Razvoj temeljnog razumijevanja geometrije

Gazdović, Krunoslav

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Krunoslav Gazdović

Razvoj temeljnog razumijevanja geometrije

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Krunoslav Gazdović

Razvoj temeljnog razumijevanja geometrije

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016.

Sadržaj

1 Uvod **4**

2 Razumijevanje geometrije i velike ideje **5**

3 Velika ideja 1 **8**
3.1 Temeljno razumijevanje 1a: Jedna skica vrijedi 1000 simbola 8
3.2 Temeljno razumijevanje 1b: Svaka skica priča priču 12
3.3 Temeljno razumijevanje 1c: Izazov iščitavanja skica 17

4 Velika ideja 2 **20**
4.1 Temeljno razumijevanje 2a: Od kuda potječu geometrijski teoremi . . 22
4.2 Temeljno razumijevanje 2b: Povratak na isto 22
4.3 Temeljno razumijevanje 2c: Od kuda potječu pretpostavke 24
4.4 Temeljno razumijevanje 2d: Kretanjem ostaje nepromijenjeno 26

5 Velika ideja 3 **28**
5.1 Temeljno razumijevanje 3a: Definicije su alat za geometrijsko istraživanje 28
5.2 Temeljno razumijevanje 3b: Dva značenja definiranja 30
5.3 Temeljno razumijevanje 3c: Čvrsta veza riječi i slike 31

6 Velika ideja 4 **32**
6.1 Temeljno razumijevanje 4a: Čvrsta veza riječi i slike 32
6.2 Temeljno razumijevanje 4b: Što možemo napraviti s protuprimjerima? 33
6.3 Temeljno razumijevanje 4c: Što je ideja? 34

Literatura **36**

Sažetak **37**

Title and summary **38**

Životopis **39**

1 Uvod

Ovaj rad se bazira na idejama vezanim za geometriju. To su ideje koje se trebaju shvatiti u potpunosti i koje se mogu koristiti fleksibilno kako bismo postali produktivniji u poučavanju matematike u srednjoj školi. Učenici dolaze u srednju školu s raznovsrnim matematičkim iskustvima što se često ne slaže s onim što od njih očekuju da znaju srednjoškolski nastavnici matematike.

U ovom radu iznijet ćemo važne ideje koje nastavniku mogu produbiti postojeće razumijevanje geometrije i koje ga mogu voditi u planiranju i izvebi sata i procjenjivanju učenja učenika. Razumjevanje ideja o geometriji omogućuje nastavniku da si predoči kakav utjecaj one ostavljaju na učenike i koju širinu tih ideja učenici poimaju. Ove ideje prožimaju matematiku sa kojom su se učenici već susreli i sa kojom će se susresti tijekom svojeg matematičkog obrazovanja. Geometrija predstvalja glavno područje školske matematike koje je važno da učenici nauče (savladaju), ali ono također predstvalja izazov i nastavnicima u poučavanju. Učenici u srednjoj školi trebaju dobro shvatiti geometrijske ideje ako žele ostvariti dobar uspjeh u školi, ali i pri polaganju mature. U našim školama učenici često vode borbu s idejama vezanima uz geometriju. Važnost svojstava geometrijskih objekata i načini na koja su ta svojstva uklopljena u skice i definicije od velike su važnosti i za nastavnike. Zapravo, geometrijske ideje se koriste u cijeloj matematici. Geometrijski jezik i slikovite predodžbe pružaju dodatne mogućnosti i alate za razvoj i primjenu ideja u mnogo drugih matematičkih područja.

Posao nastavnika matematike u srednjoj školi traži dobro razumijevanje matematike koju škola, postojeći nastavni plan i program te državna matura očekuju od učenika da nauče, a vezano je za geometriju. Posao nastavnika također zahtjeva da zna kako su ove matematičke ideje povezane s drugim idejama s kojima će se učenici susresti u narednim nastavnim satima, trenutnoj školskoj godini i dalje. Bogato matematičko razumijevanje navodi na pravi put odluke nastavnika vezane za većinu njihovog posla kao što su na primjer odabir nastavnih zadataka, postavljanje nedvosmislenih pitanja, odabir materijala, raspored tema i ideja tijekom vremena, procijenjivanje kvalitete rada učenika i smišljanje načina da se njihova razmišljanja razlikuju ili podudaraju.

Razmišljanje o posebnim idejama koje su dio stjecanja razumijevanja geometrije može biti težak zadatak. Postavli smo si kritičko pitanje: koja su temeljna znanja iz geometrije za nastavnike matematike u srednjoj školi koja im omogućuju da budu uspješni u svome radu? Da bismo mogli odgovoriti na ova pitanja, moramo pogledati različita istraživanja iz matematičke edukacije koja su vezana uz geometrijske teme, a posebno ona koja su vezana uz nastavnikov rad. U ovom radu sažet ćemo rezultate nekih istraživanja kroz četiri velike ideje vezane za geometriju. Svaka velika ideja ima manje, specifičnije matematičke ideje koje ćemo zvati *temeljno razumijevanje*.

2 Razumijevanje geometrije i velike ideje

Nastavnici poučavaju matematiku jer žele da ju i drugi razumiju i to na način koji će ih dovesti do uspjeha i zadovoljstva u školi, poslu i životu. Kako bi pomogli učenicima da razviju snažno i trajno razumijevanje geometrije, nastavnici moraju ne samo znati već i razumjeti taj dio matematike. Lako je misliti da razumijevanje jednog područja matematike kao što je geometrija znači poznavanje određenih činjenica, rješavanje posebnih tipova zadataka i baratanje bitnim pojmovima. Na primjer, da bi mogli poučavati geomatriju u srednjoj školi, nastavnici moraju znati i geometriju iz osnovne škole pa tako na primjer trebaju poznavati svojstava nekoliko tipova preslikavanja. Od nastavnika se također očekuje da budu vješti u utvrđivanju kada su dva lika slična ili sukladna i koristeći se preslikavanjima, omjerima i drugim konceptima objasniti zašto ti određeni odnosi vrijede. Pretpostavlja se da nastavnikov matematički rječnik sadrži pojmove kao što su dijagonala, izometrija, pretpostavka, simetrija i centar.

Očito da činjenice, rječnik i tehnike rješavanja određenih tipova zadataka nisu sve što se očekuje od nastavnika da poznaje o geometriji. Na primjer, u budućem radu s učenicima, osim poznavanja svojstava pravaca, kutova, trokuta, četverokuta i kruga i istaknutih teorema, nastavnik mora pratiti razmišljanje učenika kada istražuju slične geometrijske objekate. Učenici formuliraju neočekivane pretpostavke, neke točne, neke netočne, a na nastavniku je da uputi učenika koju pretpostavku valja dalje istražiti i zašto.

Lista matematičkih ideja za koju se očekuje da svi nastavnici matematike u srednjoj školi znaju o geometriji jako je velika. Tvorci kurikuluma ponekad objave takve liste i stvore nastavne programe koji su pretrpani. Međutim važna stavka je da te liste ne mogu obuhvatiti samu bit stjecanja razumijevanja neke teme. Duboko razumijevanje geometrije ne zahtjeva od nastavnika samo poznavanje važnih matematičkih ideja već i prepoznavanje kako su te ideje povezane jedna s drugom. Razumijevanje će se povećavati s iskustvom i s usvajanjem novih ideja i pronalaskom novih veza među već upoznatim idejama.

Nastavnikovo razumijevanje geometrije treba nadmašiti sadržaj predviđen za učenike. Poznavanje samo školske matematike nije dovoljno za rad u nastavi. Nastavnik mora biti i u mogućnosti identificirati i potvrditi ili odbaciti nove tvrdnje. Te tvrdnje i agrumenti mogu se pripisati idejama ili tehnikama koje se nalaze iza matematičkog iskustva učenika i trenutnih kurikularnih očekivanja od njih.

Poučavanje geometrije u srednjoj školi može se provoditi tako da se ona zasebno uči kao poseban predmet. Ovakav pristup je čest u američkim školama. Naš kurikulum je ispresijecan različitim dijelovima matematike. Naizmjenično se u nižim razredima osnove škole uči aritmetika i geometrija, a u višim razredima osnovne škole te u srednjoj školi algebra, geometrija i funkcije. Četiri velike ideje i nekoliko manjih temeljnih razumijevanja međusobno su povezane. Pogledajmo sada njihov pregled:

Velika ideja 1 Rad sa skicama je u središtu geometrijskog mišljenja i zaključivanja.

Temeljno razumijevanje 1a Skica je sofisticirana matematička naprava za razmišljanje i komuniciranje.

Temeljno razumijevanje 1b Skica je „izgrađeni" geometrijski predmet sa svojom pozadinom - priča o uspješnoj konstrukciji i svrsi.

Temeljno razumijevanje 1c Skica nije slika. Ona se mora interpretirati: naučiti kako isčitavati skice može biti kao da učite novi jezik.

Velika ideja 2 Geometrija predstavlja baratanje s promjenjivošću i nepromjenjivošću, unatoč tome što se čini da u njoj prevladavaju brojni teoremi.

Temeljno razumijevanje 2a U pozadini bilo kojeg geometrijskog dokaza je nepromjenjivost - nešto što se ne mijenja dok se nešto drugo mijenja.

Temeljno razumijevanje 2b Nepromjenjivosti su rijetke i mogu se uočiti samo kada proizlaze iz puno veće promjenjivosti.

Temeljno razumijevanje 2c Ispitivanje mogućih promjenjivosti neke nepromjenjive situacije može dovesti do novih pretpostavki i teorema.

Temeljno razumijevanje 2d Geometrija je dinamično proučavanje čak i ako se ponekad čini da je statično.

Velika ideja 3 Rad *sa* i *na* definicijama je u središtu geometrije.

Temeljno razumijevanje 3a Geometrijski objekti mogu imati različite definicije. Neke su bolje od drugih i njihova ispravnost ovisi kako o kontekstu tako i o veličinama (vrijednosti).

Temeljno razumijevanje 3b Definicije u geometriji dolaze u dva različita tipa: definicija *postanka* (kako možemo konstruirati objekt) i definicija *entiteta* (kako možemo okarakterizirati objekt u teminima određenih značajki).

Temeljno razumijevanje 3c Izgradnja definicija zahtijeva kretanje naprijed i nazad između verbalnog i vizualnog.

Velika ideja 4 Pisani dokaz je završna točka procesa dokazivanja.

Temeljno razumijevanje 4a Empirijska potvrda je važan dio procesa dokazivanja, ali nikad ne smije samostalno sačinjavati dokaz.

Temeljno razumijevanje 4b Protuprimjeri su važni: pojedinačni slučajevi mogu opovrgnuti pretpostavku, ali također mogu voditi do modificiranih pretpostavki.

Temeljno razumijevanje 4c Iza (u pozadini) svakog dokaza je ideja dokaza.

3 Velika ideja 1

Velika ideja 1 Rad sa skicama je u središtu geometrijskog mišljenja i zaključivanja.

Nema geometrije bez skica! Skice nam opisuju nešto što se verbalnim jezikom ne može i obratno. One nam služe da bismo zadržali (na papiru, u knjigama, na ploči, na pijesku, u zraku) pokretne slike uma i da kasnije možemo razmatrati i raspravljati o njima. Jedan od izazova učenja geometrije je biti u mogućnosti usaglasiti verbalno razmišljanje s onim prostornim koje je prikazano skicama. Taj izazov se proteže kroz koordinaciju riječi i kombinaciju prostorno-vremenskih dinamičnih skica, koje mogu biti prikazane na kompjuterskim zaslonima, dobivene sklapanjem papira i savijanjem trodimenzionalnih modela. Skice su iznimno povezane s vizualnim slikama. Istovremeno, vizualne slike se koriste za stvaranje novih skica kao i za interpretiranje već postojećih.

3.1 Temeljno razumijevanje 1a: Jedna skica vrijedi 1000 simbola

Temeljno razumijevanje 1a Skica je sofisticirana matematička naprava za razmišljanje i komuniciranje.

Kao što koristimo riječnik na određeni način, stvaranje i isčitavanje skica je nešto što se stječe praksom. Crtanje skica može nam pomoći oko rješavanja nekog problema. Međutim, stvaranje skica može poboljšati razumijevanje „gramatike" geometrijskih skica - to jest ima namjeru prenijeti nam kako je skica građena i kako su povezani različiti elementi skica. Gramatika geometrijskih skica može biti poprilično različita od drugih vizulanih ilustracija na koje smo naišli izvan i unutar škole.

U radu ćemo prikazat neke zadatke sa skicama za vježbu koji uključuju osnovne objekte srednjoškolske geometrije (pravce i krugove) i prikazat ćemo kako je takva vježba povezana s razmišljanjem, komuniciranjem i dokazivanjem. Ove vježbe neće biti previše matematički izazovne, no korisne su jer potiču geometrijsko mišljenje. Dok se crta skica važno je obratiti pozornost na vizualne slike koje se stvaraju u glavi i kako je taj lik povezan s novim crtežom koji je napravljen.

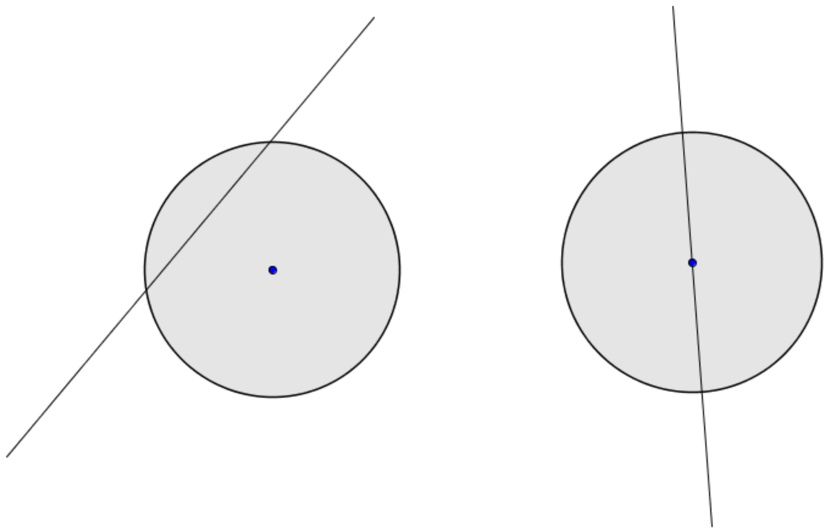
Primjer 1. *Nacrtajte krug i pravac na listu papira. Koliko puta se sijeku? Koliko puta se mogu sjeći?*

Što ćemo prvo skicirati - krug ili pravac? Zašto? Utječe li na to redoslijed zadavanja u zadatku? Što da je Primjer 1. glasio: „Nacrtaj pravac i krug. . . "?

Ako počnemo s krugom, razmišljamo kako ćemo ga skicirati, koliki će biti njegov polumjer, gdje će se nalaziti njegovo središte. Idući korak je crtanje kruga - možemo

„usidriti” ruku u središte i rotirati papir oko njega ili možemo staviti ruku iznad papira kako bismo mogli gledati u središte dok crtamo. Obraćajući pažnju na to kako skiciramo postajemo svjesni svojstava kruga. Sljedeće, kod pravcem smo suočeni s izborom gdje ćemo ga položiti, odnosno koliko mnogo različitih mogućnosti zapravo postoji.

Iz gotove skice ne možemo sa sigurnošću reći što je skicirano prvo. Jesu li dvije konfiguracije na Slici 1 različite ili iste?



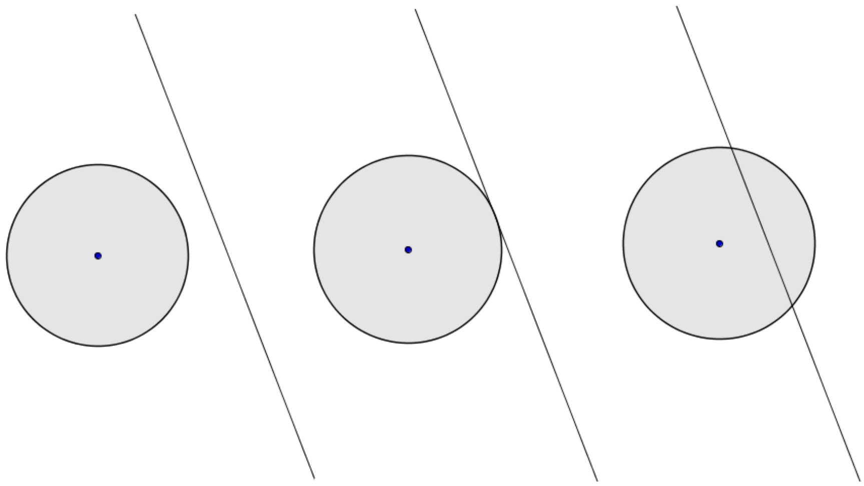
Slika 1: Dvije moguće konfiguracije kruga i pravca koji se sijeku u istoj ravnini

Možda se čine različitima, obzirom da konfiguracija na desnoj slici ima pravac koji prolazi kroz centar kruga pa je specifičnija nego konfiguracija na lijevoj slici. Ali u obje konfiguracije pravac siječe krug točno dva puta. Takav pravac zovemo *sekantom*. Samo ime čini pravac sjekačem. *Sekanta* ili „*linija reza*” dolazi od latinske riječi *seco* značenja „ja siječem”. Pri skiciranju dosta je važno kakav je poredak radnji kojim je neka konstrukcija napravljena te koliki je broj mogućih sjecišta.

Također je moguće da pravac ne siječe krug ili da pravac i krug imaju točno jedno sjecište. Zašto ne mogu biti tri sjecišta? Ili četiri? Proces skiciranja pravca može nam dati odgovore o nemogućnosti tri ili četiri sjecišta. Tri ili više sjecišta zahtijevala bi da se pravac vrati nazad u krug nakon što izađe iz njega, ali to je nemoguće za napraviti ako želimo da pravac ostane ravan.

U skiciranju slučaja s jednim sjecištem, započinjemo rad s idejom *tangente* ili „*dodirnog pravca*”. *Tangenta* dolazi od latinske riječi *tango* značenja „ja diram”.

Rad s tangentom usko je povezan s idejom jednog dodirivanja. Slijed skica na Slici 2, koja prikazuje tri različita tipa sjecišta, također prikazuje vizualni eksperiment u kojem tangenta s krugom formira granicu među slučajevima u kojima nema sjecišta i onoga u kojem pravac i krug imaju dva sjecišta. Možemo zamisliti ovaj slijed kao da je u pokretu u kojem se pravac pomiče u lijevo ili je krug aktivni napadač koji se kreće u desno i zadire u pravac. Ako promatramo statične skice kao dinamične to uključuje uvođenje elementa vremena.



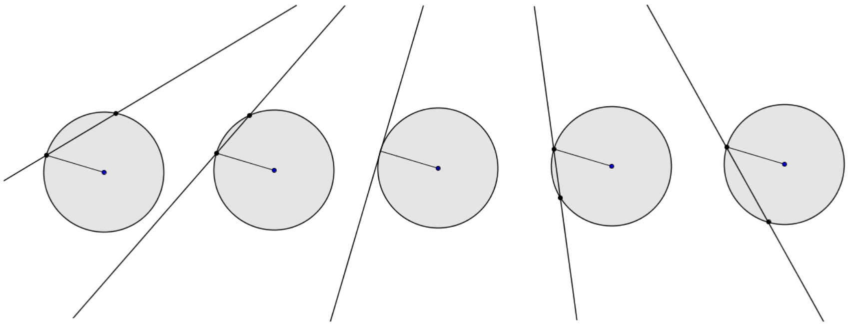
Slika 2: Proučavanje translacije pravca sjecišta

Drugi eksperiment uključuje tangentu i koji može biti kao na Slici 3, na kojoj pravac prolazi kroz danu točku na obodu kruga i može se nagnuti na desnu ili lijevu stranu polumjera, a središnja skica ponovo prikazuje granicu ili prijelaznu etapu u kojoj je pravac okomit na polumjer. Ovaj granični slučaj može se shvatiti kao svojstvo tangente u odnosnu na krug. Proučavanje ovog slijeda skica može nam pružiti drugačiji način geometrijskog razmišljanja.

Skice nam daju odgovor zašto tangenta mora biti okomita na polumjer u zajedničkoj točki (i jednako tome zašto polumjer mora biti okomit na tangentu). Ako polumjer i pravac nisu međusobno okomiti tada će pravac sjeći krug dva puta. Također promatranjem ovih skica dinamički naša pažnja je usmjerena na ključno mjesto - na točku gdje se pravac i krug sijeku (to je točka rotacije pravca).

Promatranje pravca „teturanja” na krajnjoj točki polumjera dovodi nas do razmišljanja o tangenti u terminima simetrije. Polumjer kruga djeluje kao os simetrije tangente pa zbog toga oni moraju biti okomiti.

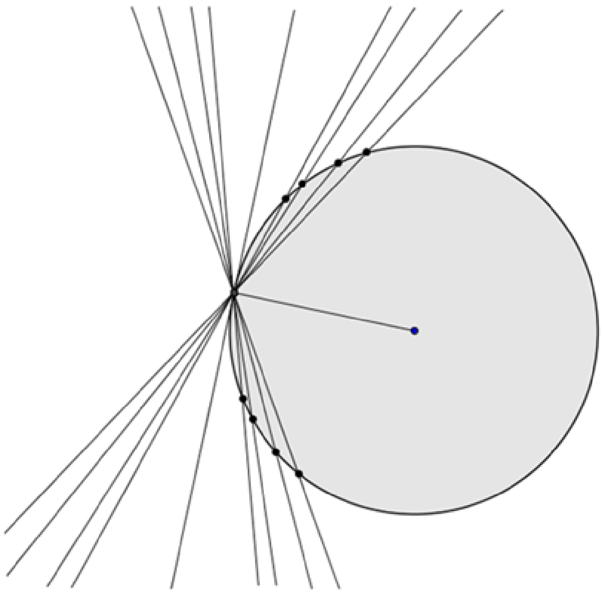
Kao za Sliku 2, rasprava o Slici 3 pruža način u kojem krećemo od skice prema svojstvu. Ovaj pristup obrće uobičajni poredak prikazan u knjigama koji kreće od



Slika 3: Eksperimentiranje naginjanjem pravca sjecišta

svojstava prema ilustrativnim skicama. To nam pomaže u stvaranju skupa imaginarnih slika tako da svojstvo ne bude samo skup riječi.

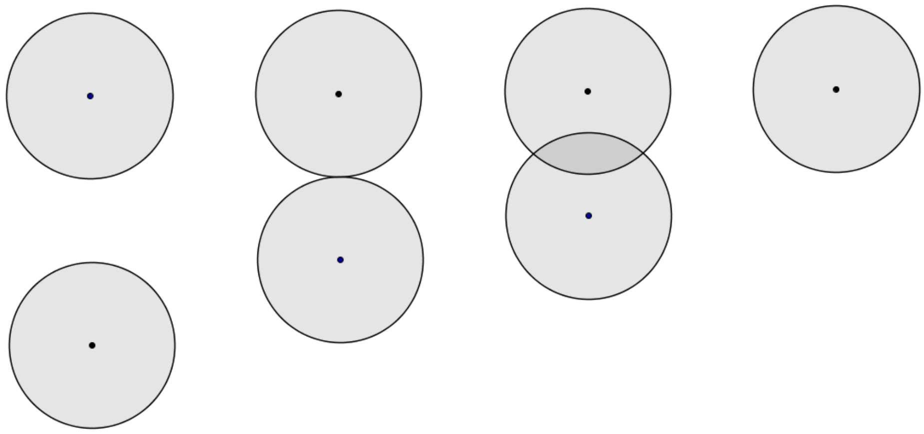
Praćenjem slijeda skica na Slici 3 može nam djelovati dinamično i to na način da zamislimo da se pravac naginje s desna na lijevo. Slika 4 može djelovati još više dinamično. Kao što ćemo raspraviti u nadolazećoj Velikoj ideji 2, iščitavanje geometrijskih skica ponekad uključuje sposobnost da vidimo dinamične promjene. Promatranjem skica koje djeluju kao da se mijenjaju tijekom vremena puno bolje je nego da promatramo više različitih objekata sve u isto vrijeme.



Slika 4: Prikaz dinamičnosti pravca sjecišta

Primjer 2. *Skicirajmo tvrdnju da se dva kruga mogu sjeći niti jednom, jednom, dva ili beskonačno mnogo puta.*

Rješavanje ovog primjera zahtijeva upotrebu skica kako bismo istražili i razmotrili sve situacije. Možemo napraviti niz skica kao što je prikazano na Slici 5.



Slika 5: Prikaz mogućih sjecišta dvaju krugova

Osjećaj dinamičnosti u ovoj situaciji uključuje kretanje kroz vremenu, ali također i kretanje kroz prostor. Također se može uočiti simetričnost skica dvaju krugova koji se približavaju jedan drugome i sjedinjuju se u jedan krug. Je li na našu interpretaciju utjecalo to što je jedan skup krugova skiciran horizontalno?

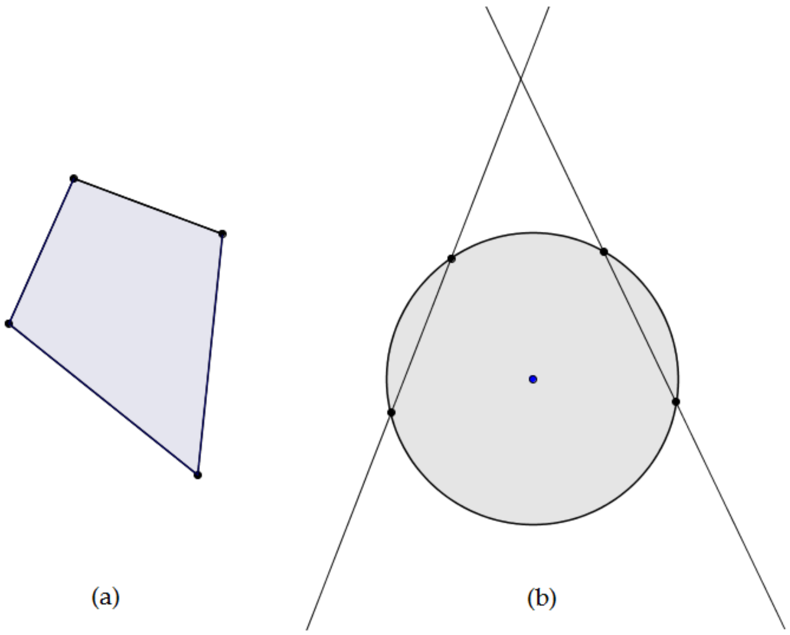
Slični tipovi zadataka mogu se provoditi s bilo kojim geometrijskim zahtijevom. Cilj skiciranja je razvijanje osjećanja obostrane zavisnosti i promjenjivosti različitih geometrijskih objekata i njihovih mogućih konfiguracija. Na taj način razvijamo vizualnu moć i inspiraciju za raspravu.

3.2 Temeljno razumijevanje 1b: Svaka skica priča priču

Temeljno razumijevanje 1b Skica je „izgrađeni” geometrijski predmet sa svojom pozadinom - priča o uspješnoj konstrukciji i svrsi.

Vrlo često skice su već dane. Koriste se za prikaz geometrijskih konfiguracija u terminima u kojima je dani problem postavljen. Kako je neka skica napravljena ili zašto neka skica nije jednaka drugoj u nekim slučajevima nije posve jasno. Popratni tekst može nam dati te informacije u određenoj mjeri, ali skica sama po sebi ne može.

Kada razmišljamo o skicama možemo naići na jednostavne kao što je primjer na Slici 6a ili nešto složenije kao što je primjer na Slici 6b (koja se može shvatiti kao varijacija na temu Slike 1 uključivanjem kruga i dvaju pravaca). Navođenjem samo statične skice na Slici 6a ne možemo biti sigurni je li to deltoid ili je možda proizvoljni četverokut koji nalikuje deltoidu.



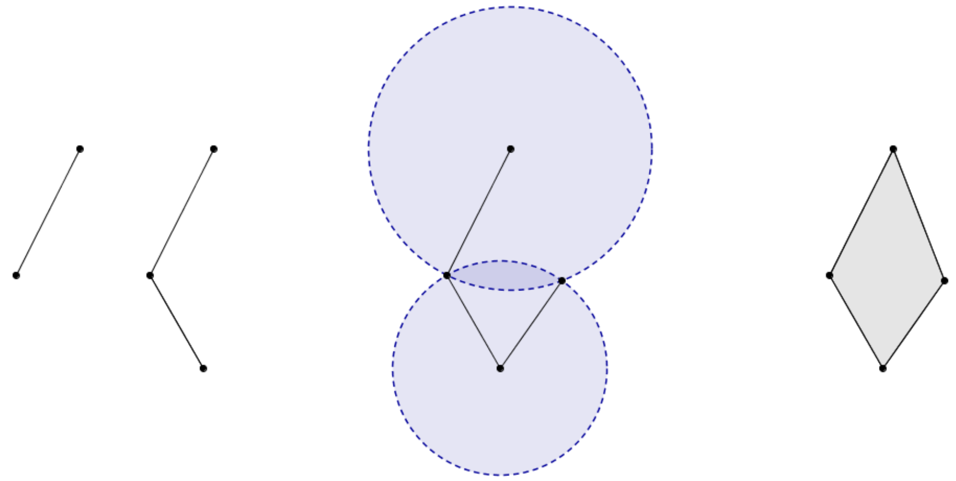
Slika 6: Dvije geometrijske skice različite složenosti

Kombiniranjem onoga što smo pretpostavili, tri jednostavna objekta na određeni način na Slici 6b predstavljaju konfiguraciju koja daje polazište za teorem o potenciji točke na kružnicu. Jesu li prvo dva pravca nacrtana, a zatim svaki od njih presječen krugom u dvije točke? Jesu li zadani točka kao sjecište dvaju pravaca i krug, a nakon toga su skicirana dva pravca? To je nemoguće reći iz skice. Moguće su različite pozadinske priče koje stvaraju razliku. Primjer 3 govori o takvoj priči.

Primjer 3. *Što je moguća pozadina za skicu deltoida na Slici 6a? Može li skica imati drukčiju pozadinu ili više različitih pozadinskih priča? I može li pozadina ovisiti o alatima koji su korišteni da se to skicira?*

Zašto se brinemo oko pozadine kako je nastala skica? Razlog je jednostavan: priča nam otkriva način u kojem su različiti dijelovi skice ovisni jedni o drugima. Pozadina skreće pozornost na ono što je dano i na svojstva da određena skica može komunicirati i davati označenje.

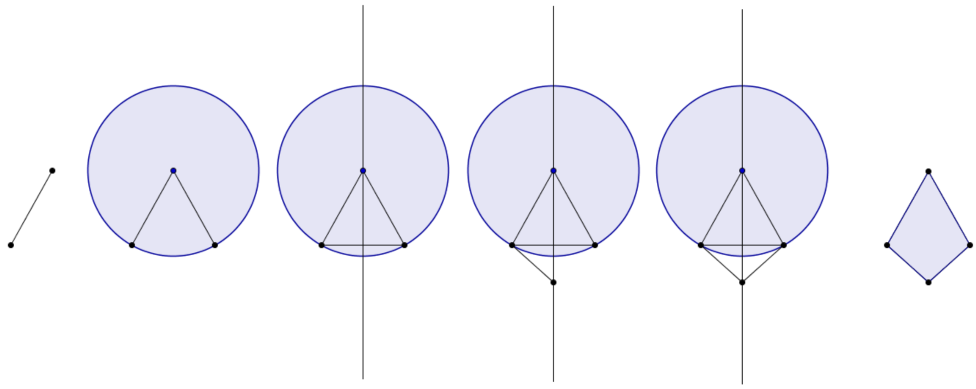
Moguća pozadina Slike 6a je prikazana na Slici 7, koja započinje s proizvoljnim dužinom, dodavanjem druge dužine i zatim kružnicama se odredi četvrti vrh i na taj način se konstruiraju dva skupa susjednih sukladnih strana. Četvrta skica u nizu predstvalja završetak te pozadine - „ustaljeno (čvrsto) stanje" skice. Priča nam prenosi ideju da konstrukcija deltoida može započeti s dvije proizvoljne dužine povezane u jednom vrhu. To znači da je deltoid potpuno određen sjecištem kružnica čija su središta krajevi dužina koji nisu zajednički. Svaki put kada vidimo deltoid možemo si zamisliti ove dvije kružnice koje se nalaze u njegovoj pozadini.



Slika 7: Prva moguća „pozadina" za skicu deltoida

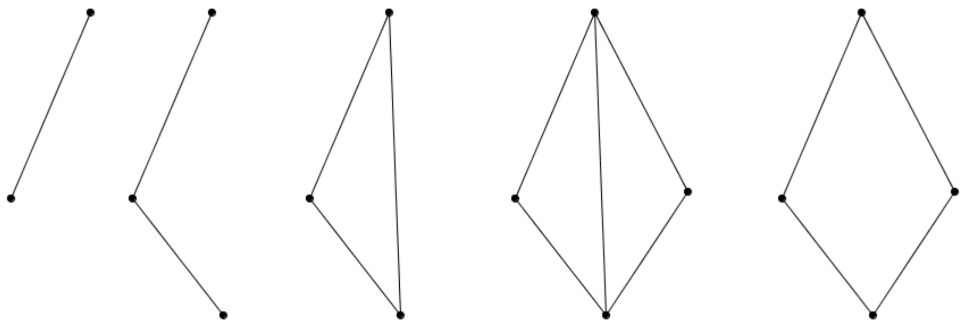
Slika 8 prikazuje nam drugačiju pozadinu. Umjesto da počnemo s dvije proizvoljne dužine, možemo početi s jednom dužinom i susjednom sukladanom dužinom koja je konstruirana pomoću kružnice. Treća skica nam prikazuje simetralu one dužine čije krajnje točke leže na kružnici, a krajevi su sukladnih dužina. Simetrala prolazi i zajedničkim vrhom tih dužina. Četvrti vrh se konstruira na simetrali dužine i spoji se sa svakom sjecišnom točkom na kružnici.

Prva priča vodi do određenog niza promjena od početka. Mijenjanjem duljina dužina ili kuta kojeg te dužine zatvaraju, generira se određena familija deltoida. Druga priča uključuje razmatranje gdje se četvrti vrh može nalaziti i što se događa ako se on nalazi unutar trokuta. Druga priča vodi do točno istog zaključka kao i prethodna. U ovoj priči simetrala daje drugi par susjednih sukladnih dužina. Prvi kut je proizvoljan, ali kasnije nije kada se u konstrukciji napravi drugi izbor - izbor točke na simetrali. Ovaj izbor nije u potpunosti proizvoljan zato što četvrti vrh mora ležati na simetrali.



Slika 8: Druga moguća „pozadina” za skicu deltoida

Obje ove priče uključuju korištenje ravnala i šetara kao alata (ili u dinamičnom geometrijskom okruženju pravaca i kružnica kao alata). Ali treća priča je prikazana na Slici 9 i razlikuje se od prethodne dvije u tome što se u četvrtom koraku koristi preslikavanje kao alat da se dovrši konstrukcija.

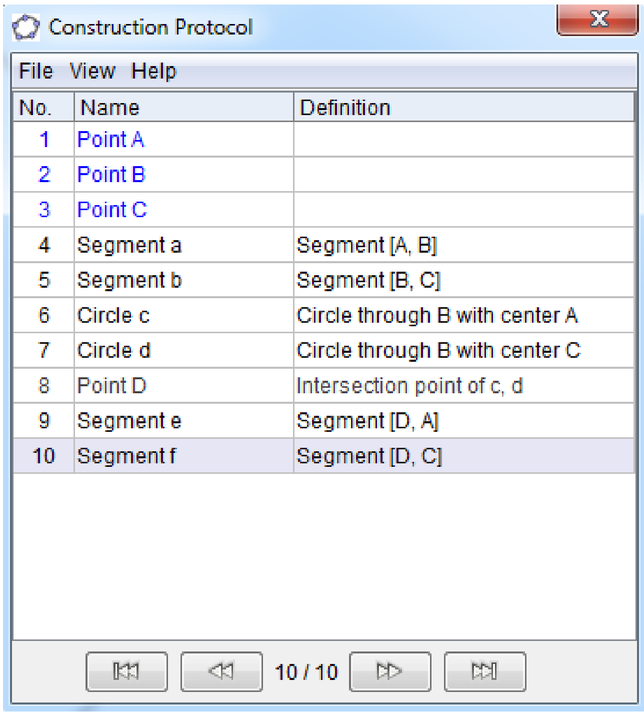


Slika 9: Treća moguća „pozadina” za skicu deltoida

Dvije početne dužine simetrično su preslikane obzirom na dužinu koja je konstruirana u trećem koraku, a spaja krajeve dviju početnih dužina. Ponovo, kao zaključak dobivamo deltoid. Međutim u ovome slučaju pravac ima drugačiju ulogu od prethodne gdje je korištena simetrala. Ovdje je on prije svega ogledalo. Ova priča nam skreće pozornost mnogo više na simetričnost deltoida, nego na činjenicu da dvije susjedne dužine imaju iste duljinu.

Vizualne pozadine koje smo razmatrali također imaju i svoje povezane usmene pozadine. Primjer 4 traži da razmotrimo priču koja je ispričana različitm reprezentacijama. Upotrebom pregleda skripti u *GeoGebri* moguće je vidjeti opisani niz koraka za bilo koju skicu u *GeoGebri*. Primjer 4 prikazuje deltoid koji ovisi o izboru triju točaka.

Primjer 4. *Koju priču za deltoid nam govori sljedeća skripta ili opisna povijest koraka na Slici 10 ?*



No.	Name	Definition
1	Point A	
2	Point B	
3	Point C	
4	Segment a	Segment [A, B]
5	Segment b	Segment [B, C]
6	Circle c	Circle through B with center A
7	Circle d	Circle through B with center C
8	Point D	Intersection point of c, d
9	Segment e	Segment [D, A]
10	Segment f	Segment [D, C]

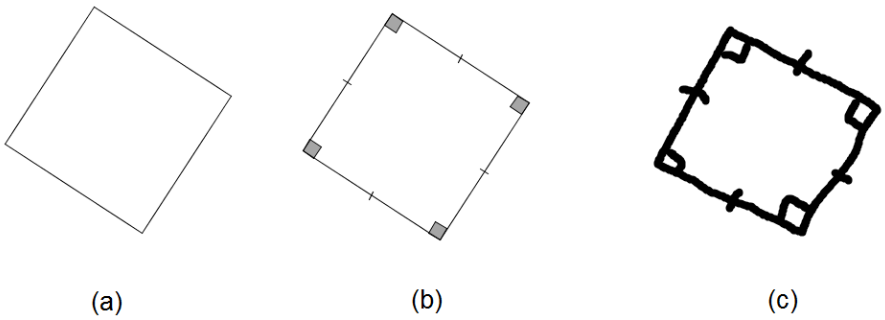
Slika 10: Skripta ili opisna povijest koraka

Ako bismo rješavali ovaj zadatak vjerojatno bismo skicirali sve objekte opisane ovim koracima i dobili bismo deltoid. Na taj način bismo išli od usmenog prema vizualnom. Ovaj postupak naglašava razliku između dvaju tipova pozadina. U skicama deltoid ima određenu lokaciju, veličinu i orijentaciju, ali u skripti nema. Nedostatak skica je taj što nemaju oznake, a oznake su osnova u skriptama. Skica nam daje jedan deltoid dok skipta može proizvesti bilo koji deltoid. Skice skrivaju svoju pozadinu, dok nam skripte svoju pozadinu govore. Evidentno je da svaki od postupaka ima različite prednosti i nedostatke i uspješan rad se može napraviti ako koristimo oba postupka.

3.3 Temeljno razumijevanje 1c: Izazov iščitavanja skica

Temeljno razumijevanje 1c Skica nije slika. Ona se mora interpretirati: naučiti kako iščitavati skice može biti kao da učite novi jezik.

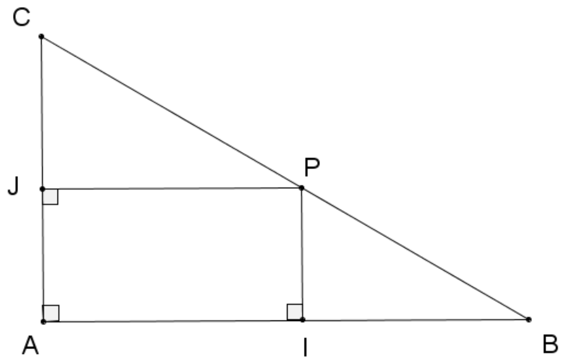
U raspravi o Temeljnom razumijevanju 1b vidjeli smo nekoliko skica deltoida. Svaka skica se može iščitati na poseban način, a ne kao prikazivanje ideja za deltoid. Kako bismo prikazali razliku između crteža i slike promotrimo Sliku 11a. Taj lik netko može nazvati „rombom”. Ukoliko ga nazovemo „kvadratom” to onda podrazumijeva uspoređivanje tog lika sa svojstvima kvadrata koji ima četiri prava kuta i četiri jednake strane (drugim riječima kvadrat je pravilni četverokut).



Slika 11: Interpretiranje skica

Lakše bismo nazvali skicu na Slici 11a kvadratom ako pogledamo skicu na Slici 11b na kojoj ključne oznake naglašavaju svojstva kvadrata. Ta skica se može promatrati kao općeniti kvadrat. Ponekad su prostoručno nacrtane skice već dane. Takve skice se ne koriste da bi vizualno predstavljale nešto željeno, već da opisno, uključujući simbolične oznake, istaknu tražena svojstva. Primjer 5 predstavlja drugačiji tip zadatka. On uključuje nekoliko geometrijskih oblika i predstavlja malo veći matematički izazov.

Primjer 5. *Neka je dan pravokutan trokut BAC s pravim kutom pri vrhu A, te neka je P točka na dužini $\overline{BC}$ i I točka na dužini $\overline{AB}$ takva da je dužina $\overline{PI}$ okomita na dužinu $\overline{AB}$, i J točka na dužini $\overline{AC}$ takva da je dužina $\overline{JP}$ okomita na dužinu $\overline{AC}$. Gdje bi se trebala nalaziti točka P na dužini $\overline{BC}$ tako da je duljina dužine $\overline{IJ}$ najmanja?*



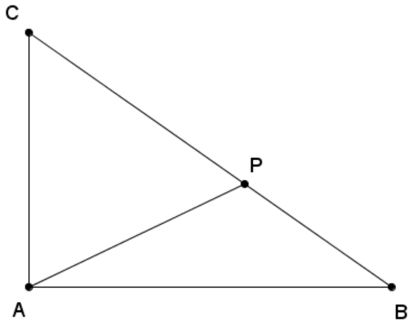
Slika 12

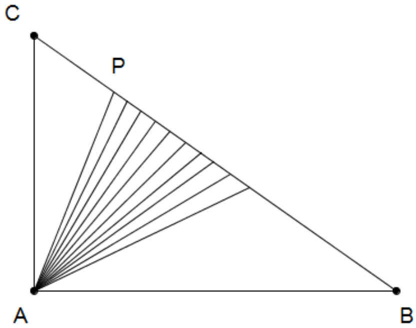
Ovaj zadatak bi se poprilično teško shvatio da nema danog prikaza. Prvo, možemo promatrati skicu kao cjelinu i promatrati globalno sve elemente i odnose u zadatku. Ali obzirom da se u zadataku traži odnos između $\overline{IJ}$ i P možemo pristupiti skici više operativno i bazirati se na njenom jednom dijelu - u ovome slučaju na pravokutniku $PIAJ$.

Možemo iz cjeline izvući lika $PIAJ$. Da bismo riješili zadatak možemo promatrati skicu i uvijete zadatka. Prvo utvrdimo da je $PIAJ$ stvarno pravokutnik i da zadatak traži nešto vezano za dijagonalu $\overline{IJ}$, a ne da su $\overline{IJ}$ i $\overline{AP}$ jednake duljine. Ovo nam može dati drugu skicu koja skreće našu pažnju s pravokutnika $PIAJ$ na pripadajuće trokute APB i APC. Sada je pitanje kako minimizirati duljinu $\overline{AP}$ i to nas može dovesti do definicije najkraće udaljenosti između točke A i dužine $\overline{BC}$. Sljedeće, u obzir možemo uzeti ideju da se točka P kreće duž dužine $\overline{BC}$ sve dok $\overline{AP}$ ne poprimi najkraću udaljenost kao što je prikazano na Slici 13.

Vidimo da je odnos između skice i uvjeta zadatka zavisan i ponekad zahtijeva stvaranje novih skica. Ako ostanemo na perceptivnom nivou skica dana u samom zadatku može se činiti posve različitom i nepovezanom sa skicom na Slici 13 i pomoću nje teško bismo došli do rješenja problema. Možemo zaboraviti na I i J i posvetiti se novom objektu, $\overline{AP}$, koji nije uključen u uvijete problema. Preciznim crtanjem dužine $\overline{AP}$ možemo ju dovesti u postojanje i početi ju tretirati kao objekt koji je istovjetan rješenju. Iščitavanje skice u Primjeru 5 uključuje ne samo vizualno shvaćanje skiciranja već i dešifriranje oznaka (posebno oznaka za prave kutove pri vrhovima A, I i J). Možda je još važnije to što uključuje zapažanje da P ima mogućnost da se nalazi bilo gdje duž $\overline{BC}$.

Kada radimo s geometrijskim skicama ponekad ih moramo promatrati na različite načine - na primjer crtanje posebnih situacija, ali ponekad i razmatranje generali-





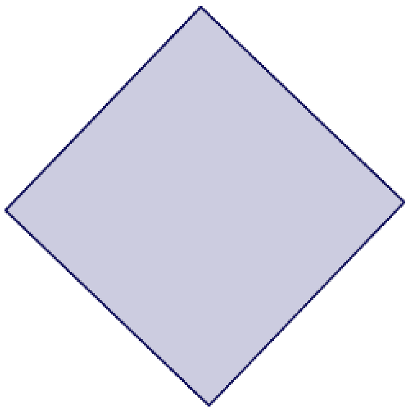
Slika 13: Moguće rješenje Primjera 5

ziranih situacija. Upotrebom matematičkih geometrijskih alata možemo si olakšati iščitavanje skica umjesto da promatramo statične skice na listu papira.

4 Velika ideja 2

Velika ideja 2 Geometrija predstavlja baratanje s promjenjivošću i nepromjenjivošću, unatoč tome što se čini da u njoj prevladavaju brojni teoremi.

Ideja nepromjenjivosti ili invarijantnosti navodi da se nešto ne mijenja (ili se mijenja na predviđeni i ograničeni način) u usporedbi s pozadinom nečeg drugoga što se definitivno mijenja. Nepromjenjivost je središnja ideja u matematici pa tako je jednako važna i za geometriju i za poučavanje geometrije. Ako nastavnik učenicima pokaže geometrijski lik kao što je ovaj na Slici 14 i pita ih da ga imenuju, učenici će reći da je to „romb". Ukoliko im nastavnik kaže da to može također biti kvadrat učenici će odgovoriti da to ne može biti kvadrat jer je nagnut na jednu stranu. Učenici su navikli da kvadrat ima jednu stranicu parelelnu s bazom papira ili ekrana. Ovaj primjer kao i brojni drugi ukazuju nam da učenici imaju ograničen osjećaj za promjene vezane za geometrijske likove i konstrukcije.



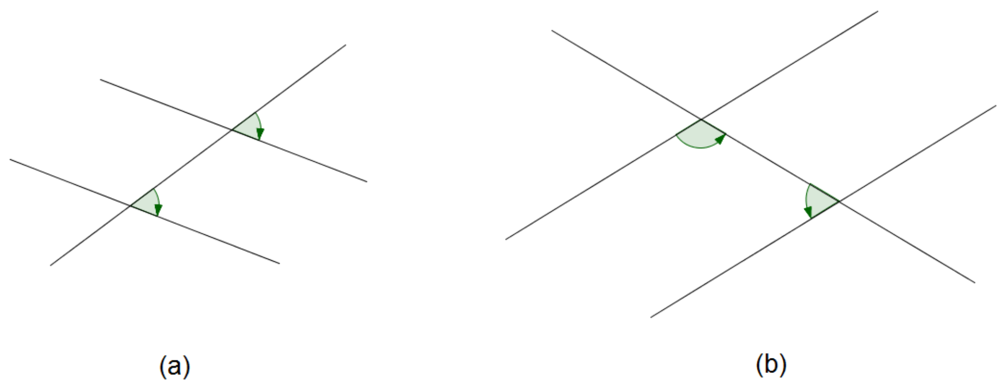
Slika 14: Kvadrat ili romb?

Razumijevanje pojma kvadrata uključuje i osjećaj za moguće promjene ili prostorne promjene. Nedostatak prostorne promjene povezan je s orijentacijom skice i rubovima papira. Riječ kvadrat u geometriji uključuje sve moguće promjene koje kvadrat može poprimiti, a da zadrži sva svoja svojstva. Svojstva koja kvadrat posjeduje kao što su svi sukladni kutovi i sve sukladne stranice su nepromjenjivi u skupu svih kvadrata, pa je u tome smislu i kvadrat nepromjenjiv lik.

Dinamični geometrijski programi su snažan alat za skretanje pozornosti na nepromjenjivost kada nešto mijenjamo. Povlačenjem vrhova kvadrata po ekranu možemo napraviti veliki raspon različitih kvadrata. Mijenjanjem duljina stranica, pozicije i orijentacije kvadrata stvaramo slikovitu i trajnu predodžbu kvadrata koju ne bismo mogli napraviti na nekakvom statičnom primjeru (listu papira ili ploči).

S geometrijskog gledišta većina teorema su rezultat proučavanja dopuštenih promjena koje ne mijenjaju odnose ili svojstva. Teoremi određuju specifične nepromjenjivosti, ali također navode i okolnosti pod kojima te nepromjenjivosti ostaju nepromjenjene. Na primjer mijenjanjem oblika trokuta njegova suma unutarnjih kutova će ostati ne promjenjena. U ovome primjeru središnja i važna ideja koja je sadržana i u samome teoremu je nepromjenjivost sume kutova. Zbroj kutova u trokutu iznosi 180° i ta vrijednost je nepromjenjiva.

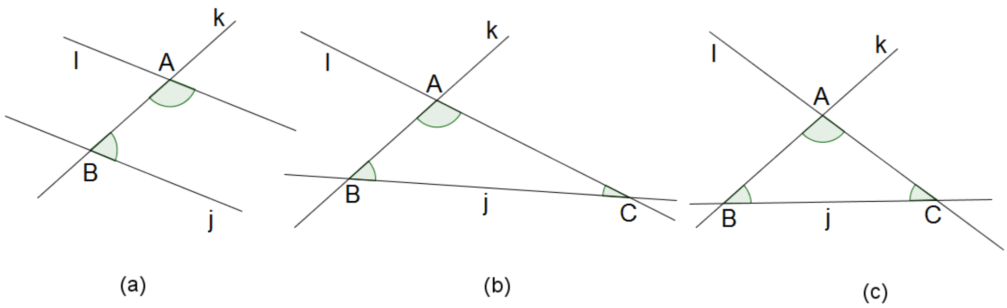
Za drugi primjer možemo uzeti kutove uz transverzalu paralelnih pravaca. Bez obzira kako položimo transverzalu na paralelne pravce odnos između povezanih parova kutova ostaje nepromijenjen (Slika 15a). Na Slici 15b prikazana je nepromjenjivost odnosa između dvaju označenih kutova kojima je suma uvijek 180° .



Slika 15: Kutovi s nepromjenjenim odnosima

U školskoj geometriji postoji skup teorema vezanih za transverzalu dvaju paralelnih pravaca koji kažu da su parovi kutova sumplementarni (Slika 16a). Teorem o sumi kutova u trokutu je nepromjenjivo svojstvo za sve trokute. Ako rotiramo pravac j oko vrha B obrnuto od smijera kazaljke na satu bez da se j i k podudare dobivamo točku C kao sjecište pravaca j i l. Time je određen trokut ABC. Bez obzira za koliko malo rotirali pravac suma kutova u trokutu ostaje nepromijenjena.

Možemo primjetiti da su dvije nespojive konfiguracije (trokut i transverzala dvaju paralelnih pravaca) i dva teorema (teorem o sumi kutova u trokutu i teorem o transverzali dvaju pararelnih pravaca) usko povezani.



Slika 16: Od transverzale do trokuta rotiranjem pravca j oko B

4.1 Temeljno razumijevanje 2a: Od kuda potječu geometrijski teoremi

Temeljno razumijevanje 2a U pozadini bilo kojeg geometrijskog dokaza je nepromjenjivost - nešto što se ne mijenja dok se nešto drugo mijenja.

Bez ograničenja ne bismo imali teoreme. Ograničenja dopuštaju niz promjena iz kojih dobivamo određena svojstva i odnose. Uočili smo da suma kutova u trokutu ostaje ne promijenjena iako sam trokut mijenja svoj oblik i veličinu. Pitagorin teorem je drugi primjer za nepromjenjivost, a vrijedi za širok spektar pravokutnih trokuta. Nepromjenjivost se pojavljuje u svim dijelovima matematike, ali u geometriji raspon promjena uključuje kontinuitet. Najvažniji zadatak u geometrijskom radu je identificiranje nepromjenjivosti i identificiranje stvari koje se mijenjaju dok nešto drugo ostaje isto.

4.2 Temeljno razumijevanje 2b: Povratak na isto

Temeljno razumijevanje 2b Nepromjenjivosti su rijetke i mogu se uočiti samo kada proizlaze iz puno veće promjenjivosti.

Raspravu o Temeljnom razumijevanju 2b započet ćemo s Primjerom 6.

Primjer 6. *Skicirajmo jedan trokut. Promatrajući unutrašnjost trokuta što sve možemo promijeniti da ostalo ostane nepromijenjeno?*

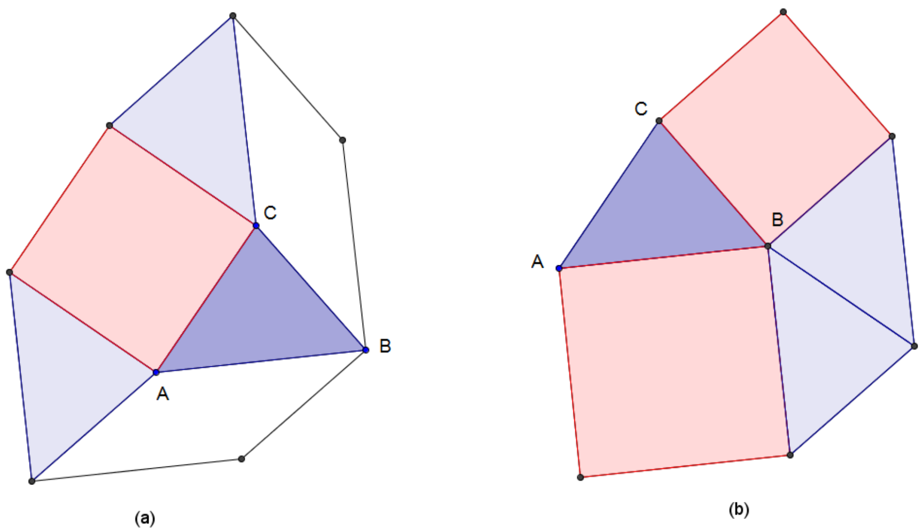
Ovakav zadatak se rijetko pojavljuje u školi. Većina zadataka su tipa da se odrede veličine kutova u trokutu. Ovaj zadatak će nam pokazati da su nepromjenjivosti rijetke u geometriji. Osim nepromjenjenosti sume kutova u trokutu što još može biti nepromjenjivo u trokutu?

Ako imamo tupokutan trokut tada je stranica nasuprot tupog kuta uvijek veća od svake druge stranice. Ali također u tupokutnom trokutu je duljina stranice nasuprot tupog kuta manja od zbroja preostalih stranica. Ovo svojstvo vrijedi za bilo koji trokut (nejednakost trokuta).

Pitagorin teorem možemo promatrati na isti način. Obzirom da je zbroj duljina dviju stranica trokuta uvijek veći od duljine treće stranice, promatranjem pravokutnog trokuta i konstruiranih kvadrata nad njegovim stranicama možemo primjetiti da je ta prednost nestala, odnosno suma kvadrata duljina dviju stranice upravo odgovara kvadratu duljine hipotenuze.

Ako usmjerimo pažnju na kvadrate, što možemo reći o odnosu kvadrata nad stanicama u nepravokutnom trokutu? Vizualnim eksperimentom na šiljastokutnom trokutu možemo se uvjeriti da je kvadrat duljine stranice nasuprot najvećeg kuta uvijek manji od sume kvadrata duljina preostalih stranica. Isto tako u tupokutnom trokutu je kvadrat duljine stranice nasuprot tupog kuta uvijek veći od zbroja kvadata duljina preostalih stranica. Ovo je jedna verzija kosinusovog poučka. Možemo li biti malo precizniji u vezi te razlike?

Slika 17 prikazuje dva različita načina konstruiranja sedmerokuta iz šiljastokutnog trokuta ABC. Na Slici 17a prvo je konstruiran kvadrat nad $\overline{AC}$, a zatim nad dvije stranice toga kvadrata su konstruirana dva sukladna trokuta trokutu ABC. Na taj način smo dobili dva paralelograma. Na Slici 17b prvo su konstruirani kvadrati nad $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$, a zatim smo dobili parelologram koji je sastavljen od dva sukladna trokuta trokutu ABC, kao što je prikazano.

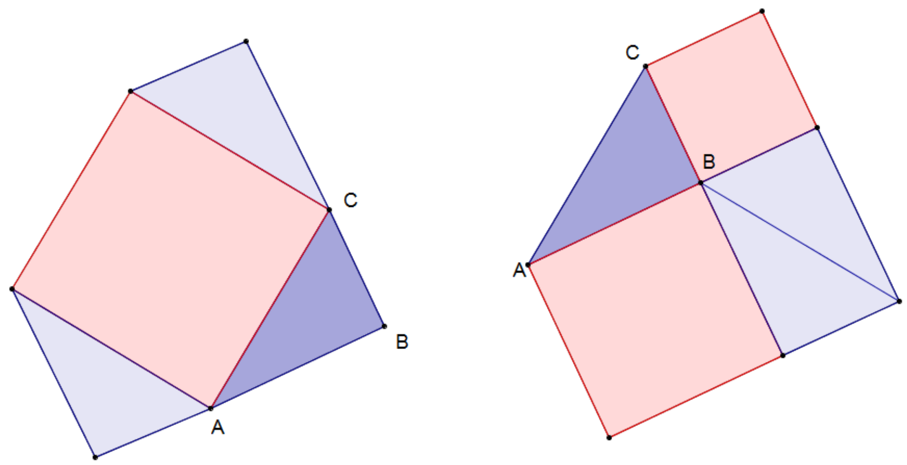


Slika 17: Dva načina raščlanjivanja istog sedmerokuta

Tvrdimo da su dva sedmerokuta identična. Vidimo da svaki od njih ima tri sukladna trokuta. Sedmerokut na lijevoj skici ima kvadrat nad stranicom $\overline{AC}$ i dva parelograma, dok sedmerokut na desnoj skici ima kadrate nad $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Dva bijela paralelograma na lijevoj skici imaju jednake površine:

$$|BC| \cdot |AC| \cdot \cos(\sphericalangle ACB)$$

Primijetimo da ako je početni trokut ABC pravokutan tada paralelogrami nestaju (Slika 18), a sedmerokut postaje peterokut i na taj način smo dokazali tvrdnju.



Slika 18: Dva načina raščlanjivanja istog peterokuta

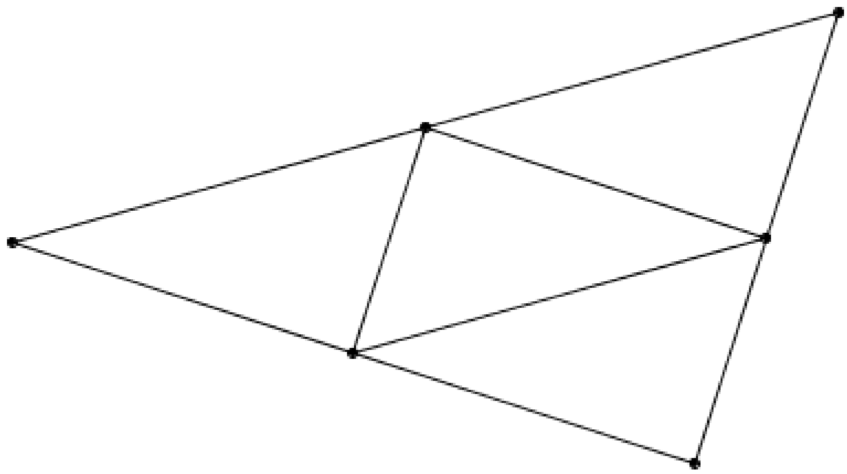
4.3 Temeljno razumijevanje 2c: Od kuda potječu pretpostavke

Temeljno razumijevanje 2c Ispitivanje mogućih promjenjivosti neke nepromjenjive situacije može dovesti do novih pretpostavki i teorema.

U Temeljnom razumijevanju 2c opisat ćemo direktno mijenjanje ograničenja na geometrijske situacije i konfiguracije. Za Primjer 6 mogli smo se pitati što ako trokut nije pravokutan? Također smo se mogli pitati što ako nisu konstruirani kvadrati nad stranicama već krugovi, pravilni poligoni ili pravokutnici?

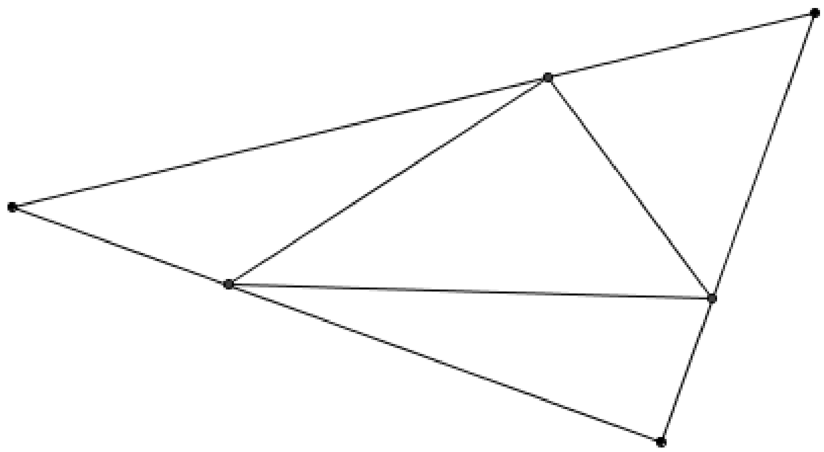
Sva ta „što ako?" pitanja možemo dobiti promatranjem iskaza Pitagorinog teorema i razmatranjem na koji način se ona mogu mijenjati. Čitanjem teorema na glas nekoliko puta svaki puta možemo istaknuti drugu riječ i na taj način možemo razmišljati o njoj na koji način se ona može promijeniti tako da dobijemo novo razmatranje. Uočimo važne riječi u Primjeru 7.

Primjer 7. *Polovišta stranica trokuta kreiraju trokut sličan početnom trokutu, a površina mu je jednaka jednoj četvrtini površine početnog trokuta.*



Slika 19: Trokut sličan početnom trokutu

U ovome slučaju iskaz nepromjenjivosti ovisi o dvije riječi *trokut* i *polovište*. Što ako ne koristimo polovišta stranica? Koja je druga alternativa? Ovo je etapa u kojoj radimo na kreiranju promjena - mijenjamo ideju polovišta. Jedna opcija može biti da koristimo $\frac{1}{3}$ ili $\frac{1}{4}$.



Slika 20: Slučaj s $\frac{1}{3}$

Skica 20 prikazuje primjer kada koristimo $\frac{1}{3}$. U ovome slučaju unutrašnji trokut nije više sličan početnom, ali njegova površina je jednaka $\frac{1}{3}$ površine početnog trokuta. U slučaju $\frac{1}{4}$ omjer površina nije $\frac{1}{4}$ kao što bi se nadali već je odprilike $\frac{1}{2}$.

Nepromjenjivost je izgubljena, ali pojavile su se nove pretpostavke: ako koristimo $\frac{1}{n}$ za kreiranje unutrašnjeg trokuta omjer površina trokuta također raste. Povećanjem n unutrašnji trokut će se podudariti s početnim i zbog toga omjer površina trokuta teži prema $\frac{1}{1}$.

Druga moguća promjena uključuje promjenu riječi *trokut*. Što ako umjesto trokuta imamo četverokut? Možemo li dobiti središnji četverokut spajanjem odgovarajućih točaka? Kao u slučaju promjene polovišta, slučaj promjene trokuta vodi nas ne samo do četverokuta nego do bilo kojeg mnogokuta.

Srednjoškolska geometrija teži naglašavanju nepromjenjivosti koje su povezane s duljinom, površinom i kutom. Međutim simetričnost je također svojstvo koje se može mijenjati ili ispitivati zbog moguće nepromjenjivosti. Na primjer, jednakokračan trokut se može promatrati kao nepromjenjiv jer uvijek ima dvije stranice jednake duljine (ili dva kuta jednake veličine). S gledišta simetričnosti jednakokračan trokut ima pravac simetrije kao nepromjenjivo svojstvo.

4.4 Temeljno razumijevanje 2d: Kretanjem ostaje nepromijenjeno

Temeljno razumijevanje 2d Geometrija je dinamično proučavanje čak iako se ponekad čini da je statično.

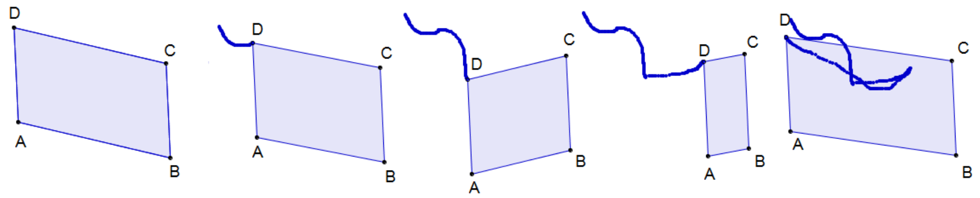
Temeljno razumijevanje 2d ističe da je pročavanje geometrije dinamično iako nam se čini kao da je statično. Ova tvrdnja nas može iznenaditi, ali to je sve zbog statičnih alata koje koristimo za stvaranje geometrijskih objekata i izvora iz kojih učimo o geometriji. Kao što smo naglasili u Temeljnom razumijevanju 1b proces stvaranja skica je dinamičan. Također smo pokazali u Temeljnom razumijevanju 1a da načini razmišljanja o skicama također mogu biti dinamični.

U većini stvari o kojima smo govorili dinamičnost je ponekad izgubljena. Možemo reći da je „kvadrat pravokutnik", a zapravo mislimo da je „kvadrat posebna vrsta pravokutnika". Kada radimo u dinamičnom geometrijskom okruženju možemo reći da se „iz svakog pravokutnika može dobiti kvadrat". Rasprava o Velikoj ideji 2 bazirana je na prikazivanju načina na koje su geometrijski teoremi prikazani u obliku promjenjivosti i nepromjenjivosti. Raspravljali smo i o tome da razmišljanje o teoremima u terminima promjenjivosti i nepromjenjivosti povećava našu sposobnost njihovog boljeg razumijevanja.

Većina promjenjivosti i nepromjenjivosti koje se pojavljuju u školskoj geometriji uključuje nekakve vrste kontinuiranih preslikavanja. Polazeći od osnovne razine možemo razmišljati o definicijama kao tvrdnjama o promjenjivosti i nepromjenjivosti.

Pri konstruiranju nekakvog geometrijskog lika izvodimo određeni niz geometrijskih koraka upotrebom ravnala i šestara kako bismo zadovoljili svojstva toga geometrijskog lika. Na primjer paralelogram ima nasuprotne stranice paralelne. U dinamičnom geometrijskom okruženju kao što je *GeoGebra* za praćenje konstrukcije osim šestara i ravnala možemo upotrijebiti i *test povlačenjem*. Cilj testa povlačenjem je utvrđivanje valjanosti konstrukcije to jest hoće li se povlačenjem različitih elemenata konstrukcije konstrukcija raspasti ukoliko neki element konstrukcije promijenimo (duljinu stranice, veličinu kuta...). To nam također daje spektar promjena koje konstrukcija može poprimiti.

U slučaju paralelograma (Slika 21) skica dobivena povlačenjem originalnog paralelograma prikazuje svojstva koja ostaju nepromjenjena - nasuprotne stranice paralelne, nasuprotni kutovi jednaki, nasuprotne stranice jednake, dok s druge strane duljina stranica i veličina kutova se može mijenjati.



Slika 21: Paralelogram podvrgnut testu povlačenja

Prednost dinamičnih definicija leži ne samo u jednostavnosti uočavanja spektra specifičnih primjera za dani geometrijski lik već i u pomaganju oko procesa konstruiranja. Na primjer kada promatramo dijagonale paralelograma možemo primijetiti prilikom skiciranja da se one uvijek sijeku. Iz svojstava paralelograma teško ćemo to uočiti. Ali kada povlačimo paralelogram s označenim njegovim dijagonala možemo uočiti nepromjenjivost tog odnosa. Test povlačenjem služi kao povećalo da se skrene pozornost na nepromjenjivost koju svi mogu uočiti.

5 Velika ideja 3

Velika ideja 3 Rad *sa* i *na* definicijama je u središtu geometrije.

Zanimljivo izvješće između učitelja geometrije i učenika o geometrijskim definicijama potječe s kraja 18. stoljeća. Učitelj je bio Gaspard Monge, poznati geometar, a učenik Joseph Fourier. Fourier je kritizirao definiciju dužine koja se nalazila u udžbenicima (Arhimedova klasična definicija) da je dužina najkraći put između bilo koje dvije točke koje leže na tome putu.

Fourier je predložio drugu definiciju baziranu na ideji mjesta uz ograničenje posebne duljine: dužina se sastoji od onih točaka koje su jednako udaljene od triju čvrstih točaka u prostoru. Fourier je povezao tu definiciju s definicijom ravnine kao skupom točaka koje su jednako udaljene od dviju čvrstih točaka i definicijom sfere (ili kručnice) kao skupom točaka koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke.

5.1 Temeljno razumijevanje 3a: Definicije su alat za geometrijsko istraživanje

Temeljno razumijevanje 3a Geometrijski objekti mogu imati različite definicije. Neke su bolje od drugih i njihova ispravnost ovisi kako o kontekstu tako i o veličinama (vrijednosti).

Da bismo vidjeli kako geometrijske definicije mogu biti promjenjive i kako mogu utjecati na način razmišljanja o danim objektima razmotrit ćemo jedan poseban slučaj.

Izbor pitanja za početno istraživanje može biti iznenađujući:

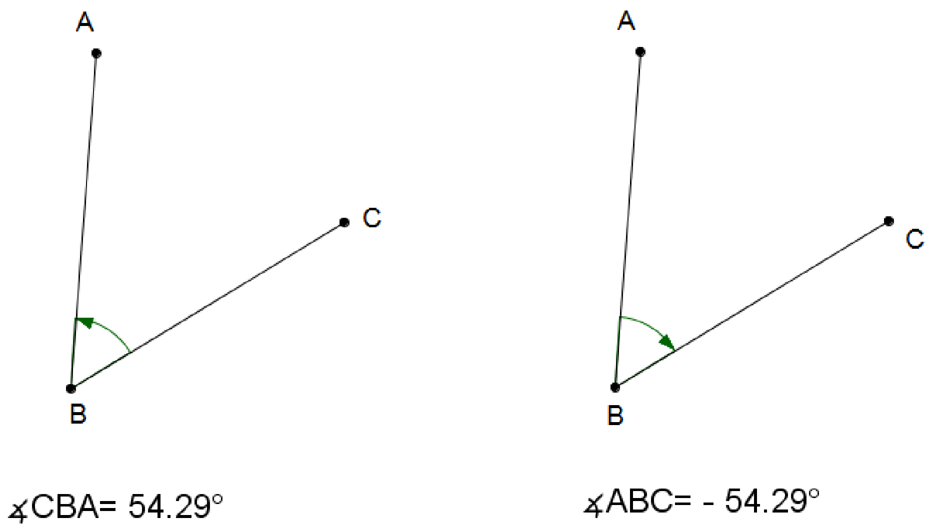
Koliko kutova ima trokut?

Raspravu ćemo započeti od samog imena lika. Samo ime „trokut" govori nam da lik mora imati tri kuta, inače bi to bio užasan izbor imena i netko bi ga već do sada promijenio. U 16. stoljeću Robert Record želio je da matematička terminologija umjesto grčko-rimske ima anglo-saksonske korjene. Record je koristio naziv trokut i usprotivio se drugom nazivu za trokut - „tristranice" (threeside). Kao prvi argument koristio se pitanjem:„Koliko kutova ima „tristranice"?". To pitanje može predstavljati izazov. Drugi argument uključivao je označavanje i brojanje na geometrijskoj skici trokuta:„Svi trokuti izgledaju ovako, pa on ima tri kuta...". Označavanje vrhova možda je bazirano na sljedećem:„Obzirom da u bilo kojem n-terokutu ima jednako vrhova kao što ima stranica i kutova, vrhovi trokuta se uvijek mogu označavati s A,B,C i postoje tri načina označavanja kutova: $\angle ABC$, $\angle BCA$ i $\angle CAB$".

Protuargument može biti sljedeći:„Što je s kutovima $\angle CBA$, $\angle ACB$ i $\angle BAC$?". Kut $\angle CBA$ zvuči drukčije nego kut $\angle ABC$, ali ta dva kuta su sukladna. Ali ako razmišljamo o orijenataciji kuta tada oni nisu jednaki. Kut $\angle ABC$ i kut $\angle CBA$ su suprotne orijentacije. Pa prema tome u trokutu postoji šest kutova, a ne tri. Nadalje, možemo razmišljati da $\angle ABC$ označava dva različita kuta - unutrašnji i vanjski kut trokuta. Stoga svaki trokut ima šest ili dvanaest kutova.

Kada se u matematici pojavi problem oko prebrojavanja važno je znati što se broji kao jedno od svih stvari koje se broje kako bi se sve stavke pravilno prebrojale. Kako bismo u našem slučaju znali što trebamo brojati trebat ćemo definiciju kuta. Pozivajući se na definiciju kuta možemo odrediti da li se dva jednaka kuta i da li se vanjski kutovi broje ili ne broje kao kutovi u trokutu.

Ključni dinamični pojam kuta je orijentacija. Ukoliko u *GeoGebri* izaberemo neku dužinu i njezinu jednu krajnju točku kao centar rotacije, drugu točku možemo rotirati za određeni kut u smjeru kazaljke na satu ili u smjeru obrnuto od kazaljke na satu. Ako su u *GeoGebri* dane dvije dužine koje se sijeku kut među njima može se označiti lukom i srelicom u smjeru orjentacije kuta. Na taj način naglašavamo samu orijentaciju kuta (u smjeru kazaljke na satu ili obrnuto od smjera kazaljke na satu). Strelica je ostatak puta kretanja i alata koji se koristio u pozadini za stvaranje kuta. Iscrtavanje kuta skreće nam pozornost na činjenicu da je kut područje „prebrisano" kretnjom jedne dužine prema drugoj. To nam daje opis za moguću drugu definiciju kuta da je kut dio ravnine omeđen s dva pravca koji se sijeku.



Slika 22: Orjentirani kutovi i njihove mjere

Kako bismo izmjerili kut u *Geogebri* možemo označiti tri točke u određenom poretku koji formira kut ili odaberemo dvije dužine ili polupravca koji formiraju taj kut. Zbog toga su u *Geogebri* te dvije definicije kuta efikasne. Prva definicija definira kut u terminima triju točaka u danom poretku, a druga definicija definira kut u terminima dviju dužina ili polupravaca s zajedničkom početnom točkom.

Pogledajmo privremenu definiciju kuta: kut je klasa ekvivalencije koja se sastoji od svih parova dužina ili polupravaca s zajedničkom početnom točkom koje se mogu preslikati jedno u drugo kompozicijom izometrijskih preslikavanja. U tome slučaju dva para dužina ili polupravaca s zajedničkom početnom točkom su jednaka ako se zajedničke početne točke preklapaju, a niz izometrijskih preslikavanja oba para dužina ili polupravaca dovede do preklapanja. To znači da dužine ili polupravci koji određuju krakove kuta mogu biti različite duljine, ali također mogu biti i različite orjentacije. Kako bismo odredili jesu li neka dva kuta jednaka translatirali bismo vrh jednog kuta do vrha drugog kuta i rotacijom bismo provjerili preklapaju li se oba kraka jednog i drugog kuta. Ukoliko se kraci preklapaju tada su ta dva kuta jednaka.

Međutim, zbog svoje složenosti prethodna definicija nije baš upotrebljiva u školi ili u udžbenicima. Čak i s ovom definicijom svaki trokut će i dalje imati šest ili dvanaest kutova. Definicija ne rješava pitanje orijentacije kuta niti znamo koji od dva kuta se treba formirati iz dva segmenta ili polupravca s zajedničkom točkom. Zaključak je da trebamo konkretnije razmišljati o unutrašnjim kutovima trokuta.

5.2 Temeljno razumijevanje 3b: Dva značenja definiranja

Temeljno razumijevanje 3b Definicije u geometriji dolaze u dva različita tipa: definicija *postanka* (kako možemo konstruirati objekt) i definicija *entiteta* (kako možemo okarakterizirati objekt u teminima određenih značajki).

Povjesničar matematike George Molland (1976.) naveo je razliku između definicije *postanka* i definicije *entiteta*. Definicija *postanka* govori nam što je sve potrebno napraviti da se stvori novi objekt, dok definicija *entiteta* navodi svojstva koja u potpunosti karakteriziraju taj objekt. Obje definicije kutova koje smo naveli u Temeljnom razumijevanju 3a su definicije *entiteta* obzirom da određuju kut u terminima objekata (točke) ili odnosa svojstava (zajednička točka povezuje dva pravca) koje kut treba zadovoljavati da bi se zvao kutom.

Usporedit ćemo Heronovu i Euklidovu definiciju kruga. Heronova definicija savršeno opisuje radnju šestara:

> Krug je lik koji nastaje kada se pravac, koji ostaje u istoj ravnini, pomiče oko nekog ekstremiteta kao što je fiksna točka sve dok se ne vrati u početni položaj.

Heronova definicija se razlikuje od Euklidove definicije kome je šestar postao mentalno oruđe:

Krug je lik u ravnini koji je obuhvaćen jednom crtom takvom da su sve dužine koje padaju na nju iz jedne točke od onih koje leže unutar lika međusobno jednake.

Heronova definicija je definicija *postanka* jer uključuje aktivne glagole koji opisuju što treba raditi. Euklidova definicija je definicija *entiteta* jer opisuje temeljno svojstvo jednake udaljenosti od danog središta.

Puno toga se može naučiti o geometrijskim likovima uspoređivanjem dviju vrsta definicija danog lika ili proučavanjem iz definicije *entiteta* što bi mogla biti pozadinska definicija *postanka*. Jedan od načina dolaska do definicije *postanka* je i skiciranje.

5.3 Temeljno razumijevanje 3c: Čvrsta veza riječi i slike

Temeljno razumijevanje 3c Izgradnja definicija zahtijeva kretanje naprijed i nazad između verbalnog i vizualnog.

Postoji mnogo načina kako definirati četverokut. U nastavku ćemo navesti ideju kako se može doći do definicije četverokuta.

Definicija 1 Četverokut je mnogokut s četiri stranice.

Kritika 1 Što je mnogokut? Uključuje li to i tijela iz prostora?

Definicija 2 (Dajemo odgovor na drugo pitanje iz **Kritike 1**) Četverokut je mnogokut s četiri stranice koje leže u istoj ravnini.

Kritika 2 I dalje ne znamo što je to mnogokut.

Pozadinska definicija Mnogokut je ravninski lik koji se sastoji od tri ili više dužina koje se spajaju u krajnjim točkama.

Kritika 3 Što ako se dužine međusobno sijeku?

Definicija 3 Četverokut je mnogokut s četiri stranice koje leže u istoj ravnini i koje se međusobno ne sijeku osim u vrhovima.

Kritika 4 Što ako su stranice kolinearne?

Definicija 4 Četverokut je mnogokut s četiri stranice koje leže u istoj ravnini i koje se međusobno ne sijeku osim u vrhovima i niti jedna stranica nije kolinearna s drugom stranicom.

Primijetimo da nam početna definicija nije ukazivala na primjere koji uključuju međusobno križanje i kolinearnost. Međutim početna definicija nam je savršeno definirala skup primjera kao što su kvadrati, pravokutnici i paralelogrami. Kritika 3 nam je skrenula pažnju na vizualnu interpretaciju definicije koja dopušta svojstva koja nisu početno namijenjena. Definicija je odbijena i dodana su dodatna ograničenja kako bi se dobila definicija 3. Slično se dogodilo i u prijelazu s definicije 3 na definiciju 4.

6 Velika ideja 4

Velika ideja 4 Pisani dokaz je završna točka procesa dokazivanja.

Pisanje dokaza nekog geometrijskog rezultata je završna točka matematičkog proučavanja. To je aktivnost koju trebamo napraviti. S pisanjem dokaza krećemo nakon što se neka nepromjenjivost uoči, pretpostavi i promatra u kontekstu promjena i nakon što je pripadna skica konstruirana i shvaćena, i nakon što su bitne definicije ispitane. To su sve komponente procesa dokazivanja. Također su povezane i s prethodne tri velike ideje i zajedno formiraju formalni deduktivni dokaz.

Različiti dokazi pružaju ravnotežu između prikazivanja da nešto uvijek mora biti tako i prikazivanja zašto je nešto nužno tako. To se odnosi na isticanje nekih činjenica koje neki dokazi pružaju bolje od drugih.

6.1 Temeljno razumijevanje 4a: Čvrsta veza riječi i slike

Temeljno razumijevanje 4a Empirijska potvrda je važan dio procesa dokazivanja, ali nikad ne smije samostalno sačinjavati dokaz.

Pretpostavka je tvrdnja koja još nije dokazana ili opovrgnuta. U školskoj geometriji se pojavljuju pretpostavke. Nažalost učenici nisu u potpunosti uključeni u proces dokazivanja u kojem stvaranje pretpostavki može biti motivirajući i najkreativniji dio. Kao posljedica toga učenici doživljavaju aktivnost dokazivanja bez znatiželje i postavljanja pitanja. Aktivnost stvaranja dokaza uključuje prikupljanje i sistematiziranje iskustava, shvaćanja, rasuđivanja, konstruiranja i argumentiranja koje se stječe proučavanjem specifične situacije.

Kada želimo nešto dokazati moramo imati pretpostavku i testiramo ju svim našim sposobnostima koje uključuju i proučavanje specifičnih slučajeva. Takav pristup se naziva *induktivan pristup*. Postoje argumenti bazirani na vrlo ograničenim dokazima. Ovakav tip argumenata možemo čuti kada učenici kažu: „To vrijedi za nekoliko različitih trokuta, pa vrijedi za sve”. Takav način koji uključuje tvrdnju dokazivanja baziranu na blagim dokazima nazivamo „*naivni empirizam*”.

Vježbanjem dokazivanja razvijamo profinjenost koja može dovesti do „presudnog eksperimenta” - on uključuje provjeravanje pretpostavki u odnosu na pretpostavke koje još nisu provjerene i izjašnjavanje kao „ako to vrijedi ovdje to će uvijek vrijediti”. Na primjer, nakon što smo testirali našu početnu pretpostavku i utvrdili da vrijedi za nekoliko trokuta provjeravamo ju na specifičnom raznostraničnom trokutu kako bismo vidjeli vrijedi li i dalje. Ako vrijedi i dalje možemo prijeći na davanje dokaza na općem primjeru gdje koristimo matematička svojstva i strukture na općem slučaju (to je i dalje specifični slučaj, ali argumenti su orijentirani prema općem slučaju) kako bismo objasnili zašto pretpostavka mora uvijek vrijediti.

6.2 Temeljno razumijevanje 4b: Što možemo napraviti s protuprimjerima?

Temeljno razumijevanje 4b Protuprimjeri su važni: pojedinačni slučajevi mogu opovrgnuti pretpostavku, ali također mogu voditi do modificiranih pretpostavki.

Protuprimjer je dovoljan da se neka pretpostavka opovrgne, ali također jedan primjer nije dovoljan da se dokaže neka tvrdnja za veći skup objekata. Protuprimjer za neku pretpostavku nije nužan znak da se pretpostavka u potpunosti obdaci. Na njima se može dodatno raditi posebno ako se radi o jednom ili nekoliko posebnih slučajeva koji su problematični.

Primjer 8. *Razmislimo koje sljedeće pretpostavke vrijede, a koje se trebaju izmijeniti. Ukoliko bismo učenicima dali protuprimjer koji bismo odabrali i zašto? Na koji način bismo izmijenili te pretpostavke?*

a) Simetrale stranica trokuta uvijek se sijeku unutar trokuta.
b) Trokut uvijek ima najdulju stranicu.
c) Kroz bilo koje tri točke uvijek se može nacrtati kružnica.
d) Kroz bilo koje četiri točke uvijek se može nacrtati kružnica.
e) Dijagonale četverokuta se uvijek sijeku.

Primjer 8. može se shvatiti kao rad s protuprimjerima u odnosu na izmijenjene pretpostavke, ali je također dobra vježba da budemo precizni u vezi opsega i ograničenja geometrijskih tvrdnji.

Komentar na pretpostavku (a)

Kao protuprimjer učenicima možemo dati jedan tupokutan trokut. Na taj način učenici će vidjeti da se simetrale stranica tupokutnog trokuta sijeku izvan njega. Pretpostavku možemo izmijeniti tako da ispred riječi trokut dodamo riječ šiljastokutan te će na taj način pretpostavka vrijediti. U pravokutnom trokutu simetrale stranica se sijeku u polovištu hipotenuze.

Komentar na pretpostavku (b)

Kao protuprimjer učenicima možemo dati jedan jednakokračan trokut. U tome slučaju ne će postojati jedinstvena najduža stranica. Također im možemo dati jedan jednakostraničan trokut, te ni u tome slučaju ne će postojati najduža stranica. Pretpostavku možemo izmijeniti tako da ispred riječi trokut dodamo riječ raznostraničan.

Komentar na pretpostavku (c)

Kao protuprimjer učenicima možemo dati tri kolinearne točke. U ravnini se ne može konstruirati kružnica kroz tri kolinearne točke (osim ako se pravac ne računa kao kružnica s beskonačnim polumjerom). Pretpostavku možemo izmijeniti dodavanjem riječi nekolinearne ispred riječi točke. Te tri točke zapravo određuju trokut. Tu pretpostavku možemo postaviti i na sljedeći način: Svakom trokutu se može opisati kružnica. Tu kružnicu zovemo kružnica opisana trokutu.

Komentar na pretpostavku (d)

Komentar pod (c) nam govori da postoji jedinstvena kružnica kroz bilo koje tri točke. Ako bismo izabrali četvrtu točku koja ne leži na kružnici tada ne možemo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz sve četiri točke. Ali takva kružnica postoji u posebnim slučajevima - na primjer ako su četiri točke vrhovi kvadrata ili pravokutnika tada možemo konstruirati kružnicu. Skup četverokuta za koje vrijedi ova pretpostavka nazivamo *tetivnim četverokutima.* Za kutove tetivnog četverokuta vrijedi sljedeće svojstvo: Četverokut je tetivni ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih (unutarnjih) kutova jednak 180°.

Komentar na pretpostavku (e)

Kao protuprimjer učenicima možemo dati nekonveksni deltoid (jedan unutrašnji kut mu je veći od 180°). Definicija dijagonale zahtijeva da dijagonala leži unutar lika. Na ovaj način nismo promijenili opseg početne tvrdnje kao u prethodnim slučajevima, već smo se samo ograničili na konveksne četverokute. Način na koji je originalna pretpostavka postavljena je netočan.

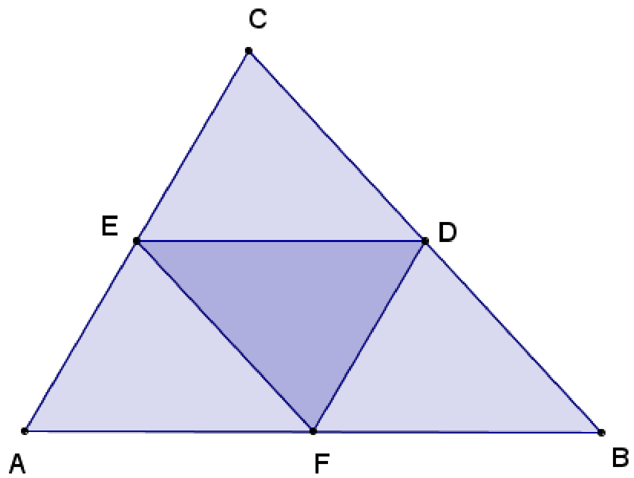
6.3 Temeljno razumijevanje 4c: Što je ideja?

Temeljno razumijevanje 4c Iza (u pozadini) svakog dokaza je ideja dokaza.

Podrijetlo dokaza je jedna od najtežih stvari za objasniti. Većina geometrijskih dokaza ima pojedinačnu glavnu ideju. Učenici, ali i nastavnici često razmišljaju na sljedeći način:„Moram zapamtiti sve korake dokaza u pravom poretku”. To može biti dosta teško za upamtiti i gotovo je jednako kao recitiranje pjesme.

Na primjer razmotrimo dokaz pretpostavke da je trokut $\triangle EDF$ kojemu su vrhovi polovišta stranica trokuta $\triangle ABC$ sukladan ostalim trima „unutarnjim” trokutima $\triangle AFE$, $\triangle FBD$ i $\triangle EDC$ kao što je prikazano na Slici 23, te pokušajmo odrediti ideju dokaza. Kako bismo dokazali sukladnost trebamo pokazati da su stranice i kutovi trokuta $\triangle EDF$ sukladni odgovarajućim stranicama i kutovima trokuta $\triangle AEF$, $\triangle EDC$ i $\triangle FBD$. Primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti možemo uočiti da su dužine $\overline{ED}$ i $\overline{AB}$ paralelne jer su točke E i D polovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Sada kad znamo da su dužine $\overline{ED}$ i $\overline{AB}$ paralelne to nam može pomoći da uočimo nekoliko transverzalnih pravaca (AC, EF, FD i BC) koji će nam dati niz bitnih odnosa između kutova naših dvaju trokuta. Pa tako vrijedi da su kutovi $\angle FED$ i $\angle EFA$ sukladni.

Ovaj pristup će nam omogućiti da odredimo odnose između kutova, ali nam ne će pomoći da shvatimo zašto stranice trokuta moraju biti sukladne. Znamo da trokuti



Slika 23: Rastav trokuta na sukladne podtrokute

$\triangle AFE$ i $\triangle EDF$ imaju zajedničku stranicu $\overline{EF}$. Ako bismo malo bolje pogledali trokut uočili bismo da su dužine $\overline{FD}$ i $\overline{AC}$ paralelne (isti zaključak kao i ranije). To znači da je četverokut $AFDE$ paralelogram iz čega slijedi da je $\overline{AE}$=$\overline{FG}$ i $\overline{ED}$=$\overline{AF}$. Na ovaj način smo pokazali da je $\triangle AFE \cong \triangle EDF$. Na sličan način se pokaže i sukladnost preostalih trokuta.

Rad na različitim idejama dokaza može nam istaknuti način na koji različiti dokazi ovise o različitim pretpostavkama i svojstvima, odnosno pomaže nam da shvatimo ideju dokaza koju ćemo kasnije pretvoriti u pisani dokaz.

Literatura

Literatura

[1] M. Serra, *Discovering Geometry: An Investigative Approach*, Key Curriculum Press, CA, 2002.

[2] N. Sinclair, D. Pimm, M. Skelin, *Developing Essential Understanding of Geometry*, The National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 2012.

[3] S. Johnston-Wilder,J. Mason, *Developing Thinking in Geometry*, Sage, London, 2005.

Sažetak

U ovom radu iznesenu su važne ideje koje nastavniku mogu produbiti postojeće razumijevanje geometrije i koje ga mogu voditi u planiranju i izvebi sata. Prve tri velike ideje usmjeravaju našu pažnju na način rada u geometriji koji uključuje skice, traženje promjenjivosti i nepromjenjivosti, te oblikovanje definicija. Proces dokazivanja, koji je objašnjen u Velikoj ideji 4, uključuje elemente svih triju početnih velikih ideja. Stvaranje i proučavanje pretpostavki može nas dovesti do formuliranja novih definicija koje sa svoje strane mogu generirati nove skice. Te skice su osnove za ideje dokaza.

Title and summary

Developing Essential Understanding of Geometry

This paper contains important ideas that teacher can deepen existing understanding of geometry and that it can lead in planning and implementing lessons. The first three ideas draw attention to the way in which doing geometry involves working with diagram, looking for variance and invariance and formulating definitions. The process of proving, as articulated in Big Idea 4, involves elements of all the first three big ideas. Making and testing conjectures can lead to formulating new definitions, which may in turn involve generating new diagrams. These diagrams can provide the basis for proof idea.

Životopis

Rođen sam 26. kolovoza 1991. godine u Novoj Gradiški u Republici Hrvatskoj. 1998. upisao sam osnovnu školu "Antun Mihanović" u Novoj Kapeli-Batrini, a svoje osnovnoškolsko obrazovanje sam završio 2006. godine. Nakon toga sam upisao Opću gimnaziju u Novoj Gradiški, a tijekom tog razdoblja sudjelovao sam na natjecanjima iz matematike i drugih predmeta. 2010. godine upisao sam se na Odjel za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku na petogodišnji Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike.