Pogreške pri razumijevanju, prikazivanju i računanju s razlomcima

Sutarić, Milana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani nastavnički studij matematike i informatike

Milana Sutarić

Pogreške pri razumijevanju, prikazivanju i računanju s razlomcima

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani nastavnički studij matematike i informatike

Milana Sutarić

Pogreške pri razumijevanju, prikazivanju i računanju s razlomcima

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2021.

Sadržaj

1 Uvod

Djeca se od najranije dobi susreću s brojevima. Njihova prva usvojena znanja su o prirodnim brojevima, nauče brojati do deset, prebrojavati igračke, također znaju i ravnomjerno podijeliti čokoladu s prijateljima, znaju što znači da se još pola sata mogu igrati pa se stoga pitamo kako to da su razlomci najproblematičniji dio u osnovnoškolskoj nastavi matematike kada osnove nauče do predškolske dobi. Odgovor na ovo pitanje leži u nerazumijevanju i nepovezivanju stečenih znanja s matematičkim zapisom. Neosporni cilj današnjeg matematičkog obrazovanja jest da učenici trebaju ”razumjeti” matematičke sadržaje. Što bi se točno trebalo shvatiti ”razumijevanjem”, kako se ispituje ”razumijevanje” nasuprot rutinskom provođenju operacija i kako se “razumijevanje” može postići nije uvijek jasno. Za “razumijevanje” je koristan koncept Grudnvorstellungen tj. koncept osnovnih matematičkih ideja jer one omogućuju pojašnjavanje, istraživanje i promicanje ”razumijevanja”. Osnovne ideje omogućuju prikazivanje na različite načine i prebacivanje s jedne na neku drugu vrstu prikaza. U ovom radu detektirat ćemo i analizirati pogreške pri percipiranju, prikazivanju i razumijevanju razlomka kao broja.

2 Grudnvorstellungen koncept

Pojam Grundvorstellungen (njem.) znači osnovna ideja ili predodžba. No mi smo u radu koristili izvornu terminologiju. Ova ideja opisuje odnose između matematičkog sadržaja i formiranja pojedinačnog koncepta, osvrćući se na tri glavne karakteristike:

- Značenje matematičkog koncepta stvara se povezivanjem s poznatim znanjem ili iskustvom.
- Nastaje odgovarajući mentalni prikaz matematičkog koncepta, što omogućuje operativno djelovanje na razini mišljenja.
- Razvija se sposobnost primjene koncepta na stvarne situacije:
    - Prepoznaje se odgovarajuća struktura u kontekstima
    - Problem se modelira uz pomoć matematičkih struktura.

Važna kvaliteta koncepta Grudnvorstellungen kombinacija je normativnih i deskriptivnih metoda rada pri čemu normativne motode uključuju obrazovne smjernice prateći određeni obrazovni cilj i opisujući odgovarajuće interpretacije uporabe matematičkih pojmova dok se deskriptivne metode rada koriste kako bi se dobio uvid u mentalne slike, intuitivno poimanje i modele koje učenici zapravo imaju. Uspoređujući i otkrivajući potencijalne konflikte između normativnih i deskriptivnih aspekata, možemo dobiti konstruktivan uvid u probleme učenja učenika i dati savjete za otklanjanje pogrešnih shvaćanja.
Osim toga, važna kvaliteta Grudnvorstellungen koncepta je razlika primarnog i sekundarnog Grudnvorstellungen-a. Primarni Grudnvorstellungen temelji se na konkretnim akcijama sa stvarnim objektima. Odgovarajući koncepti mogu se predstaviti stvarnim objektima i postupcima, na primjer, spajanjem ili dijeljenjem stvarnih skupova stvari. Zbog toga primarni Grudnvorstellungen posjeduje konkretan karakter.
Sekundarni Grudnvorstellungen temelji se na matematičkim operacijama sa simboličkim objektima. Sastavni dio odgovarajućih matematičkih struktura su matematički objekti, kao što su brojevni pravac, različiti algebarski izrazi i grafovi funkcija. Za sekundarni Grudnvorstellungen iz tog razloga se kaže da ima simbolički karakter. Primarni i sekundarni Grudnvorstellungen igraju ključnu ulogu u procesu modeliranja, tj. u posredovanju između matematike i "ostatka svijeta".
Prema Blum-u i Leiss-u [3], važni koraci modeliranja mogu se smatrati:

1. Konstruiranje situacijskog modela
2. Njegovo pojednostavljenje
3. Matematiziranje
4. Matematičko računanje
5. Tumačenje

6. Vrednovanje
7. Izlaganje.

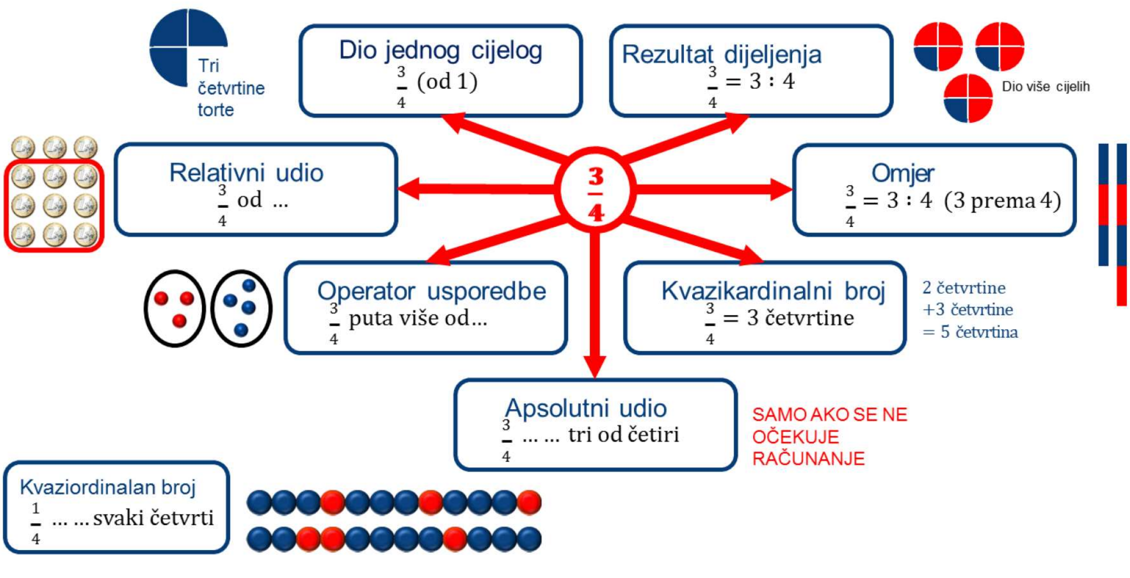
Sve u svemu, Grudnvorstellungen se može smatrati sredstvom koji posreduje između matematike i stvarnosti ili između različitih matematičkih prikaza. Ovi odnosi pokazuju važnu ulogu Grudnvorstellungen-ova u razvoju matematičkih kompetencija. Taj bi razvoj idealno bio popraćen formiranjem i primarnog i sekundarnog Grudnvorstellungen-a u povezani sustav koncepata. Sposobnost primjene matematičkih vještina temelji se na kvaliteti razvoja i stupnju povezivanja Grudnvorstellungen-a, kao i na sposobnosti aktiviranja i koordinacije Grudnvorstellungen sadržaja.

3 Razumijevanje i prikazivanje razlomaka

Kada je riječ o razlomcima, učenici imaju velikih problema s razumijevanjem i povezivanjem zapisa broja s njegovim značenjem. Kako bismo pomogli učeniku, vrlo je važno detektirati u kome dijelu je došlo do pogrešnog shvaćanja.
Stoga razumijevanje promatramo kroz četiri kategorije:

1. Intuitivno razumijevanje pojma
2. Sadržajno razumijevanje pojma
3. Formalno razumijevanje pojma
4. Integrirano razumijevanje pojma

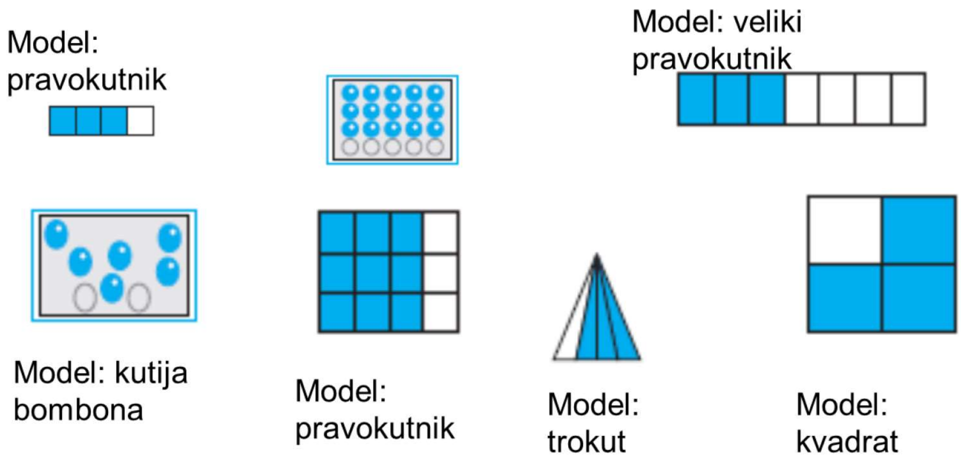
Učenici kod kojih je razvijeno intuitivno razumijevanje imaju sposobnost prikazivanja i povezivanja pojmova s pojavama u prirodi. Oni će s lakoćom davati primjere, ali i prikazivati razlomke kroz situacije iz svakodnevnog života. Promatranje pojma kao nositelja svojstva, oblik je sadržajnog razumijevanja pa tako učenik zna da je $\frac{8}{8}$ isto što i $\frac{3}{3}$, također razumije i da su osmine manje od trećina. Često se događa da je u nastavi naglasak na učenju pravila pomoću kojih se računa s razlomcima što predstavlja formalno vrednovanje pojma. Zadatci se rješavaju "po pravilima", bez razumijevanja njihovog značenja, a na pojam odnosno razlomak se gleda kao na objekt s kojim se računa. Najveći stupanj razumijevanja je integrirano razumijevanje pojma u kome se na pojam gleda kao dio konceptualne mreže, a učenici imaju sposobnost povezivanja svojstava i uspostavljanje veza s drugim pojmovima. Konkretno u ovoj temi jedan od primjera bi bio da učenici uspostavljaju odnose između razlomaka i decimalnih brojeva, omjera ili postotaka.



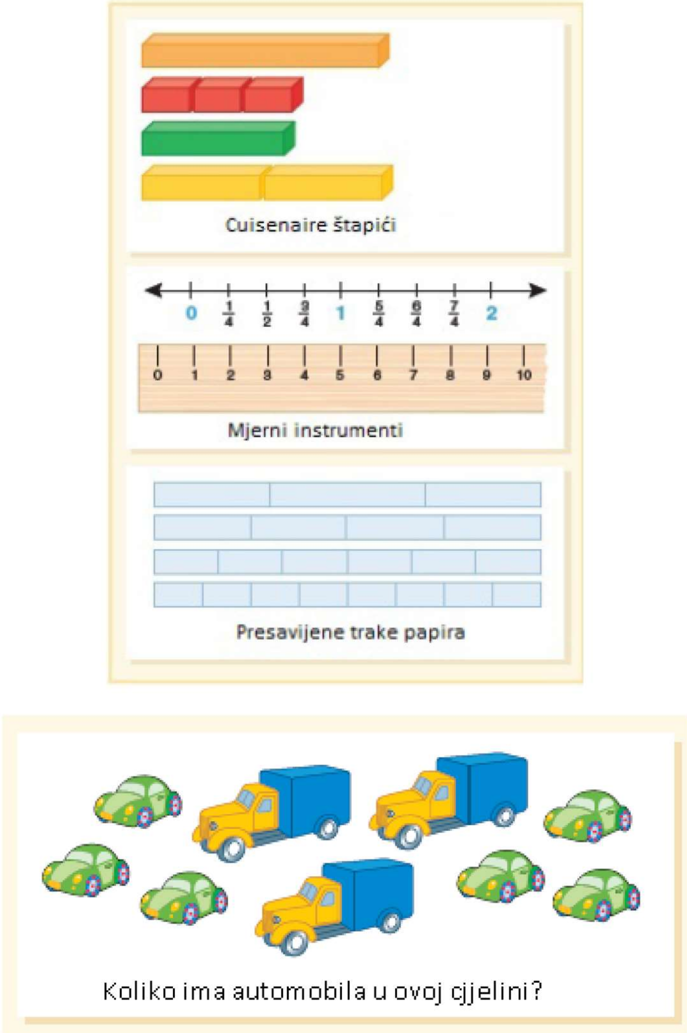
Slika 1: Osnovne ideje razlomaka (Grudnvorstellungen)

3.1 Grafički prikaz razlomaka

Način na koji bilježimo razlomke s gornjim i donjim brojem te crtom između, je konvencionalan - arbitražni dogovor za predstavljanje razlomaka, a što dani razlomak predstavlja puno je lakše shvatiti korištenjem grafičkih prikaza. Jedna od grafičkih metoda prikazivanja razlomaka je **model površine** za što se najčešće koristi krug, pravokutnik i trokut. Krug je jednostavno pojmiti kao cjelinu, ali ga je teško dijeliti dok je pravokutnik jednostavno dijeliti, a teže pojmiti kao cjelinu. Trokut je najnepraktičniji model jer je teško shvatiti predstavlja li on dio ili cjelinu, a još je teže dijeliti ga. Mnogi su istraživači iz područja matematičke edukacije došli do zaključka da je **model duljine**, točnije brojevni pravac, najefikasniji u učenju razlomaka. Brojevni pravac također naglašava da je razlomak jedinstven broj zbog svog odnosa i položaja prema drugim brojevima, što nije slučaj pri korištenju modela površine. Njegova prednost je i u tome što uči da između bilo koja dva broja postoji još jedan broj. Treći model grafičkog prikaza je **model grupe** u kome je cjelina shvaćena kao više individalnih elemenata, a podgrupe te cjeline čine razlomke. Iako ideja da se grupa objekata gleda kao cjelina predstavlja teškoću za neku djecu, ona pomaže uspostavljanju veze razlomka i omjera u životnim situacijama.



Slika 2: Grafički prikaz razlomka modelima površine i grupe



Slika 3: Grafički prikaz razlomka modelima dužine i grupe

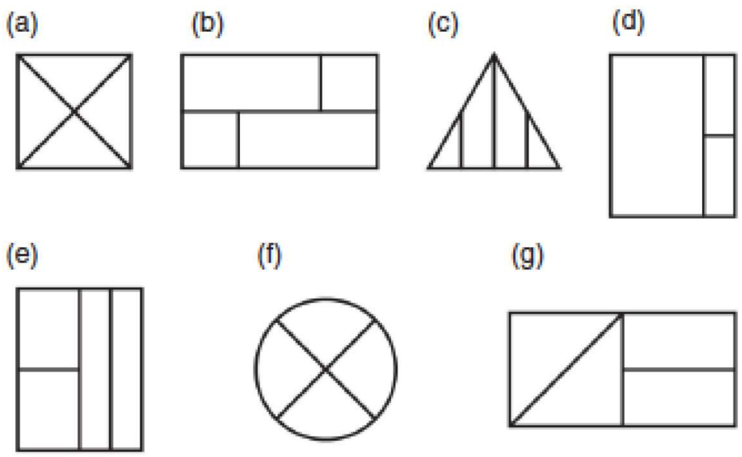
3.2 Pogrešne strategije kod grafičkog prikaza razlomaka

Unatoč tome što grafički prikaz u većini slučajeva olakšava razumijevanje, kod nekih učenika vidljiva su sljedeća kriva shvaćanja:

- Jednaki dijelovi moraju biti jednakih oblika
- Dijelovi sličnih oblika su jednaki veličine
- Zanemarivanje veličine cjeline

Kako bismo učenicima razjasnili grafički model, važno je davati raznovrsne zadatke sve dok ne uoče da su jednaki dijelovi oni koji imaju jednake površine. Jedan primjer takvog zadatka je zadatak "Točna podjela", pogledajmo Sliku 4.

U ovome zadatku učenici trebaju identificirati cjeline koje su točno podjeljene u zadane razlomačke dijelove (četvrtine) i one koje nisu. Kako bismo izbjegli odgovore koji su rezultat pukog pogađanja i uvidjeli kriva razmišljanja, važno je da učenici obrazlože svoje odgovore. Slike prikazuju neku od sljedećih kategorija:



Slika 4: Grafički zadatak pronalaženja ekvivalentnih razlomaka

- Isti oblik, ista veličina: (a) i (f) prikazuju razlomke jednake veličine
- Različit oblik, ista veličina: (e) i (g) prikazuju razlomke jednake veličine
- Različit oblik, različita veličina: (b) i (c) prikazuju razlomke različite veličine
- Isti oblik, različita veličina: (d) prikazuje razlomke različite veličine

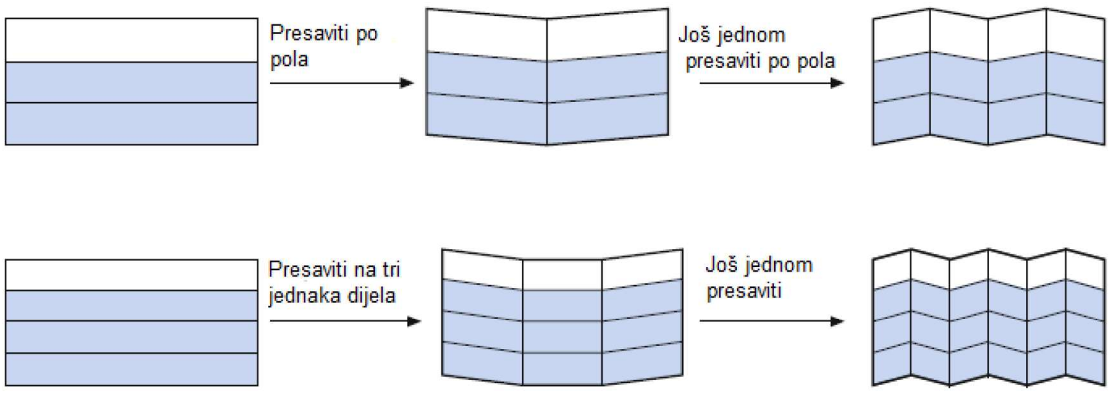
Aktivnost "Točna podjela" je dobra metoda formativne procjene kojom možemo vidjeti razumiju li učenici da je važna veličina dijela, ne oblik. Ako učenici imaju sve točno, osim (e) i (g), nisu savladali koncept razlomka.
Učinkovit način za izbjegavanje pogrešaka nastalih zanemarivanjem veličine cjeline je davanje primjera sličnih idućem: "Marku je ponuđena trećina pizze ili polovina pizze. Zato što je gladan i voli pizzu, on izabire polovinu. Njegova prijateljica Ivana dobije trećinu pizze, a na kraju završi s većim komadom od Marka. Kako je to moguće?"

Slika 5: Nemogućnost uspoređivanja dijelova različitih cjelina

Nakon promišljanja i prikazivanja grafičkog modela (Slika 5) učenici bi trebali biti u mogućnosti samostalno zaključiti da se usporedba dijelova može vršiti samo ako znamo da dolaze od cjelina jednakih veličina.

4 Proširivanje i skraćivanje razlomaka

Postoje jasne razlike između našeg svakodnevnog jezika i jezika na nastavi matematike, u smislu proširivanja i skraćivanja. Tih različitosti trebaju biti svjesni i učenici kako bi se izbjegli nepotrebni problemi. Tako u svakodnevnom životu s pojmom proširenja povezujemo ideju širenja, a s konceptom skraćivanja ideju smanjenja. Širenje i smanjivanje mijenjaju postojeću situaciju, dok i proširivanje i skraćivanje u matematici mijenja zapis broja (razlomka), a njegova vrijednost ostaje nepromijenjena. Aktivnosti u kojima učenici uče otkrivajem i modeliranjem pomažu u usvajanju i razumijevanju gradiva te ostaju u trajnom pamćenju. Jedna od učinkovitih aktivnosti na ovu temu je takozvano "presavijanje papira" [2].



Slika 6: Vizualizacija proširivanja razlomaka

Aktivnost se provodi tako da učenici obojaju točan dio papira, najčešće je to polovina ili trećina, a potom pravilnim savijanjem promatraju kako se stvaraju novi manji pravokutnici i zaključiti da polovina postaje dvije četvrtine, četiri osmine i slično. Jedan takav primjer dan je na Slici 6.

4.1 Pogrešne učeničke strategije

Prva pogrešna strategija

Istraživanja pokazuju da rješavanje zadatka oblika $\frac{1}{3} = \frac{2}{?}$ učenici provode na sljedeći način: kada 1 uvećamo za 1 dobijemo 2 pa zbrajanjem 3 sa samim sobom dobijemo 6. Ova strategija ne predstavlja problem kod udvostručivanja, no u većini situacija je pogrešna i problematična. Primjerice strategija ne funkcionira već kod $\frac{2}{3} = \frac{?}{15}$.

Druga pogrešna strategija

Primjere poput $\frac{5}{10} = \frac{?}{30}$ učenici često rješavaju argumentirajući da na mjesto ? dolazi 15 jer je 5 pola od 10, a 15 pola od 30. I ova strategija ne funkcionira općenito npr. u zadatku oblika $\frac{2}{7} = \frac{?}{35}$.

U zadatcima koji su smješteni u neki konkretni kontekst, potrebno je paziti i na broj uzetih dijelova (brojnik) i na veličinu dijelova (nazivnik). Većina učenika posvećuje pozornost samo broju dijelova (brojniku). Zaključivanje samo na osnovi veličine dijelova manje je uobičajeno. No ove dvije moguće greške moraju se imati na umu tijekom obrade proširivanja i skraćivanja razlomaka.

Treća pogrešna strategija - greška asocijacije

Slučajeve poput $\frac{9}{18} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$ i $\frac{9}{18} = \frac{1}{9}$ nazivamo greškom asocijacije. Dijeljenjem brojnika u prvom slučaju dobiva se točno $3 : 3 = 1$, ali se u nazivniku pojavljuje greška $6 : 3 = 3$. Analogno vrijedi i u drugom slučaju.

Četvrta pogrešna strategija - nerazumijevanje koncepta

Problemi i greške javljaju se i u slučajevima kada se radi s prirodnim brojevima. Npr. u slučaju poput $5 = \frac{?}{3}$. Ovdje se često miješa koncept proširivanja razlomka i množenja razlomka. Da bi se postiglo bolje razumijevanje skraćivanja i proširivanja i izbjegli slučajevi poput: proširiti razlomak $\frac{a}{b} \cdot n$ nekim brojem n, znači pomnožiti ga s n tj. $\frac{a}{b}$ zadatke je potrebno varirati.

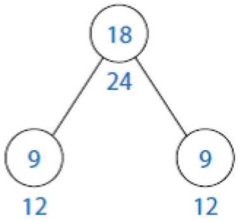
4.2 Korisna strategija za proširivanje/skraćivanje razlomka

Koncept proširivanja i skraćivanja razlomaka kod učenika stvara konfuziju. Problem je u tome što smatraju da se ovim postupcima vrijednost broja odnosno razlomka povećava ili smanjuje, što nije točno. Zapis razlomka se mijenja, ali njegova vrijednost ostaje ista. Da bi to shvatili važno je dati primjer iz stvarnog života koji mogu razumjeti. U ovome modelu promatrat ćemo raspodjelu pizza među djecom. Zanima nas kako će se mijenjati broj djece i pizza na stolovima ako prvo sva djeca sjede za istim stolom, potom kada su podijeljeni na dva stola i kada sjede za šest stolova.
Zamislimo da je 18 učenika u restoranu naručilo 24 pizze. Broj pizza će nam u ovom slučaju predstavljati brojnik, a broj djece nazivnik.

Ako u restoranu postoji stol za koji može sjesti svih 24-ero učenika, jasno je da će i svih 18 pizze biti na tom stolu. [2]
Prikažimo to grafički:

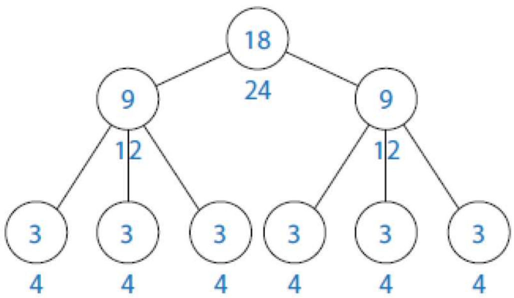
Slika 7: Sva djeca i pizze za istim stolom

U slučaju da restoran može djecu smjestiti za dva stola, za svakim stolom bit će $18 : 2 = 9$ pizza i $14 : 2 = 12$ učenika.
Prikažimo to grafički:



Slika 8: Djeca i pizze raspodjeljeni su na dva stola

Promotrimo što će se dogoditi ako svaki od ta dva stola zamijenimo sa tri stola. Za jednim stolom je bilo 9 pizza, a sada tih 12 pizza trebamo ravnopravno rasporediti na 3 stola pa imamo $9 : 3 = 3$. Ako djecu koja su sjedila za jednim od ta dva stola želimo raspodjeliti za tri stola, imat ćemo $12 : 3 = 4$ djece za svakim stolom. U ovom slučaju imamo 6 stolova kod kojih se na svakom nalazi 3 pizze i sjedi 4-ero djece.
Prikažimo to grafički:



Slika 9: Djeca i pizze raspodjeljeni su na šest stolova

Ovu situacjiu najučinkovitije je tumačiti na sljedeći način: za istim stolom imamo 18 pizza i 24-ero djece što ćemo prikazat razlomkom $\frac{18}{24}$ odnosno, 18 pizza se dijeli na 24-ero djece. Zatim smo odlučili djecu i pizze smjestiti za dva stola pa će za svakim stolom biti 9 pizza i 12-ero djece što interpretiramo kao skraćivanje razlomka $\frac{18:2}{24:2} = \frac{9}{12}$. Sada nam razlomak $\frac{9}{12}$ govori da se na jednom stolu nalazi 9 pizza i za njim sjedi 12-ero djece. Ako pokušamo tih 9 pizza i 12-ero djece razmjestiti za 3 stola dobit ćemo razlomak $\frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$ koji predstavlja da se na svakome stolu nalazi 3 pizze i za njim sjedi 4-ero djece. Ovakva raspodjela pizze po stolovima daje porcije iste veličine i stoga pravedne porcije.

Pogledajmo postupak, razlomak $\frac{18}{24}$ možemo skratiti sa 2 pa dobivamo $\frac{18:2}{24:2} = \frac{9}{12}$, kako su i brojnik i nazivnik djeljivi s 3, možemo skratiti razlomak na sljedeći način $\frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$ i time dobivamo razlomke jednakih vrijednosti $\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Slika 10: Raspodjela pizze i djece

5 Uspoređivanje razlomaka

Ukoliko razlomci imaju jednake brojnike promatramo veličine dijelova odnosno nazivnik, a u slučaju da su razlomci jednakih nazivnika promatramo brojnike odnosno broj dijelova. Najvažnije referentne točke za razlomke su 0, $\frac{1}{2}$ i 1. Razlomke manje od 1 jednostavno usporedimo s nekim od ova tri broja, što nam daje mnogo informacija. Na primjer, $\frac{3}{20}$ je malen broj, blizu 0, dok je $\frac{3}{4}$ između $\frac{1}{2}$ i 1. Razlomak $\frac{9}{10}$ je puno bliže 1. Bilo koji razlomak veći od 1 je prirodan broj plus dodatak broja manjeg od 1 te su zbog toga iste referentne točke jednako korisne: $\frac{33}{7}$ je skoro $3\frac{1}{2}$. Uspoređivati najlakše možemo ako ih pretvorimo tako da imaju jednaku podjelu (nazivnik).

5.1 Pogrešne strategije prilikom uspoređivanja razlomaka

Manji nazivnik znači veći razlomak

Ova strategija posljedica je generaliziranja jedne korisne strategije kada se promatraju posebni slučajevi odnosno kada su brojnici jednaki. Učenik ovdje gleda samo veličinu dijela, ali ne i broj dijelova.

Veći nazivnik znači veći razlomak

Ova strategija je posljedica velikog rada s prirodnim brojevima tj. uređaja prirodnih brojeva. Stoga učenik prenosi uređaj prirodnih brojeva na razlomke. Ova strategija se često može vidjeti kod uspoređivanja jediničnih razlomaka, ali i razlomaka s jednakim brojnikom: $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ jer je $3 < 4$.

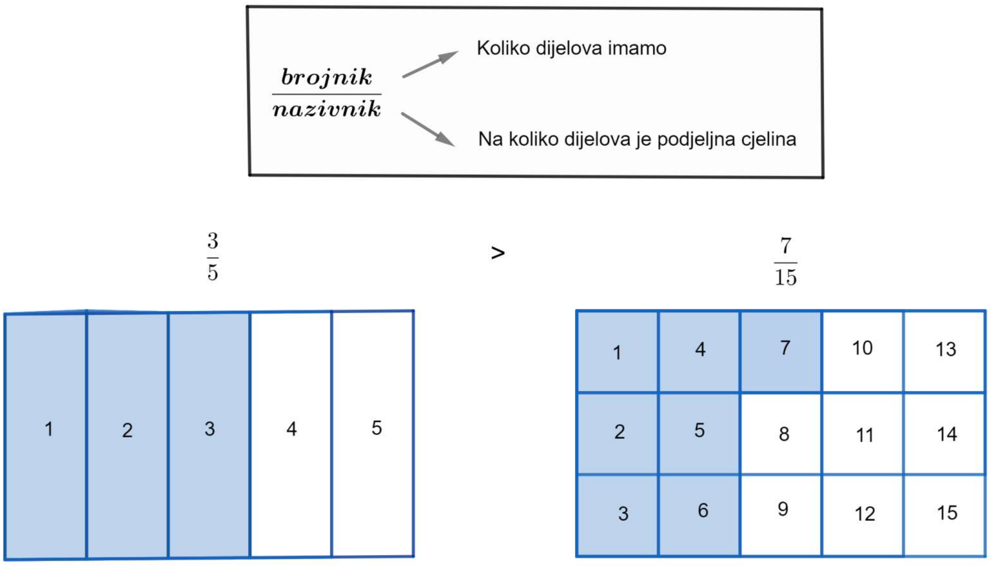
Veći brojnik znači veći razlomak

U ovoj pogrešnoj strategiji učenik gleda samo na broj dijelova, bez obzira na njihovu veličinu.

Odvojeno poimanje brojnika i nazivnika

Ako je uređaj u brojniku i nazivniku isti, učenik taj uređaj prenosi na čitav razlomak. Pogledajmo primjer: $\frac{3}{5} < \frac{5}{12}$ jer je $3 < 5$ i $5 < 12$. U ovoj strategiji, razlomak se ne smatra jednim brojem, već se brojnik i nazivnik smatraju zasebnim brojevima koji se zasebno i uspoređuju. Iako se u nekim slučajevima na ovaj način može dobiti točan rezultat, strategija svakako nije dobra niti poželjna.

Pogrešake ovoga tipa posljedica su uspoređivanja prirodnih brojeva i nemogućnosti poimanja razlomka kao dijela cjeline. Stoga je jedna od najkorisnijih strategija grafička metoda kojom



Slika 11: Uspoređivanje razlomaka modelom površine

se uspoređuje koliku površinu (identičnog) lika predstavlja svaki razlomak.

Dopunjavanje cjeline

Kod razmatranja razlomaka $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{5}$ učenici odgovaraju da su oba razlomka jednake veličine jer je razlika između brojnika i nazivnika jednaka (u ovom slučaju to je 1). I ovdje se gleda na broj komada koji nedostaju i ne uzima se u obzir njihova veličina.

Orijentacija na poznate razlomke

Učenici poznaju samo mali broj razlomaka za koje imaju ideju veličine, preostali razlomci za njih su prazne kombinacije znakova. Stoga oni odabiru najveći kojeg poznaju. Ova pogreška najčešće se javlja u zadatcima u kojima treba odrediti najveći (najmanji) broj između 3 ili više zadanih razlomaka.

5.2 Prevencija i intervencija

Uspostavljanje trajnih veza između simboličkih i semantičkih razina

Važno je stvoriti trajnu vezu između razmišljanja na simboličkoj razini i odgovarajućih deskriptivnih strategija. Pogledajmo iduće zadatke:
Zadatak 1: Jednu pizzu podijelite na 6 jednakih dijelova, drugu pizzu jednake veličine podijelite na 8 jednakih dijelova. Ako uzmeš dio svake pizze, koji je komad veći?
Zadatak 2: Koji razlomak je veći $\frac{1}{6}$ ili $\frac{1}{8}$?
Učenici često znaju riješiti zadatak koji je dan u kontekstu, ali vađenjem iz konteksta usporedba postaje preteška.

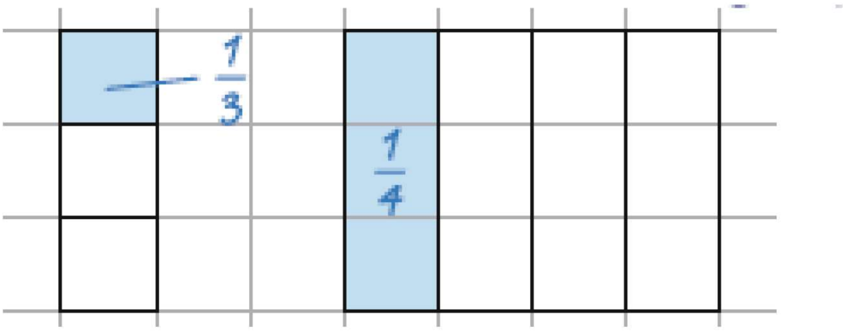
Argumentiranje s održivim modelima

Svaki učenik je jedinstven i stoga je važno prilagoditi se i učenicima dati mogućnost izbora na koji način će rješavati zadatke. Jedan od zadataka ovog tipa može biti da učenici koristeći model po izboru objasne koji razlomak je veći npr. $\frac{5}{6}$ ili $\frac{5}{8}$.

Procjena netočnih, ilustrativnih razloga

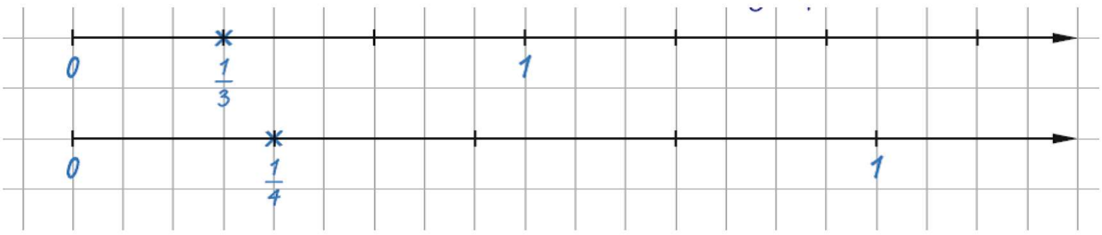
Jedan od učinkovitih načina prevencije grešaka je dati učenicima da prouče gdje su drugi griješili. Ovo se može provoditi na način da nakon rješavanja zadataka jedni drugima provjeravaju rješenja ili da dobiju zadatak sličan ovome: Antun, Matija i Jura žele objasniti zašto je $\frac{1}{3}$ manja od $\frac{1}{4}$. [2]

Antun: Na obojanom dijelu vidi se da je $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$.



Slika 12: Antunovo grafičko objašnjenje

Matija: Ako pogledamo brojevni pravac, lijepo se vidi da je $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$. Manji razlomak se nalazi lijevo, bliže nuli.



Slika 13: Matijino grafičko objašnjenje

Jura:

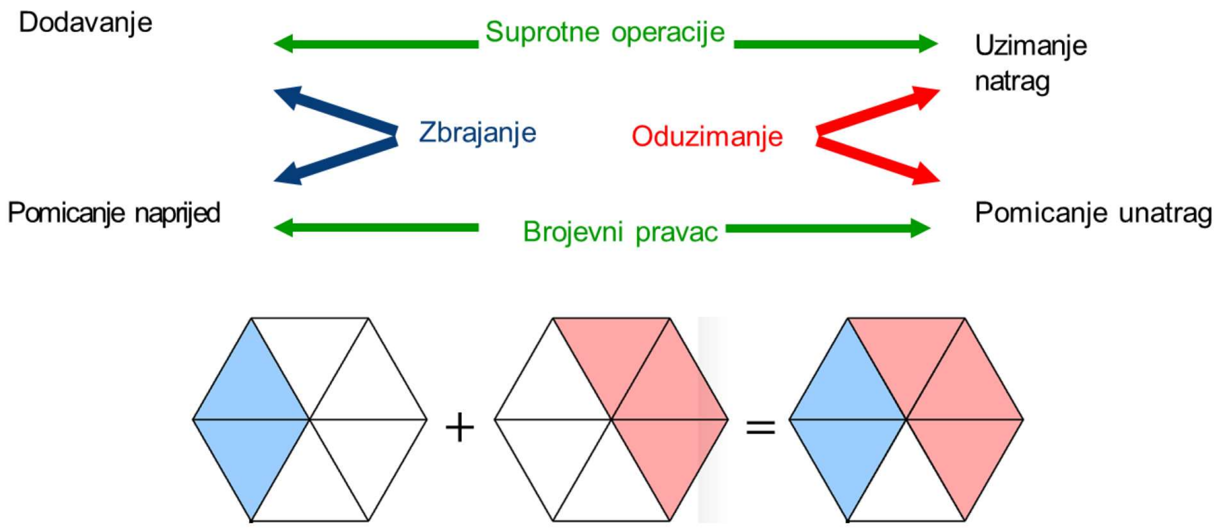
$\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ jer je $3 < 4$. Objasnite gdje su u objašnjavanju Antun, Matija i Jura pogriješili.

Zadatci ovoga tipa od učenika zahtijevaju visoku razinu kognitivne aktivnosti što uključuje poznavanje sadržaja, razumijevanje, sposobnost korištenja različitih modela grafičkog prikaza, sposobnost analize, prepoznavanje i ispravljanje pogrešaka. Stoga je ovo za učenika iznimno zahtjevna, ali i vrlo učinkovita metoda učenja.

6 Zbrajanje i oduzimanje razlomaka

Stilove učenja možemo podijeliti u tri skupine; vizualni stil, auditivni stil i kinestetički stil. Važno je imati na umu da je svako dijete drugačije i obzirom na to prilagoditi nastavni sat te osigurati različite aktivnsti tako da je svaki od spomenutih stilova učenja podjednako zastupljen. Često se događa da učenici nauče kako se provode računske operacije, ovladaju tom vještinom do razine automatizma, ali ne razumiju pozadinu algoritma. U području računanja Grudnvorstellungen koncept zagovara uporabu modela te u fokus stavlja na vizualni i kinestetički stil učenja.

6.1 Osnovne ideje



Slika 14: Osnovne ideje zbrajanja i oduzimanja razlomaka

Sustavno poučavanje zbrajanja razlomaka možemo postići korištenjem pravokutnika kao modela. Kada koristimo pravokutnike, zajedničku podjelu možemo naći ako pravokutnik podijelimo vodoravno prema jednom nazivniku i vertikalno prema drugom nazivniku. Za ilustraciju zbrajanja dva razlomka najprikladnije je uzeti razlomke čiji su nazivnici relativno prosti.
Potraga za zajedničkom podjelom u nekom modelu (pravokutnik, krug, stupci), na računskoj razini odgovara traženju zajedničkog nazivnika razlomaka koji se zbrajaju. Matematički to rezultira kao najmanji zajednički nazivnik.

Pogledajmo rezultate istraživanja provedenih na kraju 6.razreda među 1010 učenika osnovne škole (Padberg, 1996) gdje su učenici trebali zbrojiti $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{6}$: Zadatak: Najprije obojaj $\frac{1}{4}$ kruga, a zatim još $\frac{1}{6}$. Koliki dio kruga si obojao?

Rezultati učenika:
Geometrijski točno i računski točno: 25%
Geometrijski točno i računski točno 5%

Računski točno i geometrijski netočno: 33%
Računski i geometrijski netočno: 36%

Učenici koji imaju razvijenu osnovnu ideju zbrajanja razlomaka (GV) točno su zadatak riješili i računski. Kod onih koji su točno zbrojili, a nisu mogli to nacrtati, zbrajanje je shvaćeno samo kao manipulacija simbola.

Otežavajući faktori kod zbrajanja/oduzimanja razlomaka:

- Veličina brojnika i nazivnika
- Odnos nazivnika jedan prema drugome (jednaki nazivnici; jedan nazivnik je višekratnik drugog; nazivnici su relativno prosti brojevi; nazivnici imaju zajedničke djelitelje (>1) ali nisu višekratnici jedan drugoga)
- Skrativost rezultata (ne može se skratiti; sam brojnik ili nazivnik je broj s koji se skraćuje; jednokratno kraćenje; višestruko kraćenje)
- Veličina zbroja ili razlike (zbroj ili razlika je manji od 1, jednak 1 ili veći od 1)
- Pretvaranje rezultata u mješoviti broj
- Kombinacija razlomka i prirodnih brojeva
- Mješoviti brojevi (oba broja; samo jedan broj)

Istraživanja pokazuju da kombinacija otežavajućih faktora odnosno broj tih faktora u jednom zadatku utječe na vjerojatnost točnog rješavanja zadatka. Međutim, treba razlikovati koliko su učenici ovladali računanjem od kraćenja rezultata na kraju zadatka.

6.2 Pogrešne strategije prilikom zbrajanja i oduzimanja razlomaka

Zbrajanje brojnika s brojnikom, nazivnika s nazivnikom (Z1)

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Oduzimanje brojnika s brojnikom, nazivnika s nazivnikom (O1)

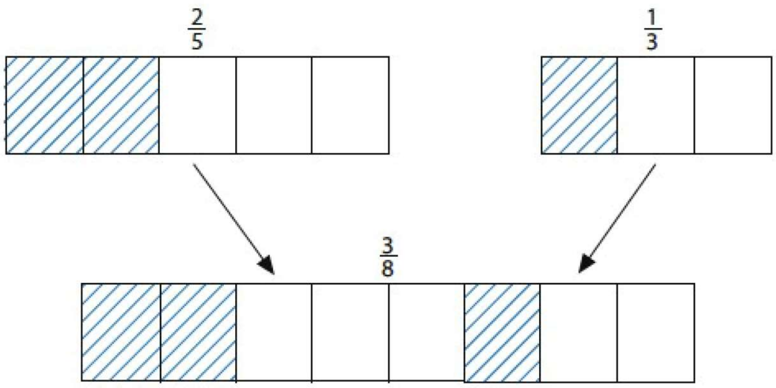
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$$

Učenici koji prilikom zbrajanja razlomaka primjenjuju strategiju zbrajanja brojnika s brojnikom i nazivnika s nazivnikom, često primjenjuju tu strategiju i na oduzimanje. Strategiju O1 primjenjuju ako su brojevi u brojniku i nazivniku u "istom smjeru" npr. $\frac{5}{8}-\frac{1}{3}$. U slučaju $\frac{5}{3}-\frac{1}{6}$ kad se oduzimanje ne može provesti u istom smjeru u brojniku i nazivniku, učenici napuštaju ovu strategiju ili odustaju od zadatka. Ove dvije pogrešne strategije učenici preuzimaju od zbrajanja i oduzimanja razlomaka s jednakim nazivnicima.
Uočimo li kod učenika neku od ovih strategija, potrebno je utvrditi uzrok nakon čega ćemo

brže i jednostavnije doći do rješenja problema, razumijevanja koncepta zbrajanja ili oduzimanja te formiranja ispravne strategije.

Neki od uzroka primjenjivanja ovih pogrešnih strategija su sljedeći faktori:

- Nedostaci u razumijevanju: razlomak se ne smatra jednim brojem, već se sastoji od dva neovisna broja, koji se dodaju ili oduzimaju odvojeno.
- Nejasne ideje operacija, kao što se može vidjeti na idućoj slici



Slika 15: Pogrešno koncipiranje dijelova cjeline

  Učenicima nije jasno da se kod zbrajanja trebaju zbrajati dijelovi iz jednake podjele i da rezultat treba biti iz jednake podjele.

- Učenici prenose zbrajanje prirodnih brojeva na zbrajanje razlomka: kao što se kod zbrajanja s potpisivanjem prirodnih brojeva zbrajaju znamenka jedinice sa znamenkom jedinice, znamenka desetice sa znamenkom desetice itd., tako se ovdje zbraja brojnik s brojnikom, nazivnik s nazivnikom.
- Pogrešan transfer pravila za množenje na zbrajanje/oduzimanje razlomaka

Učenik ispravno određuje zajednički nazivnik, a prepisuje izvorne brojnike

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{10}$$

Množenje umjesto zbrajanja

Zamjena zbrajanja s množenjem česta je učenička strategija, posebno kada je riječ o zbrajanju razlomaka u zahtjevnijim zadatcima.

Zbrajanje prirodnog broja i razlomka kao da se zbrajaju razlomci jednakih nazivnika

$$n + \frac{a}{b} = \frac{n+a}{b}$$

Oduzimanje prirodnog broja i razlomka kao oduzimanje razlomaka jednakih nazivnika

$$n - \frac{a}{b} = \frac{n-a}{b}$$

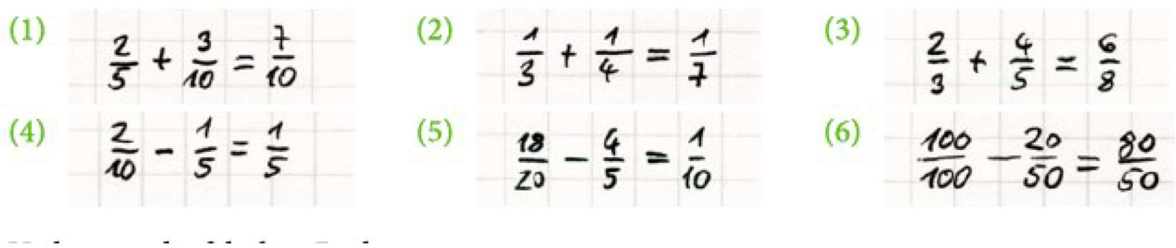
Previše djelovanja na sintaktičkoj razini mnogih učenika (čisti simbolizam), a ne na jednostavnoj semantičkoj razini (značenje, razumijevanje). Na sintaktičkoj razini, naravno, ova vrsta zadatka je teža od općeg slučaja. Umjesto izravnog oslanjanja na ideju razlomak kao dio cjeline npr. $5 - \frac{1}{3} = 4\frac{2}{3}$, mnogim slučajevima pristupa se vrlo formalno:

$$5 - \frac{1}{3} = \frac{5}{1} - \frac{1}{3} = \frac{15}{3} - \frac{1}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Na ovaj način potiče se nefleksibilnost razumijevanja kod učenika. Zbrajanje se svodi na puku primjenu pravila za zbrajanje.

6.3 Prevencija i intervencija

- Zadatci u kojima se traži da učenik ispravi pogrešku



Slika 16: Zadatak pronalaženja pogreški

Zadatci ovoga tipa zahtijevaju analiziranje zadatka i pronalaženje pogrešaka. Od učenika se traži da isprave netočno riješene zadatke te objasne zbog čeka dani rezultati nisu točni. Iako, na prvi pogled, ovi zadatci nisu kreativni, nastavniku daju informaciju u kojoj mjeri je učenik svladao gradivo i točno otkrivaju u čemu učenik griješi.

- Razredna diskusija o strategijama dobar je način za provjeru razumijevanja. Svaki učenik dobije listić sa zadatkom, a od njega se očekuje da opiše i strategiju koji je koristio da bi zadatak riješio. Kasnije slijedi razredna rasprava na kojoj se provjeravaju rješenja i izlažu strategije

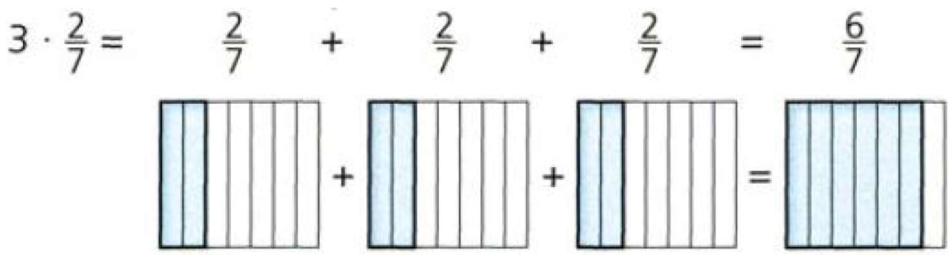
- Prije upotrebe pravila zbrajanja i oduzimanja, najprije treba vizualno prikazati zbrajanje i oduzimanje - razviti osnovne ideje (GV). Strategije rješavanja konkretnog zadatka moraju se potkrijepiti. Prerano uvođenje pravila ostavlja učenike samo sa proceduralnim znanjem, bez razumijevanja.

- Postavljanje učenika u kognitivan konflikt putem ekstremnih primjera ili posebno jednostavnih zadataka, gdje učenici mogu saznati rezultate na različite načine (npr. računski i grafički), često pomaže u izgradnji obrambenih mehanizama protiv strategija pogrešaka. No kognitivni konflikt s različitim rezultatima istog zadatka (riješen na više načina, npr. čisti aritmetički problem, ili ilustrativni zadatak, npr. s pizzama) ne dovodi uvijek izravno do ispravne osnovne ideje zbrajanja.
- Ako se na početku koristi kvazikardinalni zapis za razlomke (npr. 2 tećine, 3 petine), onda je zbrajanje i oduzimanje dijelova s istim nazivnikom analogno zbrajanju i oduzimanju prirodnih brojeva i veličina koji su učenicima izrazito poznati. Naglasak na kvazikardinalnosti pomaže u izgradnji visoke razine otpornosti prema pogrešnim strategijama, a u isto vrijeme daje dobar pokazatelj za formalno pravilo zbrajanja i oduzimanja.
- Usporedba računanja zbroja $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ i produkta $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ pomaže da se izbjegne prijenos vrlo pamtljivog i računski mnogo lakšeg pravila množenja
- Sličnu usporedbu treba napraviti kod zbrajanja razlomka s prirodnim brojem i množenja razlomka prirodnim brojem.
- Kombinirani slučajevi s otežavajućim faktorima često se podcjenjuju. Stoga učenike treba upozoriti i pravilno usmjeriti.
- Prirodne brojeve treba pažljivo uklopiti u razlomke. Tako izbjegavamo pogrešne strategije.

7 Množenje razlomaka

7.1 Množenje prirodnog broja i razlomka

Osnovna ideja (Grundvorstellungen) množenja prirodnog broja i razlomka je uzastopno pribrajanja istog razlomka tj. umnažanje razlomka. Tu možemo povući paralelu s množenjem prodnih brojeva. Međutim ovo je poseban slučaj, a ne općeniti. Pogledajmo slikovni prikaz: Dakle, za svaki i prirodan broj n, i razlomak $\frac{p}{q}$, (q≠0) vrijedi:

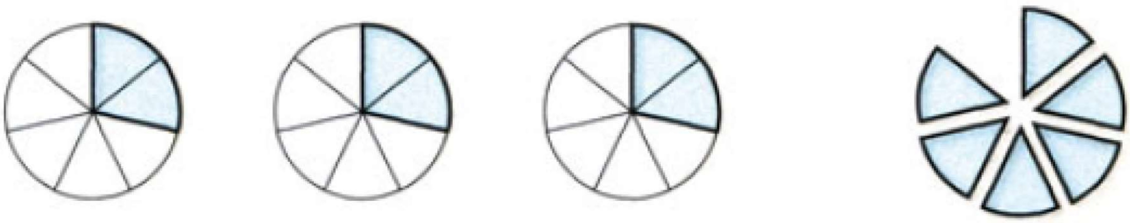


Slika 17: Množenje prirodnog broja i razlomka

$$n \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + ... + \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{q}$$

7.2 Množenje razlomka i prirodnog broja

U ovoj situaciji ne možemo iskoristiti ideju množenja kao uzastopnog pribrajanja. Pogledajmo izraz $\frac{2}{3} \cdot 6$. Ne znamo što znači dvije trećine puta pribrojiti broj 6. Očito je da se ova osnovna ideja može upotrijebiti samo ako je prvi faktor prirodni broj, tako da u ovom slučaju više nije održiva. No, ako razlomak promatramo kao operator, $\frac{2}{3} \cdot 6$ možemo interpretirati kao $\frac{2}{3}$ od 6. Pogledajmo idući primjer. Koliko iznosi $\frac{2}{7} \cdot 3$? Za model uzimamo model kruga. Naprije izgradimo 3 cijela kruga, podijelimo ih na sedmine i u svakom krugu obojimo 2 sedmine. Iz svakog kruga uzimamo 2 sedmine tj. ukupno 6 sedmina pa zaključujemo da je $\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{6}{7}$. Znači, zapravo smo pomnožili brojnik razlomka $\frac{2}{7}$ s 3 i dobili $\frac{6}{7}$. Analiza ilustrativ-



Slika 18: Množenje razlomka i prirodnog broj

nih primjera u slučaju $n \cdot \frac{p}{q}$ (umnažanje razlomka) i $\frac{p}{q} \cdot n$ (razlomak kao operator) pokazuje da se u oba slučaja dobiva isto rješenje. Znači množenje razlomka prirodnim brojem daje isti rezultat kao i množenje prirodnog broja razlomkom. Zaključujemo da komutativnost množenja vrijedi u ovom slučaju.

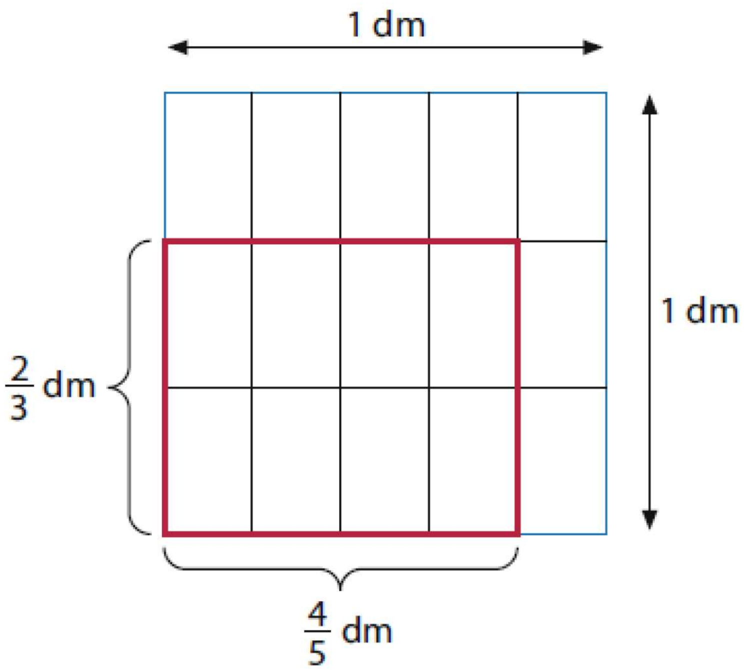
Dakle, za svaki i prirodan broj n, i razlomak $\frac{p}{q}$, $(q \neq 0)$ vrijedi:

$$\frac{p}{q} \cdot n == \frac{p \cdot n}{q}$$

Istraživanja pokazuju da učenici teže shvaćaju slučaj množenja razlomka i prirodnog broja, nego prirodnog broja i razlomka. Glavni uzrok tog problema leži u osnovnoj ideji (GV) koja se uvelike razlikuje od osnovne ideje (GV-a) množenja prirodnih brojeva.

7.3 Množenje razlomka razlomkom

Pamćenje pravila za množenje razlomka razlomkom vrlo je jednostavno. No da bismo razvili temeljno razumijevanje, potrebno nam je više od formule. Kako bismo prikazali množenje razlomka razlomkom poslužit ćemo se modelom površine. Promatrajmo površinu kvadrata čije stranice su duljine 1 dm. Taj će nam model površine poslužit za prikaz množenja $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$. Prisjetimo se da se površina nekog pravokutnika dobiva kao umnožak duljine njegovih stranica a i b. Ako $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$ promatramo kao duljine stranica pravokutnika, tada umnožak $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ možemo promatrati kao površinu odgovarajućeg pravokutnika (Slika 17.)



Slika 19: Množenje razlomka razlomkom

Podijelimo jedinični kvadrat na 5 stupaca i 3 retka. Zapravo smo jedinični kvadrat podijelili na 15 manjih pravokutnika ($3 \cdot 5 = 15$, što je produkt nazivnika). Svaki mali pravokutnik ima površinu od $\frac{1}{15} dm^2$. Uzmemo $2 \cdot 4 = 8$ malih pravokutnika (to odgovara produktu brojnika)- presjek $\frac{2}{3}$ (vodoravno) i $\frac{4}{5}$ (okomito) . Zapravo smo dobili da je $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} dm^2$.
Osnovna ideja množenja razlomka razlomkom (razlomci moraju biti pravi) je površina. Ovaj pristup možemo povezati s površinom prvokutnika čije su duljine stranica prirodni brojevi.

7.4 Pogrešne strategije prilikom množenja razlomka

Ako učenik nema izgrađenu osnovnu ideju množenja razlomaka (Grundvorstellungen) ili mu osnovna ideja nije dovoljno jasna, množenje razlomka prirodnim brojem počinje se miješati s proširivanjem razlomaka. To je učestala i široko rasprostranjena zabluda. Kod rješavanja problema množenja gdje je rezultat manji od početnih faktora, učenici mogu dobiti točne rezultate, dok istodobno kao točnu označavaju tvrdnju "Množenjem razlomaka rezultat se uvijek se povećava". Jedno moguće objašnjenje je da učenici mogu biti na različitim razinama algoritamskih zadataka i intuitivnih zadataka. No može biti i da učenici djeluju čisto sintaktički (u skladu s procedurom), stoga ne vide "veličinu" rezultata i ne primjećuju kontradikciju. Učenicima mora biti jasno prikazano da ta strategija (množenjem se rezultat uvijek povećava) općenito ne vrijedi kod razlomaka, da se izbjegnu za tipične pogreške. Razlozi da ta strategija ne vrijedi mora biti biti razjašnjena upućivanjem na jasne osnovne ideje, a ne samo na osnovi računskih primjera. Primjerice, to se može postići proučavanjem značenja umnoška $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ kao $\frac{2}{3}$ od $\frac{3}{4}$ (npr.pizze). To pokazuje da smo od nečega što je manje od jednog cijelog $(\frac{3}{4})$ uzeli dio $(\frac{2}{3})$, što svakako mora rezultirati dijelom (komadom pizze) manjim od $\frac{3}{4}$.

Glavne pogrešne strategije su oblika:$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b}$ (M1) i $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b+b}$ (M2). Obje netočne strategije imaju korijene u nerazumijevanju zbrajanja razlomaka s jednakim nazivnicima. Kod pogreške (M2) učenici $b \cdot b$ pogrešno interpretiraju kao $2b$ jer u nazivniku vide 2 jednaka broja pa je to $2b$, a ne b^2.

Pogrešna strategija $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ (M3) je dominantna pogreška kod velikog broja učenika, koji miješaju množenje razlomaka i proširivanje razlomaka. Da bi objasnili uzrok dominantne strategije pogreške M3, postoji sljedeći skup faktora koji se preklapaju i međusobno se pojačavaju:

- učenici imaju poteškoće uklapanjem prirodnih brojeva u pojam razlomka
- ne razlikuju pravilo proširivanja od množenja razlomaka
- pretjerana generalizacija poznatog pravila množenja "brojnik puta brojnik, nazivnik puta nazivnik“ i na ovaj poseban slučaj kad ništa drugo učeniku nije dostupno

Ukoliko učenici ne pretvore mješovite brojeve u neprave razlomke, često griješe. Tipične pogreške su:

- Prirodni broj prepišu, razlomački dio pomnože

$$5\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} = 5\tfrac{3}{8}$$

- Pomnože prirodne brojeve, razlomak prepišu

$$5\tfrac{1}{2} \cdot 3 = 15\tfrac{1}{2}$$

- Pomnože prirodne brojeve posebno i razlomačke dijelove posebno

$$5\tfrac{1}{2} \cdot 3\tfrac{3}{4} = 15\tfrac{3}{8}$$

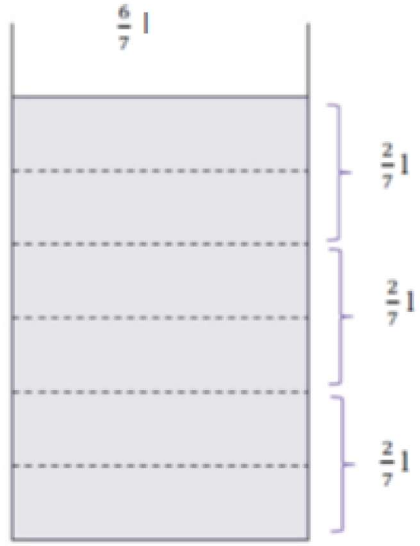
Kako bi se izbjegle ove inače uobičajene pogreške, prikladno je mješovite brojeve pretvoriti u razlomke prije množenja.

7.5 Prevencija i intervencija

- Temeljito sidrenje osnovnih ideja važno je za množenje razlomaka. To se mora učiniti u motivacijskom dijelom, a zatim u raspravi o osnovnim idejama i strategijama računanja, ali i opet i kasnije u razredu. Na nastavi je potrebno postavljati pitanje poput „Kako možeš prikazati $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$? Možeš li smisliti matematičku priču s tim zadatkom“. Hofe i Wartha, kao rezultat njihovog opsežnog istraživanja, navode da nerazvijene osnovne ideje množenja (i dijeljenja) uzrokuju veliki dio grešaka.
- Svjesno suočavanje s pojmom proširivanja razlomaka i množenja razlomaka može se izbjeći pogreška M3. To je posebno učinkovito ako se proširivanje vizualizira (na primjer, $\frac{2}{5}$ s 2) i ako se množenje vizualizira na pravokutniku (na primjer, $\frac{2}{5}$ s 2), a zatim usporede oba puta i rezultata. Iz ovoga postaje jasno da je proširivanje profinjenje podjele (povećavanje broja dijelova) u kojoj se vrijednost razlomka ne mijenja, dok množenje uključuje umnažanje razlomka u kojem se mijenja njegova vrijednost.
- Zadavati raznovrsne zadatke koji uključuju grafičko prikazivanje računskih operacija s razlomcima, riješene zadatke u kojima je potrebno pronaći i argumentirati pogrešku, zadatke u koji se množe razlomci jednakih nazivnika i zbrajaju razlomci jednakih nazivnika u kojima se traži i obrazloženje rješenja što dovodi do boljeg razumijevanja i smanjuje pogrešku M1.

8 Dijeljenje razlomaka

Grundvorstellungen koncept (osnovna ideja) djeljenja razlomka prirodnim brojem jest promatrati dijeljenje kao podjelu (svakom jednako).
Primjer: Sanja, Marko i Goran dijele $\frac{6}{7}L$ soka koji je ostao. Koliko će dobiti svaki od njih?



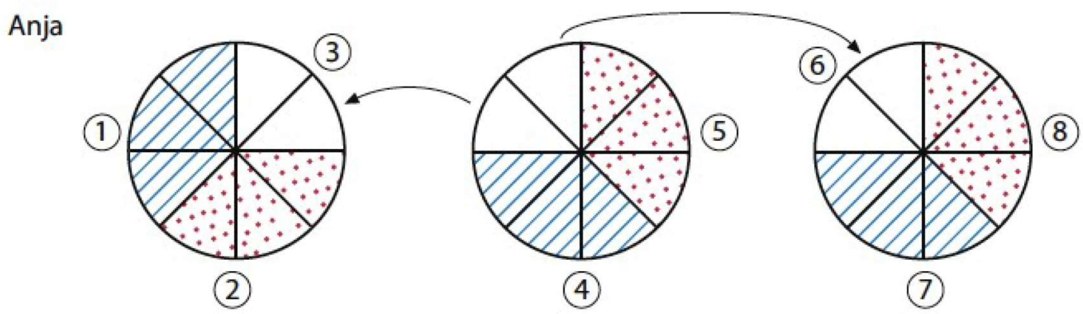
Slika 20: Dijeljenje razlomaka

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$$

8.1 Dijeljenje prirodnog broja razlomkom

Postupak dijeljenja razlomaka često se svodi na usavršavanje vještine do razine automatizma. Pa tako učenici znaju dijeliti s razlomcima, ali ne znaju što ono usitinu predstvalja. Kako je osnovna ideja dijeljenja razlomaka mjerenje, potrebno je koristiti se različitim modelima, prije svega vizualnim, koji će učenicima omogućiti razumijevanje. Konceptualno učenje temelj je funkcionalnog učenja kojim se razvijaju vještine analiziranja, donošenja odluka i rješavanja nepoznatih problema na osnovu prethono usvojenih znanja.
Sljedeći primjer prikazuje korisnu strategiju dijeljenja prirodnog broja razlomkom.

Primjer: Anja se pita koliko puta $\frac{3}{8}$ ide u 3? Učiteljica je grafičkim modelima predstavila rješenje zadatka.

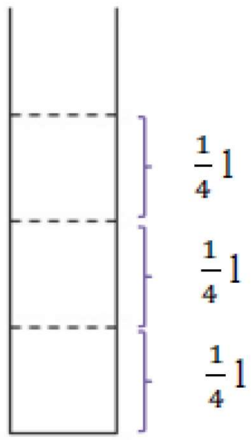


Slika 21: Dijeljenje prirodnog broja razlomkom

Broj tri prikazan je kao tri kruga. S obzirom da nas zanima koliko puta $\frac{3}{8}$ ide u 3, svaki krug ćemo podijeliti na 8 dijelova odnosno na osmine. U sljedećem koraku označavamo bojama cjeline sačinjene od $\frac{3}{8}$ i u konačnici prebrojavanjem tih cjelina dolazimo do rješenja zadatka. Zapravo smo izvršili operaciju dijeljenja prirodnog broja razlomkom tj. 3 podijelili s $\frac{3}{8}$. Simbolički zapisano: $3 : \frac{3}{8} = 8$

8.2 Dijeljenje razlomka razlomkom

Osnovna ideja (Grundvorstellungen) dijeljenja razlomka razlomkom je mjerenje. Pogledajmo primjer: U boci je ostalo $\frac{3}{4}$ soka. Sok treba natočiti u čaše od $\frac{1}{4}$. Koliko čaša nam je potrebno?



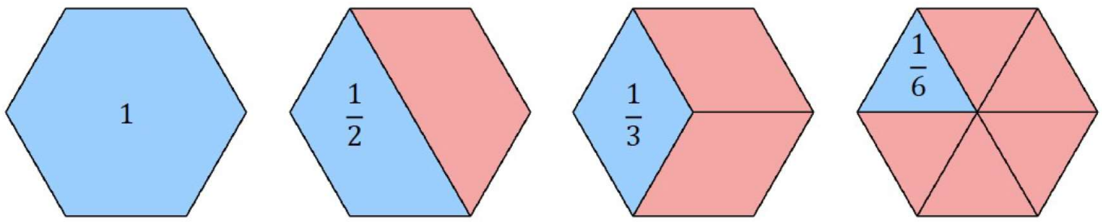
Slika 22: Dijeljenje razlomaka

Potrebno je 3 čaše. U ovom zadatku smo se pitali koliko puta $\frac{1}{4}$ ide u $\frac{3}{4}$, te smo izmjerili da je to 3 puta. Ovo pitanje ima smisla samo ako je djeljenik veći od djelitelja ili mu je jednak. Pogledajmo sada situaciju kada je djeljenik manji od djelitelja $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$. Ovdje se pitamo koliki dio razlomka $\frac{3}{4}$ ide u $\frac{1}{4}$? Za ovo pitanje moramo promijeniti pristup.
U prethodnom zadatku mogli smo koristiti ideju dijeljenja kao uzastopnog oduzimanja istog broja i tu povući analogiju s dijeljenjem prirodnih brojeva. To moguće jer je djeljenik veći ili jednak djelitelju. Kada je djeljenik manji od djelitelja, tu ideju više ne možemo rabiti.

8.3 Dijeljenje razlomaka kada je djeljenjik manji od djelitelja

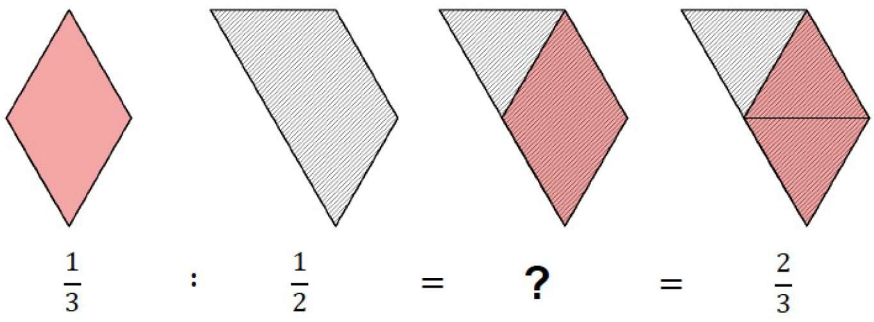
U prethodnom zadatku mogli smo koristiti ideju dijeljenja kao uzastopnog oduzimanja istog broja i tu povući analogiju s dijeljenjem prirodnih brojeva. To je moguće jer je djeljenik veći ili jednak djelitelju. Kada je djeljenik manji od djelitelja, tu ideju više ne možemo rabiti.

Pogledajmo primjer: Želimo izvršiti dijeljenje $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$.
Ovdje nam je djelitelj veći od djeljenika. Naše pitanje sada glasi koliki dio jedne polovine se nalazi u jednoj trećini.
Grafički to možemo prikazati na idući način.



Slika 23: Prikaz cjeline

Neka šesterokut predstavlja jedno cijelo, njegova polovina je trapez, šestina trokut, trećina romb sastavljen od dva trokuta.
Želimo $\frac{1}{3}$ podijeliti s $\frac{1}{2}$, a to grafički možemo prikazati na ovaj način:



Slika 24: Grafički prikaz rješenja zadatka $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$

Postupak se svodi na otkrivanje koliki dio djelitelja zauzima djeljenik. Utvrdili smo da razlomak $\frac{1}{3}$ čini $\frac{2}{3}$ razlomka $\frac{1}{2}$, odnosno, da je $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

8.4 Dijeljenje razlomaka kao množenje s recipročnim brojem

U skupu prirodnih brojeva množenje i dijeljenje se mogu promatrati kao obrnute (suprotne) operacije. Odnosno dijeljenje je obrnuta operacija od množenja. Tu osnovnu ideju (Grundvorstellungen) možemo primijeniti i na razlomke:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15},$$

dakle

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

Znači $\frac{8}{15} : \frac{2}{3}$ je neki broj koji pomnožen s $\frac{2}{3}$ daje $\frac{8}{15}$
Pogledajmo sada $\frac{6}{15} : \frac{3}{5}$. Tražimo broj koji pomnožen s $\frac{3}{5}$ daje $\frac{6}{15}$. To možemo zapisati kao $\frac{a}{b} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$. Lako vidimo da u brojniku treba stajati 2, a u nazivniku 3.
Dakle, $\frac{6}{15} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$. Uočimo da je $\frac{6:3}{15:5} = \frac{2}{3}$. Vidimo analogiju s množenjem razlomka s razlomkom gdje množimo brojnik s brojnikom, a nazivnik s nazivnikom. Uvjerimo se da je zaista smisleno dijeliti brojnik s brojnikom, a nazivnik s nazivnikom:

$$\frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2 : 2}{7 \cdot 3 : 3} = \frac{5}{7}$$

No, ne možemo u svakom slučaju podijeliti brojnik brojnikom, a nazivnik nazivnikom. Zato moramo na odgovarajući način proširiti brojnik i nazivnik djeljenika da budu djeljivi brojnikom i nazivnikom djelitelja.

$$\frac{6}{15} : \frac{5}{7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 7}{15 \cdot 5 \cdot 7} : \frac{5}{7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 7 : 5}{15 \cdot 5 \cdot 7 : 7} = \frac{6 \cdot 7}{15 \cdot 5} = \frac{42}{75}$$

Uočimo $\frac{6}{15} : \frac{5}{7} = \frac{6}{15} \cdot \frac{7}{5}$ tj. da smo dijeljenje razlomka razlomkom sveli na množenje razlomaka. Razlomak $\frac{7}{5}$ je recipročan razlomku $\frac{5}{7}$. Prisjetimo se da je umnožak recipročnih razlomaka iznosi 1.
Tako dolazimo do poznatog pravila

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = (\frac{a \cdot c \cdot d}{c \cdot c \cdot d} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

8.5 Pogrešne strategije prilikom dijeljenja razlomaka

U istraživanju koje su poveli Padberg i Wartha, svaki peti učenik u svim ispitivanim razredima (među 1010 učenika) barem je jednom upotrijebio ovu strategiju pogreške (D1)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a:c}{b}$$

kada su susreli razlomke s jednakim nazivnicima. No upotreba ove strategije nije prečesta.

Kod dijeljenja prirodnih brojeva razlomkom mogu se promatrati sljedeće karakteristične pogrešne strategije (poredane prema frekvenciji)

- pravila množenja prenose se na dijeljenje (npr. $2 : \frac{2}{3} = \frac{2:2}{3} = \frac{1}{3}$ - implicitna upotreba neke vrste komutativnosti)
- problemi s prirodnim brojevima npr. proširivanje gdje je $n = \frac{n}{n}$
- množenje (ne s recipročnim razlomkom, već početnim)
- pogrešan recipročan razlomak

Dvije dominantne osnovne ideje u dijeljenju prirodnih brojeva su raspodjela (npr. U kutiji ima 18 mandarina. Uvijek se 6 komada pakira u vrećicu. Koliko se vrećica može napuniti?)

i podjela (svakom jednako npr. U kutiji ima 18 mandarina. Treba ih ravnomjerno pakirati u 3 vrećice. Koliko mandarina dolazi vrećici?). Podjela kao obratna operacija množenja i kao ponavljano oduzimanje igraju samo podređenu, komplementarnu ulogu tijekom osnovne škole. U isto vrijeme, svaku radnju koja se može riješiti vizualizacijom zadatka, možemo interpretirati kako u smislu raspodjele tako i u smislu podjele. Učenici se intuitivno oslanjaju na te ideje i kod dijeljenja razlomaka. No te ideje nisu uvijek održive, što dovodi do konflikta s onim što učenik zna. Tako ideja raspodjele više nije održiva već u slučaju $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$
Kada učenici rješavaju zadatak s dijeljenjem koji je zadan riječima, može se dogoditi da učenici postignu bolje rezultate (dobiju točna rješenja), nego s odgovarajućim čisto matematičkim zadatkom. Postotak točnosti rješenja je veći za određeni zadatak ako se situacija u zadatku može jednostavno vizualizirati (grafički prikazati) ili se mogu rabiti vrlo jednostavne strategije kao što su: brojanje ili višestruko zbrajanje ili oduzimanje, koje učenici ili ne vide i ne rabe u čistom matematičkom zadatku. S druge strane, ako takva pomoć nije moguća, postotak riješenosti za takve zadatke je općenito niža, jednostavno zato što prevođenje teksta iz zadatka u odgovarajući aritmetički račun donosi dodatne poteškoće učenicima i mogućnosti za pogreške.

8.6 Intervencija i prevencija

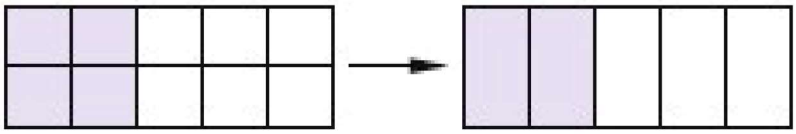
Kod dijeljenja razlomaka osnovne ideje se uvelike razlikuju od osnovnih ideje dijeljenja prirodnih brojeva. Važno je osigurati diskusiju i situacije u kojima će učenici uočiti razliku između tih osnovnih ideja i razviti adekvatne ideje za dijeljenje razlomaka.

Korisne strategije:

- Umetanje aritmetičkih zadataka u smislen kontekst
- Diskusija rješenja:
  - Postavljati pitanja poput: Zadovoljava li rješenje tvoje očekivanje? Jesi li iznenađen? Zašto?
  - Dati zadatke s točnim i netočnim rješenjima i od učenika tražiti da obrazlože koji su točni/netočni i zašto su točni/netočni. Zadatak može početi s npr. Marin je riješio sljedeće zadatke i vjeruje da su svi zadatci točno riješeni.
  - Suočiti učenike s drugačijim poimanjem dijeljenja razlomaka u odnosu na dijeljenje prirodnih brojeva. Dati zadatak poput: Marija je izračunala $8 : \frac{1}{4}$ i kao rezultat dobila je 32. Ona kaže: “Rezultat je veći od 8, iako sam dijelila. Pogrešno sam izračunala.” Objasni zašto Marija pogrešno misli.
- Procjena veličine rezultata prije računanja
- Kako bi se spriječilo nerazumijevanje ili miješanje skraćivanja i dijeljenja suočiti učenik s ta dva koncepta:

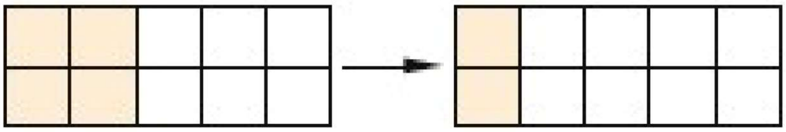
– Objasni razliku između skraćivanja i dijeljenja razlomka prirodnim brojem na danom primjeru. Zatim prikaži to i računski.

Primjer:
Razlomak $\frac{4}{10}$ skraćen s 2



Slika 25: Rezultat skraćivanja razlomaka

Razlomak $\frac{4}{10}$ podjeljen s 2



Slika 26: Rezultat dijeljenja razlomaka

– Objasnite vlastitim riječima zašto se skraćivanje razlomka $\frac{9}{30}$ s 3 razlikuje od dijeljenje tog razlomka s 3.

- Izmjenjivati zadatke s množenjem i dijeljenjem razlomaka, osobito s moženjem razlomka prirodnim brojem i dijeljenjem razlomka prirodnim brojem.

9 Istraživanje

9.1 Cilj istraživanja i osnovni podatci

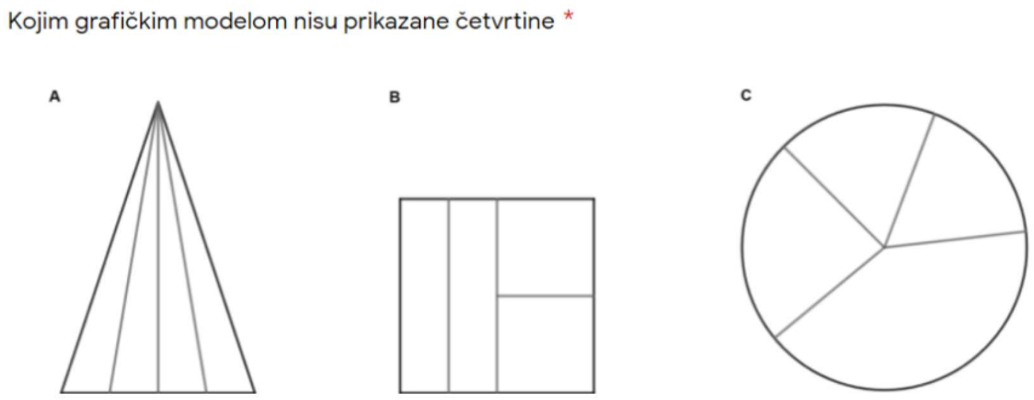
U svrhu izrade diplomskog rada provedeno je istraživanje koje je za cilj imalo utvrditi razumiju li učenici pojam razlomka, znaju li provoditi računske operacije s razlomcima kao i rješavati problemske zadatke u kojima su uključeni razlomci. Dio pitanja odnosi se na proceduralno učenje dok je drugi dio zahtijevao razumijevanje pojma razlomka, logičko zaključivanje i povezivanje. S obzirom da je ovo istraživanje zamišljeno kao otvorena anketa, neki od ponuđenih odgovora nisu jednoznačni. Time smo učenicima dali slobodu razmišljanja i zaključivanja čemu se teži u suvremenom obrazovnom sustavu. Nestandardiziranim zadatcima učenici se potiču na razmišljanje "izvan kutije" i ono odskače od standardnih egzatnih odgovora. Ovom metodom želimo potaknuti učenike na promišljanje te ih pripremiti na rješavanje novih problema koristeći stečeno zanje. Kurikularna reforma je osmišljena na način da propisuje predviđeno gradivo, ali se nastavniku daje sloboda u izboru zadataka i metoda rada. Ova reforma, uz primarni cilj unapređenja obrazovnog sustava teži i boljim rezultatima PISA testa u kojima se potencira primjena stečenih znanja. Pogledajmo kako su se učenici snašli s ovim zadatcima.

Istraživanje je provedeno u rujnu 2021. godine putem Google obrasca. U istraživanju je sudjelovao 41 učenik srednje škole, od čega 29 ili 70.7% učenika strukovnih programa i 12 ili 29.3% učenika gimnazijskog programa. Učenici prvog razreda srednje škole čine 36.6% ukupnih ispitanika dok udio učenika drugog razreda srednje iznosi 61%, a učenika četvrtog srednje 2.4%.

9.2 Analiza odgovora

Prvi zadatak

U prvom zadatku od učenika se očekivalo da od tri ponuđena grafička modela prepoznaju onaj model koji nije pogodan za prikazivanje četvrtina. Prvi model je trokut podijeljena na četiri dijela jednake veličine i oblika, drugi model je kvadrata podijeljen na četiri dijela jednakih veličina, a različitih oblika dok je treći model kruga podijeljen na četiri dijela različitih veličina. U ovom kontekstu veličina lika se odnosi na površinu lika. Cilj ovoga zadatka bio je utvrditi razumiju li učenici princip jednake podjele odnosno osnovni koncept razlomka.



Slika 27: Prvi zadataka

Rezultati su pokazali da samo 43.9% učenika srednjih škola razumije što je to grafički prikaz razlomka. Najzastupljeniji način grafičkog prikazivanja razlomka je pomoću kruga što nas dovodi pretpostavke da je dio učenika temeljem iskustva odbacio taj odgovor kao krivi ne razmišljajući o jednakoj podijeli. S druge strane, model trokuta se najrjeđe koristi pa pretpostavljamo da su učenici na taj način donijeli krivi zaključak. Čak 26.8% učenika reko je da model kvadrata nije reprezentat razlomka što nam ukazuje na krivu strategiju koja se temelji na obliku, a ne veličini dijela. Možemo zaključiti da je prilikom usvajanja pojma razlomaka potrebno veću pozornost posvetiti različitim načinima grafičkog prikazivanja razlomaka kako bi osvijestili što razlomak predstavlja te uvidjeli da se jednaka raspodjela temelji na veličini dijela, a ne na njegovom obliku.

Slika 28: Rezultati prvog zadataka

Drugi zadatak

Drugi zadatak koncipiran je na način da je učenicima dana tvrdnja uz obrazloženje, a oni su je trebali potvrditi ili opovrgnuti. Zadatak se svodi na uspoređivanje razlomaka i otkrivanje učeničkih pogrešnih strategija.

Je li sljedeći zadatak točno riješen? U komentar upiši zašto se slažeš ili ne slažeš. *

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{7} \quad zato\ \check{s}to\ je \quad 5 < 7$$

Slika 29: Drugi zadatak

Uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika, a posebno jediničnih razlomaka, temelji se na razumijevanju pojma razlomka. Poražavajuća je činjenica da je ovaj zadatak netočno riješilo 63.41% ispitanih učenika. Na temelju njihovih odgovora možemo zaključiti da koriste pogrešne strategije koje uključuju odvojeno poimanje brojnika i nazivnika, uspoređivanje samo brojnika, uspoređivanje samo nazivnika i sl.
U nastavku donosimo neke od krivih odgovora:

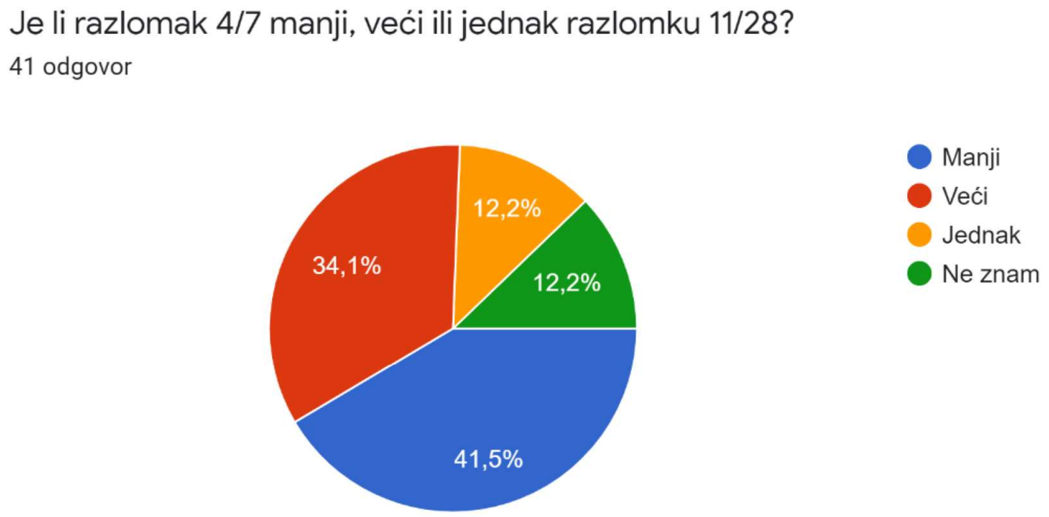
- Zato što je $1 \cdot 5 = 5$, a $1 \cdot 7 = 7$.
- Zato što je to realno da je 7 veći od 5.
- Zato što je $1 = 1$.
- Jer je 1 kroz 5 isto kao 5.

Većina učenika koja je zaključila da je $\frac{1}{5}$ veća od $\frac{1}{7}$ kao obrazloženje je navela metodu svođenja razlomaka na zajednički nazivnik dok je manji dio učenika zaključio da je sedmina manja od petine. Pogledajmo njihove odgovore:

- Zadatak nije točno riješen. Razlomke treba svesti na zajednički nazivnik te onda pogledati brojnike i vidjeti koji je veći.
- Nije, zato jer je upravo suprotno...što je nazivnik manji, to je rezultat razlomka veći.
- Ne slažem se jer se razlomci moraju svest na zajednički nazivnik i onda se uspoređuju brojnici a ne nazivnici.

Treći zadatak

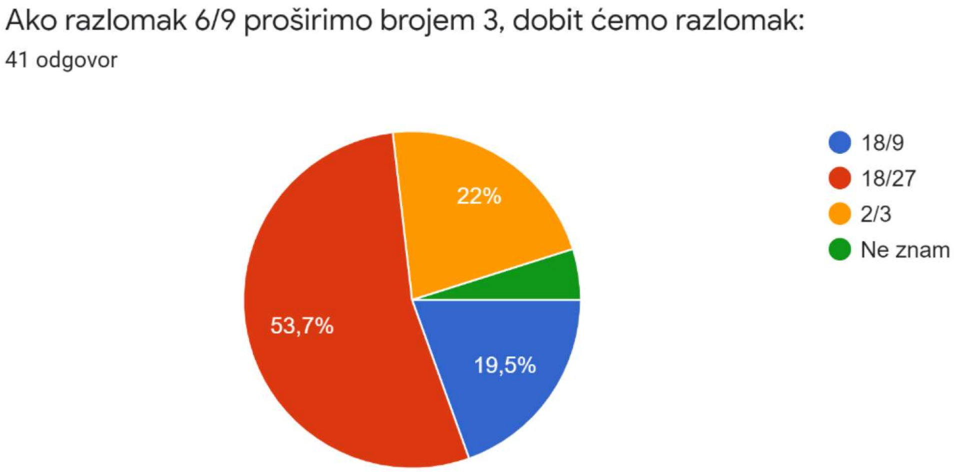
U trećem zadatku od učenika smo tražili da zaključe u kakvom su odnosu razlomci $\frac{4}{7}$ i $\frac{11}{28}$. Ovaj zadatak točno je riješilo 34.1%, a to se podudara i s postotkom točnih odgovora u drugom zadatku pa možemo zaključiti da učenici koji su u prethodnom zadatku dali točan odgovor, ali ne i obrazloženje doista razumiju pojam razlomka i način na koji se oni uspoređuju. Rezultati ovoga zadatka govore nam da većina učenika ne samo što ne razumije odnos dvaju razlomaka već zaostaje i u proceduralnom znanju, u ovom slučaju, svođenju razlomaka na zajednički nazivnik.



Slika 30: Rezultati trećeg zadataka

Četvrti zadatak

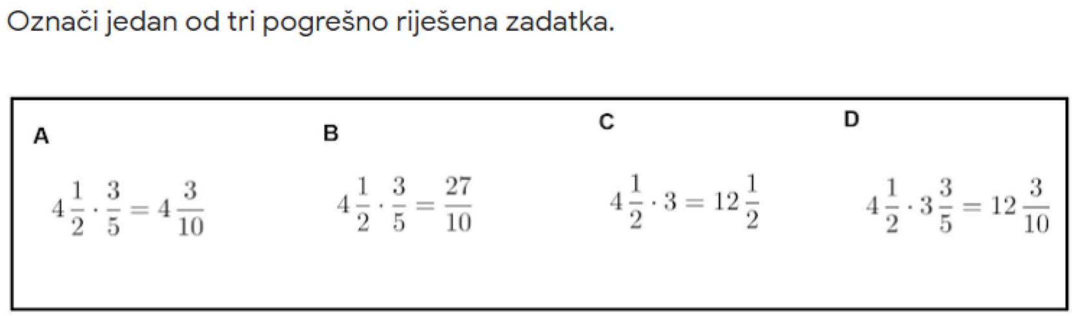
Dio gradiva koji obuhvaća proširivanje i skraćivanje razlomaka odlučili smo provjeriti na način da učenicima prikažemo klasičan zadatak s ponuđenim odgovorima. S obzirom da se tražio rezultat proširivanja razlomka određenim brojem, za odgovore smo ponudili točno rješenje odnosno prošireni razlomak, netočna rješenja tj. razlomak skraćen danim brojem i razlomak pomnožen danim brojem kao i odgovor "ne znam". Rezultati istraživanja pokazuju da je 46.3% učenika izabralo krivu strategiju za rješavanje ovoga zadatka. S obzirom da su ispitanici srednjoškolskog uzrasta, ovu situaciju smatramo izuzetno zabrinjavajućom jer pokazuje da učenici nisu usvojili koncept proširivanja odnosno skraćivanja razlomaka što je jedno od temeljnih znanja u području baratanja s razlomcima.



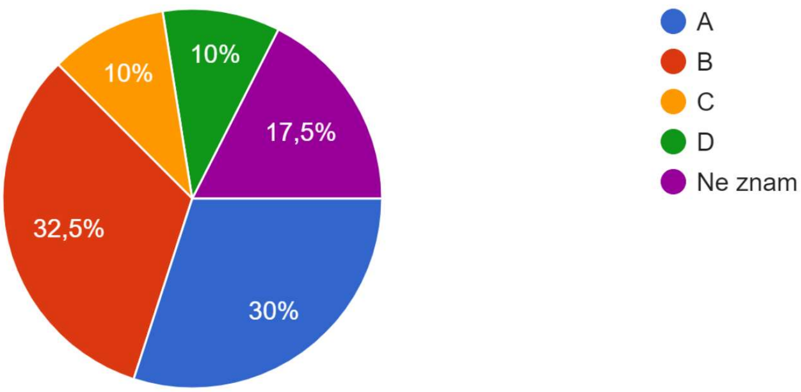
Slika 31: Rezultati četvrtog zadataka

Peti zadatak

U petom zadatku ispitanici su od četiri ponuđena riješena zadatka trebali izabrati jedan netočan. Ono što je u ovom zadatku drukčije u odnosu na standardne zadatke je to da su tri zadatka netočno, a samo jedan točno riješen. Vjerojatnost da učenik slučajnim odabirom točno odgovoriti je 75%. Ovaj zadatak riješilo je 40 ispitanika od čega je njih 20 što čini 50% točno odgovorilo na postavljeno pitanje. Također, osim ponuđenih zadataka učenici su imali mogućnost izabrati odgovor "ne znam". Činjenica da je čak 17.5% odgovora "ne znam" govori nam da učenici nisu svladali množenje razlomaka, a samim time ne mogu odrediti koji postupak nije valjan.



Slika 32: Peti zadatak



Slika 33: Rezultati petog zadataka

Šesti zadatak

Šesti zadatak svodi se na zbrajanje razlomaka s time da su učenici to morali sami zaključiti. Zadatci ovoga tipa često se rješavaju grafičkim modelima, a s obzirom da su za vrijeme rješavanja ove ankete na raspolaganju bili papir i olovka, učenici su svoje rješenje mogli skicirati i utvrditi poklapa li se sa numeričkim rezultatom. Praksa, kao i rezultati nacionalnih te međunarodnih istraživanja, pokazali su da našim učenicima zadatci u kojima se traži logičko razmišljanje i zaključivanje predstavljaju problem. Iz toga, razloga čak i u ovim izuzetno jednostavniim zadatcima, nismo očekivali najbolje rezultate.

Zadatak glasi:
Prvo smo obojali $\frac{1}{2}$ kruga, a zatim $\frac{1}{3}$. Koliki dio kruga smo obojali?
Pogledajmo neke netočne odgovore:

- $\frac{2}{5}$ - u ovome slučaju korištena je pogrešna strategija $Z1$ u kojoj učenici zbrajaju brojnik s brojnikom i nazivnik s nazivnikom
- $\frac{1}{6}$ - u ovome slučaju korištena je pogrešna strategija u kojoj učenici zamjene algoritme zbrajanja i množenja razlomaka
- cijeli krug, jedan i pol krug, pola kruga, trećinu kruga - ovi odgovori pokazuju da učenici nemaju razvijen koncept razlomka kao dijela cjeline, ne mogu vizualizirati razlomak kao dio kruga te ne znaju utvrditi odnos dvaju razlomaka
- $67\%, 75\%$ - iako krivo riješeno, neki učenici povezuju razlomak sa postotnim udjelom

Zabrinjavajuća činjenica je to da je zadatak točno riješilo 17.07% ispitanika. Uzmemo li u obzir da je po ovome istraživanju osnovne operacije s razlomcima usvojilo oko 50% ispitanika, dolazimo do zaključka da bi rezultat bio sličan ako ne i bolji da se eksplicitno tražio zbroj dva razlomka. Očigledno je da je učenike potrebno osnaživati i motivirati na području modeliranja problema, promišljanja i donošenja zaključaka.

Sedmi zadatak

Nakon provedene analize šestoga zadatka uvidjeli smo da se učenici ne snalaze u zadatcima riječima odnosno u modeliranju problema. Stoga nismo bili iznenađeni rezultatima koji su pokazali da je sedmi zadatak točno riješilo 12.2% ispitanih srednjoškolaca.
Sedmi zadatak glasi :
U Vrećici se nalazi 49 bombona. Matija je jučer pojeo $\frac{3}{7}$ vrećice, a danas $\frac{3}{4}$ preostalih bombona. Koliko bombona je ostalo Matiji? Pogledajmo neke netočne odgovore:

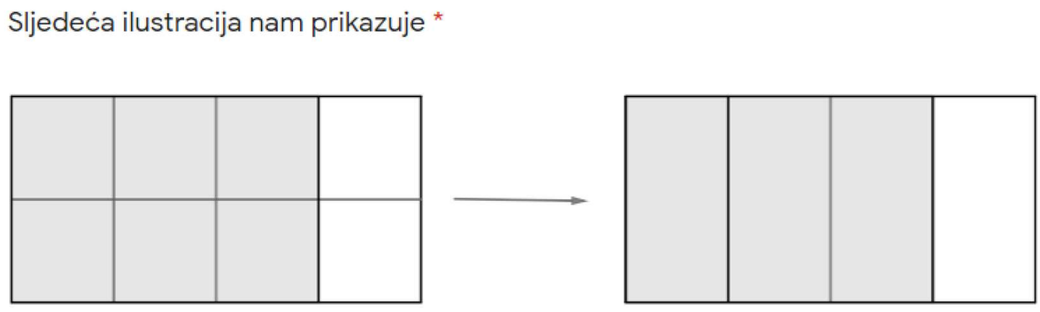
- "ne znam" - čak 41.46% ispitanika je odgovorilo da ne zna riješiti ovaj zadatak
- $\frac{1}{1}, \frac{7}{2}$ - iz ovih odgovora jasno je da neki učenici ne razumiju pojam razlomka, konkretno u prvom slučaju ne znaju da $\frac{1}{1}$ predstavlja cjelinu odnosno svih 49 bombona
- 0, "malo", "ništa" - još su neki od odgovora koji potkrepljuju prethodnu tvrdnju

Osmi zadatak

Osmi zadatak svodi se na dijeljenje razlomka prirodnim brojem. Od ispitanika se očekivalo da postave problem i riješe ga. Zadatci ovoga tipa spadaju u osnovne primjere primjene dijeljenja razlomaka u osvnovnoj školi.
Zadatak:
$\frac{12}{15}L$ soka treba podijeliti u četiri čaše tako da u svakoj čaši toga napitka bude jedaka količina. Koliko soka će biti u jednoj čaši?
19.52% učenika je odgovorilo $\frac{3}{15}$, $\frac{1}{5}$ ili "2deci" što je točan odgovor dok je čak 31.71% učenika odgovorilo da ne zna riješiti zadatak. Među netočnim odgovorima nalaze se i oni koji su u potpunosti izvan konteksta, a glase $3L, 7, 8, \frac{6}{3}$, "0.3 ili 0.5"i sl.

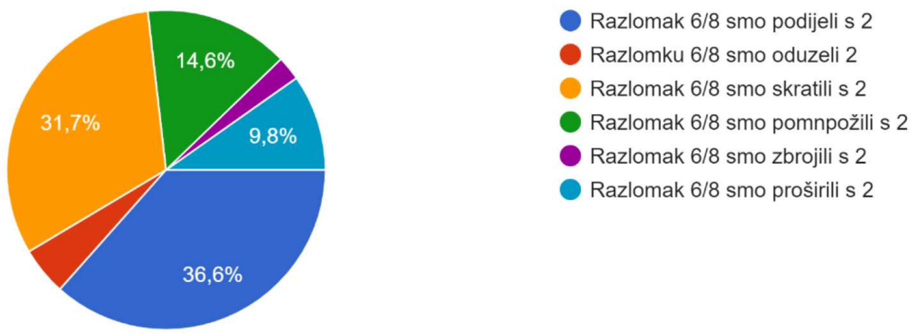
Deveti zadatak

Grafički modeli naječšće se koriste samo prilikom obrade pojma razlomka dok se proširivanje i skraćivanje razlomaka bazira na reprodukciji pravila. Vodeći se ovom spoznajom, odlučili smo ispitanicima postaviti zadatak u kojemu trebaju prepoznati operacijau koja primjenjena na lijevom modelu daje za rezultat desni model.



Slika 34: Deveti zadatak

Jasno je da se ovdje radi o skraćivanju razlomka $\frac{6}{8}$ brojem 2 no to je znalo samo 31.7% učenika. Čak 36.6% učenika odgovorilo je da je riječ o djeljenju što nije veliko iznenađenje uzmemo li u obzir da učenici pojam skraćenog razlomka često koncipiraju kao razlomak manje veličine.



Slika 35: Rezultati devetog zadatka

9.3 Zaključak istraživanja

Ovo istraživanje obuhvatilo je osnovne zadatke koji uključuju množenje, dijeljenje, zbrajanje i oduzimanje razlomaka, proširivanje i skraćivanje razlomaka, prikazivanje razlomaka grafičkim modelima i problemske zadatke s razlomcima. Unatoč spoznaji da je ovaj osnovnoškolski sadržaj učenicima najzahtjevnije, nismo očekivali ovako slabe rezultate. Pokazalo se da većina ispitanika nije usvojila osnovne računske operacije s razlomcima, s druge strane polovina onih koji su to uspjeli ima problem s modeliranjem zadataka, logičkim promišljanjem i zaključivanjem. Na kraju ovoga istraživanja, možemo reći da većina učenika ne razumije koncept razlomka, ne zna ih grafički prikazati te ne razumije njihovo značenje. Nedovoljna usvojenost ovoga sadržaja dovodi do većih problema u daljnjem školovanju stoga je važno usmjeriti se na zadatke iz svakodnevnog života koji će kod učenika razviti želju za učenjem i israživanjem, promišljanjem i donošejem zaključaka koje u osnovi ima razumijevanje i formiranje pozitivnog stava o matematici.

10 Zaključak

Kod školaraca problemi s razumijevanjem i manipulacijom s razlomcima nisu rijetkost te je stoga vrlo važno razraditi metode poučavanja i pažljivo osmisliti zadatke. Pri percipiranju razlomka korisno je koristiti se metodom vizualizacije i povezivanjem s primjerima iz stvarnog života. Jednom prihvaćene ideje teško se mijenjaju, što je posebno vidljivo kod proširivanja i skraćivanja razlomaka. Učenici na ove postupke gledaju kao povećanje i smanjenje vrijednosti, a ne kao promjenu prikaza broja. Također, nerijetko na razlomak gledaju kao na dva zasebna broja, što predstavlja problem kako u skraćivanju i proširivanju tako i u uspoređivanju razlomaka. Stoga bi nam u podučavanju naglasak trebao biti na razvijanju razumijevanja i mentalnoj percepciji te povezivanju sa svakodnevnim problemima, a sve u svrhu smanjenja apstrakcije i približavanju koncepta s djetetu poznatim pojavama. Rezultati istraživanja pokazali su da je velika većina naših ispitanika završila osnovnu školu, a pri tome nije svladala osnovne operacije s razlomcima, ne razumije koncept razlomka kao ni način na koji se razlomci mogu prikazati. Opće je poznato da razlomci našim osnovnoškolcima predstavljaju najteže gradivo u nastavi matematike pa je stoga važno fokusirati se na grafičke modele, primjere iz svakodnevnog života i zanimljive zadatke koji će u njima probuditi želju za istraživanjem, a istovremeno razvijati apstraktno razmišljanje i logičko zaključivanje.

Literatura

[1] G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman, *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, Springer Science Business Media, Berlin, 2011.

[2] F. Padberg, S. Wartha, *Didaktik der Bruchrechnung*, Springer Sprektum, Berlin, 2017.

[3] M. M. Petit, R. E. Laird, E. L. Marsden, C. B. Ebby, *A focus on fractions*, Routledge, New York, 2016.

[4] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, Narodne novine, broj 7/2019.

Sažetak

Ovaj rad govori o poteškoćama pri razumijevanju i prikazivanju razlomaka. Uz objašnjavanje važnosti Grudnvorstellungen koncepta za organiziranje nastavnog sata i metode podučavanja, možete pronaći i neke od najčešćih pogrešaka prilikom grafičkog prikazivanja, proširivanja, skraćivanja i uspoređivanja razlomaka te ideje i načine kako prevenirati i ispraviti kriva razmišljanja.

Ključni pojmovi: razlomak, grafički modeli, proširivanje, skraćivanje, uspoređivanje

Summary

This paper is about difficulty in understanding and displaying the fractions. With an explanation of the importance of the Grudnvorstellungen concept for organizing lessons and teaching methods, you can also find some of the most common mistakes when graphically displaying, expanding, shortening, and comparing fractions, as well as ideas and ways to prevent and correct the wrong thinking

Key words: fraction, graphic models, expanding, shortening, comparing

Životopis

Milana Sutarić rođena je 11.8.1993. Nakon završene osnovne škole i opće gimnazije u Belom Manastiru upisuje nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Ljubav prema matematici i radu s djecom njegovala je za vrijeme studiranja aktivno volontirajući u ustanovama i udrugama koje pomažu socijalno ugroženoj djeci. Trenutno je zaposlena u Srednjoj školi Valpovo, a u budućnosti se osim rada u školi želi baviti popularizacijom matematike kod djece mlađeg uzrasta.