u ilustrativnom primjeru te u primjeru 1.1, kao i za izradu ostalih stabala odlučivanja, koristimo besplatni i otvoreni softver imena *SilverDecisions*, kojem se može pristupiti na stranici http://silverdecisions.pl/. Za valjano zaključivanje iz stabla odlučivanja potrebno je provesti tri koraka:

1. Izgradnja stabla odlučivanja
2. Računanje očekivanih vrijednosti odluka postupkom računanja unatrag (eng. *Rollback algorithm*)
3. Pronalaženje optimalnog puta postupkom računanja unaprijed

Korištenje navedenog softvera od nas zahtijeva samo izgradnju stabla odlučivanja (1. korak), dok preostala dva koraka odrađuje softver. U nastavku ćemo ukratko opisati postupak *Rollback* algoritma i pronalaska optimalnog puta, a više detalja mogu se pronaći u [8].

Za provedbu *Rollback algoritma* (2. korak) izračune započinjemo od završnih čvorova stabla i krećemo se prema početnom čvoru stabla. Čvorovima posljedica pridružujemo vrijednosti računate formulom

$$EV_{i-1} = \sum_{j} p_j EV_i, \ \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \tag{2.1}$$

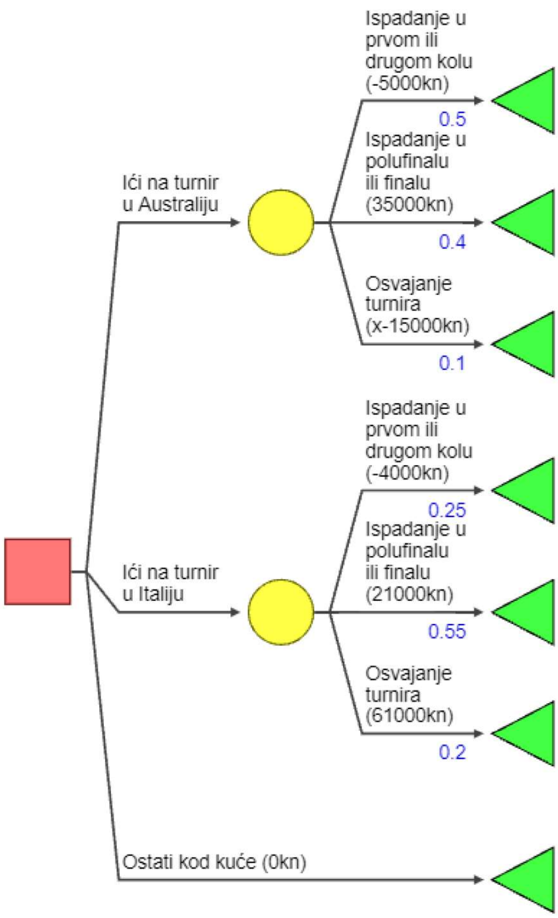
gdje EV_{i-1} predstavlja očekivanu vrijednost u čvoru $i-1$, EV_i predstavlja očekivanu vrijednost u čvoru i, p_j predstavlja vjerojatnost j-te grane koja izlazi iz čvora $i-1$, n predstavlja ukupan broj čvorova posljedica, dok m predstavlja ukupan broj grana koje izlaze iz čvora $i-1$.

Za pronalazak optimalnog puta (3. korak) krećemo se od početnog čvora prema završnim čvorovima. Vrijednost grane na optimalnom putu, tj. najveća vrijednost grane koja izlazi iz početnog čvora pridružuje se početnom čvoru i tako redom dok ne dođemo do završnog čvora.

U primjeru 1.1 vidimo kako je optimalan put onaj u kojem klub ne dovodi Luku i da je profit tog puta 60000 kuna, jednako kao što smo dobili kada smo primjer 1.1. rješavali uz pomoć tablice odlučivanja. Optimalan put na stablu odlučivanja označen je tamnozelenom bojom.

Primjer 2.1. Tenisač Ivan ima popunjen kalendar do kraja sljedećeg mjeseca, a za tjedan iza toga nude mu se tri opcije: ići na turnir u Australiju, ići na turnir u Italiju ili ostati kod kuće i ne igrati niti jedan turnir taj tjedan. Nagrade na turniru u Australiji su 10000 kuna ako Ivan ispadne u prvom ili drugom kolu te 50000 kuna ako izgubi u polufinalu ili finalu. Za osvajanje turnira još uvijek nije poznata nagrada jer su neki od sponzora neodlučni o iznosu s kojim će sponzorirati turnir. Poznavajući konkurenciju na turniru Ivan može procijeniti vjerojatnosti svakog od navedenih ishoda i one su redom 50%, 40% i 10%. Za razliku od turnira u Australiji, u Italiji je konkurencija slabija, ali su zato i nagrade manje. Za ispadanje u prvom ili drugom kolu Ivan će dobiti 5000 kuna, za poraze u polufinalu ili finalu će dobiti 30000 kuna, a za osvajanje turnira predviđena je nagrada od 70000 kuna. Vjerojatnosti navedenih ishoda su redom 25%, 55% i 20%. Kako tenisači sami financiraju odlazak i boravak na turnirima, Ivan u računicu mora ubaciti i troškove putovanja te smještaja i hrane. Odlazak i boravak u Australiji Ivana košta 15000 kuna, dok ga odlazak i boravak u Italiji košta 9000 kuna. Kolika mora biti nagrada za osvajanje turnira u Australiji da se Ivan odluči za odlazak na najmanji svjetski kontinent?

Za izradu stabla iskoristimo softver *SilverDecisions*.



Slika 2.3: Stablo odlučivanja za primjer 2.1

Primijetimo kako smo na svakoj grani profit od odlaska na turnir dobili tako da smo od zarade na turniru oduzeli troškove boravka u zemlji koja je domaćin turnira.

Izračunajmo najprije očekivani Ivanov profit od odlaska na turnir u Italiju. Koristeći formulu (2.1) dobivamo

$$-4000 \cdot 0.25 + 21000 \cdot 0.55 + 61000 \cdot 0.2 = 22750 \text{ kuna.}$$

Sada je jasno da se Ivanu nikako ne isplati ostati kod kuće pa nas još zanima na koji turnir će otići. Analognim postupkom kao za turnir u Italiji, očekivana nagrada od turnira u Australiji je

$$-5000 \cdot 0.5 + 35000 \cdot 0.4 + (x - 15000) \cdot 0.1 = 10000 + 0.1x \text{ kuna,}$$

Zaključujemo kako za odlazak u Australiju mora vrijediti

$$\begin{gathered} 10000 + 0.1x > 22750 \text{ /-10000} \\ 0.1x > 12750 \text{ /:0.1} \\ x > 127500 \end{gathered}$$

pa će Ivan otići na turnir u Australiju ako je tamo nagrada za osvajanje turnira veća od 127500 kuna.

2.2 Prednosti i nedostaci stabla odlučivanja

Rješavanje problema pomoću stabla odlučivanja, kao i većina ostalih metoda iz teorije odlučivanja ima mnoge prednosti, ali isto tako i nedostatke.

2.2.1 Prednosti

1. Stabla odlučivanja su razumljiva i lako ih je tumačiti čak i onima koji nemaju veliko matematičko znanje, pogotovo u jednostavnijim primjerima gdje stablo nema puno čvorova i grana.
2. U stablu odlučivanja moraju biti prikazane sve akcije i posljedice svake od akcija.
3. Sam grafički prikaz stabla dodatno olakšava interpretaciju te uspoređivanje svih akcija koje donositelj odluke može odabrati.
4. Iz stabla je vrlo jednostavno uočiti zavisnost između pojedinih odluka.
5. U rješavanju problema metodom stabla odlučivanja podaci mogu sadržavati i nedostajuće vrijednosti.

2.2.2 Nedostaci

1. Male promjene podataka koje unosimo u stablo mogu rezultirati velikim promjenama u konačnoj odluci, što može dovesti do pogrešnog rješenja problema ako smo greškom unijeli i neznatno drugačiji podatak. Ako pak primjetimo pogrešku moramo izraditi novo stablo, što u složenim primjerima može biti izrazito zahtjevno.
2. Koliko je metoda stabla odlučivanja jednostavna u problemima koji nemaju puno čvorova i grana, toliko i nije praktična ukoliko imamo probleme s velikim brojem akcija i stanja svijeta te ako moramo donositi velik broj odluka jednu za drugom.
3. Grafički prikazi stabla mogu se u praksi podosta zakomplicirati pa se ova metoda ne primjenjuje za probleme u kojima stablo neće biti jednostavno izraditi i tumačiti.

3 Primjena teorije vjerojatnosti u stablima odlučivanja

Već se iz prethodnih primjera može naslutiti kako je teorija vjerojatnosti izuzetno važna za donošenje najbolje odluke metodom stabla odlučivanja. U ovom poglavlju najprije ćemo proširiti priču o vjerojatnosti sa dvjema formulama koje su nam vrlo korisne u metodi stabla odlučivanja, a nakon teoretskog dijela ćemo kroz dva primjera prikazati kako u određenim situacijama u praksi donositelji odluke biraju najbolju opciju koristeći stabla odlučivanja i teoriju vjerojatnosti.

3.1 Formula potpune vjerojatnosti i Bayesova formula

Jedne od najvažnijih vjerojatnosnih formula koje se koriste u stablima su *Formula potpune vjerojatnosti* i *Bayesova formula*. Kako se u njima koristi uvjetna vjerojatnost te moramo imati potpun sustav događaja, najprije definirajmo ta dva pojma. Sve definicije i teoremi iz ovog poglavlja preuzeti su iz [1].

Definicija 3.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i događaj* $B \in \mathcal{F}$ *pozitivne vjerojatnosti, tj.* $P(B) > 0$*. Funkciju* $P_B : \mathcal{F} \to [0,1]$ *definiranu s*

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ A \in \mathcal{F}$$

nazivamo uvjetna vjerojatnost uz uvjet da se dogodio događaj B*.*

Definicija 3.2. *Konačna ili prebrojiva familija događaja* $\{H_i : i \in I\},\ I \subseteq \mathbb{N}$ *čini potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ako vrijedi:*

1. $P(H_i) > 0$*, za svaki* $i \in I$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset$*, za sve* $i, j \in I,\ i \neq j$
3. $\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$*, pri čemu* Ω *nazivamo siguran događaj.*

Prije same *Bayesove formule* pogledajmo *formulu potpune vjerojatnosti*:

Teorem 3.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $\{H_i : i \in I\},\ I \subseteq \mathbb{N}$*, potpun sustav događaja na njemu. Tada za proizvoljan događaj* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i). \tag{3.1}$$

Teorem 3.2. *Neka je* $\{H_i : i \in I\}, I \subseteq \mathbb{N}$*, potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka je* $B \in \mathcal{F}$ *događaj pozitivne vjerojatnosti, tj.* $P(B) > 0$*. Tada za svaki* $i \in I$ *vrijedi*

$$P(H_i|B) = \frac{P(H_i)P(B|H_i)}{P(B)} = \frac{P(H_i)P(B|H_i)}{\sum_{i \in I} P(B|H_i)P(H_i)} \tag{3.2}$$

Dokaze navedenih teorema čitatelj također može pronaći u [1]. Formulu (3.2) nazivamo *Bayesova formula*. Ona nam je od velike važnosti ako želimo izračunati vjerojatnost nekog događaja uz uvjet da se već dogodio neki događaj pozitivne vjerojatnosti. Pogledajmo na sljedećem primjeru značaj ove formule:

Primjer 3.1. U loto bubnju nalazi se 45 kuglica označenih brojevima od 1 do 45. Kolika je vjerojatnost da prva izvučena kuglica na sebi ima neparan broj ako znamo da je broj na toj kuglici veći od 40?

Uz iste oznake kao u formuli (3.2) imamo:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{Izvučeni broj je neparan}\} \\ H_2 &= \{\text{Izvučeni broj je paran}\} \\ B &= \{\text{Izvučeni broj je veći od 40}\} \end{aligned}$$

Primjetimo da je $H_1 \cup H_2$ potpun sustav događaja jer broj može biti ili paran ili neparan te da je $P(B) > 0$, pa zaključujemo da primjer zadovoljava uvjete Bayesovog teorema. Vjerojatnosti događaja koje su nam od interesa u ovom zadatku iznose:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{23}{45} \\ P(B) &= \frac{5}{45} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Za korištenje Bayesove formule nedostaje nam još vjerojatnost da je broj veći od 40 ako je neparan, tj. $P(B|H_1)$. Pošto znamo da je neparnih brojeva ukupno 23, a neparnih brojeva većih od 40 je ukupno 3, imamo

$$P(B|H_1) = \frac{3}{23}$$

Sada pomoću Bayesove formule dobivamo

$$P(H_1|B) = \frac{P(H_1)P(B|H_1)}{P(B)} = \frac{\frac{23}{45} \cdot \frac{3}{23}}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{5},$$

tj. vjerojatnost da izvučena kuglica na sebi ima neparan broj ako znamo da je izvučena kuglica s brojem većim od 40 iznosi 3/5.

3.2 Primjena formule potpune vjerojatnosti i Bayesove formule

Pokažimo sada na primjerima kako korištenje formula (3.1) i (3.2) može uvelike pomoći u donošenju najbolje moguće odluke.

Primjer 3.2. U mnogim medijima izašla je informacija kako 14-godišnji španjolski vaterpolist Juan zabija prosječno 5 golova po utakmici u prvenstvu Španjolske za djecu do 15 godina, ali da njegovi roditelji nisu zadovoljni sa radom trenera u klubu te razmišljaju o promjeni sredine. To je potaklo mnoge klubove da razmisle o dovođenju mladog Juana u svoje redove, a među njima najveću zainteresiranost pokazuje *Vaterpolski klub Jadran* iz Splita. Kako oba roditelja u pandemijsko doba rade od kuće, neće im biti problem preseliti u Split neko vrijeme dok Juan još malo ne odraste. Trenutne pretpostavke o tome u kakvog će se igrača razviti mladi Juan su sljedeće:

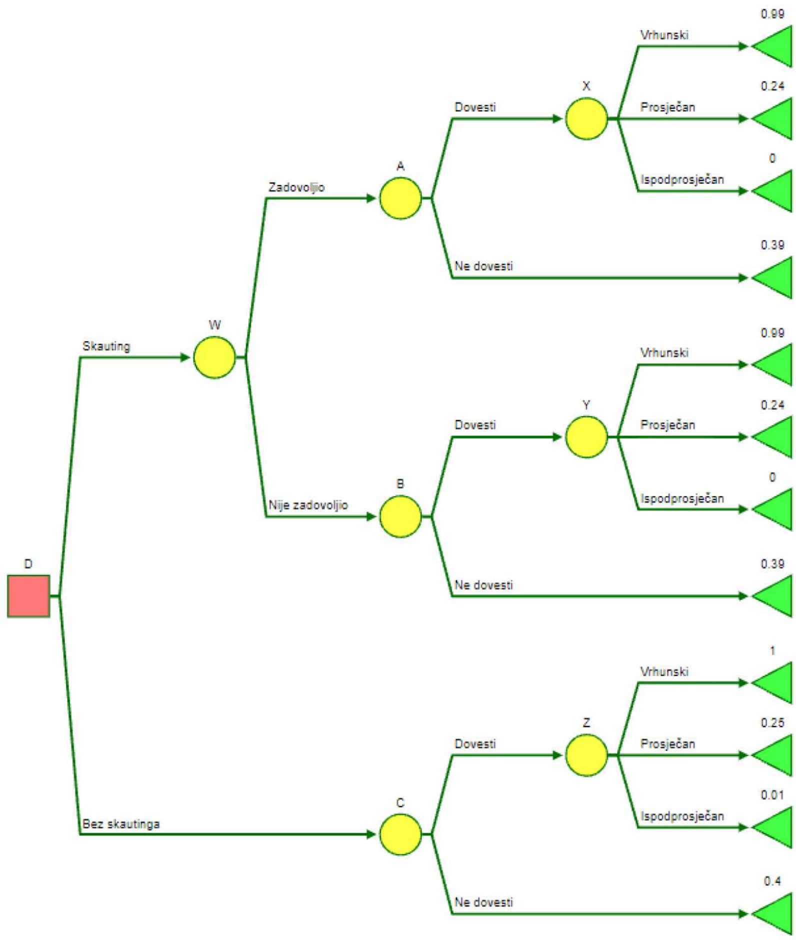
$$\begin{aligned} P(vrhunski) &= P(V) = 0.4 \\ P(prosječan) &= P(P) = 0.35 \\ P(ispodprosječan) &= P(I) = 0.25 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ako Juan postane vrhunski igrač i ostane u Splitu, *VK Jadran* će biti prvi favorit za osvajanje hrvatskog prvenstva te će biti konkurentan i na europskoj sceni. Ako se u tom slučaju Juan odluči napustiti splitski klub, zarada od prodaje biti će puno veća od troškova njegova dovođenja. Kako prosječnih igrača ima i u našoj državi, dovođenje Juana neće se pokazati isplativo ako on postane prosječan, ali ni gubitak neće biti prevelik. Ako Juan postane ispodprosječan gubitak za klub bit će znatno veći. Nadalje, pošto mediji često znaju iznositi netočne informacije, *Vaterpolski klub Jadran* može zaposliti skauta i poslati ga na završnicu prvenstva u Španjolsku kako bi pogledao dvije posljednje Juanove utakmice za njegov matični klub. Naravno, putovanje i boravak u Španjolskoj te plaća za skauta iziskuje dodatne troškove za klub. Ako *VK Jadran* pošalje skauta, on svakako neće donijeti odluku o tome treba li dovesti Juana ili ne, nego će samo dati svoju grubu ocjenu njegovih nastupa; *Zadovoljio* ili *Nije zadovoljio.* Mišljenje predsjednika *VK Jadran* o procjeni skauta je sljedeće:

$$\begin{aligned} P(Zadovoljio|V) &= P(Z|V) = 0.85 \\ P(Zadovoljio|P) &= P(Z|P) = 0.65 \\ P(Zadovoljio|I) &= P(Z|I) = 0.15. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dakle, procjena skauta ne uzima se kao sigurna, nego i on može pogriješiti pošto će imati uzorak od samo dvije utakmice, a mladi igrači skloni su oscilacijama.

Kako bi skicirali stablo odlučivanja, primjetimo da se *VK Jadran* najprije treba odlučiti hoće li poslati skauta u Španjolsku ili neće (*Skauting* ili *Bez skautinga*) i to su dvije akcije koje izlaze iz korijena stabla. Također, vidimo da je cilj odrediti hoće li *VK Jadran* dovesti Juana u svoje redove ili neće. U slučaju da *VK Jadran* nije zaposlio skauta, sam odlučuje hoće li dovesti španjolskog mladića, a u slučaju da se odluče poslati skauta u Španjolsku moraju vidjeti što skaut misli o Juanu, jer nema smisla organizirati skauting ukoliko ga neće uzeti u obzir. Stablo odlučivanja možemo sada skicirati na sljedeći način:



Slika 3.1: Stablo odlučivanja za primjer 3.2

Primjetimo kako na završnim čvorovima stoje brojevi koji na određeni način prikazuju korisnost svake od mogućih odluka. Te brojeve donose stručnjaci i vidimo kako su u ovom slučaju to brojevi iz segmenta [0,1], gdje 0 prikazuje slučaj kada je *VK Jadran* uzeo skauta i doveo Juana koji je na kraju postao ispodprosječan igrač (najgori mogući slučaj), a 1 prikazuje slučaj kada kompanija nije potrošila novac na skauting, a kupila je Juana i on je postao vrhunski igrač (najbolji mogući slučaj). Uočimo i to da su korisnosti nešto manje u slučaju kada splitski klub ne angažira skauta, što je i očekivano obzirom da, u tom slučaju, klub ima dodatne troškove za skauting (putovanje, boravak skauta u Španjolskoj, plaća). Više o samoj korisnosti te o funkciji korisnosti govorit ćemo u sljedećem poglavlju.

U čvoru X imamo

$$P(V|Zadovoljio) = P(V|Z)$$
$$P(P|Zadovoljio) = P(P|Z)$$
$$P(I|Zadovoljio) = P(I|Z).$$

{V,P,I} je očito potpun sustav događaja jer je $P(V) + P(P) + P(I) = 0.4 + 0.35 + 0.25 = 1$.

Za računanje očekivane korisnosti u čvoru X moramo izračunati sumu umnožaka vjerojatnosti svake opcije Juanovog razvoja uz uvjet zadovoljavajućeg skautinga te korisnosti pripadne klasifikacije, odnosno koristimo formulu

$$P(V|Z) \cdot 0.99 + P(P|Z) \cdot 0.24 + P(I|Z) \cdot 0$$

Vidimo kako nam za izračun nedostaju tri uvjetne vjerojatnosti do kojih dolazimo koristeći Bayesovu formulu:

$$\begin{aligned} P(V|Z) &= \frac{P(V) \cdot P(Z|V)}{P(Z)} \\ P(P|Z) &= \frac{P(P) \cdot P(Z|P)}{P(Z)} \\ P(I|Z) &= \frac{P(I) \cdot P(Z|I)}{P(Z)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Da bismo dobili očekivanu korisnost u čvoru X nedostaje nam još vjerojatnost da će Juan zadovoljiti skautove uvjete, koju računamo pomoću formule potpune vjerojatnosti (formule 3.1):

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(Z|V) \cdot P(V) + P(Z|P) \cdot P(P) + P(Z|I) \cdot P(I) = \\ &= 0.85 \cdot 0.4 + 0.65 \cdot 0.35 + 0.15 \cdot 0.25 = 0.605 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem podataka u 3.6 dobivamo

$$\begin{aligned} P(V|Z) &= \frac{0.4 \cdot 0.85}{0.605} = 0.562 \\ P(P|Z) &= \frac{0.35 \cdot 0.65}{0.605} = 0.376 \\ P(I|Z) &= \frac{0.25 \cdot 0.15}{0.605} = 0.062 \end{aligned}$$

te je sada očekivana korisnost u X jednaka

$$0.562 \cdot 0.99 + 0.376 \cdot 0.24 + 0.062 \cdot 0 = 0.647.$$

Kako je procijenjena vrijednost za ne dovesti Juana ako skaut donese zadovoljavajuću ocjenu 0.39, što je manje od 0.647, zaključujemo da *VK Jadran* u slučaju zadovoljavajućeg skautinga treba dovesti Juana.

Prebacimo se sada na dio stabla u kojem je *VK Jadran* poslao skauta u Španjolsku i Juan nije zadovoljio njegove kriterije. Iz formule (3.4) lako dobivamo

$$\begin{aligned} P(Nije\ zadovoljio|V) &= P(NZ|V) = 1 - 0.85 = 0.15 \\ P(Nije\ zadovoljio|P) &= P(NZ|P) = 1 - 0.65 = 0.35 \\ P(Nije\ zadovoljio|I) &= P(NZ|I) = 1 - 0.15 = 0.85. \end{aligned}$$

Analognim postupkom kao za čvor X računamo i očekivanu korisnost u čvoru Y. Jedina razlika je što u ovom slučaju Juan nije zadovoljio kriterije skauta, pa će nam za izračun uvjetnih vjerojatnosti Bayesovom formulom trebati $P(NZ)$ kojeg računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} P(NZ) &= P(NZ|V) \cdot P(V) + P(NZ|P) \cdot P(P) + P(NZ|I) \cdot P(I) = \\ &= 0.15 \cdot 0.4 + 0.35 \cdot 0.35 + 0.85 \cdot 0.25 = 0.395 \end{aligned}$$

Primjetimo kako smo $P(NZ)$ mogli i lakše izračunati pomoću vjerojatnosti suprotnog događaja, tj. kao $1 - P(Z)$.

Bayesova formula nam sada daje

$$P(V|NZ) = \frac{P(V) \cdot P(NZ|V)}{P(NZ)} = \frac{0.4 \cdot 0.15}{0.395} = 0.152$$
$$P(P|NZ) = \frac{P(P) \cdot P(NZ|P)}{P(NZ)} = \frac{0.35 \cdot 0.35}{0.395} = 0.31$$
$$P(I|NZ) = \frac{P(I) \cdot P(NZ|I)}{P(NZ)} = \frac{0.25 \cdot 0.85}{0.395} = 0.538$$

pa je očekivana korisnost u čvoru Y jednaka

$$0.152 \cdot 0.99 + 0.31 \cdot 0.24 + 0.538 \cdot 0 = 0.225$$

Kako je procijenjena vrijednost za ne dovesti Luku ako Juan nije zadovoljio kriterije skauta 0.39, što je veće od 0.225, zaključujemo da *VK Jadran* ne treba dovesti Juana u slučaju da skaut za njega donese nezadovoljavajuću ocjenu.

Čvoru W sada pripada očekivana korisnost

$$0.605 \cdot 0.647 + 0.395 \cdot 0.39 = 0.545.$$

Analizirajmo sada dio stabla u kojem se *VK Jadran* nije odlučio angažirati skauta. Očekivana korisnost u čvoru Z tada je

$$P(V) \cdot 1 + P(P) \cdot 0.25 + P(I) \cdot 0.01 = 0.4 \cdot 1 + 0.35 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.01 = 0.49.$$

Kako je procijenjena vrijednost za ne dovesti Juana ako nema istraživanja 0.4, što je manje od 0.49, zaključujemo da *VK Jadran* treba dovesti Juana ako nije poslao skauta u Španjolsku.

Čvoru C sada pripada vrijednost 0.49, a kako je vrijednost u čvoru W jednaka 0.545, što je veće od 0.49, zaključujemo kako čvoru D (početnom čvoru) pripada vjerojatnost 0.545, tj. *VK Jadran* treba angažirati skauta.

Sagledavši ponovno cijelo stablo, zaključujemo da *Jadran* treba angažirati skauta te ako on kaže da Juan zadovoljava njegove kriterije, Splićani ga trebaju dovesti u svoje redove, a u suprotnom trebaju odustati od dovođenja mladog Španjolca.

U sljedećem primjeru pokazat ćemo primjenu stabla odlučivanja u marikulturi.

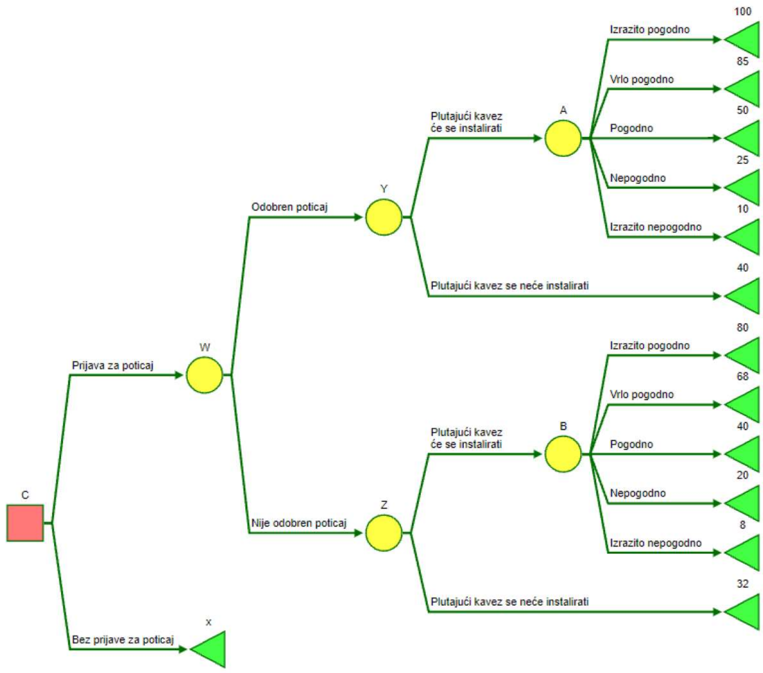
Primjer 3.3. Tvrtka *Školjkica*, koja se bavi marikulturom, želi instalirati novi plutajući kavez za uzgoj školjkaša. Resorno ministarstvo nudi *Školjkici* područje u blizini Zadra gdje bi mogao stajati novi kavez. Kako sama kupnja kaveza, kao i njegova instalacija, iziskuje određena financijska davanja, *Školjkica* razmatra mogućnost da se prijavi za dobivanje poticaja od strane Europskog fonda za pomorstvo i ribarstvo. Dobivanje poticaja ovisi o tome koliko je ponuđeno morsko područje pogodno za uzgoj školjaka, a ono može biti: izrazito pogodno (5), vrlo pogodno (4), pogodno (3), nepogodno (2) ili izrazito nepogodno (1). Nakon obrade zahtjeva *Školjkica* će ili dobiti poticaj ili neće. Budući da je navedeni davatelj poticaja skloniji odobravanju poticaja morskim područjima bolje kvalitete, neka su dane sljedeće uvjetne vjerojatnosti:

- P(odobren poticaj | more izrazito pogodno) = 0.95
- P(odobren poticaj | more vrlo pogodno) = 0.75
- P(odobren poticaj | more pogodno) = 0.5

- P(odobren poticaj | more nepogodno) = 0.25
- P(odobren poticaj | more izrazito nepogodno) = 0.05

Nadalje, neka su procijenjene sljedeće vjerojatnosti da morsko područje ima određenu kvalitetu. Redom od izuzetno pogodnog do izrazito nepogodnog vjerojatnosti su: 0.15, 0.2, 0.3, 0.2, 0.15. Jasno je da će pogodnije more imati veću korisnost, pa pretpostavimo da u slučaju traženja poticaja (u slučaju da je on odobren i da će se instalirati plutajući kavez) korisnost iznosi 100 u slučaju da je more izrazito pogodno za uzgoj školjaka, 85 u slučaju da je more vrlo pogodno, 50 u slučaju da je more pogodno, 25 u slučaju da je more nepogodno i 10 u slučaju da je more izrazito nepogodno. Također, u slučaju traženja poticaja (u slučaju da je on odobren) neka korisnost kod ne instalacije plutajućeg kaveza iznosi 40. Nadalje, u slučaju traženja poticaja (u slučaju da on nije odobren) neka su korisnosti za 20% manje u odnosu na odgovarajuće korisnosti u slučaju odobrenog poticaja. U slučaju da se donositelj odluke ne prijavi za poticaj, neka korisnost iznosi x, gdje je x realan broj.

Najprije ćemo izraditi stablo odlučivanja koristeći softver *SilverDesicions*, a nakon toga ćemo, u ovisnosti o nepoznatom parametru x, analizirati kakvu odluku *Školjkica* treba donijeti.



Slika 3.2: Stablo odlučivanja za primjer 3.3

Radi jednostavnosti, odobren poticaj označit ćemo s OP, a neodobreni poticaj s NOP Analizirajmo za početak čvor A. Za računanje očekivane korisnosti u čvoru A moramo izračunati sumu umnožaka vjerojatnosti svake klasifikacije morskog područja uz uvjet da je poticaj odobren te korisnosti pripadne klasifikacije, odnosno koristimo formulu

$$P(5|OP) \cdot 100 + P(4|OP) \cdot 85 + P(3|OP) \cdot 50+$$
$$+P(2|OP) \cdot 25 + P(1|OP) \cdot 10.$$

Vidimo kako nam za izračun nedostaje pet uvjetnih vjerojatnosti koje dobivamo pomoću Bayesove formule:

$$\begin{aligned} P(5|OP) &= \frac{P(5) \cdot P(OP|5)}{P(OP)} \\ P(4|OP) &= \frac{P(4) \cdot P(OP|4)}{P(OP)} \\ P(3|OP) &= \frac{P(3) \cdot P(OP|3)}{P(OP)} \\ P(2|OP) &= \frac{P(2) \cdot P(OP|2)}{P(OP)} \\ P(1|OP) &= \frac{P(1) \cdot P(OP|1)}{P(OP)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Da bismo dobili očekivanu korisnost u čvoru A nedostaje nam još vjerojatnost odobravanja poticaja koju računamo pomoću formule potpune vjerojatnosti (formule (3.1)):

$$P(OP) = P(OP|5) \cdot P(5) + P(OP|4) \cdot P(4) + P(OP|3) \cdot P(3) + P(OP|2) \cdot P(2)+$$
$$+ P(OP|1) \cdot P(1) = 0.95 \cdot 0.15 + 0.75 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.2 + 0.05 \cdot 0.15 = 0.5$$

Uvrštavanjem podataka u 3.6 dobivamo

$$
\begin{aligned}
P(5|OP) &= \frac{0.15 \cdot 0.95}{0.5} = 0.285 \\
P(4|OP) &= \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.5} = 0.3 \\
P(3|OP) &= \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.5} = 0.3 \\
P(2|OP) &= \frac{0.2 \cdot 0.25}{0.5} = 0.1 \\
P(1|OP) &= \frac{0.15 \cdot 0.05}{0.5} = 0.015
\end{aligned}
$$

te je sada očekivana korisnost u A jednaka

$$0.285 \cdot 100 + 0.3 \cdot 85 + 0.278 \cdot 50 + 0.1 \cdot 25 + 0.015 \cdot 10 = 70.55$$

Kako korisnost kod ne instalacije plutajućeg kaveza ako je poticaj odobren iznosi 40, što je manje od 70.55, zaključujemo da donositelj odluke u slučaju dobivanja poticaja treba instalirati plutajući kavez.

Analognim postupkom kao za čvor A računamo i očekivanu korisnost u čvoru B. Jedina razlika je što poticaj u ovom slučaju nije odobren, pa će nam za izračun uvjetnih vjerojatnosti Bayesovom formulom trebati $P(NOP)$ kojeg računamo na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
P(NOP) = {} & P(NOP|5) \cdot P(5) + P(NOP|4) \cdot P(4) + P(NOP|3) \cdot P(3) + \\
& + P(NOP|2) \cdot P(2) + (NOP|1) \cdot P(1) = \\
& = 0.05 \cdot 0.15 + 0.25 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.3 + 0.75 \cdot 0.2 + 0.95 \cdot 0.15 = 0.5
\end{aligned}
$$

Primjetimo i ovdje da smo $P(NOP)$ mogli lakše izračunati pomoću vjerojatnosti suprotnog događaja, tj. kao $1 - P(OP)$.

Bayesova formula nam sada daje

$$
\begin{aligned}
P(5|NOP) &= \frac{P(5) \cdot P(NOP|5)}{P(NOP)} = \frac{0.15 \cdot 0.05}{0.5} = 0.015 \\
P(4|NOP) &= \frac{P(4) \cdot P(NOP|4)}{P(NOP)} = \frac{0.2 \cdot 0.25}{0.5} = 0.1 \\
P(3|NOP) &= \frac{P(3) \cdot P(NOP|3)}{P(NOP)} = \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.5} = 0.3 \\
P(2|NOP) &= \frac{P(2) \cdot P(NOP|2)}{P(NOP)} = \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.5} = 0.3 \\
P(1|NOP) &= \frac{P(1) \cdot P(NOP|1)}{P(NOP)} = \frac{0.15 \cdot 0.95}{0.5} = 0.285
\end{aligned}
$$

pa je očekivana korisnost u čvoru B jednaka

$$0.015 \cdot 80 + 0.1 \cdot 68 + 0.3 \cdot 40 + 0.3 \cdot 20 + 0.285 \cdot 8 = 28.28$$

Kako korisnost kod ne instaliranja plutajućeg kaveza ako poticaj nije odobren iznosi 32, što je veće od 28.28, zaključujemo da *Školjkica* u slučaju ne dobivanja poticaja na tu lokaciju ne treba instalirati plutajući kavez.

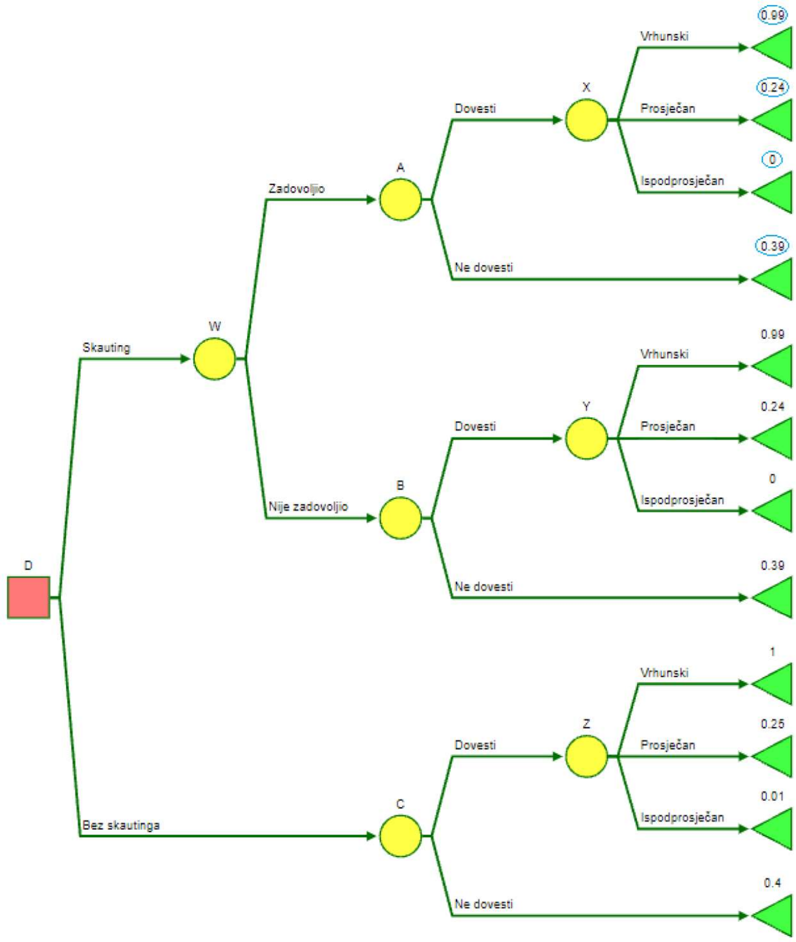
Čvoru W sada pripada očekivana korisnost

$$0.5 \cdot 70.55 + 0.5 \cdot 32 = 51.275.$$

Konačno, pogledavši stablo vidimo kako donositelj odluke mora usporediti dobivenu korisnost u čvoru W sa korisnosti u slučaju da se ne prijavi za poticaj koja je označena nepoznatim parametrom x. Zaključujemo kako se donositelj odluke neće prijaviti za poticaj ako je $x > 51.275$. U slučaju kada je $x = 51.275$ donositelj odluke je indiferentan, tj. svejedno mu je koju će odluku donijeti, dok će se u slučaju da je $x < 51.275$ donositelj odluke prijaviti za poticaj. Ako je u tom slučaju poticaj odobren donositelj odluke će instalirati plutajući kavez, dok će u slučaju da poticaj nije odobren odustati od plutajućeg kaveza na toj lokaciji.

4 Korisnost odluka i funkcija korisnosti

Prisjetimo se kako smo u primjeru 3.2 po prvi put spomenuli korisnost rekavši kako ćemo ju u sljedećem poglavlju detaljno opisati. Prikažimo ponovno stablo odlučivanja koje je izrađeno u okviru primjera 3.2 te se vratimo na spomenuti primjer kako bi detaljnije analizirali korisnost.



Slika 4.1: Stablo odlučivanja za primjer 3.2

Pretpostavimo da postoje četiri faktora koji utječu na konačnu odluku: broj osvojenih trofeja, broj gledatelja, broj novih sponzora te cijena skautinga. Označimo te faktore redom s x_1, x_2, x_3, x_4. Kako bi donio najbolju moguću odluku, donositelj odluke mora poznavati međusobnu ovisnost faktora te znati kako oni utječu na konačnu korisnost. Matematičkim rječnikom, to bi značilo da donositelj odluke mora poznavati funkciju

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Tu funkciju nazivamo **funkcija korisnosti**. Pretpostavimo da nas zanima koliko je *VK Jadran* spreman izdvojiti za skauting, tj. zanima nas x_4. Tada funkciju u možemo zapisati kao

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = w(x_1, x_2, x_3) + k \cdot x_4. \tag{4.1}$$

Nadalje, pretpostavimo da donositelj odluke zadaje faktor k i da je $k = -10^{-6}$ te da je $w(x_1, x_2, x_3) = 1$, tj. korisnost dovođenja Juana u slučaju da će on postati vrhunski igrač jednaka je 1. Tada, uvrštavanjem navedenih podataka u formulu (4.1) dobivamo

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - 10^{-6} \cdot x_4 \tag{4.2}$$

Kada za cijenu skautinga uzmemo 10000 kuna i uvrstimo u formulu (4.2) dobivamo upravo 0.99, što je korisnost dovođenja Juana nakon skautinga. Na *Slici* 4.1 ta korisnost je prva u nizu korisnosti zaokruženih plavom bojom. Preostale korisnosti dobivamo analognim postupkom, a za primjer ćemo pokazati tri preostale zaokružene korisnosti. U tim slučajevima imamo

$$\begin{aligned} 0.25 - 10^{-6}x_4 &= 0.25 - 0.01 = 0.24 \\ 0.01 - 10^{-6}x_4 &= 0.01 - 0.01 = 0 \\ 0.4 - 10^{-6}x_4 &= 0.4 - 0.01 = 0.39. \end{aligned}$$

Zanemarimo sada korisnosti koje smo dobili kada smo za cijenu skautinga uzeli 10000 kuna te izrazimo očekivane korisnosti u svim čvorovima u terminima x_4. Tada očekivana korisnost u čvoru X iznosi

$$0.562 \cdot (1 - 10^{-6}x_4) + 0.376 \cdot (0.25 - 10^{-6}x_4) + 0.062 \cdot (0.01 - 10^{-6}x_4) = 0.647 - 10^{-6}x_4.$$

Kako je $0.647 - 10^{-6}x_4 > 0.4 - 10^{-6}x_4$ za svaki $x_4 > 0$, jasno je da u čvoru A *VK Jadran* odlučuje dovesti mladog Španjolca.

Nadalje, očekivana korisnost u čvoru Y iznosi

$$0.152 \cdot (1 - 10^{-6}x_4) + 0.31 \cdot (0.34 - 10^{-6}x_4) + 0.538 \cdot (0.01 - 10^{-6}x_4) = 0.225 - 10^{-6}x_4.$$

Kako je $0.225 - 10^{-6}x_4 < 0.4 - 10^{-6}x_4$ za svaki $x_4 > 0$, jasno je da se u čvoru B *VK Jadran* ne odlučuje dovesti Juana. Čvoru W sada pripada vrijednost

$$0.605 \cdot (0.647 - 10^{-6}x_4) + 0.395 \cdot (0.4 - 10^{-6}x_4) = 0.549 - 10^{-6}x_4$$

U dijelu stabla 4.1 u kojem nemamo istraživanje je $x_4 = 0$ pa se neće promijeniti vrijednost čvora Z, tj. ona ostaje 0.49. Kako je $0.49 > 0.4$ u čvoru C *VK Jadran* odlučuje dovesti mladog Španjolca u svoje redove.

Konačno, uspoređujemo još čvorove W i C. Za x_4 za koje vrijedi nejednakost $0.549 - 10^{-6}x_4 > 0.49$ zaključujemo da treba angažirati skauta. Jednostavnim računom dobivamo da je u tom slučaju $x_4 < 59000$ pa zaključujemo da *VK Jadran* treba poslati skauta u Španjolsku ako su troškovi skautinga (putovanje, boravak skauta u Španjolskoj, plaća) manji od 59000 kuna. U slučaju da je splitski klub angažirao skauta, zaključak je isti kao i u primjeru 3.2, tj. ako je Juan zadovoljio skautove kriterije trebaju ga dovesti, a ako nije onda trebaju odustati od kupnje. Također, zaključak je isti i u slučaju kada *VK Jadran* ne angažira skauta, tj. kad su troškovi skautinga veći od 59000 kuna. U tom slučaju *VK Jadran* treba odlučiti dovesti mladog Španjolca.

Pogledajmo sada kako izgleda definicija očekivane korisnosti. Definicija je preuzeta iz [4, str.86, def.5.9.].

Definicija 4.1. *Neka je $X = x_1, \ldots, x_n$ skup posljedica s pripadnim vjerojatnostima $p_i = p(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ za koje vrijedi $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ te $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Ako je dana funkcija korisnosti $u : X \to \mathbb{R}$, onda je pripadna očekivana korisnost definirana s*

$$E[u] = E(u) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)u(x_i). \tag{4.3}$$

Primjer 4.1. Matea i Ana išle su posjetiti tvornicu čokolade. Matea je samo probala čokoladice koje proizvodi tvornica, dok je Ana odlučila kupiti paket od 50 čokoladica. Na izlazu ih je dočekao radnik tvornice sa posudom u kojoj je šest čokoladica, od kojih su tri s lješnjakom te tri bez lješnjaka i predložio im igru sa sljedećim opcijama:

1. Slučajnim odabirom izvući će se jedna čokoladica. Ako je izvučena čokoladica s lješnjakom Ana dobiva još jedan paket od 50 čokoladica, a ako je izvučena čokoladica bez lješnjaka Ana mora vratiti sve svoje čokoladice.

2. Slučajnim odabirom izvući će se jedna čokoladica. Nakon toga Ana može vratiti 15 čokoladica i odustati od daljnje igre ili može nastaviti igru. Ako nastavi igru, nasumično će se izvući još jedna čokoladica. Ako je s lješnjakom Ana će dobiti još 50 čokoladica, a ako je bez lješnjaka tada mora vratiti sve svoje čokoladice.

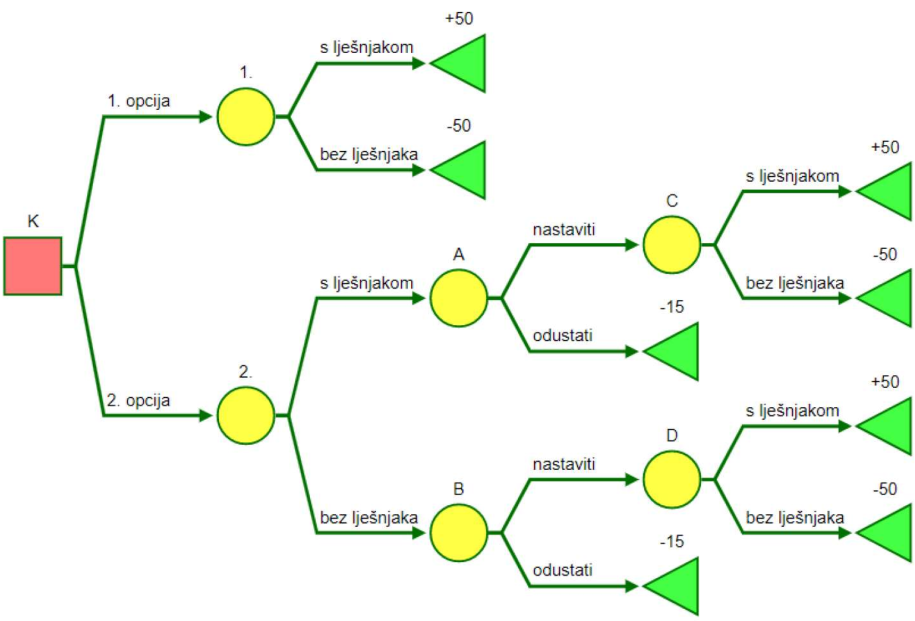
Ana je odlučila da će igrati navedenu igru te joj Matea savjetuje da odabere prvu opciju. Ako je zadana funkcija korisnosti

$$u(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{100}\right),$$

treba li Ana poslušati Mateu ili treba odabrati drugu opciju?

Analizirajmo u nastavku navedeni primjer. Vjerojatnost da je izvučena čokoladica s lješnjakom, kao i da je izvučena ona bez lješnjaka iznosi $3/6 = 0.5$. U drugoj opciji te vjerojatnosti se mijenjaju u ovisnosti o tome koja je čokoladica izvučena na početku igre. Ako je najprije izvučena čokoladica s lješnjakom, vjerojatnost da je ponovno izvučena čokoladica s lješnjakom je $2/5 = 0.4$, a za onu bez lješnjaka vjerojatnost je $3/5 = 0.6$. U suprotnom, vjerojatnost da je izvučena čokoladica s lješnjakom je $3/5 = 0.6$, a za onu bez lješnjaka vjerojatnost je $2/5 = 0.4$.

Prikažimo sada stablo odlučivanja za navedeni primjer.



Slika 4.2: Stablo odlučivanja za primjer 4.1

Izračunajmo sada vrijednost svakog završnog čvora koristeći zadanu funkciju korisnosti. Umjesto x-a u funkciju uvrštavamo tri moguće vrijednosti, a to su 50,-50 i -15.

Imamo

$$
\begin{aligned}
u(50) &= \ln\left(1+\frac{50}{100}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0.405 \\
u(-50) &= \ln\left(1-\frac{50}{100}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.693 \\
u(-15) &= \ln\left(1-\frac{15}{100}\right) = \ln\left(\frac{17}{20}\right) = -0.163.
\end{aligned}
$$

Očekivanu korisnost u npr. čvoru X, uz funkciju korisnosti u označavat ćemo s $E(X|u)$. Sada jednostavno računamo:

$$
\begin{aligned}
E(1.|u) &= 0.5 \cdot 0.405 + 0.5 \cdot (-0.693) = -0.144 \\
E(C|u) &= 0.4 \cdot 0.405 + 0.6 \cdot (-0.693) = -0.254 \\
E(D|u) &= 0.6 \cdot 0.405 + 0.4 \cdot (-0.693) = -0.0342
\end{aligned}
$$

U slučaju da je prvo izvučena čokoladica s lješnjakom, odluka *nastaviti* vodi u čvor C u kojem je očekivana korisnost -0.254, a za odluku *odustati* korisnost iznosi -0.163. Kako je $-0.163 > -0.254$, čvoru A pripada vrijednost -0.163 pa Ana u ovom slučaju treba odustati od igre.

U slučaju da je prvo izvučena čokoladica bez lješnjaka, odluka *nastaviti* vodi u čvor D u kojem je očekivana korisnost -0.0342, a za odluku *odustati* korisnost iznosi -0.163. Kako je $-0.0342 > -0.163$, čvoru A pripada vrijednost -0.0342 pa Ana u ovom slučaju treba nastaviti igru.

Nadalje, računamo očekivanu korisnost za drugu opciju. Imamo:

$$E(2.|u) = 0.5 \cdot (-0.163) + 0.5 \cdot (-0.0342) = -0.0986$$

Pogledajmo na kraju što imamo u početnom čvoru K. Za prvu opciju očekivana korisnost je -0.144, dok je za drugu opciju očekivana korisnost -0.0986. Kako je $-0.0986 > -0.144$, Ani se više isplati ne poslušati Mateu i odabrati drugu opciju. Ako se prvo izvuče čokoladica s lješnjakom, treba odustati od igre i ići kući s 35 čokoladica, a ako se izvuče čokoladica bez lješnjaka treba nastaviti igru.

Funkcija korisnosti ima jednu vrlo važno svojstvo, a to je da se pomoću nje može odrediti kakav stav prema riziku ima donositelj odluke. U sljedećim potpoglavljima najprije ćemo definirati i pojasniti stav donositelja odluke prema riziku, a nakon toga ćemo objasniti u kakvoj su vezi funkcija korisnosti i stav prema riziku.

4.1 Stav prema riziku

Poznato je da među ljudima postoje oni koji će rado riskirati, tj. igrati određenu igru čak i ako znaju da su im šanse za profit nakon te igre manje nego da će biti na gubitku. Isto tako, postoje i oni koji će odustati od igre iako je veća vjerojatnost da ostvare profit nego da budu na gubitku. Cijenu koju smo spremni uložiti da sudjelujemo u igri zvat ćemo *sigurni ekvivalent* i označavat ćemo ga s x_c. Iz prethodnog razmatranja jasno je da se sigurni ekvivalent razlikuje od osobe do osobe i prirodno je pretpostaviti da vrijednost sigurnog ekvivalenta definira stav prema riziku donositelja odluke. Tu vezu prikazat ćemo u okviru sljedeće definicije koja se može pronaći u [4] i [3], kao i sve ostale definicije i napomene iz ovog potpoglavlja.

Definicija 4.2. *Ako je sigurni ekvivalent za alternativu (u terminima profita)*

- *manji od očekivanog profita za alternativu, kažemo da je donositelj odluke nesklon riziku;*
- *jednak očekivanom profitu za alternativu, kažemo da je donositelj odluke neutralan u odnosu na rizik;*
- *veći od očekivanog profita za alternativu, kažemo da je donositelj odluke sklon riziku.*

Pogledajmo u nastavku primjer u kojem se pomoću sigurnog ekvivalenta određuje sklonost osobe prema riziku.

Primjer 4.2. Kristina je u podrumu pronašla staru sliku. Ako je slika originalna, cijena joj je 50000 kuna, no ako je kopija, tada joj je cijena 1000 kuna. Kristinin prijatelj Josip, koji se razumije u stare stvari, rekao je Kristini da je vjerojatnost da je slika originalna 20%. Ako je Kristina prije utvrđivanja originalnosti spremna prodati sliku za 9000 kuna, je li Kristina sklona riziku?

Uočimo da nam za odgovor na ovo pitanje treba očekivana vrijednost slike. Iz podataka dobivamo da je ta vrijednost

$$0.2 \cdot 50000 + 0.8 \cdot 1000 = 10800 \text{ kuna},$$

a kako je Kristina spremna tu sliku prodati za 9000 kuna, zaključujemo kako ona nije sklona riziku.

Napomena 4.1. *Primijetimo da je kod igara na sreću donositelj odluke indiferentan između sigurnog ekvivalenta i sudjelovanja u igri. Vrijedi:*

$$\begin{aligned} u(x_c) &= E[u] \text{ , tj.} \\ x_c &= u^{-1}(E[u]), \end{aligned}$$

gdje je očekivana korisnost $E[u]$ definirana u formuli (4.3).

U nastavku ćemo definirati *premiju za rizik* te na primjeru pokazati odnos premije za rizik i sklonosti riziku.

Definicija 4.3. *Premija za rizik kod lutrija definira se s*

$$\pi = E[X] - x_c.$$

Napomena 4.2. *Donositelj odluke je*

- *nesklon riziku ako je $\pi > 0$*
- *neutralan u odnosu na rizik ako je $\pi = 0$*
- *sklon riziku ako je $\pi < 0$*

Uočimo da je prethodna napomena direktna posljedica definicije 4.2. Prokomentirajmo samo slučaj nesklonosti riziku, a za slučaj neutralnosti na rizik i sklonosti riziku razmatranje je analogno. Naime, u slučaju nesklonosti riziku, iz definicije 4.2 imamo da je očekivani profit za alternativu veći od sigurnog ekvivalenta za tu alternativu. Jasno je da je tada razlika očekivanog profita i sigurnog ekvivalenta pozitivna, a upravo smo tu razliku označili s π, što znači da je $\pi > 0$.

Primjer 4.3. Djelitelj karata u kockarnici u pauzi nudi Domagoju igru u kojoj dobiva 200 kuna ako iz špila za poker izvuče crnu kartu, a ne dobiva ništa ako izvuče crvenu kartu. Kakva je Domagojeva sklonost prema riziku ako je za tu igru spreman platiti 105 kuna?

Iznos koji je igrač spreman platiti za igru nazvali smo siguran ekvivalent i označili ga s x_c. Prema tome, $x_c = 105$ kuna. Kako u špilu za poker imamo 26 crnih i 26 crvenih karata, zaključujemo da je očekivana dobit ove igre

$$E[X] = 0.5 \cdot 200 + 0.5 \cdot 0 = 100 \text{ kuna}.$$

Iz prethodne definicije slijedi da je

$$\pi = 100 - 105 = -5 < 0,$$

pa je Domagoj sklon riziku.

4.2 Veza funkcije korisnosti i stava prema riziku

Nakon upoznavanja s pojmovima funkcije korisnosti i stava prema riziku prirodno je pretpostaviti da postoji nekakva veza između njih. Tu vezu iskazat ćemo i dokazati u okviru sljedeće propozicije. Propozicija i dokaz preuzeti su iz [3].

Propozicija 4.1. *Pretpostavimo da donositelj odluke sudjeluje u lutriji s dvije moguće nagrade x_1 i x_2 te neka vjerojatnost dobitka x_1 iznosi p. Ukoliko je donositelj odluke nesklon riziku, onda je funkcija korisnosti u konkavna, uz dodatnu pretpostavku da je strogo rastuća. Analogno, ako je donositelj odluke sklon riziku, onda je funkcija korisnosti u konveksna.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti samo za slučaj kad je donositelj odluke nesklon riziku, a za slučaj kad je donositelj odluke sklon riziku postupak je potpuno analogan. Iz teksta propozicije uočavamo da je $P(X = x_1) = p$, pa je $P(X = x_2) = 1 - p$. U prijevodu, X ima Bernoullijevu razdiobu s tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Očekivana dobit tada je

$$E[X] = px_1 + (1-p)x_2,$$

dok je očekivana korisnost

$$E[u] = pu(x_1) + (1-p)u(x_2).$$

Ako pretpostavimo da je donositelj odluke nesklon riziku, znamo da je u tom slučaju premija za rizik pozitivna, tj.

$$\pi = E[X] - u^{-1}(E[u]) > 0.$$

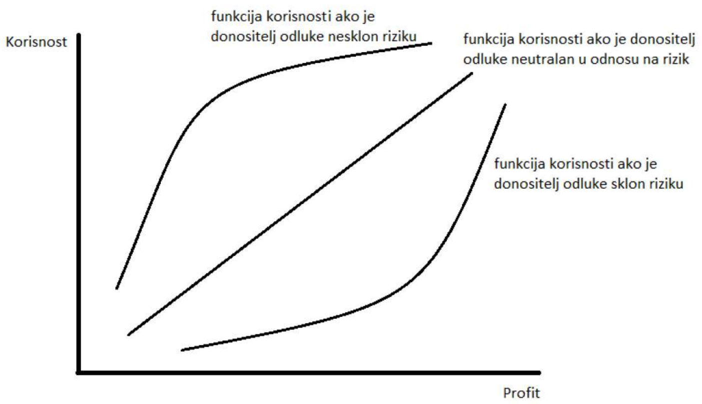
Iz toga slijedi da je

$$E[X] > u^{-1}(E[u]),$$

a kako je u strogo rastuća, slijedi da je

$$u(E[X]) > E[u], \text{ tj.}$$
$$u(px_1 + (1-p)x_2) > pu(x_1) + (1-p)u(x_2), \forall x_1, x_2;\ p \in (0,1),$$

a to je upravo definicija konkavne funkcije pa zaključujemo da je u konkavna. Odnos funkcije korisnosti i stava prema riziku prikazat ćemo u koordinatnom sustavu na sljedećoj slici.



Slika 4.3: Odnos funkcije korisnosti i stava prema riziku

Poznato je da konkavnost i konveksnost funkcije možemo odrediti i iz predznaka druge derivacije, a vezu konveksnosti funkcije i predznaka druge derivacije iskazat ćemo u okviru sljedećeg teorema koji je preuzet iz [5, Teorem D.11, str. 162].

Teorem 4.1. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno derivabilna na (a, b).*

a) Funkcija f je konveksna na (a, b) onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

b) Funkcija f je konkavna na (a, b) onda i samo onda ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$.

Vratimo se nakratko na primjer 4.1 i odredimo kakav je Anin stav prema riziku preko prethodno opisane karakterizacije konveksnosti. Funkcija korisnosti u tom primjeru bila je $u(x) = \ln(1 + \frac{x}{100})$ pa slijedi:

$$u'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{100}} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{100 + x}$$
$$u''(x) = -\frac{1}{(100 + x)^2}.$$

Uočavamo da za svaki x iz domene funkcije u vrijedi $u''(x) < 0$, pa zaključujemo da je u konkavna funkcija, tj. da je Ana nesklona riziku.

No, mi ćemo u sljedećem primjeru odrediti je li funkcija konveksna ili konkavna tako da umjesto računanja druge derivacije izračunamo premiju za rizik tj. stav prema riziku donositelja odluke.

Primjer 4.4. Kakav je Borisov stav prema riziku ako se odlučuje igrati igru u kojoj baca pravilnu igraću kockicu i u kojoj zarađuje 150 kuna ako dobije 5 ili 6, a u suprotnom gubi 40 kuna, te ako je funkcija korisnosti $u(x) = \ln(x + 300)$? Je li tada funkcija korisnosti konveksna ili konkavna?

Kako bi odredili Borisov stav prema riziku najprije nam treba očekivana dobit ove igre. Ona iznosi

$$E[X] = \frac{1}{3} \cdot 150 + \frac{2}{3} \cdot (-40) = 23.333.$$

Kako bi izračunali sigurni ekvivalent najprije iskoristimo da je $u(x_c) = E[u]$, tj. dobivamo

$$u(x_c) = \frac{1}{3} \cdot u(150) + \frac{2}{3} \cdot u(-40) = 5.744.$$

Uočimo da je $u(x_c) = \ln(x_c + 300)$ pa imamo

$$\ln(x_c + 300) = 5.744,$$

iz čega slijedi da je $x_c = 12.311$. Konačno, premija za rizik iznosi

$$\pi = E[X] - x_c = 23.333 - 12.311 = 11.022,$$

što je veće od 0 pa zaključujemo da je Boris nesklon riziku, tj. da je funkcija u konkavna.

Literatura

[1] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[2] J. FIGUEIRA, S. GRECO, M. EHRGOTT, *Multiple criteria decision analysis: State of the Art Surveys, vol.1, vol.2*, Springer Science + Business Media, Inc., Boston, 2005.

[3] S. FRENCH, *Decision Theory: An introduction to the Mathematics of Rationality*, University of Manchester, 1988.

[4] D. JANKOV MAŠIREVIĆ, *Teorija odlučivanja*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2021.

[5] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika I*, Prehrambeno tehnološki fakultet Osijek, Elektrotehnički fakultet Osijek, 1998.

[6] P. SIKAVICA, B. BEBEK, H. SKOKO, D. TIPURIĆ, *Poslovno odlučivanje*, Drugo izdanje, Informator, Zagreb, 1999.

[7] D. TIPURIĆ, *Odlučivanje*, Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet, (nerecenzirani materijal), dostupno na https://www.efzg.unizg.hr/userdocsimages/pds/organizacijai management/pds%20org-odlucivanje1.pdf

[8] *Introduction to decision trees*, Cavite State University, Bs accountancy, 2020., dostupno na https://www.studocu.com/ph/document/cavite-state-university/bs-accountancy/introduction-to-decision-trees/9176302

Sažetak

Na početku rada upoznali smo se s pojmom odlučivanja te ostalim pojmovima vezanim za odlučivanje. U nastavku rada definirali smo tablicu odlučivanja te pokazali kako se tablica jednostavno zapisuje koristeći stablo odlučivanja. Opisali smo dijelove stabla te njegove prednosti i nedostatke, a najviše smo se bavili primjerima iz raznih područja života u kojima se za donošenje odluke mogu koristiti stabla odlučivanja. Krenuli smo od jednostavnijih primjera u kojima stabla nisu naročito razgranata i postupno smo dolazili do složenijih primjera u kojima smo koristili određene vjerojatnosne formule te funkciju korisnosti kako bi došli do najbolje moguće odluke. Na kraju rada definirali smo stav prema riziku te smo opisali vezu stava prema riziku i funkcije korisnosti.

Ključne riječi: Tablica odlučivanja, stablo odlučivanja, formula potpune vjerojatnosti, Bayesova formula, funkcija korisnosti

Summary

At the beginning of this graduate thesis we were introduced to the concept of decision-making and other concepts related to decision-making. In the continuation of the thesis, we defined the decision table and showed how the table simply turns into a decision tree. We have described the parts of the tree and its advantages and disadvantages, and we have mostly dealt with examples from various areas of life in which decision trees can be used to make a decision. We started from simpler examples in which the trees are not particularly branched and gradually came to more complex examples in which we used certain probability formulas and the utility function to come up with the best possible decision. At the end of the thesis, we defined the risk attitude and described the relationship between risk attitude and utility function.

Keywords: Decision table, decision tree, complete probability formula, Bayes formula, utility function

Životopis

Rođen sam 19. listopada 1995. godine u Osijeku. Školovanje sam započeo 2002. godine u Osnovnoj školi Višnjevac, a nastavio u III. gimnaziji u Osijeku od 2010. godine. Nakon završene srednje škole, 2014. godine upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Akademski naziv *prvostupnika matematike* stječem 2018. godine uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Snježane Majstorović i završni rad *Elmsleyev problem*. Iste godine upisujem diplomski studij na Odjelu za matematiku u Osijeku, smjer Financijska matematika i statistika. Bavim se odbojkom od sedmog razreda osnovne škole. Osvajao sam naslove prvaka države u svim mlađim dobnim kategorijama te sam bio član hrvatske odbojkaške reprezentacije. Trenutačno živim i radim kao nastavnik matematike u Splitu, gdje se i dalje aktivno bavim odbojkom.