Površina i volumen u nastavi matematike

Jukić, Martina

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Martina Jukić

Površina i volumen u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Martina Jukić

Površina i volumen u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2021.

Sadržaj

Uvod

Površina i volumen čine velik dio sadržaja nastave matematike u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju. Međutim, kao i većina sadržaja vezanoga uz geometrijske likove i tijela, ove dvije teme često učenicima predstavljaju problem. Razlog tomu može biti nemogućnost predočavanja zadanih likova i tijela, odnosno nedostatak prostornog zora kod učenika, ali problem je i činjenica da se često ove pojmove obrađuje kroz korištenje gotovih formula na šturim zadacima, a ne na primjeru svakodnevnih pojava.

Na početku rada upoznat ćemo aksiomatske definicije površine i volumena, a zatim se ukratko upoznati s očekivanjima kurikuluma po pitanju ovih dviju tema. U glavnom dijelu rada pogledat ćemo koje su to teme vezane za površinu i volumen koje učenici upoznaju tijekom školovanja te kako se te teme obrađuju u trenutnim udžbenicima. Vidjet ćemo definicije koje učenicima približuju ideje površine i volumena, kao i primjere zadataka kojima se ostvaruju ishodi Kurikuluma. Svi udžbenici navedeni u ovome radu sastavljeni su po trenutnom Kurikulumu predmeta Matematika.

1 Što su površina i volumen?

U osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici, površinu i volumen definira se na način koji je učenicima relativno lako shvatljiv. Tako će oni u predmetnoj nastavi opisivati površinu kao dio ravnine koji neki geometrijski lik zauzima, a volumen kao dio prostora koji zauzima neko dano tijelo.

Pogledajmo ipak aksiomatske definicije ovih pojmova.

Definicija. *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poligona u ravnini, uključujući i prazan skup. Neka preslikavanje $p : \mathcal{P} \to R$ ima ova svojstva:*

1. $p(P) \geq 0$, *za svaki poligon* P,
2. $p(P_1 + P_2) = p(P_1) + p(P_2)$, *ako je* $P_1 \cap P_2 = \emptyset$,
3. $P_1 \cong P_2 \Rightarrow p(P_1) = p(P_2)$,
4. *Postoji barem jedan kvadrat* K *kojemu je duljina stranice* 1 *takav da je* $p(K) = 1$.

Takvo preslikavanje p *naziva se površina na skupu* $\mathcal{P}$*, a broj* $p(P)$ *naziva se površina poligona* P.

Iako je u definiciji površina označena malim slovom p, u nastavku ćemo koristiti veliko P jer tako površinu označavaju korišteni udžbenici.

Definicija. *Neka je $\mathcal{S}$ skup svih poliedara u prostoru, uključujući i prazan skup. Neka preslikavanje $V : \mathcal{S} \Rightarrow R$ ima ova svojstva:*

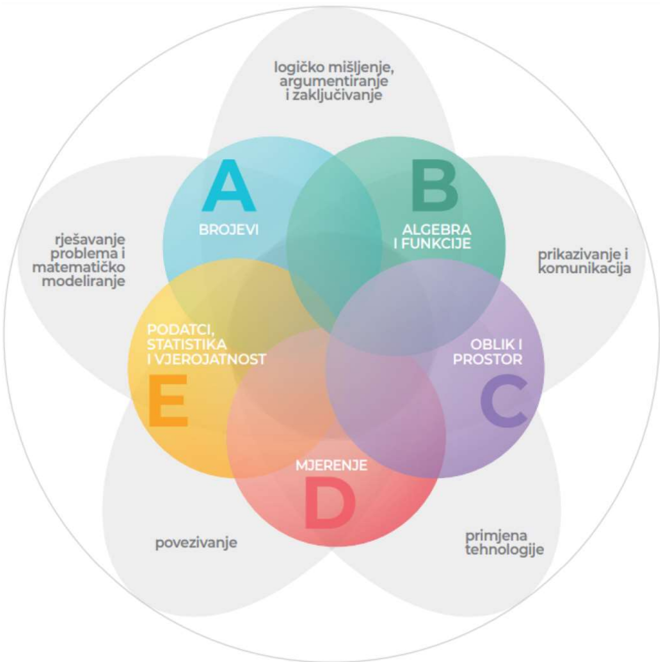
1. $V(S) \geq 0$, *za svaki poliedar* S,
2. $V(S_1 + S_2) = V(S_1) + V(S_2)$, *ako je* $S_1 \cap S_2 = \emptyset$,
3. $S_1 \cong S_2 \Rightarrow V(S_1) = V(S_2)$,
4. *Postoji barem jedna kocka* K *kojemu je duljina brida* 1 *takva da je* $V(K) = 1$.

Takvo preslikavanje V *naziva se volumen na skupu* $\mathcal{S}$*, a broj* $V(S)$ *naziva se volumen poliedra* S.

Ove aksiomatske definicije su zapravo svojstva koja učenici znaju o površini i volumenu, ali im, barem na početku učenja, nije potrebno davati formalne definicije. Slično, formule za određivanje površina likova i volumena tijela koje učenici koriste ne bi im se trebalo dati kao gotove informacije. Ipak, to je vrlo česta pojava, djelomice zbog učeničke nezainteresiranosti za izvode formula, ali velikim dijelom i zbog toga što su nastavnici ograničeni velikom količinom sadržaja za predviđenu satnicu pa nije uvijek moguće provoditi vrijeme u detaljnim objašnjenjima.

2 Površina i volumen u Kurikulumu

Prema Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2., površina i volumen sastavni su dijelovi domene Mjerenje, ali se ishodi vezani za njihovu primjenu mogu pronaći i u domenama Oblik i prostor te Algebra i funkcije.



Slika 1: Matematički procesi i domene kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika, preuzeto iz [15].

Prema [15], u domeni Mjerenje učenici povezuju matematiku s drugim odgojno-obrazovnim područjima, s vlastitim iskustvom, svakodnevnim životom u kući i zajednici te na radnome mjestu, prepoznaju mjeriva obilježja ravninskih i prostornih oblika u umjetnosti te ih
upotrebljavaju za opis i analizu svijeta oko sebe.

Upravo zbog potrebe da ova znanja koriste u svakodnevnom životu, površina i volumen obrađuju se kroz cijelo osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. Međutim, često se od učenika može čuti pitanje, „Što će meni to u životu?" Osobno sam nedavno na to pitanje odgovorila učenici čija se obitelj bavi poljoprivredom riječima, „Kako ćeš znati koliko hektara zemlje ćeš naslijediti?" Odgovor ju nije zadovoljio - pa to će joj netko drugi izračunati. Zaista, ako netko drugi može izračunati, zašto bi trebali to učiti?

Učenike često zbunjuju pojmovi površine, oplošja i volumena, a formule često miješaju jer im se sve čine sličnima. Ovi pojmovi uglavnom se obrađuju odvojeno pa učenici ne uočavaju nikakvu povezanost među njima. To, naravno, ne znači da se u istome nastavnome satu treba obraditi i kvadrat i kocku te odgovarajuću površinu, oplošje i volumen. Međutim, treba učenike navesti na povezivanje ovih pojmova i uočavanje prostornih analogona ravninskih likova.

Naglasak je u nastavi stavljen na izračunavanje površine i volumena nekih zamišljenih likova i tijela, čak i prije nego se same ideje površine i volumena dovoljno razrade. Zbog toga je jedna od najglasnijih najava o novome Kurikulumu bila želja da se učenicima na primjerima iz svakodnevnog života približi gradivo matematike (ali i svih drugih predmeta). Cilj je bio pokazati im kako, zbilja, sve što uče u školi ima neku stvarnu primjenu na njihovu okolinu.

U nastavku ovoga rada pogledat ćemo neke zadatke koji se pojavljuju u udžbenicima za osnovne i srednje škole, a kojima se ostvaruju ishodi propisani Kurikulumom. Udžbenik je spona između propisanoga i implementiranoga Kurikuluma pa se on može smatrati i potencijalno implementiranim Kurikulumom. Vidjet ćemo jesu li ti zadaci uistinu povezani s vanjskim svijetom te kako bi ih učenici trebali riješiti. Također ćemo obratiti pozornost na definicije i formule koje se prezentiraju učenicima te navesti neke metode kojima se učenicima nastoje približiti pojmovi površine i volumena.

3 Razvoj ideje površine u nastavi

3.1 Osnovna škola

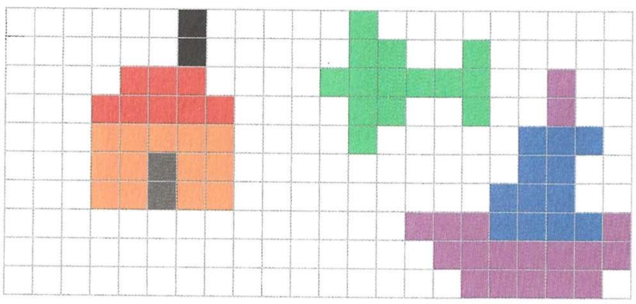
3.1.1 Razredna nastava

Intuitivne ideje iz svijeta i iskustva učenika mogu biti važne za razumijevanje površine. Pojam površine može se povezati s površinom koju osjećamo dodirivanjem neke ravne plohe, primjerice površine stola. List papira zauzima manju površinu od toga stola jer kada ga stavimo na stol, ne prekrije ga cijelog – time se kod učenika razvija pojam mjerenja u smislu uspoređivanja.

Upravo bi takva usporedba trebala biti prvi učenički susret s površinom. Neizravna usporedba može se postići uspoređivanjem s objektom kojeg proglasimo referentnom veličinom. To je u većini slučajeva jedinični kvadrat – učenicima se daju kvadratići sa stranicom duljine 1 cm, a onda se od njih traži izražavanje površine danih likova preko broja tih jediničnih kvadratića koje likovi pokrivaju. Sličan eksperiment može se provoditi i s okruglim pločicama ukoliko imamo lik zakrivljenih rubova. U ovom trenutku nikako se ne bi smjele koristiti formule za izračunavanje površine.

Zadaci navedeni u ovome potpoglavlju preuzeti su iz udžbenika *Super matematika za prave tragače* za četvrti razred osnovne škole. Upravo kako kurikulum i predlaže, udžbenik [2] učenike upoznaje s pojmom jediničnih kvadrata, i to kvadratnim centimetrom, decimetrom i metrom, kao i njihovim međusobnim odnosom.

Nacrtana je kvadratna mreža. U njoj su likovi kuće, zrakoplova i broda. Sastavljeni su od kvadrata. Koji je lik najveći?



Slika 2: Kvadratna mreža. Preuzeto iz [2].

Zadatak. *Nacrtaj kvadrat duljine stranice $a = 5$ cm. Unutar kvadrata povuci četiri uspravne usporedne dužine međusobno udaljene 1 cm. Potom nacrtaj četiri vodoravne usporedne dužine međusobno udaljene 1 cm. To ćeš učiniti tako da na svakoj od 4 stranice ravnalom označiš po 1 cm, a zatim te točke nasuprotnih stranica spojiš.*

Svaki kvadrat površine 1 cm^2 oboji različitim bojama. Prebrojavanjem malih kvadrata izmjeri površinu velikog kvadrata. Koliki je opseg kvadrata?

Zadatak. *Napiši u kojim se životnim situacijama treba primijeniti znanje o mjerenju površina.*

Zadatak. *Što u stvarnome životu može imati površinu:*

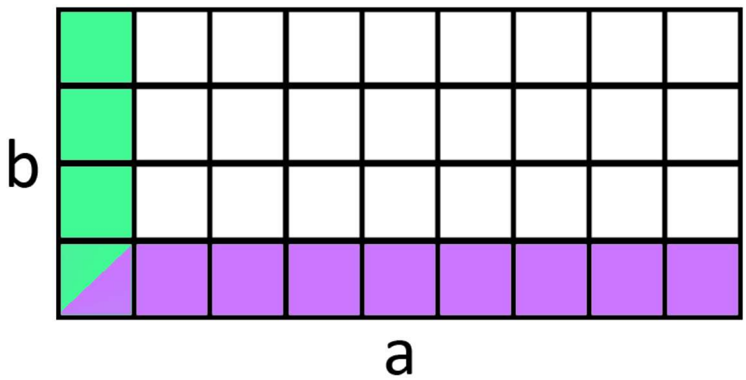
- 5 m^2
- 10 cm^2
- 5000 dm^2 ?

Vidimo kako površina ne zauzima velik dio kurikuluma razredne nastave, ali zato će se detaljno obrađivati u predmetnoj nastavi.

3.1.2 Predmetna nastava

U petome razredu učenici se prisjećaju mjernih jedinica za površinu, a zatim se upoznaju s površinama pravokutnika i kvadrata.

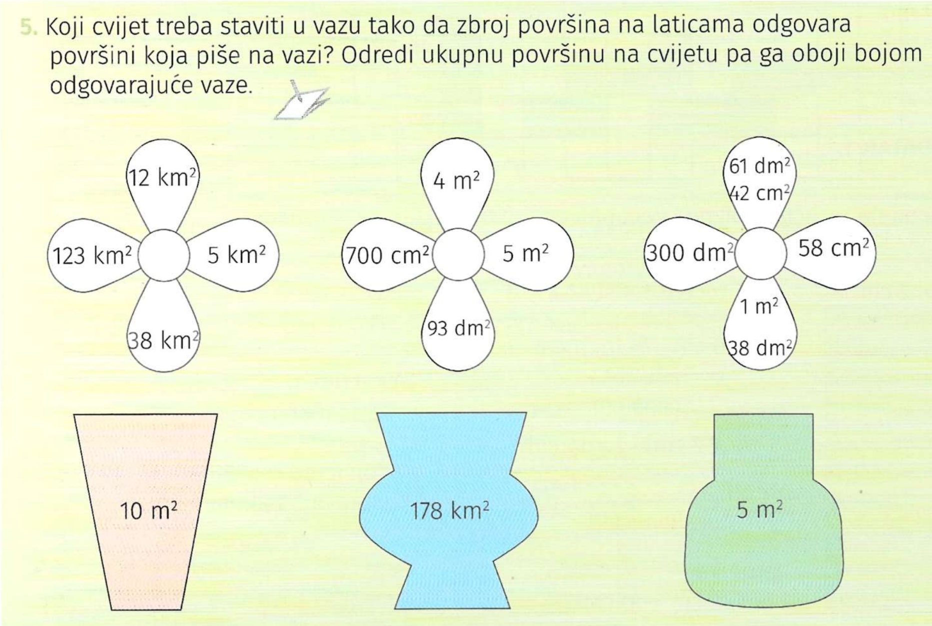
Prekrivanjem pravokutnika jediničnim kvadratima, s učenicima lako možemo izvesti formulu za površinu pravokutnika: $P = a \cdot b$, gdje a i b predstavljaju broj vodoravno i okomito postavljenih jediničnih kvadrata. Poseban slučaj ove formule je površina kvadrata, gdje u oba smjera imamo jednak broj kvadratića.



Slika 3: Izvod površine pravokutnika.

Ovakav slikovit izvod koji koristi poznate ideje o prekrivanju lika kvadratićima bolji je od davanja gotove formule bez imalo konteksta. Učenici su već upoznati i s činjenicom da je duljina stranice jediničnog kvadrata 1 cm pa se u ovom trenutku, ako to nije ranije učinjeno, treba osvijestiti i ideja kvadratnog centimetra: $1\ cm \cdot 1\ cm = 1\ cm^2$, čime se uspostavlja veza između duljine stranica i broja jediničnih kvadratića.

Učenici u ovoj dobi povremeno miješaju pojmove opsega i površine, jer su ih najčešće učili istovremeno, pa je važno pripaziti na mogućnost zabune i ponovno na stvarnim primjerima upozoriti na razliku.

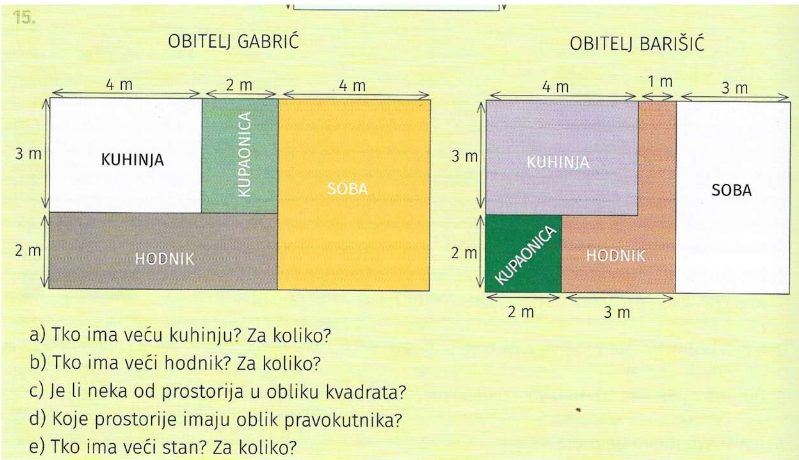


Slika 4: Zadatak preuzet iz [6].

Rješenje zadatka na slici 4. Izračunajmo ukupne površine na cvjetovima:

Prvi cvijet: $12\ km^2 + 5\ km^2 + 38\ km^2 + 123\ km^2 = 178\ km^2$ pa ovaj cvijet bojamo plavom bojom koja odgovara drugoj vazi.

- Drugi cvijet: $4\ m^2 + 5\ m^2 + 93\ dm^2 + 700\ cm^2 = 4\ m^2 + 5\ m^2 + 0.93\ m^2 + 0.07\ m^2 = 10\ m^2$ pa ovaj cvijet bojamo ružičastom bojom koja odgovara prvoj vazi.
- Treći cvijet: $61\ dm^2\ 42\ cm^2 + 58\ cm^2 + 1\ m^2\ 38\ dm^2 + 300\ dm^2 = 61.42\ dm^2 + 0.58\ dm^2 + 138\ dm^2 + 300\ dm^2 = 500\ dm^2 = 5\ m^2$ pa ovaj cvijet bojamo zelenom bojom koja odgovara trećoj vazi.



Slika 5: Zadatak preuzet iz [6].

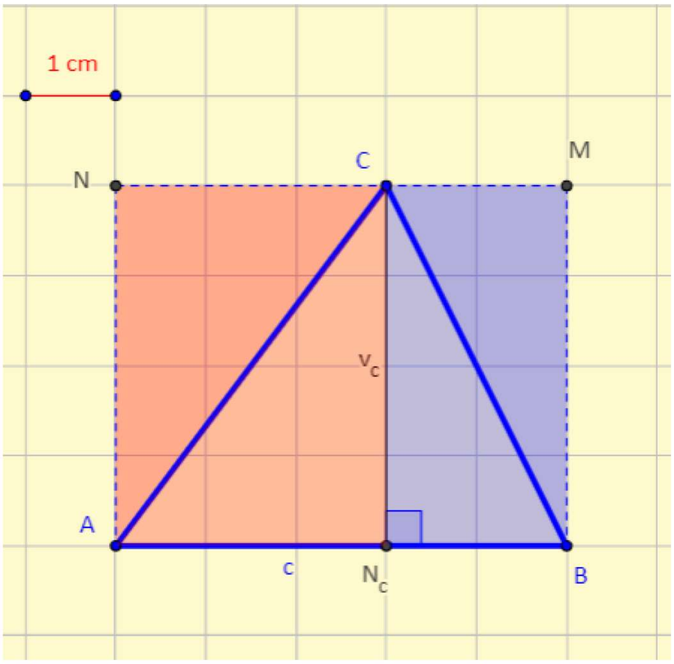
Zadaci tipa *Izračunaj površinu ako je zadana duljina stranica* razvijat će korištenje računskih operacija, ali neće učenicima pomoći u shvaćanju pojma površine. Stoga je važno uvesti stvarne, autentične kontekste u kojima se primjenjuje pojam površine. Ovo je i dobra prilika za održavanje sata izvan učionice: određivanje količine tapete potrebne za ukrašavanje zida na ulazu u školu, broja pločica potrebnih za popločavanje poda u hodniku ili mjerenje zelene površine u parku preko puta škole – sve su to stvarne situacije u koje možemo dovesti učenike. Dobrim odabirom primjera omogućujemo i povezivanje s drugim veličinama: za bojenje većeg zida potrebno je više boje nego za bojenje manjeg zida, čime povezujemo pojmove površine i volumena (kako veličina zida utječe na potrebnu količinu boje).

Zadatak. *Gospođa Jurić kupila je sag za dnevni boravak. Sag je duljine 5 m i širine 4 m. Cijena saga iznosi 135 kn po metru kvadratnom. Koliko je gospođa Jurić platila sag?*

Rješenje. Kako je sag duljine 5 m, a širine 4 m, vidimo da ima oblik pravokutnika. Zanima nas cijena koja je izražena po metru kvadratnom pa nam treba površina saga.
$P = a \cdot b$, odnosno $P = 5 \cdot 4 = 20\ m^2$. Cijena je 135 kn po metru kvadratnom pa je ukupna cijena saga $135 \cdot 20 = 2700$ kn.

U šestome razredu učenici se bave trokutom te uočavaju vezu površine pravokutnika i pravokutnog trokuta.

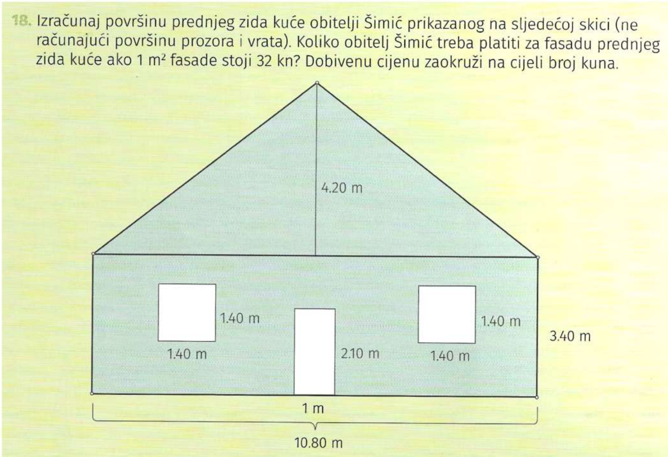
Također, udžbenik [7] učenicima pokazuje kako se i bilo koji trokut, ne nužno pravokutan, može nadopuniti do pravokutnika te im tako olakšati određivanje površine.



Slika 6: Preuzeto iz digitalnih sadržaja udžbenika [7].

Površina. *Površina trokuta jest polovina umnoška duljine jedne stranice i duljine visine na nju:* $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$.

Zadatak. *Zemljište u obliku trokuta stranice duljine 65 m i pripadajuće visine duljine 32 m obitelj Vlahov rado bi zamijenila za zemljište jednake površine pravokutnoga oblika duljine 50 m. Kolika je širina pravokutnog zemljišta?*

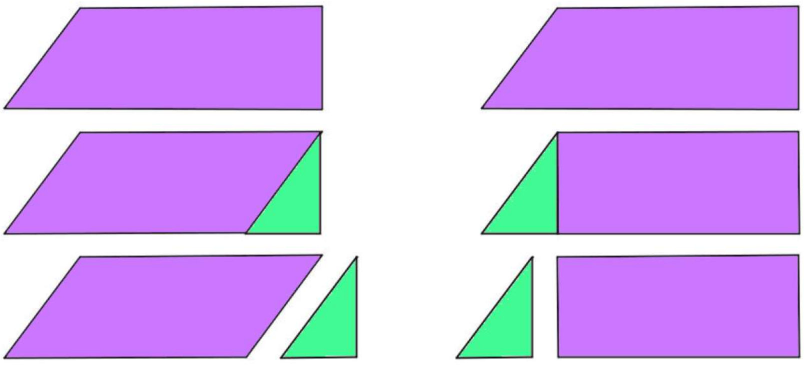


18. Izračunaj površinu prednjeg zida kuće obitelji Šimić prikazanog na sljedećoj skici (ne računajući površinu prozora i vrata). Koliko obitelj Šimić treba platiti za fasadu prednjeg zida kuće ako 1 m² fasade stoji 32 kn? Dobivenu cijenu zaokruži na cijeli broj kuna.

Slika 7: Zadatak preuzet iz [7].

Rješenje. Za početak želimo odrediti površinu trenutnog zemljišta obitelji Vlahov: $P_t = 65 \cdot 32 : 2 = 2080 : 2 = 1040\ m^2$. Iz površine pravokutnika, $P_p = a \cdot b$ vidimo da će širina novoga zemljišta biti $b = P_p : a = 1040 : 50 = 20.8\ m$.

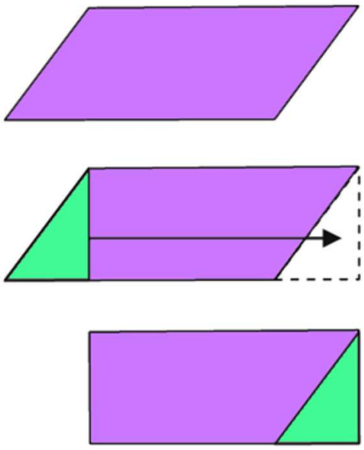
Metodom rastavljanja i dopunjavanja učenici mogu otkriti formulu za površinu paralelograma. Krenemo, kao na slici 8, od dva sukladna trapeza. Jednoga podijelimo na paralelogram i pravokutni trokut, a drugoga na pravokutnik i pravokutni trokut. Znamo da ukupne površine novih likova moraju biti jednake površini početnog trapeza, a dobiveni pravokutni trokuti su sukladni te imaju jednake površine. To znači da površina paralelograma mora biti jednaka površini pravokutnika. Kako je površina pravokutnika u ovome slučaju jednaka umnošku stranice a i visine početnog trapeza v, onda je i površina paralelograma $P = a \cdot v$, gdje je v visina u tom paralelogramu.



Slika 8: Izvod površine paralelograma preko površine trapeza.

Slična metoda, a za učenike možda i jednostavnija, jeste metoda transformacije prikazana na slici 9. Početni paralelogram presiječemo duž njegove visine. Dobiveni pravokutni trokut prebacimo na drugu stranu paralelograma. Time smo dobili novi pravokutnik koji ima jednu stranicu jednaku stranici paralelograma, a drugu jednaku njegovoj visini pa je površina paralelograma jednaka površini ovoga pravokutnika, a to je opet $P = a \cdot v$.

Učenici često zaborave (ili uopće ne osvijeste) činjenicu da je kvadrat zapravo poseban slučaj pravokutnika, a on opet poseban slučaj paralelograma pa se njihove formule za površinu zapravo svode na istu. Obzirom na klasifikaciju možemo paralelogram promatrati kao poseban slučaj trapeza pa opet sve proizlazi iz iste formule. Međutim, zbog razdvojenosti



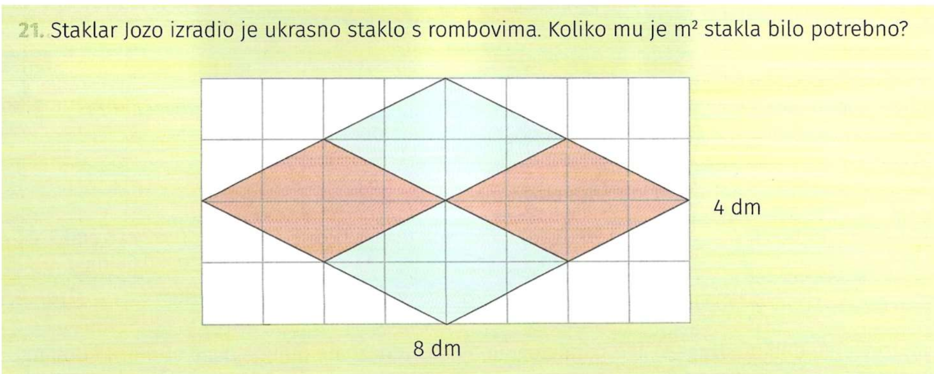
Slika 9: Izvod površine paralelograma preko površine pravokutnika.

ovih sadržaja kroz godine školovanja, učenici ove likove promatraju kao odvojene cjeline te ovo znanje uglavnom ostane proceduralno i loše povezano, a u učenicima sve te slične formule izazivaju zbunjenost, što onda vodi do odbojnosti prema geometrijskim sadržajima.

Zadatak. *Ana i Ivan prepiru se oko površine paralelograma. Anin paralelogram ima stranicu duljine 5 m i pripadajuću visinu duljine 4 dm. Ivanov paralelogram ima stranicu dugu 8 dm i pripadajuću visinu duljine 2.5 m. Čiji paralelogram ima veću površinu?*

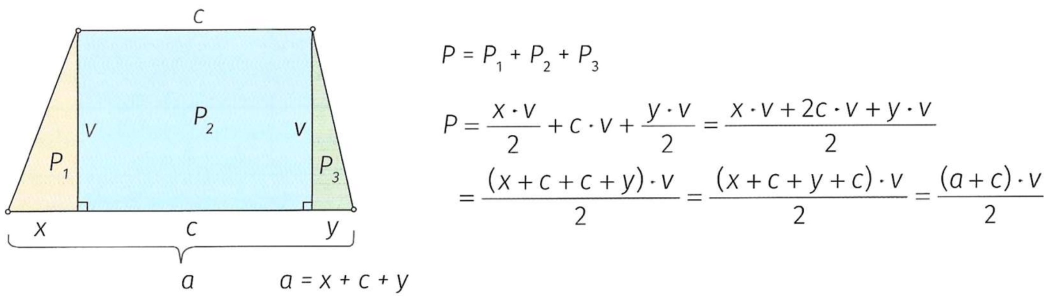
Rješenje. Izračunajmo površine oba paralelograma pa ih usporedimo.

- Anin paralelogram ima površinu $P_A = 5 \cdot 0.4 = 2\ m^2$.
- Ivanov paralelogram ima površinu $P_I = 0.8 \cdot 2.5 = 2\ m^2$.
- Anin i Ivanov paralelogram imaju jednake površine.



Slika 10: Zadatak preuzet iz [8].

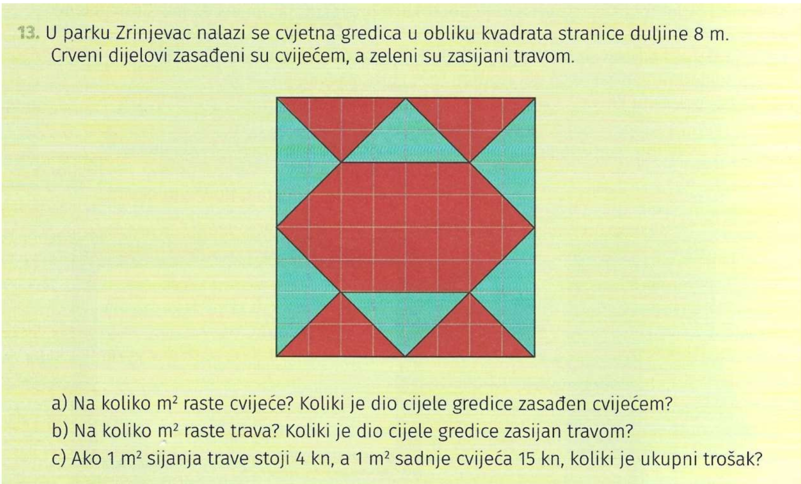
Kada je u pitanju površina trapeza, učenicima se daje formula koja je malo složenija od onih s kojima su se do sada susretali, ali ih se potiče i da sami provjere zašto je baš to formula kojom će doći do površine.



Slika 11: Izvod formule za površinu trapeza. Preuzeto iz [8].

Zadatak. *Braća Filip i Jakov naslijedili su zemljište u obliku jednakokračnog trapeza s osnovicama duljine 48 m i 27 m te visinom dugom 24 m. Stariji brat Filip predložio je:* Zemljište ćemo pravedno podijeliti. S obzirom na to da su dijagonale jednakokračnog trapeza jednakih duljina, predlažem da međa bude po dijagonali. *Ima li se Jakov razloga ljutiti?*

Rješenje. Jakov se ima razloga ljutiti jer dijagonala jednakokračnog trapeza ne dijeli taj trapez na dva jednaka dijela. (U udžbeniku je dana i slika zemljišta na kojoj je vidljivo kako bi po Filipovom planu Jakov dobio dio zemljišta uz kraću osnovicu koje bi onda imalo i manju površinu.)

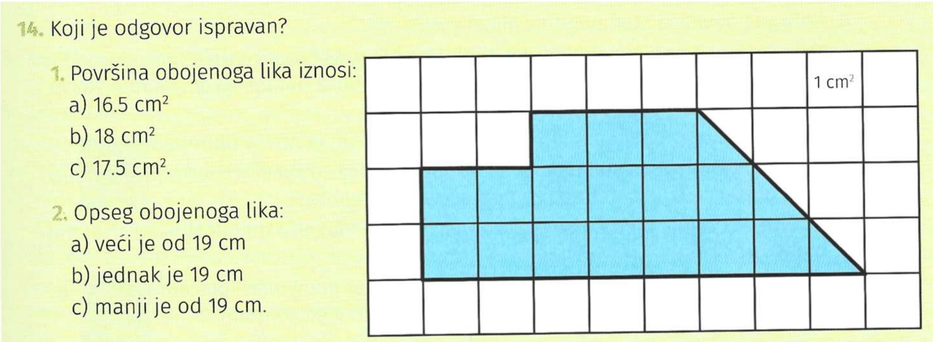

13. U parku Zrinjevac nalazi se cvjetna gredica u obliku kvadrata stranice duljine 8 m. Crveni dijelovi zasađeni su cvijećem, a zeleni su zasijani travom.

a) Na koliko m² raste cvijeće? Koliki je dio cijele gredice zasađen cvijećem?
b) Na koliko m² raste trava? Koliki je dio cijele gredice zasijan travom?
c) Ako 1 m² sijanja trave stoji 4 kn, a 1 m² sadnje cvijeća 15 kn, koliki je ukupni trošak?

Slika 12: Zadatak preuzet iz [8].

Nakon ranije obrađenih trokuta i četverokuta, u sedmome razredu učenici se pobliže upoznaju s ostalim mnogokutima te krugom. Osim što se od njih očekuje već ranije usavršeno poznavanje odnosa među mjernim jedinicama za površinu, prisjećaju se i svojih najranijih iskustava s površinom - jediničnih kvadrata.

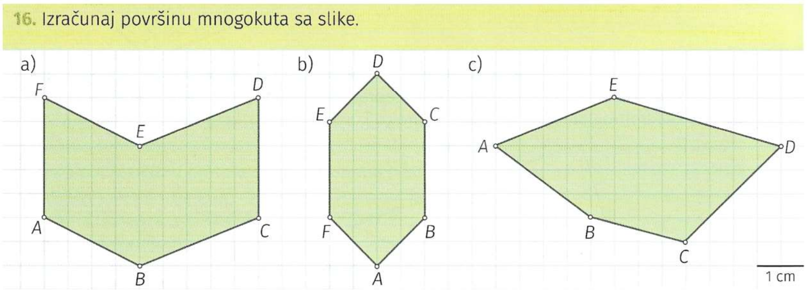
Rješenje zadatka na slici 13. Zadatak učenika je prebrojiti plave kvadratiće. Ima ih $4 + 9 + \frac{9}{2} = 13 + 4.5 = 17.5$ pa je površina lika 17.5 cm^2. (Opseg nije tema ovoga rada, ali možemo prokomentirati ostatak zadatka. Od učenika se očekuje da uoče kako je opseg jednak 16 cm + dijagonale triju jediničnih kvadratića pa je njihov zadatak odrediti je li jedna takva dijagonala dulja od 1 cm ili ne. Ako nisu upoznati s duljinom dijagonale kvadrata, ovo mogu eksperimentalno provjeriti mjereći duljine stranice i dijagonale kvadratnog komada papira.)



Slika 13: Zadatak preuzet iz [9].

Površina. *Površinu pravilnoga* n*-terokuta računamo tako da površinu karakterističnog trokuta pomnožimo s brojem stranica,* $P_n = n \cdot \dfrac{a \cdot v}{2}$.

Ne očekuje se, naravno, od učenika samo računanje površine pravilnih mnogokuta, nego i da u općenitim likovima pronalaze one koje već poznaju i podijele lik na paralelograme (posebice pravokutnike) i trokute, kao što je vidljivo u zadatku na slici 14.



Slika 14: Zadatak preuzet iz [9].

Svojstvo. *Površina kruga jest broj veći od površine bilo kojeg upisanoga mnogokuta i manji od površine bilo kojeg opisanoga mnogokuta tom krugu.*

Površina. *Površina* P *kruga radijusa* r *iznosi* $P = r^2 \cdot \pi$.

Učenici u ovome trenutku još nisu detaljno upoznali iracionalne brojeve pa im se π predstavlja kao broj čija je približna vrijednost 3.14.

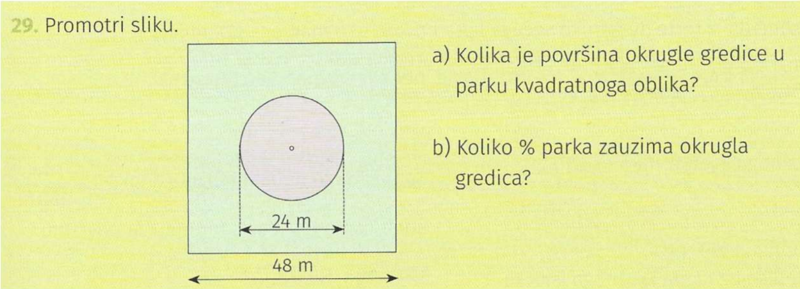
Zadatak. *Ploča kuhinjskoga stola oblika je kruga promjera duljine 3 m. Izrađena je od drvenoga i staklenoga dijela. Duljina polumjera staklenoga dijela stola jest 1 m.*

a) Izračunaj površinu stola.

b) Izračunaj površinu staklenoga dijela stola.

c) Izračunaj površinu drvenoga dijela stola.

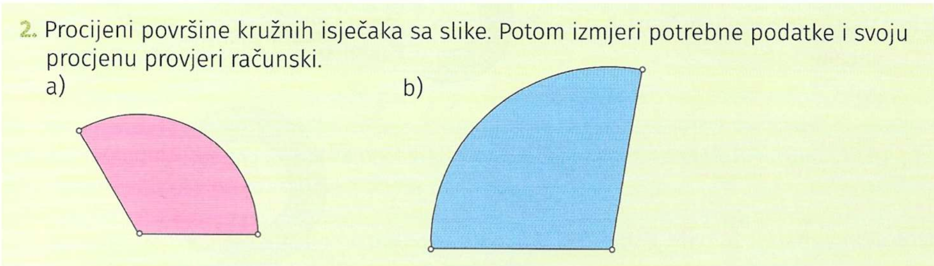
Zadatak. *Koliko je kilograma sjemena potrebno da bi se zasijalo zemljište kružnoga oblika promjera duljine 12 m ako za 1* m^2 *treba 4 dag sjemena? Dobiveni broj zaokruži na cijeli broj kilograma.*



Slika 15: Zadatak preuzet iz [9].

Definicija. *Dio kruga omeđen dvama polumjerima i kružnim lukom zove se kružni isječak.*

Površina. *Omjer površine* P *kružnoga isječka i njegova kuta* α *jest* $\frac{P}{\alpha} = \frac{r^2\pi}{360}$. *Na taj način dobivamo da je formula za površinu kružnoga isječka* $P = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha$.



Slika 16: Zadatak preuzet iz [9].

Definicija. *Koncentrične kružnice one su kružnice koje imaju zajedničko središte. Dio ravnine između takvih kružnica zovemo kružnim vijencem.*

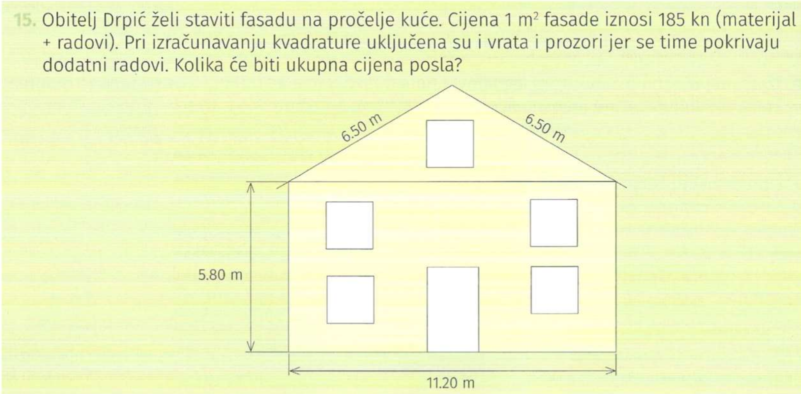
Površina. *Površinu kružnoga vijenca dobit ćemo tako da od površine većega kruga oduzmemo površinu manjega kruga.*

Zadatak. *Vodovodna cijev ima vanjski promjer duljine 14 mm, a unutarnji 12 mm. Kolika je debljina zida cijevi i kolika je površina poprečnoga presjeka te cijevi?*

Za kraj osnovnoškolskog učenja o površini, u osmome razredu učenici se prisjećaju likova s kojima su već radili, ali ovaj puta njihovoj površini pristupaju s novog gledišta - putem Pitagorina poučka.

Pitagorin poučak. *U pravokutnom trokutu je površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama. Pitagorin poučak (teorem) jedan je od najvažnijih poučaka geometrije.*

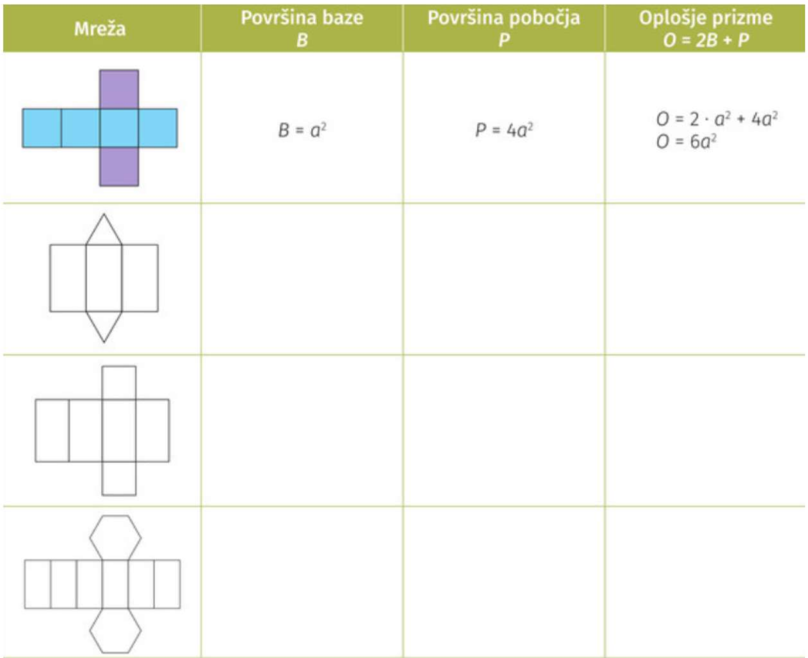
Zadatak. *Presjek nasipa ima oblik jednakokračnoga trapeza. Gornji dio nasipa širok je 6.2 m, a donji dio 9.2 m. Visina nasipa duga je 3.6 m. Izračunaj površinu presjeka nasipa.*


15. Obitelj Drpić želi staviti fasadu na pročelje kuće. Cijena 1 m^2 fasade iznosi 185 kn (materijal + radovi). Pri izračunavanju kvadrature uključena su i vrata i prozori jer se time pokrivaju dodatni radovi. Kolika će biti ukupna cijena posla?

Slika 17: Zadatak preuzet iz [11].

Tijekom obrade Pitagorina poučka, učenici ponovno prolaze kroz sve poznate likove, ali se ovdje posebno dodaje površina jednakostraničnog trokuta kao $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. No, kako je to direktna posljedica primjene Pitagorina poučka na jednakostraničan trokut, ne moramo od učenika zahtijevati pamćenje te formule jer se time dodaje još jedan potencijalni izvor konfuzije - čemu sada još jedna formula za površinu trokuta kada smo to već ranije znali odrediti?

Uz površine geometrijskih likova, učenici se tijekom osnovnoškolskog obrazovanja susreću i s oplošjima geometrijskih tijela. Ovo je još jedan od pojmova koji učenici često ne usvoje u potpunosti. Tijekom obrade ovih sadržaja dolazi do istovremenog spominjanja površine, baza i pobočki, pobočja i oplošja, a učenicima sve to zvuči slično. Učenicima bi i ovdje trebalo dati mogućnost samostalnoga otkrivanja: neka uoče kako geometrijsko tijelo možemo rastvoriti u mrežu, a ta mreža je sastavljena od nekih njima poznatih likova.



Mreža	Površina baze B	Površina pobočja P	Oplošje prizme $O = 2B + P$
	$B = a^2$	$P = 4a^2$	$O = 2 \cdot a^2 + 4a^2$ $O = 6a^2$

Slika 18: Preuzeto iz [11].

3.2 Srednja škola

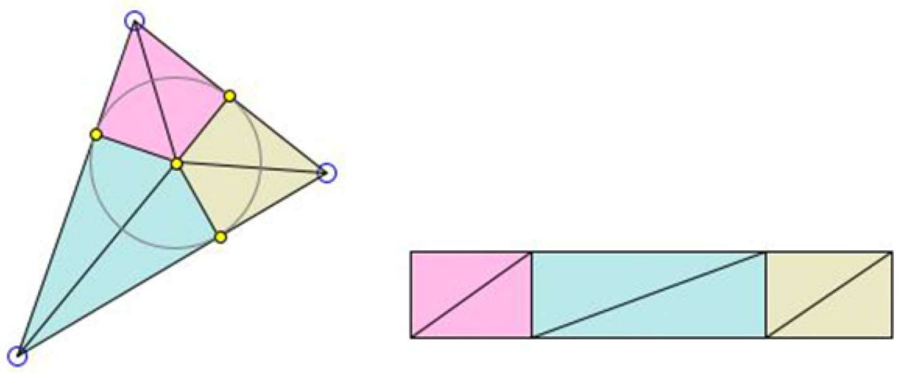
U ovome radu posvetit ćemo se srednjoškolskom programu 4 sata tjedno, odnosno 140 sati godišnje. Programi s više sati tjedno obrađuju više izbornih sadržaja, ali su oni rjeđe zastupljeni.

U prvome razredu srednje škole, učenici se kroz različite zadatke prisjećaju nekih poznatih informacija o površini. Međutim, kako se većina tih zadataka bavila ili površinom poznatih likova (pravokutnika) ili danom površinom koju je potrebno izraziti u nekoj drugoj mjernoj jedinici, ti zadaci nisu ovdje prikazani, nego ćemo se u nastavku poglavlja baviti novim spoznajama koje srednjoškolci otkrivaju.

Učenici se ponovno bave trokutom, ali ovaj puta kroz upoznavanje njegovih karakterističnih točaka otkrivaju nove načine određivanja njegove površine. Udžbenik [12] postavlja učenicima pitanje: Kako izračunati površinu trokuta ako su zadane duljine stranica trokuta, a trokut nije pravokutan? Oni su se do sada susretali s površinom trokuta preko jedne stranice i visine na tu stranicu, ali to im u ovome trenutku nije dovoljno.

Površina. *Heronova formula za površinu trokuta kojem su poznate duljine stranica a, b i c:*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c}, \text{ gdje je } s \text{ poluopseg, tj. } s = \frac{a+b+c}{2}.$$



Slika 19: Dokaz Heronove formule. Preuzeto s [14].

Zadatak. *Duljine stranica trokuta iznose 5 cm, 6 cm i 7 cm. Kolika je duljina visine trokuta na njegovu najdulju stranicu?*

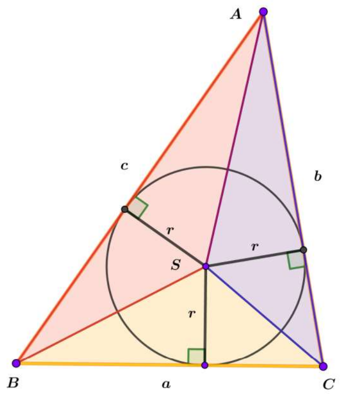
Rješenje. Visinu trokuta možemo odrediti preko površine pa ćemo prvu nju izračunati. $s = \frac{5+6+7}{2} = 9$ cm, $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216} = 14.7\ cm^2$. A visina se tada dobiva iz $P = \frac{c \cdot v_c}{2}$: $v_c = \frac{2P}{c} = \frac{2 \cdot 14.7}{7} = 4.2$ cm.

Površina. *Površina trokuta kojem su poznate stranice trokuta a, b i c i polumjer opisane kružnice R: $P = \frac{abc}{4R}$.*

Zadatak. *Trokut ABC ima stranice duljine 11 cm, 13 cm i 20 cm, Odredite polumjer opisane kružnice trokuta.*

Rješenje. Polumjer opisane kružnice trokuta možemo odrediti preko površine pa ćemo prvu nju izračunati. $s = \dfrac{11+13+20}{2} = 22$ cm, $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c} = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{4356} = 66\ cm^2$. A polumjer se tada dobiva iz $P = \dfrac{abc}{4R}$: $R = \dfrac{abc}{4P} = \dfrac{11 \cdot 13 \cdot 20}{4 \cdot 66} = 10.83$ cm.

Površina. *Ako je r polumjer trokutu upisane kružnice, a s poluopseg, površinu trokuta računamo pomoću formule: $P = r \cdot s$.*



Slika 20: Površina trokuta pomoću upisane kružnice. Preuzeto iz [1].

Zadatak. *Trokut ABC ima stranice duljine 11 cm, 13 cm i 20 cm. Odredite duljinu polumjera trokutu upisane kružnice.*

Rješenje. Polumjer upisane kružnice trokuta možemo odrediti preko površine pa ćemo prvu nju izračunati. $s = \dfrac{11+13+20}{2} = 22$ cm, $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c} = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{4356} = 66\ cm^2$. A polumjer se tada dobiva iz $P = r \cdot s$: $r = \dfrac{P}{s} = \dfrac{66}{22} = 3$ cm.

Također, tijekom prvoga razreda srednje škole, učenici se upoznaju s trigonometrijskim omjerima, a preko njih određuju površine trokuta. Ovaj se postupak na kraju svede na onu već poznatu površinu trokuta te se njome nećemo previše baviti, no pogledajmo ipak jedan zadatak na slici 21.

Sljedeći susret s površinom srednjoškolci imaju u okviru gradiva o drugom korijenu:

Zadatak. *Mostellerova formula koja povezuje površinu ljudskog tijela P izraženu u m^2, masu m izraženu u kg i visinu h izraženu u cm glasi: $P = \dfrac{\sqrt{mh}}{60}$.*

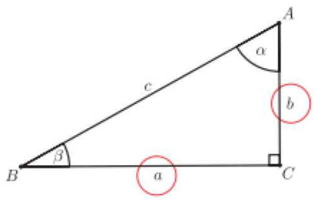
a) Odredimo površinu tijela čovjeka visokog 1.8 m čija masa iznosi 90 kg.

b) Odredimo masu čovjeka visokog 2 m čija površina kože iznosi 2.4 m^2.

c) Odredimo visinu čovjeka mase 75 kg čija površina kože iznosi 1.98 m^2.

Primjer 4.

Odredimo nepoznatu duljinu stranice, mjere kutova i površinu pravokutnog trokuta u kojem su zadane duljine kateta $a = 7.5$ cm i $b = 4.2$ cm.



Rješenje: Kad na skici pravokutnog trokuta istaknemo zadane katete a i b, kut α možemo dobiti s pomoću tangensa:

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, što nakon uvrštavanja duljina stranica a i b određuje vrijednost tangensa $\mathrm{tg}\,\alpha = 1.78571$ i daje rezultat $\alpha = 60° \, 45' \, 4''$. Sada je kut $\beta = 90° - \alpha$ zbog komplementarnosti s kutom α, pa je $\beta = 29° \, 14' \, 56''$.

Hipotenuzu c možemo izračunati Pitagorinim poučkom, ali i trigonometrijski s pomoću sinusa:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, odakle je $c = \frac{a}{\sin\alpha}$. Zatim uvrštavajući zadane vrijednosti

$c = \frac{7.5}{\sin 60° \, 45' \, 4''}$, dobivamo rezultat koji ćemo zaokružiti

$c = \frac{7.5}{0.87251} = 8.5959... \approx 8.6.$

Površina trokuta mogla se izračunati odmah na početku zadatka jer su zadane duljine kateta a i b. Rezultat je $P = 15.75 \text{ cm}^2$.

Slika 21: Primjer preuzet iz [12].

Rješenje. Pogledajmo redom rješenja zadatka:

a) $P = \dfrac{\sqrt{mh}}{60} = \dfrac{\sqrt{90 \cdot 180}}{60} = 2.12 \ m^2.$

b) $P = \dfrac{\sqrt{mh}}{60}$ pa je $2.4 = \dfrac{\sqrt{m \cdot 200}}{60}$, odnosno $m = \dfrac{(60 \cdot 2.4)^2}{200} = 103.68$ kg.

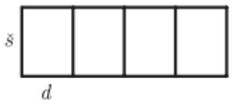
c) $P = \dfrac{\sqrt{mh}}{60}$ pa je $1.98 = \dfrac{\sqrt{75h}}{60}$, odnosno $h = \dfrac{(60 \cdot 1.98)^2}{75} = 188.18$ cm.

U sklopu obrade kvadratnih jednadžbi i funkcija, učenici imaju priliku ponoviti površine likova koje već poznaju:

Zadatak. *Igralište je imalo oblik kvadrata. Sa zapadne strane igralište je skraćeno za tri metra, a zatim prošireno sa sjeverne strane za osam metara. Kolika je bila površina igrališta na početku, ako je na kraju iznosila 6776 m^2?*

Rješenje. Trenutna je površina 6776 m^2, a igralište je oblika pravokutnika jer smo jednu stranicu početnoga kvadrata skratili, a drugu produljili. Trenutne su stranice duljine $x - 3$ i $x + 8$. Iz površine pravokutnika $P = a \cdot b$ imamo da je $6776 = (x - 3) \cdot (x + 8)$, tj. $x^2 + 5x - 24 = 6776$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo $x = 79.85$, tj. početni kvadrat imao je stranicu duljine 79.85 m. Možemo pretpostaviti kako je igralište imalo cjelobrojnu duljinu stranice, tj. $x = 80$ pa je onda početna površina $P_k = 80^2 = 6400 \ m^2$.

3. Od ograde duljine 300 metara napravite 4 jednaka skladišta kao na slici. Kolika je širina, a kolika duljina skladišta ako želimo da su ona najveće moguće površine.



Slika 22: Zadatak preuzet iz [4].

Zadatak. *Roko je kupio puno ovaca i žicu za ograđivanje duljine 100 m kako bi unutar svoje već ograđene velike parcele odvojio prostor samo za ovce. Kolika je najveća moguća površina prostora za ovce ako s jedne strane iskoristi postojeću ogradu, a s preostale tri ga ogradi kupljenom žicom?*

Rješenje. Označimo duljinu i širinu ograđenog prostora i neka je s jedne strane duljine d već postojeća ograda. Tada 100 m žice treba ograditi preostale tri stranice pravokutnog prostora za ovce: $d + 2s = 100$, odnosno $d = 100 - 2s$. Površina tog prostora je $d \cdot s = (100 - 2s)s = -2s^2 + 100s$.
Najveća se vrijednost postiže za $s = \dfrac{-100}{-4} = 25$ m pa je $d = 100 - 2s = 50$ m. Maksimalna površina ograđenog prostora za ovce onda je $P = d \cdot s = 50 \cdot 25 = 1250\ m^2$.

Zadatak. *Susjeda Stavrić uređuje cvjetnjak u obliku kruga promjera 2.5 m. Želi posaditi tulipane tako da čine kružni vijenac širine 50 cm. Preostalu površinu u unutrašnjosti cvjetnjaka želi zasaditi crvenim tulipanima. Koliku površinu može zasaditi crvenim tulipanima?*

Definicija. *Središnjem kutu od α stupnjeva, u kružnici polumjera r, pripada kružni isječak površine $P = \dfrac{r^2\pi\alpha}{360} = \dfrac{rl}{2}$, gdje je l duljina pripadnog luka.*

Zadatak. *Središnji kut nekog kružnog isječka u krugu polumjera 6 cm iznosi $\alpha = 75^\circ$. Kolika je površina kružnog isječka? Koliki je to postotak površine kruga?*

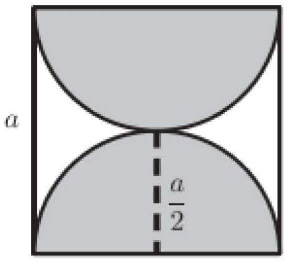
Primjer 5.

Kolika je površina osjenčanog lika na slici ako je duljina stranice kvadrata $a = 6$ cm?

Rješenje:

Lik na slici sastoji se od dva polukruga polumjera duljine 3 cm.

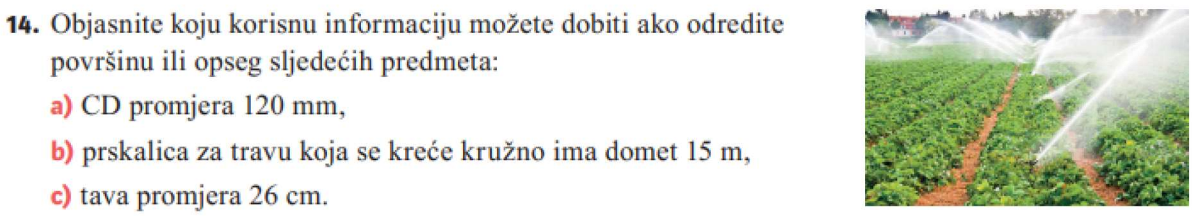
Površina osjenčanog lika je $3^2\pi = 9\pi\ \text{cm}^2$.



Slika 23: Zadatak preuzet iz [4].

Pri povratku na trigonometrijske izraze, učenici se susreću s još formula za površinu trokuta, a koju onda mogu primijeniti i na paralelogram.

Površina. *Površina trokuta jednaka je polovici umnoška duljina dviju stranica i sinusa kuta između njih $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta$. Ako su zadane duljina jedne stranice i mjere dvaju kutova trokuta, površina trokuta može se računati po formuli $P = \dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \dfrac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta} = \dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$.*



14. Objasnite koju korisnu informaciju možete dobiti ako odredite površinu ili opseg sljedećih predmeta:

a) CD promjera 120 mm,

b) prskalica za travu koja se kreće kružno ima domet 15 m,

c) tava promjera 26 cm.

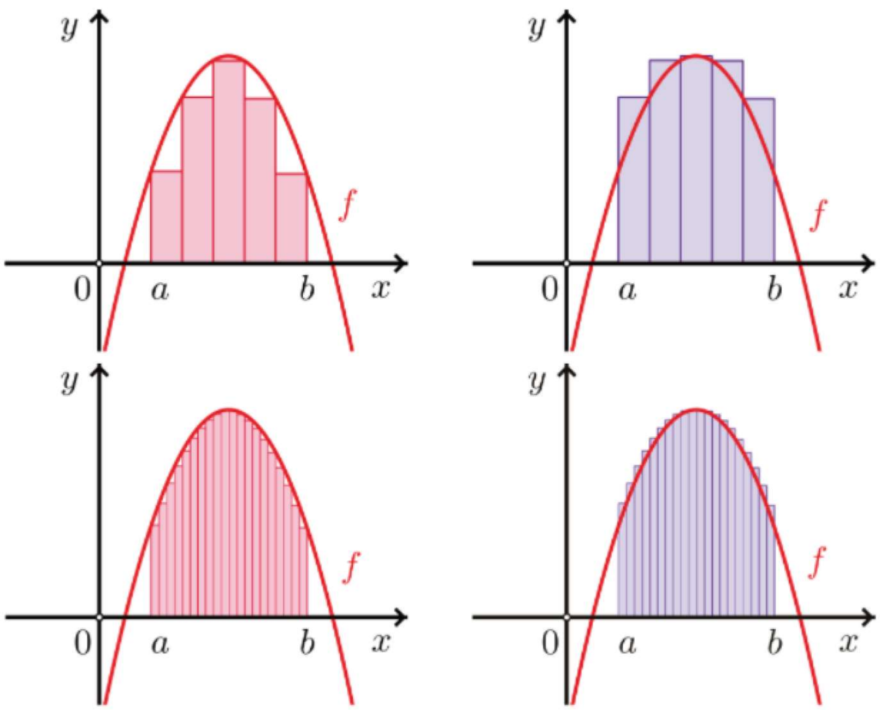
Slika 24: Zadatak preuzet iz [4].

Površina. *Neka su a i b stranice paralelograma, e i f njegove dijagonale, α mjera kuta između susjednih stranica i ϕ mjera kuta između dijagonala paralelograma. Površina paralelograma jednaka je $P = ab\sin\alpha$ i $P = \frac{1}{2}ef\sin\phi$.*

Zadatak. *Dijagonale paralelograma duge su 7.4 cm i 9.6 cm te se sijeku pod kutom 32° 18'. Kolika je površina paralelograma?*

Rješenje. Znamo da površinu paralelograma uz poznate dijagonale i kut između njih možemo odrediti po formuli $P = \frac{1}{2}ef\sin\phi$. Stoga je $P = \frac{1}{2}\cdot 7.4 \cdot 9.6 \cdot \sin 32°18' = 18.98\ cm^2$.

Za kraj srednjoškolskog obrazovanja, kao izborni ishod za četvrti razred srednje škole s programom 4 sata tjedno, učenici imaju priliku upoznati integrale i njihovu primjenu na računanje površine.



Slika 25: Preuzeto iz [5].

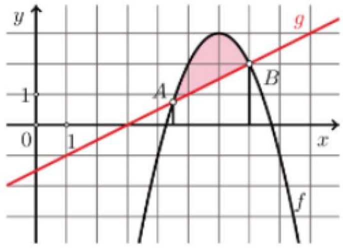
Površina. *Ako je f neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$ i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a,b]$, onda je površina lika omeđenoga grafom funkcije f, pravcima $x = a$, $x = b$ i odsječkom $a \leq x \leq b$ na osi x dana izrazom $P = \int_a^b f(x)dx$.*

Površina. *Ako je f neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$ i graf funkcije ne siječe os x na tome intervalu, onda je površina lika omeđenoga grafom funkcije f, pravcima $x=a$, $x=b$ i $y=0$ dana izrazom $P=|\int_a^b f(x)dx|$.*

Zadatak 3.

Izračunajte površinu lika omeđenoga grafovima funkcija $f(x)=-(x-6)^2+3$ i $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

▶ **Rješenje:** $P=\frac{125}{48}$.



Slika 26: Zadatak preuzet iz [5].

4 Razvoj ideje volumena u nastavi

4.1 Osnovna škola

4.1.1 Razredna nastava

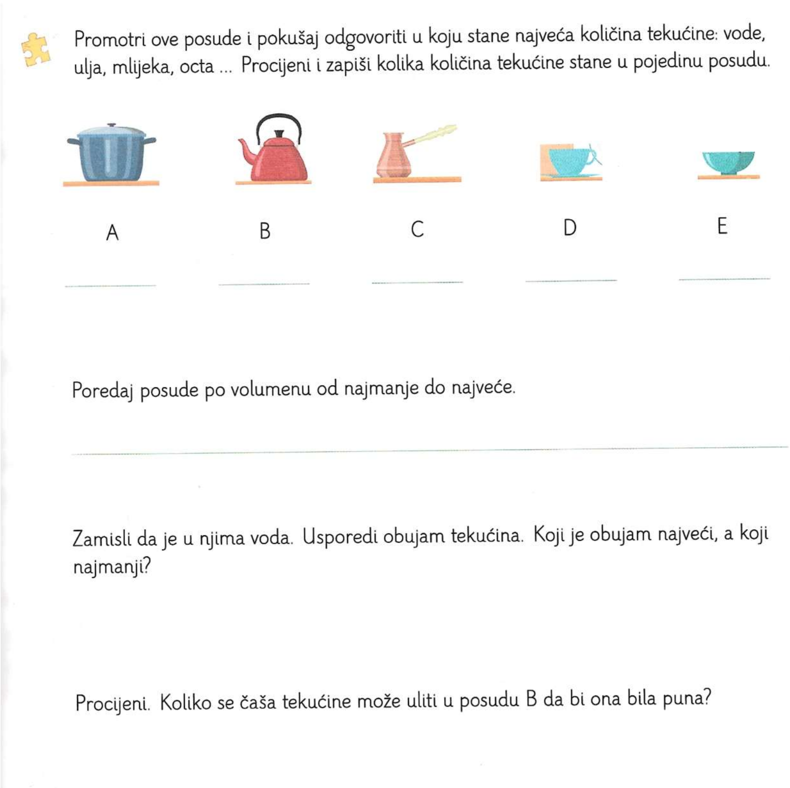
Volumen se spominje već u trećem razredu osnovne škole, a kroz njegovo upoznavanje učenike, kao i kod površine, treba voditi usporedba. Ovdje su to jedinične kockice čijim slaganjem mogu odrediti volumen kocke ili kvadra. Stavljanjem tijela jedno u drugo može se i izravno usporediti dva tijela – ako olovka stane u pernicu, ta pernica zauzima veći prostor od olovke, odnosno ima veći volumen. Slično, testovi prelijevanja vode iz jedne u drugu posudu otkrivaju odnose između volumena tih posuda, npr. Koliko čaša vode možemo napuniti sokom iz jedne boce?

Definicije i zadaci navedeni u ovome potpoglavlju preuzeti su iz udžbenika *Super matematika za prave tragače* [2] za četvrti razred osnovne škole.

Definicija. *Da bismo odredili koliko tekućine stane u neku posudu moramo izmjeriti volumen tekućine (obujam ili zapreminu). Jedinica za mjerenje obujma tekućine je litra (1 l ili 1 L). Manju mjernu jedinicu nazivamo decilitar (1 dl).*

Zadatak. *Marko svako jutro popije 3 dl tekućega jogurta. Koliko tekućega jogurta popije u lipnju?*

Rješenje. Lipanj ima 30 dana pa Marko u lipnju popije $30 \cdot 3 = 180$ dl tekućega jogurta, ili $180 : 10 = 18$ litara jogurta.



Slika 27: Zadatak preuzet iz [2].

Zadatak. *Pročitaj nekoliko zanimljivih podataka vezanih uz potrošnju vode. Prikaži ih grafikonom.*

- *Za jednu šalicu kave potrebno je oko 140 litara vode.*
- *Proizvodnja 1 l mlijeka zahtijeva oko 1000 litara vode.*
- *Za proizvodnju 1 kg pšenice potrebno je oko 950 litara vode.*
- *Za proizvodnju 1 kg riže potrebno je oko 3000 litara vode.*
- *Za proizvodnju 1 kg kukuruza potrebno je oko 900 litara vode.*

Odgovori kratko ili izračunaj:

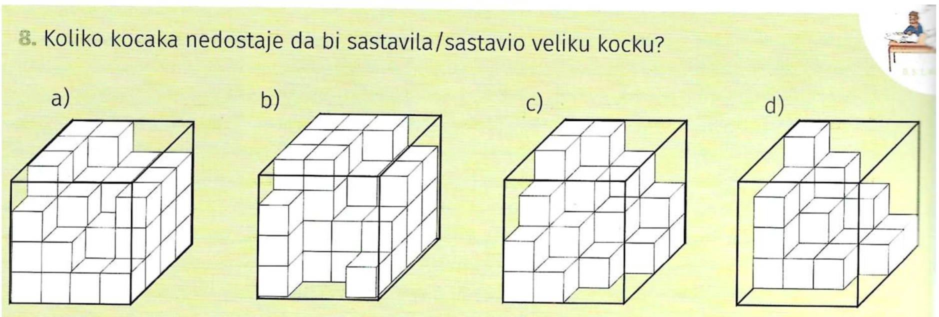
a) Za koji se proizvod potroši najviše vode?

b) Koliko se ukupno vode potroši za žitarice? Koliko je to decilitara?

Djeca najbolje uče kroz iskustvo pa im, kada god je to moguće, treba dati priliku da sami dolaze do otkrića. Upravo je volumen područje gdje možemo dati učenicima slobodu istraživanja. Ako svaki učenik dobije jednak komad materijala (gline, plastelina), koliko različitih tijela mogu napraviti od njega? Kako se odnose volumeni tih tijela? Kako bi to mogli provjeriti?

4.1.2 Predmetna nastava

Napomena. *Pod volumenom (obujmom) geometrijskog tijela smatramo veličinu prostora koji to tijelo zauzima. Osnovna mjerna jedinica za volumen je kubni ili prostorni metar (m^3). Volumen mjerimo: metrima kubnim (m^3), decimetrima kubnim (dm^3), centimetrima kubnim (cm^3), milimetrima kubnim (mm^3).*



Slika 28: Zadatak preuzet iz [6].

Volumen. *Volumen (obujam) kocke računa se prema formuli $V = a^3$, pri čemu je a duljina brida kocke.*

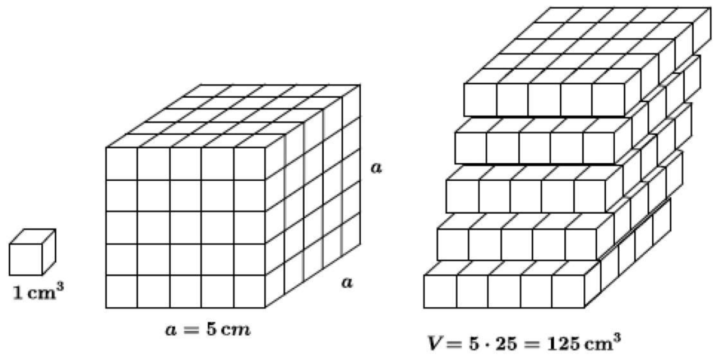
Zadatak. *Akvarij u obliku kocke kojoj je duljina brida 12 dm napunjen je do vrha vodom. Izlijemo li iz akvarija 236 litara vode, koliko će litara vode ostati u akvariju?*

Slika 29: Zadatak preuzet iz [6].

Rješenje. Za početak, zanima nas ukupan volumen akvarija: $V = a^3 = 12^3 = 1728\ dm^3$, odnosno 1728 litara. To znači da će nakon izlijevanja u akvariju ostati $1728 - 236 = 1492$ l vode.

1 kg vode zauzima prostor, ima volumen od 1 LITRE. Jedinica za mjerenje volumena tekućine je jedna litra. Riječ litra zamjenjujemo oznakom l. 1 litra je volumen kocke koja ima brid duljine 1 dm.

I kod volumena je slaganje sigurna metoda za uvođenje volumena kvadra ili kocke. Veličinu kvadra možemo odrediti punjenjem toga kvadra jediničnim kockicama, a brojanjem kockica u smjeru duljine, širine i visine može se izvesti formula za volumen kvadra, $V = a \cdot b \cdot c$, uz dogovor da je $1\ cm \cdot 1\ cm \cdot 1\ cm = 1\ cm^3$. Poseban slučaj ove formule je volumen kocke, gdje u sva tri smjera imamo jednak broj kockica.



Slika 30: Volumen kocke.

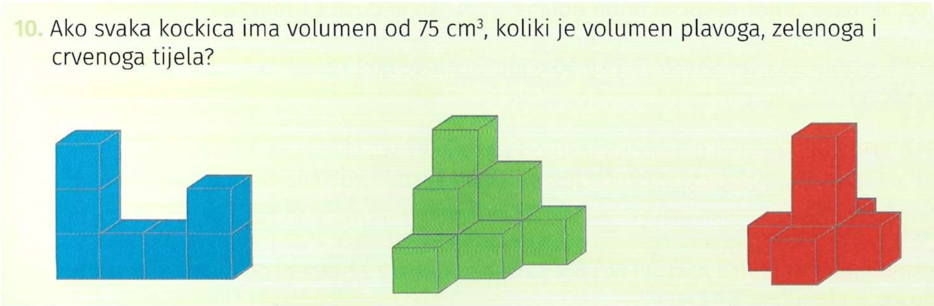
Zadatak. *Cisterna za ulje ima oblik kvadra bridova duljine 5 m, 3 m i 2 m. Koliko litara ulja možemo uliti u nju da bude puna?*

Rješenje. Zanima nas volumen cisterne, a njega izračunamo pomoću formule za volumen kvadra: $V = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30\ m^3$. U cisternu možemo uliti $30 \cdot 1000 = 30000$ litara ulja.

Zanimljiva je činjenica da se učenici u šestome i sedmome razredu uopće ne susreću s pojmom volumena u nastavi matematike. Razlog tomu je usmjerenost na planimetriju, odnosno na upoznavanje mnogokuta u ravnini prije prelaska na trodimenzionalni prostor.

Stoga se tek u drugome polugodištu osmoga razreda vraćaju kurikularni ishodi vezani uz volumen, i to počevši od kocke i kvadra koje su učenici upoznali još u petome razredu.

Ponovno obrada započinje prisjećanjem od ranije poznatih informacija, preračunavanjem mjernih jedinica za volumen tijela te korištenjem jediničnih kocaka.



Slika 31: Zadatak preuzet iz [11].

Zadatak. *U posudu oblika kvadra bridova duljine $a = 36$ cm i $b = 30$ cm nalije se tekućina iz pet punih posudica oblika kocke brida duljine 12 cm. Do koje visine je posuda napunjena tekućinom?*

Rješenje. U svakoj od pet manjih posudica oblika kocke nalazi se $V_m = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ cm^3 tekućine, a to je ukupno $V = 5 \cdot 1728 = 8640$ cm^3. Toliki će biti i volumen tekućine u novoj posudi kada ju prelijemo. Kako je volumen kvadra dan s $V = a \cdot b \cdot c$, znamo da ćemo visinu izračunati kao $c = \dfrac{V}{a \cdot b}$. Tada je $c = \dfrac{8640}{36 \cdot 30} = 8$ cm, tj. posuda je napunjena do visine od 8 cm.

Važno je kod učenika razvijati i sposobnost modeliranja, ali i poticati ih na ispitivanje, procjenjivanje i prilagođavanje. Primjerice, ima li dovoljno prostora (odnosno, volumena) na farmi za životinje koje želimo uzgajati? Ako nema, koliko bi nam još prostora trebalo ili koliko bismo životinja morali preseliti?

Slično, evo jednoga zadatka kojega možemo vrlo lako prilagoditi konkretnoj učionici i broju učenika u razredu u kojemu trenutno poučavamo:

Zadatak. *Učionica oblika kvadra prima 30 učenika. Svakom je potrebno 7 m^3 zraka. Kolika treba biti površina poda učionice ako je njezina visina 3.5 m?*

Rješenje. Za 30 učenika potrebno je osigurati $30 \cdot 7 = 210$ m^3 zraka. Učionica je oblika kvadra pa je njezin ukupni volumen jednak površini poda pomnoženoj s visinom koja nam je poznata. Tada je površina poda: $a \cdot b = 210/3.5 = 60$ m^2.

Nakon ponavljanja poznatih tijela, učenici se upoznaju s pojmom prizme, s time da se u udžbeniku [11] konkretno obrađuje samo pravilna četverostrana prizma.

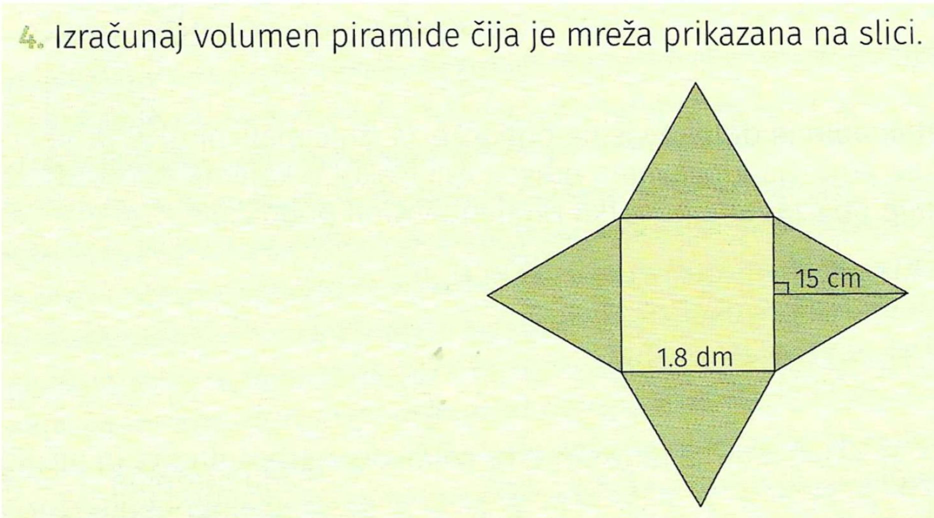
Volumen. *Volumen prizme jednak je umnošku površine baze i duljine visine prizme, $V = B \cdot h$.*

Konačno, pred kraj osnovnoškolskoga obrazovanja slijede volumeni piramida i oblih geometrijskih tijela.

Kako su učenici već upoznati s pojmom prizme, za upoznavanje volumena piramide često se koristi sljedeći eksperimentalni primjer:

Primjer. *Učenicima damo model piramide i model prizme čije su baze jednake površine i visine jednake duljine. Oni model piramide pune vodom i prelijevaju tu vodu u model prizme. Njihov je zadatak uočiti kako je potrebno sadržaj piramide izliti tri puta kako bi se napunila prizma, što ih treba navesti na zaključak da prizma ima tri puta veći volumen od piramide, odnosno da volumen piramide iznosi jednu trećinu volumena odgovarajuće prizme.*

Volumen. *Volumen piramide jednak je trećini umnoška površine baze (osnovke) i duljine visine piramide,* $P = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.



Slika 32: Zadatak preuzet iz [11].

Učenici često površinu i volumen promatraju kao odvojene pojmove. Međutim, kao što im treba pomoći osvijestiti veze između likova ili veze između tijela, važno je uputiti ih prema razumijevanju analogija površine i volumena. Primjerice, većina učenika prepoznaje piramidu kao 3D trokut, ali vjerojatno ne vide nikakvu poveznicu između površine trokuta, $\frac{1}{2}av_a$ i volumena piramide $\frac{1}{3}Bh$. Zaključivanje o povezanosti između tih i sličnih formula često su komplicirani za prosječnoga učenika, ali može ih se ostaviti za dodatnu nastavu ili obraditi „za one koji žele znati više."

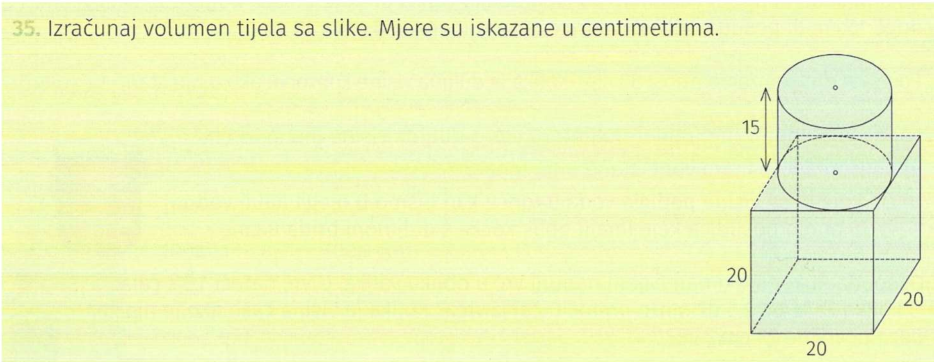
Slika 33: Primjer otkrivanja volumena valjka. Preuzeto iz [11].

Volumen. *Volumen valjka jednak je umnošku površine baze i duljine visine valjka,* $V = B \cdot h = r^2\pi \cdot h.$

Zadatak. *Koja posuda ima veći volumen: posuda oblika valjka promjera baze duljine 12 cm i visine duge 15 cm ili posuda oblika kvadra čije su dimenzije 8 cm · 10 cm · 20 cm?*

Rješenje. Izračunajmo oba volumena, a zatim ih usporedimo: $V_v = B \cdot h = 6^2\pi \cdot 15 = 540\pi \approx 1696.5\ cm^3$, a $V_k = 8 \cdot 10 \cdot 20 = 1600\ cm^3$. To znači da posuda oblika valjka ima veći volumen.

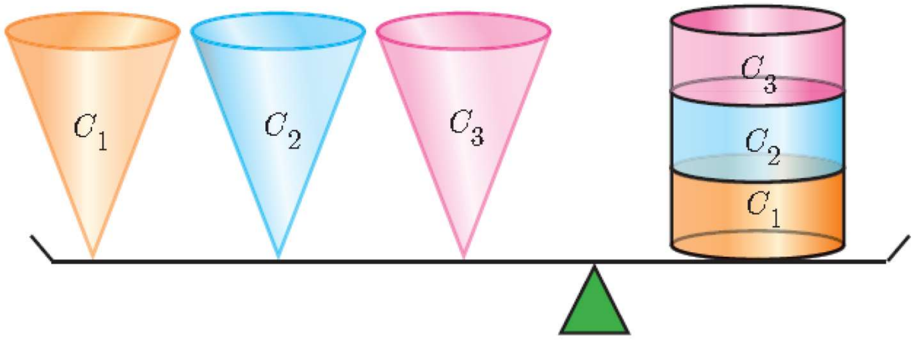
Zadatak. *Iz punoga vrča oblika valjka ($r = 45$ mm, $h = 25$ cm) Marta je prelila vodu u vazu oblika prizme. Baza prizme jest kvadrat stranice duljine 8 cm, a visina prizme jednaka je visini vrča. Je li vaza napunjena vodom do vrha?*



Slika 34: Zadatak preuzet iz [11].

Analogno pokusu kojim su otkrili volumen piramide, učenicima se mogu dati modeli valjka i stošca. Zadatak je isti: odrediti kako se odnose volumeni tih dvaju tijela.

Volumen. *Volumen stošca jednak je trećini umnoška površine baze i duljine visine,* $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h.$



Slika 35: Preuzeto s [13].

Zadatak. *U posudi oblika stošca visine duljine 3 dm i promjera baze duljine 2.5 dm nalazi se tekućina. Tekućinu iz stošca prelijemo u posudu oblika valjka promjera baze duljine 10 cm. Koju visinu doseže tekućina u valjku?*

U udžbeniku [11] oplošje i volumen kugle dio su proširenoga sadržaja, ali svejedno ćemo ovdje, na kraju volumena u predmetnoj nastavi, navesti jedan od zadataka.

Volumen. *Volumen kugle polumjera duljine r dan je formulom* $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.


25. U valjkastom tuljcu nalaze se 4 jednake loptice za bilijar. Koliki je volumen tih četiriju loptica? Koliko je praznoga prostora u tom valjkastom tuljcu?

Slika 36: Zadatak preuzet iz [11].

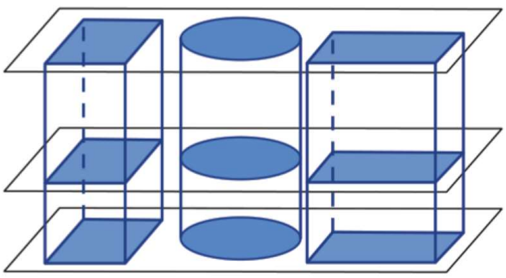
Rješenje zadatka na slici 36. Vidimo na slici da kuglice svojim promjerima dodiruju rubove tuljca, odnosno da su sva četiri promjera ukupno jednaka 24 cm. Tada je polumjer jedne kuglice $r = (24 : 4) : 2 = 3$ cm. Volumen svake od kuglica je $V = \frac{4}{3}3^3\pi = 113.1\ cm^3$, a ukupan volumen je $V_{uk} = 4 \cdot 113.1 = 452.4\ cm^3$. Tuljac ima oblik valjka s bazom polumjera 3 cm (kao i kuglica) i visinom duljine 24 cm pa je volumen tuljca $V_t = 3^2\pi \cdot 24 = 678.6\ cm^3$. Praznog prostora je tada $V_t - V_{uk} = 678.6 - 452.4 = 226.2\ cm^3$. (U rješenjima udžbenika ostavlja se π bez uvrštavanja.)

4.2 Srednja škola

U srednjoj školi volumen je manje zastupljen od očekivanog - većinom ga pronalazimo u drugome razredu, a u ostalima se eventualno usputno spominje. Kao i kod površine, susrećemo se s korijenom, ovaj puta kubnim, a zatim u drugome polugodištu na red dolaze geometrijska tijela. Većinom su to ona koja učenici poznaju iz osnovne škole, uz dodatak kosih i krnjih verzija.

Započnimo s Cavalierijevim principom:

Cavalierijev princip. *Ako presjeci tijela istih visina sa svakom ravninom paralelnom ravnini baze imaju iste površine, onda ta tijela imaju jednak obujam.*



Slika 37: Cavalierijev princip. Preuzeto iz [4].

Zadatak. *Mama je skuhala 15 litara ajvara za zimnicu i želi ga preraspodijeliti u manje posude. Na raspolaganju ima posude oblika valjka promjera baze 16 cm i posude oblika kvadra čije dno je oblika kvadrata duljine brida 12 cm. Sve posude su visoke 30 cm.*

a) Ako mama puni samo posude oblika valjka, koliko ih mora upotrijebiti?

b) Ako mama puni samo posude oblika kvadra, koliko ih mora upotrijebiti?

c) Ako mama želi u jednu posudu oblika valjka staviti istu količinu ajvara kao i u posudu oblika kvadra kada je napunjena do vrha, do koje visine mora puniti?

Rješenje. Izračunajmo volumene posuda.

a) Volumen posude oblika valjka je $V_v = 8^2\pi \cdot 30 = 6031.9\ cm^3 = 6.0319\ dm^3$ pa mama mora upotrijebiti $15 : 6.0319 = 2.49$, odnosno 3 posude.

b) Volumen posude oblika kvadra je $V_k = 12 \cdot 12 \cdot 30 = 4320\ cm^3 = 4.32\ dm^3$ pa mama mora upotrijebiti $15 : 4.32 = 3.47$, odnosno 4 posude.

c) Mama želi da u posudi oblika valjka bude $4320\ cm^3$ ajvara. Zanima nas visina: $h = V : (r^2\pi)$, tj. $h = 4320 : (64\pi) = 21.49$ cm.

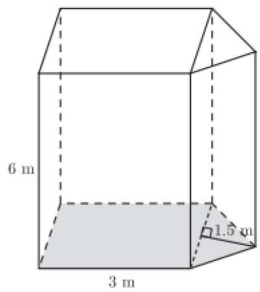
Volumen. *Ako je B površina baze i h visina prizme, tada je obujam prizme $V = Bh$.*

Primjer 1.

Stjepan želi u svoju vikendicu uvesti centralno grijanje. Da bi odredio optimalan broj radijatora, mora izračunati obujam prostora koji želi grijati. Vikendica je duga 6 m i široka 4 m. Njezina visina do početka krova je 3 m, dok je visina samog krova 1.5 m. Koliki je obujam vikendice?

Rješenje:

„Preokrenimo“ vikendicu na bok tako da lakše uočimo da je dobiveno tijelo prizma.
Baza se sastoji od pravokutnika i trokuta, pa je površina baze $B = 4 \cdot 3 + \dfrac{4 \cdot 1.5}{2} = 15\ \text{m}^2$.
Obujam vikendice bit će $V = Bh = 15 \cdot 6 = 90\ \text{m}^3$.



Slika 38: Zadatak preuzet iz [4].

Zadatak. *Domaćica želi presuti brašno iz posude čije je dno u obliku pravokutnika širine 25 cm i duljine 35 cm u posudu čije je dno u obliku pravilnog šesterokuta duljine stranice 19 cm. Ako su posude jednake visine, koliki dio druge posude će se napuniti brašnom nakon presipanja?*

Rješenje. Baza pravokutne posude ima površinu $P_p = 25 \cdot 35 = 875\ cm^2$. Šesterokut ima površinu $P_6 = 6 \cdot \dfrac{19^2\sqrt{3}}{4} = 937.9\ cm^2$. Kako posude imaju iste visine, razlika u volumenu posuda ovisit će samo o površinama baza. Ako je posuda pravokutnog dna do kraja napunjena, presipanjem brašna druga će se posuda napuniti do $\frac{P_p}{P_6}$ svog volumena, odnosno do $\frac{875}{937.9}$ ili 0.9329, a to je 93.29%.

Zadatak. *Kanta s bojom je u obliku valjka polumjera baze 20 cm i visine 40 cm. Napunjena je bojom do četiri petine visine kante. Valjak za bojenje je također u obliku valjka polumjera baze 10 cm i visine 50 cm. Kada u kantu uronimo valjak za bojenje do polovice njegove visine, za koliko se centimetara podignula visina boje u kanti?*

Zadatak. *Jednakostranični valjak (valjak kojem je visina jednaka dijametru) ima obujam 130 cm^3. Kolika mu je površina baze?*

Zadatak. *Božićnu kuglu polumjera 11 cm želimo napuniti tekućinom. Koliko litara vode nam za to treba?*

Rješenje. Volumen kugle je $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3} \cdot 11^3\pi = 5575.28\ cm^3 = 5.575$ litara.

Vidimo kako se matematički sadržaj povezan s volumenom u srednjoj školi velikim dijelom svodi na već poznato - većinu ovih tijela učenici su upoznali još u osnovnoj školi. Također, u srednjoškolskim udžbenicima prevladavaju zadaci čistoga uvrštavanja u formule, bez ranije spomenutoga stvarnoga aspekta. To je djelomično i očekivano; učenicima se u osnovnoj školi nastoji približiti ove pojmove i zainteresirati ih za učenje o njima, dok se u srednjoj školi usredotočuje na preciznost u računanju, posebice obzirom na državnu maturu koja očekuje većinu srednjoškolaca.

5 Zaključak

Znamo kako novi Kurikulum zahtijeva približavanje gradiva učenicima putem primjera iz stvarnoga života. U ovome radu prikazani su većinom zadaci koji upravo to čine - daju realan kontekst matematičkim pojmovima i formulama. Time učenici barem djelomično dobivaju odgovor na pitanje „Što će mi to u životu?"

Međutim, velik broj zadataka, čak i u reformiranim udžbenicima, i dalje se fokusira na strogo uvrštavanje danih podataka u formule, bez imalo stvarne primjene. To možda jeste donekle potrebno; učenici trebaju usvojiti važna svojstva likova i tijela, ali ne moraju to činiti na tako konstriktivan način.

Naravno, nije za očekivati da će jedno izdanje udžbenika ili jedna generacija učenika potpuno promijeniti način na koji se obrađuje gradivo geometrije u osnovnim i srednjim školama, a ova prva generacija već je napravila pomak naprijed. Možda će neke buduće generacije osjećati manje odbojnosti prema geometriji, posebice površini i volumenu, a možda ćemo i mi kao nastavnici pronaći nove načine kojima bismo mogli učenicima približiti ove teme.

Literatura

[1] S. Antoliš, A. Copić, E. Špalj, *Matematika za 1. razred srednje škole*, Hrvatska akademska i istraživačka mreža CARNET, Zagreb, 2018.

[2] M. Martić, G. Ivančić, J. Dunatov, M. Brničević Stanić, J. Martinić Cezar, *Super matematika za prave tragače, 2. dio*, Profil Klett, Zagreb, 2021.

[3] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Mišurac, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 1. dio, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[4] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Mišurac, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 2. dio, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[5] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 4, 2. dio, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[6] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 5, drugi dio*, ALFA, Zagreb, 2019.

[7] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 6, prvi dio*, ALFA, Zagreb, 2020.

[8] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 6, drugi dio*, ALFA, Zagreb, 2020.

[9] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 7, drugi dio*, ALFA, Zagreb, 2020.

[10] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 8, prvi dio*, ALFA, Zagreb, 2021.

[11] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 8, drugi dio*, ALFA, Zagreb, 2021.

[12] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 1, 2. dio, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[13] *Finding the Volume of a Cone*,
URL: `https://www.onlinemath4all.com/finding-the-volume-of-a-cone.html`

[14] *Heron's Formula: a Proof*,
URL: `https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/HeronsFormula.shtml`

[15] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulum nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2*, Narodne novine 7/2019, 2019.

Sažetak

Površina i volumen dijelovi su nastave tijekom cijelog osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja u hrvatskim školama. Unatoč tome, ove su teme i dalje često problematične za učenike. U ovome radu pogledali smo neke od zadataka predviđenih za učenike prema trenutno dostupnim udžbenicima te vidjeli kakva očekivanja Kurikulum ima od nastavnika u poučavanju površine i volumena.

Ključne riječi: Površina, volumen, Kurikulum, ishodi učenja

Summary

Area and volume are part of teaching throughout primary and secondary education in Croatian schools. Despite this, these topics are still often problematic for students. In this paper, we looked at some of the tasks intended for students according to currently available textbooks and saw how the Curriculum expects teachers to handle area and volume in their lessons.

Keywords: Area, volume, Curriculum, learning outcomes

Životopis

Zovem se Martina Jukić, rođena sam 11. srpnja 1995. godine u Slavonskom Brodu. Nakon završene osnovne škole u Gunji, pohađala sam opću gimnaziju u Županji koju sam završila 2014. godine. Tijekom školovanja sudjelovala sam na raznim županijskim i državnim natjecanjima, a kao članica (novinarka i redateljica) Studija kreativnih ideja Gunja i na nekoliko filmskih revija djece i mladeži, filmskim festivalima te državnoj smotri LiDraNo. Upisala sam Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku 2014. godine, a 2019. sam imala priliku sudjelovati na Zimskoj matematičkoj školi kao voditeljica radionice *Uzorci u matematici* za 6. razred. Od rujna 2021. zaposlena sam u OŠ „Antun i Stjepan Radić” u Gunji, gdje predajem matematiku u 6. i 7. te informatiku u 5. i 6. razredu.