

# Zadaci otvorenog tipa u nastavi matematike

---

**Babić, Vedrana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:814682>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-23**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Vedrana Babić

# Zadaci otvorenog tipa u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Vedrana Babić

# Zadaci otvorenog tipa u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Tradicionalna i moderna nastava matematike</b>	<b>5</b>
2.1	Nastavnik "menadžer" . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Zadaci novog doba</b>	<b>6</b>
3.1	Zadaci otvorenog tipa . . . . .	6
3.2	Vrste zadataka otvorenog tipa . . . . .	6
3.3	Klasifikacija otvorenih problema . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Prednosti i nedostaci zadataka otvorenog tipa</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Kako kreirati zadatke otvorenog tipa</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Kako odabrati zadatak</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Razvoj nastavnog plana</b>	<b>12</b>
7.1	Poučavanje problema . . . . .	13
7.2	Kriterij ocjenjivanja . . . . .	15
<b>8</b>	<b>Primjeri poučavanja</b>	<b>16</b>
8.1	Formulacija problema . . . . .	16
8.2	Primjer primjene u osnovnoj školi . . . . .	17
8.3	Primjeri primjene u srednjoj školi . . . . .	22
8.3.1	Niži razredi srednje škole . . . . .	22
8.3.2	Viši razredi srednje škole . . . . .	26
<b>9</b>	<b>Istraživanje u Japanju</b>	<b>29</b>
9.1	Motivacija projekta . . . . .	29
9.2	Rasprava okruglog stola o projektu . . . . .	30
9.3	Kako ocjenjivati . . . . .	30
<b>10</b>	<b>Zaključak</b>	<b>31</b>
<b>11</b>	<b>Sažetak</b>	<b>32</b>
<b>12</b>	<b>The open-ended tasks in mathematic</b>	<b>33</b>
<b>13</b>	<b>Životopis</b>	<b>35</b>

# 1 Uvod

Nastava matematike još uvijek je usmjerena na ispunjavanje nastavnog plana i programa, odnosno, usmjerena je na to da učenici usvoje što više propisanog gradiva. Rješavanje zadataka najčešća je djelatnost učenika u nastavi matematike. Tradicionalna nastava matematike u središte stavlja nastavnika kao prenositelja znanja i dominantnu ulogu u nastavnom satu. Prevladavaju zadaci u kojima se pitanje postavlja izravno: Izračunajte!, Riješite jednadžbu!, Dokažite! i slično. Odnosno zadaci s poznatim postupkom rješavanja i jednim valjanim rješenjem. Zadaci se najčešće razlikuju po složenosti ali ne i idejno. Učenicima se zadaje veliki broj zadataka. Naglasak se stavlja na rutinske tehnike i osnovne algoritamske vještine, te se rijetko prakticira interpretacija rješenja. Nastavnik zadaje problem i daje najefikasniju metodu za njegovo rješavanje, a učenici samostalno rješavaju slične probleme. Nastavnici trebaju shvatiti da su zadaci važno sredstvo pri oblikovanju sustava osnovnih matematičkih znanja, umijeća i navika, te doprinose razvoju matematičkih sposobnosti i kreativnog mišljenja. Primjereni izbor i korištenje matematičkih zadataka preduvjeti su za kvalitetnu nastavu matematike i dobre rezultate učenika. U radu je opisan suprotan pristup, pristup modernoj nastavi matematike i zadacima otvorenog tipa koji nastavi matematike daju dozu zanimljivosti i kreativnosti.

## 2 Tradicionalna i moderna nastava matematike

Tradicionalna nastava matematike još uvijek dominira u našim školama. Tradicionalna nastava zapravo je koncept učenja i poučavanja u kojem nastavnik poučava matematičke sadržaje koji su strogo propisani programom i obuhvaćeni u udžbenicima. Nastavnik se u potpunosti oslanja na udžbenik, on "zna sve": objašnjava, demonstrira, uvodi novo gradivo dok učenici pasivno sjede, slušaju, prepisuju i memoriraju što im nastavnik kaže ili pokaže. Prevladavaju frontalni i individualni oblik u kojem nastavnik pita a učenik odgovara na postavljeno pitanje. U tradicionalnoj nastavi nije poželjno da učenik radi na svoj način, kritizira, preispituje i bude drugačiji. Najveći naglasak stavlja se na umijeće računanja, te poznavanje i usvojenost algoritama. Jako malo pažnje pridaje se vrijednosti matematičkih sadržaja, stoga njezina apstraktnost još više dolazi do izražaja. Ovakav oblik nastave matematike nije dao zadovoljavajuće rezultate koji bi naše učenike učinili konkurentnima na globalnom tržištu rada, no još uvijek prevladava u školama jer se (ne) uspjeh učenika smatra posljedicom učeničkih individualnih razlika. Moderna nastava matematike je koncept koji se temelji na očekivanjima i ishodima učenja. Koncentrirano je na vještine i kompetencije, ne na ono što znaju nego na ono što umiju s tim sadržajima. Znanjem se smatra individualnom konstrukcijom učenika koja nastaje u interakciji s okolinom. Naglasak je na inovativnosti, stvaralaštvu, rješavanju problema, razvoju kritičkoga mišljenja, poduzetnosti, informatičkoj pismenosti i socijalnim kompetencijama.

Teži se ka manjoj količini sadržaja, ali boljoj razvijenosti kompetencija. Najčešći su istraživanje i otkrivanje - kojima se potiču učenici na originalni pristup zadacima. Moto moderne nastave matematike je: "bolje 1 zadatak na 5 različitih načina, nego 5 zadataka na jedan te isti način!"

### 2.1 Nastavnik "menadžer"

Iz nove kulture nastave matematike upravo i proizlazi izmijenjena uloga nastavnika: nastavnik kao „nastavni menadžer“. U tradicionalnoj nastavi nastavnik zadaje problem i daje najefikasniju metodu za njegovo rješavanje, a učenici samostalno rješavaju slične probleme.

U modernoj nastavi uloga nastavnika je sljedeća:

- Organizator je odvijanja nastave
- Ima pregled nad matematičkom situacijom i dobro ju poznaje
- Potiče dokumentiranje rada na nastavi
- Potiče analizu i sintezu postavljenih problema
- Usustavljuje i sređuje ideje učenika
- Vrednuje ideje i postignuća učenika.

Zadaća svakog nastavnika je poticati učenike na učenje matematike i podržavati njihov (matematički) razvoj.

### 3 Zadaci novog doba

Moderna nastava matematike danas se određuje kroz slijedeće elemente: novu kulturu nastave matematike, primjenu novih medija, oblike rada koji učenike vode ka samostalnosti, te daljnji razvoj kulture zadataka.

Primjenjuju se jasni nastavni oblici u kojima nastavnik više ne igra dominantnu ulogu i gdje se sposobnosti učenika mogu bolje razvijati. Nastavni proces više je orijentiran učenicima, povećava se samostalnost učenika, eksperimentalni i istraživački rad učenika, primjenjuju se novi mediji i nova kultura zadataka odnosno zadaci otvorenog tipa. Prakticira se modeliranje realnih problema, traže različiti načini rješavanja zadataka, prakticira komuniciranje i interpretiranje, te poziva na širenje pogleda na postavljeni problem.

#### 3.1 Zadaci otvorenog tipa

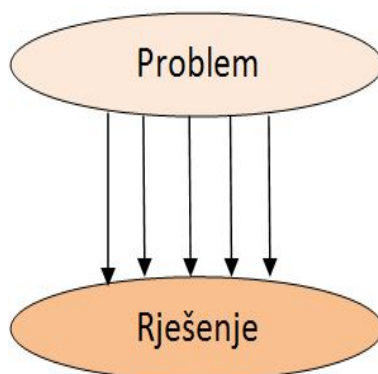
Jedan od načina unapređivanja kulture matematičkih zadataka su i tzv. zadaci otvorenog tipa. Problem (zadatak) otvorenog tipa je zadatak koji ima nekoliko ili mnogo rješenja i/ili više načina rješavanja. Rješavanje problema otvorenog tipa je nastavna strategija koja stvara interes učenika u razredu i stimulira kreativne matematičke aktivnosti putem individualnog ili suradničkog rada. Naglasak je na procesu rješavanja problema, a ne na rezultatu. Učenici samostalno biraju metodu i riječima argumentiraju:

- Kako su pristupili rješavanju zadatka
- Kada možemo primijeniti određeni pristup
- Svaki korak u postupku rješavanja zadatka
- Zašto se dobije pojedino rješenje.

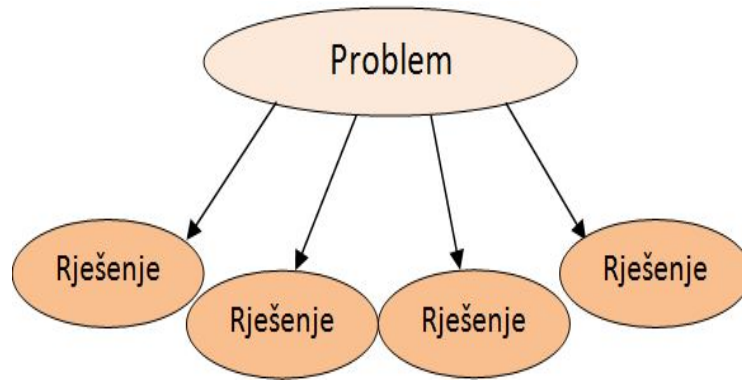
#### 3.2 Vrste zadataka otvorenog tipa

Razlikujemo dvije vrste zadataka otvorenog tipa:

1. Problemi (zadaci) koji imaju jedno rješenje ali više mogućih pristupa rješavanju



2. Problemi (zadaci) koji imaju više različitih (korektnih) rješenja



Ciljevi obje vrste zadataka otvorenog tipa su:

- Poticanje logičkog mišljenja
- Poticanje matematičkih sposobnosti
- Poticanje kreativnosti
- Poticanje interesa za matematiku
- Poticanje intelektualnog zadovoljstva
- Popularizacija matematike.

### 3.3 Klasifikacija otvorenih problema

Problemi otvorenog tipa klasificiraju se u nekoliko vrsta, pri čemu ta klasifikacija nije svojstvena samo ovim problemima.

#### 1. Zadaci pronalazjenja odnosa

Pred učenike se postavlja problem određivanja matematičkih odnosa ili pravila. Najčešće se analizira određena skupina podataka na temelju čije se analize izvedu zaključci.

#### 2. Klasificiranje

Zadaje se problem koji zahtjeva razvrstavanje po specifičnim karakteristikama.

#### 3. Mjerenje

U ovoj vrsti otvorenih problema od učenika se zahtjeva numerički opis nekog fenomena. Dakle, ne misli se na standardno mjerenje nego na osmišljavanje numeričkog modela.



## 4 Prednosti i nedostaci zadataka otvorenog tipa

Prednosti zadataka otvorenog tipa su:

- Potiču se različiti oblici učeničkog mišljenja
- Učenici aktivnije sudjeluju u nastavi i češće izražavaju svoje ideje
- Učenici imaju više prilika za široku upotrebu svog matematičkog znanja, vještina i sposobnosti
- Svaki učenik na problem može odgovoriti na vlastiti način, samostalnim izborom metode
- Takva nastava učenicima može osigurati iskustvo samostalnog zaključivanja
- Učenici dobivaju potvrde ostvarenih rezultata od strane kolega.

Učenička rješenja i odgovori na zadatke otvorenog tipa daju nam uvid o tome što učenici misle i znaju o matematici:

- Uvid u stil učenja
- Uvid u “rupe” u razumijevanju matematičkih koncepata
- Uvid u jezik kojim se služe u obrazlaganju svojih matematičkih ideja
- Uvid u način interpretacije matematičkih situacija.

Kao i svaka metoda poučavanja, tako i otvoreni pristup u nastavi matematike ima i nedostatke:

- Nije jednostavno pripremiti smislene matematičke problemske situacije
- Nastavniku nije uvijek jednostavno predočiti problem. Učenici ponekad imaju teškoće razumjeti kako reagirati i daju odgovore koji su matematički beznačajni
- Najsposobniji bi učenici mogli osjetiti nelagodu zbog svojih odgovora
- Učenici bi mogli pomisliti da je njihovo napredovanje nezadovoljavajuće jer nisu u stanju objediniti sve što se izlaže.

Nedostaci će se umanjiti raspravi li se svaka nejasnoća vezana uz razumijevanje problema. Nastavnik će nizom pitanja i potpitanja poticati stjecanje navike učenika da je od samog rezultata važnija analiza problema i metoda rješavanja. To će činiti postavljanjem općenitijih pitanja: “Što je razlog da ste se odlučili na ovaj postupak?”, “Opišite, kako ste došli do rješenja?” itd.

## 5 Kako kreirati zadatke otvorenog tipa

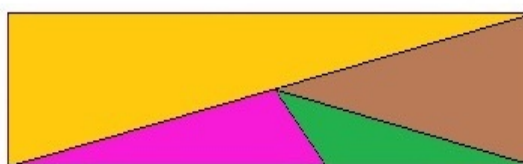
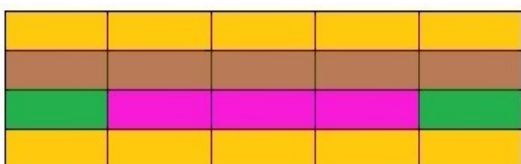
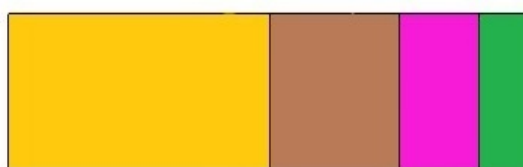
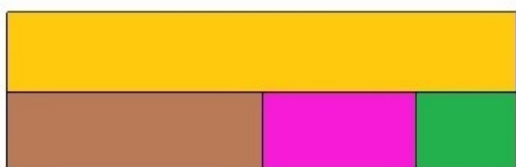
Nekoliko heuristika koje pomažu pri kreiranju zadataka otvorenog tipa:

1. Učenicima zadati zadatak kreiranja situacija ili primjera koji zadovoljavaju dane uvjete.

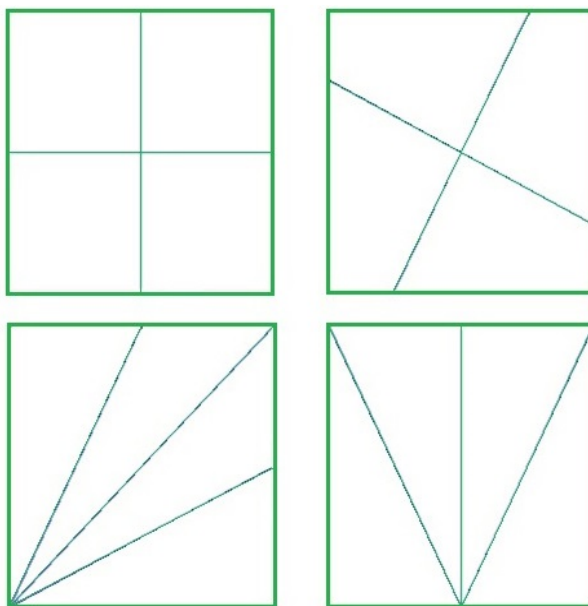
Ovakva pitanja zahtijevaju poznavanje i artikuliranje konceptima koji stoje u pozadini zadanog problema. Učenici moraju upotrijebiti svoje postojeće znanje o konceptu i primijeniti ga pri kreiranju primjera.

Podijelite vrt pravokutnog oblika tako da na njegovih 50% možemo uzgajati rajčicu, na 25% grah, na 15% ciklu, a na 10% zelenu salatu. Označite odgovarajuće dijelove vrta.

Nekoliko mogućih rješenja:



Primjer 2. Kvadrat podijeli na četiri dijela jednakih površina.  
Nekoliko mogućih rješenja:



2. Učenike pitati da objasne tko je u pravu i zašto.

Primjer 3. Ana tvrdi da 3 nije nultočka polinoma  $p(x) = 2x^4 + ax^3 + 3x^2 - 5x + 10$   
Iva tvrdi da 3 može biti nultočka polinoma  $p$ , ovisno o vrijednosti  $a$ . Tko je u pravu i zašto?

3. Učenike tražiti da zadatak (problem) riješe ili objasne na više različitih načina.

Primjer 4. Navedi dvije transformacije ravnine koje će kvadrat ABCD preslikati u samog sebe.

Vrlo često se "zatvoreni" problemi mogu preoblikovati u probleme otvorenog tipa.

Evo jednog primjera pretvorbe:

Polarni medvjed je 10 puta teži od srednjoškolca koji ima 50 kg. Kolika je masa polarnog medvjeda?

Ovako formuliran, zadatak je zatvorenog tipa, ali vrlo lako se može preoblikovati u problem otvorenog tipa:

Polarni medvjed ima masu 500 kg. Koliko srednjoškolaca treba okupiti da zajedno imaju istu masu?

## 6 Kako odabrati zadatak

Nakon što je nastavnik osmislio problem otvorenog tipa korisno je razmotriti sljedeće tri stavke prije iznošenja problema učenicima.

Je li problem bogat matematičkim sadržajima?

Problem bi trebao potaknuti učenike da razmišljaju na drugačiji način. No, to nije dovoljno, zadatak treba biti matematički bogat tako da ga i učenici koji imaju visoko znanje ali i oni s niskim matematičkim znanjem mogu riješiti primjenom različitih pristupa, od kojih svaki ima matematičku vrijednost.

Je li problem prikladan učenicima i njihovom dosadašnjem matematičkom znanju?

Kada učenici rješavaju otvoreni problem trebaju koristiti prethodno stečena znanja i vještine. Ako nastavnik procjeni da je problem iznad učeničkih sposobnosti, tada se problem ne bi trebao prezentirati učenicima ili ga treba izmijeniti. Generalno, težina problema treba biti prilagođena dobi i sposobnostima učenika.

Sadrži li problem matematičke sadržaje koji vode ka daljnjem matematičkom razvoju?

Unatoč mogućim odgovorima učenika na problem, neki od njih trebaju biti povezani s višim matematičkim konceptima ili trebaju poticati razmišljanje na višoj matematičkoj razini.

## 7 Razvoj nastavnog plana

Pretpostavljajući da je odabran valjan problem, sljedeći korak je osmišljavanje dobrog nastavnog plana. U ovom koraku nastavnik treba razmotriti navedene stavke.

### **Navesti moguće odgovore učenika**

Očekuje se da će učenici drugačije odgovoriti na zadani problem. Sukladno tome, nastavnik mora napisati listu mogućih odgovora na zadani problem.

Sposobnosti učenika u izražavanju ideja mogu biti ograničene, vrlo česti je i problem nemogućnosti verbalizacije i objašnjenja njihovog plana rješavanja. Također mogu objasniti istu matematičku ideju na različite načine. Vrlo je važno zapisati što je više moguće učeničkih ideja na njihovom „jeziku“. Lista mora sadržavati više naprednih odgovora nego što je za očekivati obzirom na razinu učeničkog znanja.

Odgovori se moraju grupirati ovisno o gledištu, te sumirati u konačan odgovor za pojedino gledište. Za svaki odgovor treba odrediti njegovu matematičku vrijednost ili smjer budućeg razvoja.

### **Razjasniti razlog obrade određenog problema**

Nastavnik treba razumjeti ulogu problema u nastavnom planu. Problem se može smatrati neovisnom temom, uvodom u novo poglavlje ili sumiranjem stečenih znanja učenika.

Pokazalo se da su zadaci otvorenog tipa izrazito korisni kada se radi o sumaciji ili uvodu u novo gradivo.

### **Razjasniti metode rješavanja problema tako da učenicima bude lagano razumjeti smisao problema i onoga što se očekuje od njih**

Problem treba biti napisan tako da ga učenici mogu lako razumjeti i pronaći način za rješavanje. U nekim slučajevima, mogu se zbuniti ako je nastavnikovo objašnjenje problema prekratko. Zbrka može biti rezultat nastavnikove odluke davanja učenicima dovoljno slobode u pristupu pronalazenju rješenja problema ili pomanjkanja iskustva učenika izvan standardnih okvira - zadataka zatvorenog tipa. Kako bi izbjegao zbrku nastavnika treba posvetiti pažnju postavljanju i prezentaciji problema.

### **Napraviti problem atraktivnim**

Problem treba biti konkretan i poznat učenicima. Budući da rješavanje otvorenog problema zahtjeva vrijeme za razmišljanje, problem treba biti atraktivan kako bi zadržao interes učenika.

### **Dovoljno vremena za istraživanje problema u potpunosti**

Ponekad je potrebno više vremena od očekivanog za postavljanje problema, učenička rješenja, raspravu o pristupima i rješenjima, te sumaciju onoga što je naučeno rješavanjem problema. Po potrebi nastavnik može iskoristiti dva nastavna sata za jedan problem. U prvom satu, učenici mogu raditi samostalno ili u grupama na pronalazenju rješenja i sumaciji njihovih zaključaka. U drugom satu, cijeli razred sudjeluje u raspravi o pristupima i rješenjima problema a nastavnik daje konačne zaključke. Ovaj pristup poučavanju pokazao se vrlo korisnim.

## 7.1 Poučavanje problema

Kada govorimo o poučavanju problema, nastavnik mora razmotriti sljedeće stavke.

### Postavljanje problema

Kod postavljanja problema učenike se najčešće pitaju pitanja kao što je: „Koja svojstva-pravila možete pronaći“? Takva pitanja mogu biti zbunjujuća učenicima kojima nije poznat pojam svojstvo-pravilo-metoda, stoga ne mogu ni razumjeti što se od njih traži. U svrhu pomoći učenicima u razumijevanju problema, korisni su sljedeći pristupi:

- Poticanje učenika da se koncentriraju na isti dio problema prezentiranjem dobro pripremljenih materijala pomoću računala i projektora
- Davanjem dodatnih primjera kako bi razjasnili istinitost pojedinih veza
- Davati primjere koji neće ograničiti učenikove načine/smjerove razmišljanja o problemu
- Koristiti različite modele i materijale kako bi problem približio učenicima

### Organizacija poučavanja

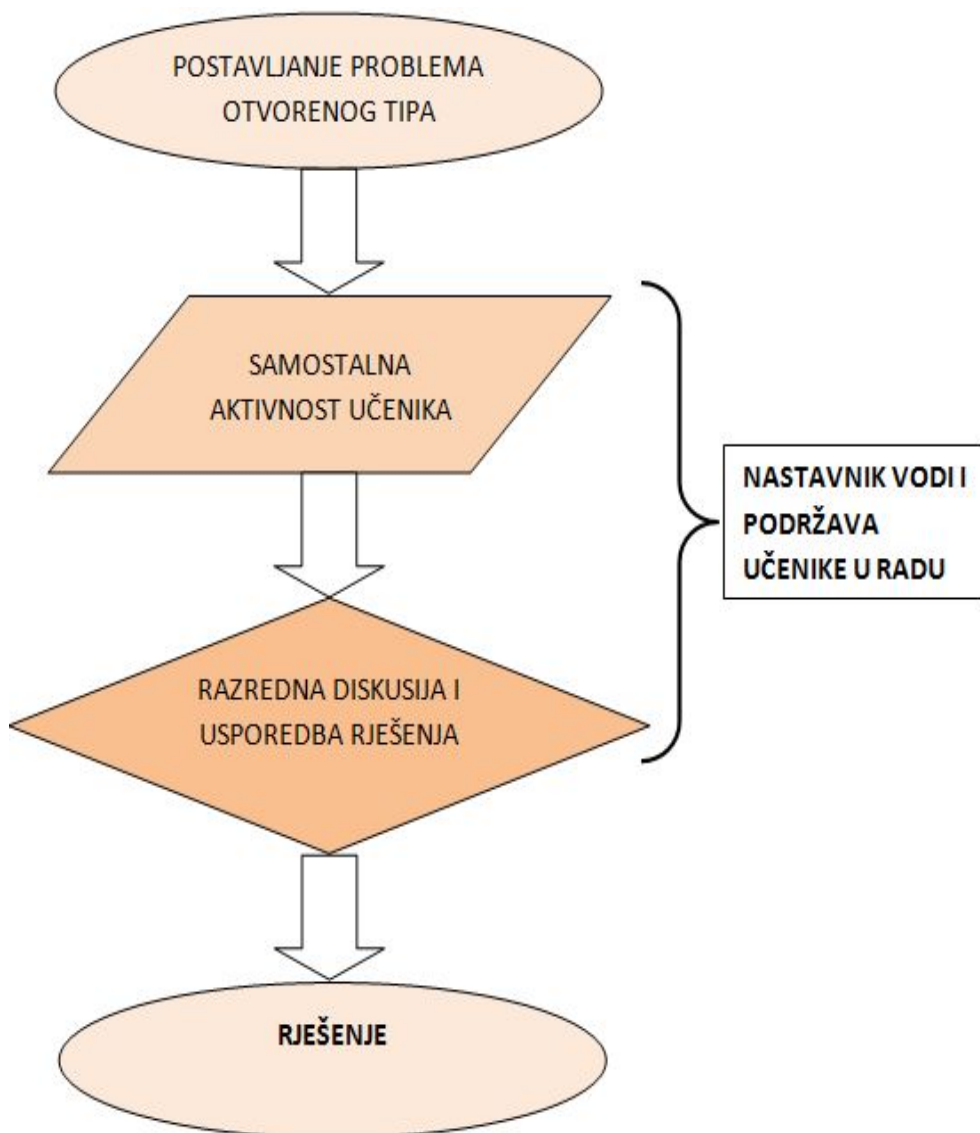
Ovakav pristup nastavi matematike stavlja poseban naglasak na mišljenje pojedinih učenika, stoga nastavnik mora paziti kako ne bi nametnuo pojedino mišljenje preostalim učenicima. Ovakav oblik poučavanja sastoji se od: individualnog rada i rasprave u kojoj sudjeluje cijeli razred. Budući da ne tražimo jedinstveno rješenje, za očekivati je da će neko rješenje problema proizaći upravo u prijelazu s individualnog rada u razrednu raspravu. Ključno je, dakle, u određenom trenutku prijeći sa individualnog na grupno učenje.

### Zapisivanje učeničkih odgovora

Važno je zapisati učeničke odgovore, pristupe ili rješenja problema koji su nastali u individualnom i grupnom radu za kasnije proučavanje. Učenici bi također trebali zapisati ove informacije. Nastavnik može nakon sata pokupiti zabilješke kako bi ih iskoristio u ocjenjivanju individualnog i grupnog rada. Kako je sudjelovanje učenika važno za daljnji razvoj problema nužno je uočiti one učenike koji ne razumiju problem, dati im dodatne primjere kako bi ih potaknuo na razmišljanje u smjeru koji daje rješenje problema. Treba dati dovoljno vremena kako bi učenici mogli zapisati svoja razmišljanja.

### Sumiranje onoga što su učenici naučili

Nastavnik ili učenici trebaju zapisati svoje individualne ili grupne radove na ploču kako bi ih vidjeli i suučenicima. Treba uključiti sve učeničke prijedloge čak i one koji su slični ili isti. Poticati učenike bez obzira može li se njihov prijedlog rješenja svesti na neki od već predloženih. Čak i kada prijedlozi rješenja nisu u potpunosti točni ili su nedovršeni učenike treba pohvaliti i pomoći im modificirati prijedlog. Kada učenici imaju previše prijedloga, nastavnik se treba koncentrirati na jedan pristup i voditi učenike ka rješenju. Odgovarajućim preinakama učeničkih prijedloga, njihovim kombiniranjem ili slaganjem treba ih voditi određenom pristupu problemu, sumiranju naučenog i olakšati prijelaz na sljedeće gradivo.



## 7.2 Kriterij ocjenjivanja

Budući ćemo imati različite reakcije i odgovore učenika na zadani problem biti će teško sve ih iskoristiti i procijeniti ih. Sukladno tome usvojena je sljedeća metoda ocjenjivanja učeničkog sudjelovanja.

Nastavnik sastavlja tablicu očekivanih odgovora, koji su klasificirani i poredani ovisno o matematičkim značajkama. Tijekom sata bilježe se učenički stvarni odgovori u prazne ćelije tablice. Učenička postignuća boduju se koristeći sljedeće kriterije:

### **Tečnost - koliko rješenja može osmisliti svaki učenik?**

Ako je rješenje ili pristup koji je učenik/grupa odabra/o/la tada ga/ih nastavnik nagrađuje bodom. Ukupan broj bodova se naziva „ukupan broj odgovora“. Ovaj broj se može smatrati indikatorom tečnosti učenikovog matematičkog razmišljanja.

### **Fleksibilnost - koliko različitih ideja su otkrili?**

Točna rješenja ili pristupi rješavanju koje osmisli jedan učenik ili grupa mogu se podijeliti u nekoliko kategorija. Ako dva rješenja imaju istu matematičku ideju, tada spadaju u istu kategoriju. Broj kategorija naziva se „broj točnih rješenja“. Ovaj broj može se razmatrati kao indikator fleksibilnosti matematičkog razmišljanja. Za probleme koji imaju više točnih rješenja, možemo reći da što je veći broj bodova koje učenik postigne, to je veća njegova fleksibilnost, odnosno opseg matematičkog razmišljanja.

### **Originalnost - do kojeg stupnja su učenikove ideje originalne?**

Ako učenik ili grupa dođu do jedinstvenog rješenja, tada im se treba dodijeliti veći broj bodova. Najveći broj bodova treba se dati ideji koja uključuje napredno matematičko razmišljanje. Ukupan broj ovih bodova nazivamo „težine pozitivnih odgovora“, te se smatraju indikatorom originalnosti ideje.

Dodatni kriterij ocjenjivanja je stupanj elegancije u izražavanju ideja. Neki učenici svoje ideje iznose nesigurno, dok drugi to rade na jednostavan, jasan i elegantan način. Elegancija se uočava u upotrebi matematičkih formula i varijabli umjesto korištenja uobičajenih rečenica.



## 8 Primjeri poučavanja

Kada nastavnik obrađuje nove sadržaje, učestalo je da započinje s uvodnim problemom kako bi učenici uvidjeli potrebu za istim, te ih povezuje s prethodno obrađenim sadržajima. U uvodu problemi su iz stvarnog svijeta, te ih nastavnik nastoji približiti učenicima i zapisati matematičkim jezikom.

Zajedničko obilježje svih faza je unaprijed određeni zaključak. Mnogi nastavnici koriste pripreme za sat u kojima unaprijed odrede opseg teorije koju će obraditi, pa ostale prijedloge učenika ignoriraju.

Postupci generalizacije, apstrakcije i pojednostavljivanja su otvorenog tipa, odnosno, njihov krajnji rezultat nije unaprijed određen. Razmišljanje učenika u ovoj fazi zahtjeva primjenu prethodno stečenih znanja i vještina, kombiniranje i modifikaciju na zadani problem.

Zahtjeva se integracija učenikova stečenog znanja, sposobnost stjecanja novog i promjenu smjera ako je to potrebno.

Zadaci otvorenog tipa koji su ovdje predstavljeni moguće je koristiti u nastavi matematike, iako nisu oblika kakav se pojavljuje u stvarnom svijetu.

Tradicionalna nastava trebala bi biti oplemenjena zadacima otvorenog tipa kako bi učenici, više od dva puta godišnje, razvili logičko razmišljanje i svijest o postojanju većeg broja točnih odgovora.

### 8.1 Formulacija problema

#### **Problem i kontekst**

Problem - problem je izrečen na isti način na koji će biti prezentiran učenicima

Pedagoški kontekst- naglašena je svrha primjene problema kao i povezanost sa sadržajem udžbenika i nastavnim programom

#### **Očekivani odgovori i rasprava**

Primjeri očekivanih odgovora - primjeri očekivanih učeničkih odgovora na problem i njihova klasifikacija

Rasprava o odgovorima - klasifikacija učeničkih odgovora, matematička vrijednost odgovora, kako ocjenjivati odgovore i budući matematički razvoj

#### **Evidencija poučavanja**

Poučavanje - mjesto problema u nastavnom planu, glavna pitanja, razrada aktivnosti učenja

Zabilješke nakon sata - osvrt na sat, potrebno vrijeme, razredna rasprava, prikupljanje učeničkih odgovora i daljnji razvoj prezentiranog problema.

## 8.2 Primjer primjene u osnovnoj školi

### Problem i kontekst

#### Problem

Kukac šeće po rubu ceste. Tablica prikazuje vrijeme potrebno da prehoda određenu udaljenost. Zvezdice označavaju vrijednosti koje smo zaboravili zabilježiti.

Vrijeme(min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Udaljenost(cm)	12	24	36	48	60	72	84	*	*	120

1. Koji broj predstavlja \* ispod broja 8? Zapišite izraz koji ste koristili u pronalažanju rješenja.
2. Pronađite drugi izraz koji možete koristiti za pronalazak rješenja. Zapišite što je više moguće različitih izraza.

#### Pedagoški kontekst

Ideja proporcija obično se uvodi na sljedeći način:

- a) Nastavnik daje vezu dviju varijabli  $(x, y)$
- b) Nastavnik pomaže učenicima da uvide da ako je  $x$  2-3-4 puta originalne vrijednosti tada je to  $i$   $y$
- c) Nastavnik uvodi izraz „  $x$  je proporcionalan s  $y$ “ odnosno „  $x$  i  $y$  su proporcionalni“.

Ovaj pristup ima dva nedostatka:

1. Nezainteresiranost učenika za učenje relacije između dviju varijabli
2. Nastavnik odmah uvodi pojam proporcionalnosti što sputava učeničke ideje

U nastavku ćemo prikazati rezultate jednog japanskog istraživanja. U istraživanju su najprije zamolili učenike da pronađu nekakva rješenja, potom su im pomogli da shvate da postoji više pristupa rješavanju problema. Nakon razmatranja svakog pristupa, učenici su pronašli zajedničku matematičku relaciju u pristupima, koja im je pomogla u shvaćanju pojma proporcionalnosti.

#### Očekivani odgovori i rasprava

Primjeri očekivanih odgovora

1. Učenici su primjetili: ako se vrijeme povećava za 1 minutu, tada se udaljenost povećava za 12 centimetara

$$\begin{aligned} &12 + 12 + 12 + \dots + 12 \\ &84 + 12, 72 + (12 \cdot 2), 60 + (12 \cdot 3) \\ &120 - (12 \cdot 2) \end{aligned}$$

2. Učenici su primjetili: ako je vrijeme dva-tri puta originalno vrijeme, tada je udaljenost dva-tri puta originalna udaljenost

$$\begin{aligned} &12 \cdot 8, 24 : 2 \cdot 8, 36 : 3 \cdot 8 \\ &48 \cdot 2, 24 \cdot 4 \\ &120 \cdot (8 : 10) \end{aligned}$$

3. Učenici su primjetili da je *udaljenost : vrijeme* konstanta.

$$\square : 8 = 12$$

Rasprava o odgovorima

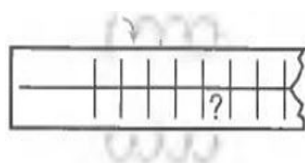
Odgovori se mogu grupirati na osnovu otkrivenih relacija:

1. Iznosu povećanja/umanjenja
2. Relativnom povećanju/umanjenju
3. Relacije između varijabli

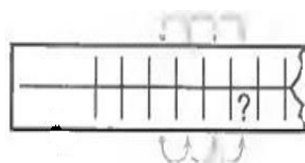
Ove relacije ne moraju biti odmah vidljive. Kada učenici započnu koristiti tablicu koja je dana u problemu, otkriti će relacije ovisno o načinu na koji gledaju tablicu.

Relaciju 1 uočiti će uzastopnim provjeravanjem:

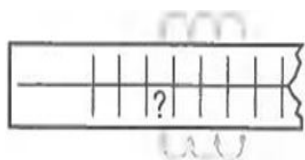
a) Krenuvši od početka



b) Krenuvši od sredine

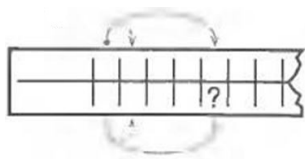


c) Krenuvši od sredine

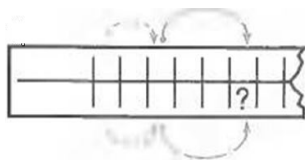


Relaciju 2 uočiti će provjeravanjem intervala:

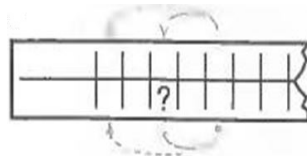
a) Krenuvši od početka



b) Krenuvši od sredine

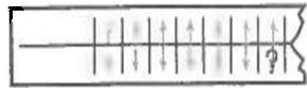


c) Krenuvši od sredine



Relaciju 3 uočavaju uspoređujući vertikalno:

a) Uspoređivanjem stupaca



Kada se problem provodi u razredu, rješenja koja učenici predlože moraju se pomno proučiti. Nastavnik treba naglasiti ključnu stvar u svakoj ideji, koristeći gornju shemu.

### Zapisivanje učenja u učionici

Poučavanje

Svrha sata bila je uvesti pojam i ideju proporcija. Koncept omjera naučen je prije ovoga sata. Na ovom satu, učenici su pronalazili vezu odnosno relaciju između dviju varijabli ali glavna svrha nije nužno u potpunosti razjasniti pojam proporcija. Ovaj pristup je odabran kao uvod u proporcije, sat se nastavlja na sljedeći način:

1. Nastavnik je pripremio listiće na kojima se nalazi problem, dijeli ih učenicima i objašnjava značenje problema. U procesu objašnjavanja problema, nastavnik koristi isprintani primjer i brojeve u tablici prikazuje pomoću projektora jedan po jedan. Potom upita učenike da pronađu načine kako doći do rješenja.
2. Učenici predstavljaju svoje ideje. Ideje koje su im prve sinule su sljedeće - brojevi u zagradama odaju udio učenika u razredu od 35 učenika koji su otkrili navedeni izraz

$$\begin{array}{r}
 12 \cdot 8 \quad (22) \\
 84 + 12 \quad (11) \\
 48 \cdot 2 \quad (1) \\
 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 \quad (1)
 \end{array}$$

Izrazi koje su kasnije pronašli:

$$\begin{array}{r}
 84 + 12 \quad (17) \\
 120 - (12 + 12) \quad (17) \\
 120 - (12 \cdot 2) \quad (17) \\
 24 \cdot 4 \quad (16) \\
 12 \cdot 8 \quad (13) \\
 48 \cdot 2 \quad (13) \\
 72 + 12 \cdot 2 \quad (13) \\
 60 + 12 \cdot 3 \quad (13) \\
 48 + 12 \cdot 4 \quad (13) \\
 120 \cdot \frac{8}{10} \quad (2) \\
 120 : 10 \cdot 8 \quad (2) \\
 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 \quad (1)
 \end{array}$$

3. Učenici raspravljaju o idejama prezentiranim u njihovim rješenjima te iznose sljedeći zaključak za svaki od prvih 4 izraza:  $12 \cdot 8$

a) Za svaku minutu koja prođe, udaljenost se povećava za 12cm

- b) Kada prođu dvije minute, udaljenost je 24cm, što je dva puta 12 itd.  
 c)  $24 : 2=12$ ,  $36 : 3=12$ ,  $48 : 4=12$  itd...kada prođe 8 minuta,  $x : 8=12$ , dakle udaljenost je  $12 \cdot 8$   
 d) Kada prođe 7 minuta, udaljenost je 84cm, dakle kada prođe 8 minuta udaljenost se treba povećati za 12cm  
 e) Kada prođu 4 minute, udaljenost je 48cm, dakle kada prođe 8 minuta udaljenost je  $2 \cdot 48$   
 f) Insekt hoda 12cm u 1 minuti, stoga trebamo 8 puta zbrojiti broj 12 sa samim sobom.

Sličan postupak se provodi i za drugu grupu izraza, ali izostavljamo detalje.

4. Učenici sumiraju ideje razvrstavajući ih u grupe koje se temelje na istoj ideji.

Dolaze do 4 grupe rješenja:

- a) Grupa  $12 \cdot 8$ ; povećanje za 12cm sa svakom minutom

$$\begin{aligned} &12+12+12+12+12+12+12+12 \\ &120:10 \cdot 8 \end{aligned}$$

- b) Grupa  $84:12$ ; veličina povećanja ako kreće iz neke točke

$$\begin{aligned} &72:12 \cdot 2 \\ &60:12 \cdot 2 \\ &48:12 \cdot 4 \dots \end{aligned}$$

- c) Grupa  $48:2$ ; koliko puta se povećalo obzirom na neku točku

$$24 \cdot 4$$

- d) Grupa  $120-12 \cdot 2$ ; veličina umanjenja ako kreće iz neke točke.

Primjetimo da je izraz  $120 \cdot \frac{8}{10}$  smješten u grupu  $12 \cdot 8$  zato što je ideja izraza  $120 \cdot \frac{8}{10}$  ista kao i izraza  $120 : 10 \cdot 8$ .

5. Učenici promatraju tablicu u problemu kako bi formirali pravilo pomoću danih informacija. Do sada zapisani izrazi došli su iz relacija pročitanih iz tablice. Te relacije raspraviti ćemo sljedećim razgovorom:

T: Koje pravilo uočavate u tablici?

S: Kako vrijeme prolazi, udaljenost se povećava za 12.

T: U izrazu  $120-12 \cdot 2$  udaljenost se smanjuje, zar ne?

S: Ako gledamo tablicu s lijeva u desno, udaljenost se povećava za 12. Ako gledamo s desna u lijevo udaljenost se smanjuje.

T: Kada gledate tablicu s lijeva u desno što se događa s vremenom?

S: Vrijeme prolazi.

S: Shvaćam, ako se vrijeme povećava, povećava se i udaljenost. Ako se vrijeme smanjuje, smanjuje se i udaljenost.

Nastavnik zapisuje prvo pravilo na ploču:

**Ako se vrijeme povećava(smanjuje), povećava (smanjuje) se i udaljenost.**

T: Koji izrazi su obuhvaćeni ovim pravilom?

S:

$$\begin{aligned} &12 \cdot 8 \\ &12+12+12+12+12+12+12+12 \\ &84:2, 72+12 \cdot 2, 60 + 12 \cdot 3... \\ &120-12 \cdot 2, 120 - (12 + 12) \end{aligned}$$

T: Izraz  $48:2$  nije uključen, zar ne? Možete li uočiti neko drugo pravilo?

S: Mislim da pravilo uključuje množenje.

T: Nisam sigurna što misliš.

S: Ako se vrijeme pomnoži sa dva, tada se i udaljenost pomnoži sa dva.

T: Možeš li to pojednostaviti? Je li to istina za množenje bilo kojim brojem?

S: Da!

T: Dakle, možemo sažeti pravilo na sljedeći način, točno?

Nastavnica zapisuje pravilo br 2 na ploču:

**Ako je jedna veličina pomnožena sa 2,3,4...tada je i druga također pomnožena s 2,3,4...**

T: Možete li pronaći još neko pravilo? Kako smo odredili  $12 \cdot 8$ ?

S:

$$24:2=12$$

$$36:3=12$$

$$48:4=12$$

.

.

.

$$x:8=12$$

Nastavnik pomaže učenicima uočiti pravilo nastalo iz ove ideje. Uočili su da je udaljenost podjeljena s vremenom konstantna. Zapisuje pravilo 3 na ploču:

***Udaljenost : vrijeme uvijek iznosi 12.***

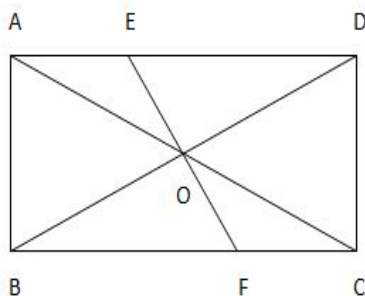
6. Za vježbu zadaje problem pronalaska udaljenosti kada je vremenski razmak 9 minuta primjenjujući pravila 1-3.

Ovaj sat ne bi bio smislen da je završio kada su učenici ponudili izraze za pronalaženje rješenja. Nastavnik je tražio učenike da razvrstaju izraze u grupe koje se temelje na zajedničkoj ideji i da uoče pravila u danoj tablici. Sat je bio uspješan jer su učenici oduševljeno rješavali problem, iako je zahtjevalo dosta vremena.

### Sličan problem

Kongruencije i sličnosti figura

Neka je ABCD pravokutnik. Povučena je linija EF kroz O, koja je presjek dvaju dijagonala.



1. Pronađi što više geometrijskih likova na slici. Koji su njihovi nazivi?
2. Odaberi dva lika od onih koje si pronašao u pitanju 1. Uočavaš li nekakva pravila obzirom na njihovu veličinu ili položaj? Poledaj druge parove likova i relacije/odnose među njima.

## 8.3 Primjeri primjene u srednjoj školi

### 8.3.1 Niži razredi srednje škole

#### Problem i kontekst

##### Problem

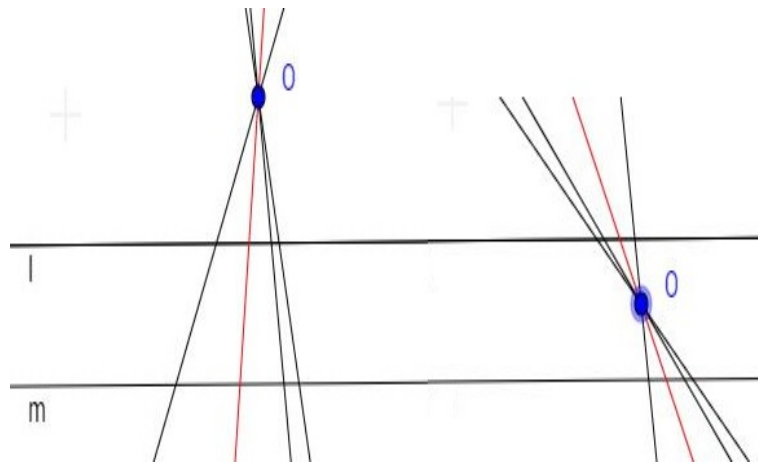
Dani su paralelni pravci  $l$  i  $m$ . Crtanje drugih pravaca koji sijeku dane pravce rezultira različitim likovima. Pronađi što je moguće više zajedničkih svojstava likova neovisno o pomaku pravaca koji sijeku dane pravce.

##### Pedagoški kontekst

Tijekom učenja geometrije veliki broj učenika ne može razmišljati na način „ako-onda“. Razlog tome je što su najčešće njihove ideje skrivene iza nametnutih i naučenih načina razmišljanja i donošenja zaključaka. Slobodni pristup ima važnu ulogu u intuitivnom razmišljanju učenika o geometrijskim likovima, u pokušaju pronalaženja dokaza teorema ili nove do sada njima nepoznate činjenice o liku. Ovaj problem predstavljen je jednom japanskom razredu upravo u svrhu razvijanja učeničke slobode razmišljanja.

Nekoliko je razloga zašto je odabrana baš ova tema: učenici su upoznati s paralelnim pravcima još u osnovnoj školi, lagana je za poučavanje, postoje veliki potencijali za daljnji razvoj, jednostavno je napraviti nastavne materijale. Probni sat odrađen je u grupnom radu, ali se može napraviti i u cijelom razredu.

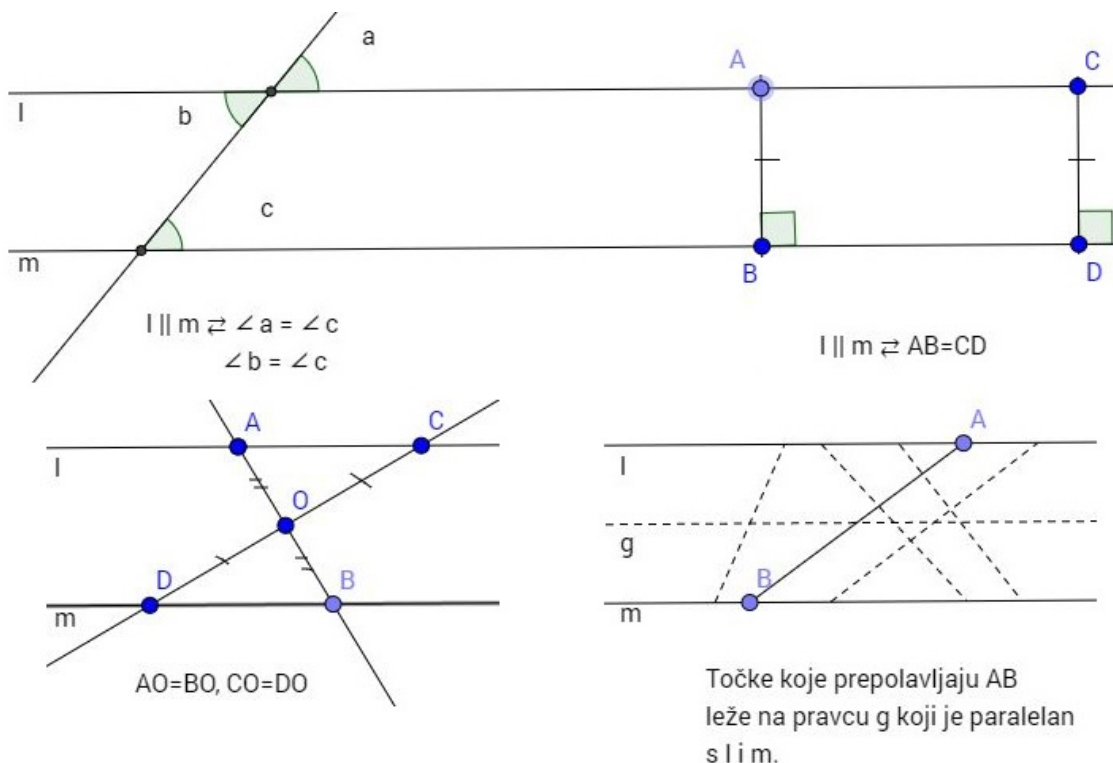
1. Učenici načine novi pravac koji siječe zadane pravce  $m$  i  $l$  koristeći se bambusovim štapićima. Potom rotiraju taj novi pravac oko proizvoljne fiksne točke O i promatraju geometrijske likove koji nastaju.



2. Učenici promatraju vezu između pozicije fiksne točke O i svojstava geometrijskih likova.

3. Iz rezultata 1. i 2., učenici uočavaju osnovna svojstva paralelnih pravaca.

Svojstva su prikazana na sljedećoj slici:



### 1. Kako opisati

Učenici moraju opisati svojstva koja su uočili dodajući novi pravac koji siječe paralelne pravce, svoja razmatranja i zaključke mogu zapisati slobodnim stilom. Nastavnik prevodi učeničke zaključke u matematičku simboliku kako bi ih klasificirao. Učenici se izuzetno teško koriste matematičkim zapisom, jer ga nedovoljno poznaju te ih sputava u zapisu svih zaključaka. Treba ih poticati da pretpostavke zapisuju plavom bojom, a zaključke crvenom bojom.

### 2. Organizacija u razredu

Fokus u ovom nastavnom satu stavlja se na individualne odgovore. Rad u grupama po 4-5 učenika može im pomoći da potvrde svoje ideje o likovima ili im pružiti novu perspektivu



u promatranju likova.

Ukoliko se koristi samo grupni rad, pojedini učenici možda neće razviti i iznijeti svoje mišljenje i zaključke. Stoga je najbolje kombinirati individualni i grupni rad.

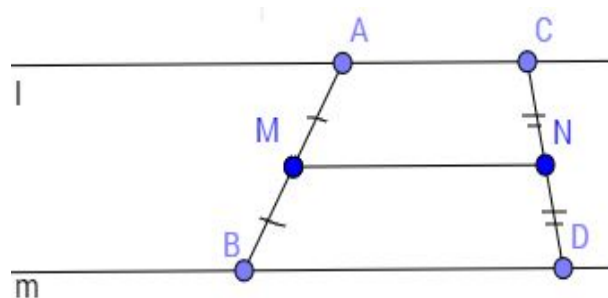
### Očekivani odgovori i rasprava o njima

Primjeri očekivanih odgovora

1. Svojstva pravokutnika i paralelograma

- Duljina stranica, mjere kutova
- Uvjeti za biti pravokutnik i paralelogram

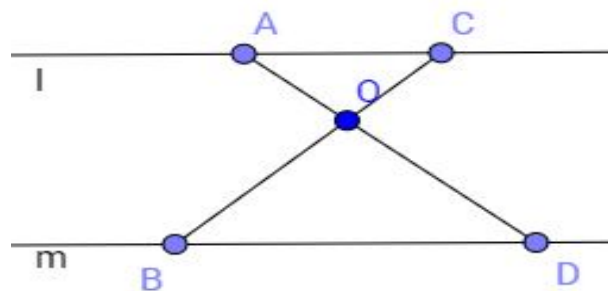
2. Ako su AB i CD pravci koji sijeku paralelne pravce  $l$  i  $m$ , a M i N su polovišta dužina AB i CD, tada je  $MN \parallel AC$  i  $MN = \frac{1}{2}(AC + BD)$



3. U trokutu ABC, ako su M i N polovišta duljina AB i AC, tada je  $MN \parallel BC$  i  $MN = \frac{1}{2}(BC)$

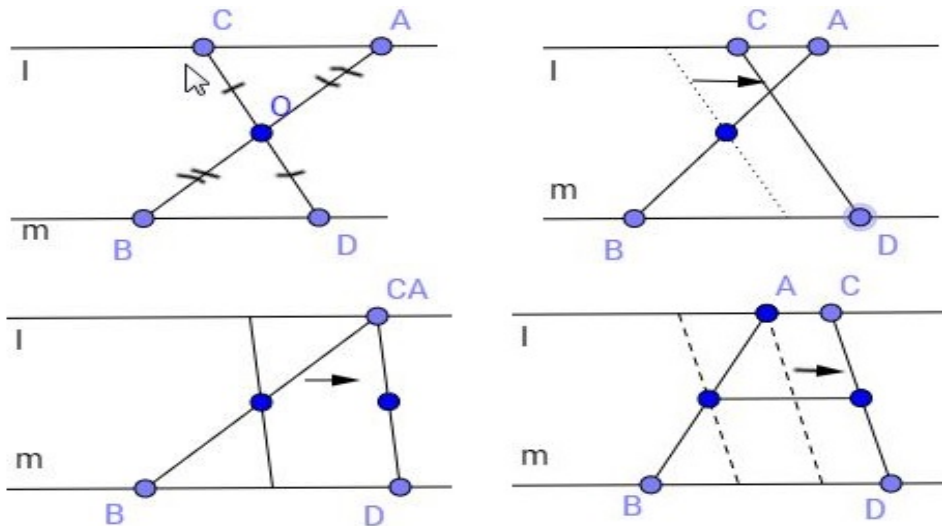
4. Kada se pravci sijeku u točki O između paralelnih pravaca, učenici će uočiti sljedeća svojstva:

- Omjer duljine stranica
- Sličnost likova
- Omjer površina
- Uvjete sličnosti trokuta



Rasprava o odgovorima

Pregledavajući učeničke uratke, ponekad možemo pratiti slijed njihovog razmišljanja kao na sljedećoj slici:



Učeničke odgovore možemo razmatrati sa sljedećih gledišta:

- Koliko svojstava su opisali?
- Od navedenih svojstava koliko je bilo točnih?
- Koliko različitih svojstava su opisali?
- Postoji li razvojni tijek između nađenih svojstava?
- Mogu li se pronađena svojstva generalizirati?

Kod petog pitanja, poželjno je da učenici izvedu nekakav generalni zaključak iako ga ne znaju dokazati. Takav stav i sposobnost nužna je za daljnje učenje. Učenje treba biti okrenuto onome što učenici uočavaju i kako razvijaju svoja razmatranja.

### 8.3.2 Viši razredi srednje škole

#### Problem i kontekst

Problem

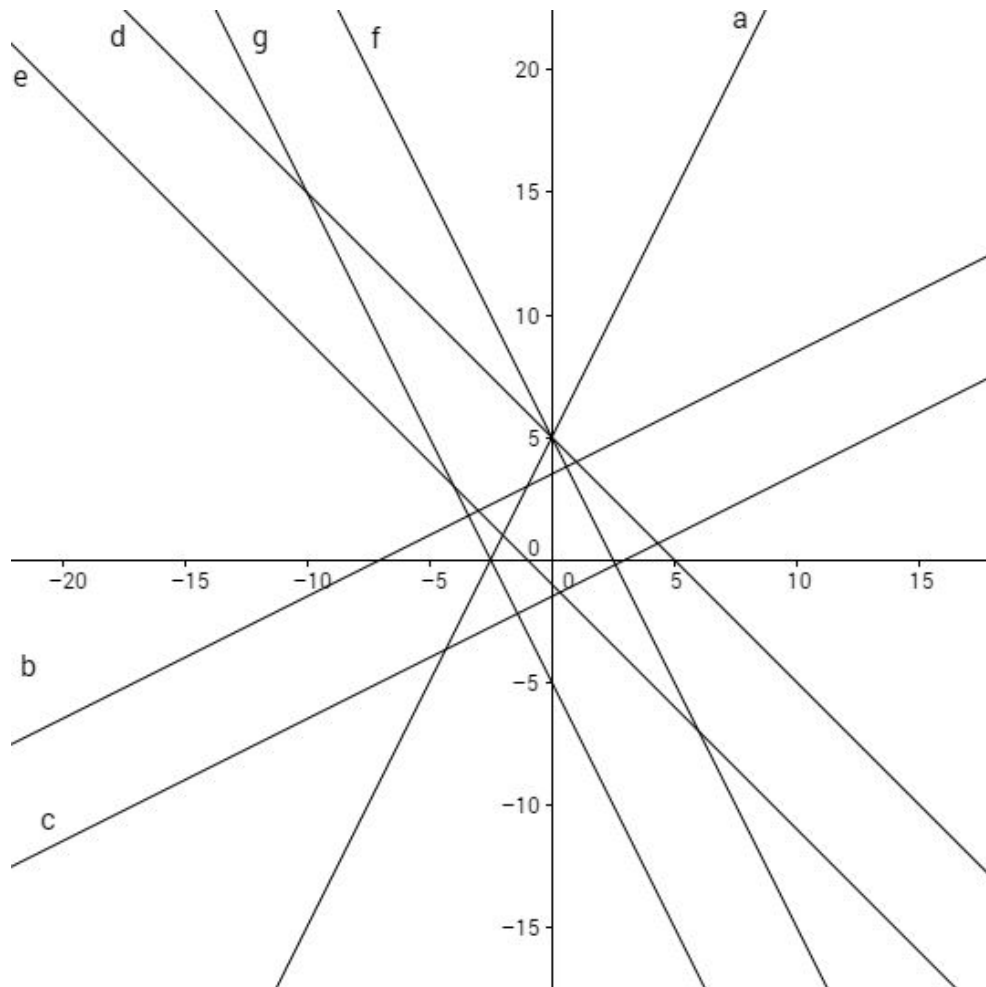
1. Crvenom bojom nacrtaj graf  $l$  jednadžbe  $2x + y = 0$ .
2. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj grafove koji pripadaju sljedećim jednadžbama i obojaj ih crnom bojom

a.  $2x - y + 5 = 0$    b.  $x - 2y + 7 = 0$    c.  $x - 2y - 3 = 0$    d.  $x + y - 5 = 0$   
e.  $x + y + 1 = 0$    f.  $2x + y - 5 = 0$    g.  $2x + y + 5 = 0$

3. Promatraj grafove i zapiši svojstva koje uočavaš za pravac  $l$ .
4. Zabilježi svojstva koja su zajednička pravcu  $l$  i barem dvama od preostalih pravaca te naznači kojima.
5. Zabilježi svojstva koja su zajednička barem dvama od pravaca  $a-g$  te naznači kojima.

Pedagoški koncept

Najprije nastavnik upita učenike da nacrtaju grafove različitih pravaca, kako bi stekao uvid u znanje koje su trebali steći u nižim razredima. Potom navodi zajednička svojstva grafova. Učenici razvrstavaju svojstva i izdvajaju ona koja su važna pri crtanju grafa. Na kraju nastavnik objašnjava kako doći do jednadžbe pravca na osnovu danih ideja. Sljedeća slika prikazuje pravce koje su učenici morali nacrtati u koraku 1 i 2:



Kako su određeni grafovi potrebni u koracima 3-5, važno je da nastavnica potvrdi ispravnost učeničkih crteža. U učenju grafova i lineranih jednadžbi, sat uglavnom završava crtanjem grafa. Ali u ovom satu, crtanje grafa je početak učenja, što je i važno svojstvo ovog pristupa.

U koraku 3, učenici navode svojstva pravca  $l$ . U koraku 4, učenici trebaju uočiti imaju li ostali pravci zajedničko svojstvo sa pravcom  $l$ . U koraku 5, učenici pronalaze preostala zajednička svojstva pravaca  $a-g$ , ali ne sa pravcom  $l$ .

To dovodi učenike do zaključka kako odrediti pravac.

### Očekivani odgovori i rasprava o njima

Primjeri očekivanih odgovora

Budući se problemu može pristupiti intuitivno promatrajući grafove, učenici će iznijeti različite varijacije svojstava. Zajednička svojstava mogu se razvrstati obzirom na sljedeća gledišta:

Vrsta odgovora	Primjer
Nagib	Nagib je negativan: $d, e, f, g$
Točka	Pravac prolazi točkom $(-1,3)$ : $a, b$
$x$ -presjek	$x$ -presjek je pozitivan: $b, d, f$
$y$ -presjek	$y$ -presjek je pozitivan: $a, b, d, f$
Kvadrant	Ne prolazi kroz treći kvadrant: $d, f$

Rasprava o odgovorima

U koraku 3, učenici mogu biti zbunjeni kada ih se zatraži da navedu svojstva pravca  $l$ . U tom slučaju, nastavnik mora voditi učenike ka ispravnim zaključcima i uočavanju ekvivalentnih svojstava obzirom na njihova zapažanja. Na primjer, pravac je usmjeren „dolje-desno“ i „nagib mu je negativan“ su isti.

U koraku 4, učenici promatraju postoje li pravci koji imaju ista svojstva kao i pravac  $l$  kojeg su razmatrali u koraku 3. Na primjer, nagib pravca  $l$  je  $-2$ , pravci koji imaju isti nagib su  $f$  i  $g$ . U tom smislu, nekoliko zajedničkih svojstava će se ujediniti, moći ćemo ih razvrstati u nekoliko kategorija koje smo naveli u poglavlju „Primjeri očekivanih odgovora“.

U koraku 5, učenici proučavaju grafove na osnovu pet mogućih gledišta koja su naveli u koraku 4. Navesti učenike da uoče svojstva koja nisu kod pravca  $l$ . Kao što je naprimjer:  $y$ -sjecista pravaca  $a, d, e$  je 5.

Kroz zadatke otvorenog tipa i ovakve sate, nastavnik treba lošijim učenicima dati mogućnost izricanja ideja i pronalaženja užitka u radu.

### **Mogućnost razvoja problema**

Daljnji razvoj problema započinje pitanjem „Možemo li pronaći zajedničko svojstvo jednadžbi kao što smo to napravili kod grafova?“. Nastavnik pokazuje vezu između linearne jednadžbe i njezinog grafa tj. jednadžba  $\leftrightarrow$  *graf*.

Usmjerava se pronalaženju zajedničkih svojstava na temelju oblika jednadžbi. Potom traži od učenika da promotre svojstva između dvaju pravaca: jesu li paralelni, okomiti ili se podudaraju.

Nastava otvorenog tipa treba dovesti do prirodnog povezivanja sa jedinicom koja slijedi. U ovom satu, na početku učenici pronalaze različita svojstva i prezentiraju ih razredu. Njihove prezentacije potvrđuju se individualno, raspravlja se o njima, testira ih se, sumira te potom vode ka novoj matematičkoj temi.

Upravo to je način učenja matematike koji se bazira na idejama učenika koji postaju svjesni važnosti sudjelovanja u učenju.

## 9 Istraživanje u Japanju

### 9.1 Motivacija projekta

Problem koji su razmatrali je kako ocijeniti učenikove mogućnosti razmišljanja na višoj razini. Nastava matematike sastoji se od znanja, vještina, koncepata i načina rješavanja, koji se učenicima prezentiraju „korak po korak“.

Koraci su osmišljeni, ne zbog njihove važnosti u rješavanju pojedinog problema, nego zbog integracije u učenikove sposobnosti i formiranje intelekta. Pojedinačno znanje i vještine važan su dio cjeline, ali naglasak se stavlja na njihovu integraciju u intelekt svakog učenika. Kako bismo postigli višu razinu razmišljanja kod učenika, prvo moramo promotriti kako primjenjuju naučena znanja na konkretnom problemu te kako se ponašaju kada naučeno ne mogu primijeniti na problem.

Većina testova kojima se ocjenjuju učenici sastoji se upravo od zadataka zatvorenog tipa u kojima se od učenika ne traži dodatni napor u pronalaženju rješenja nego samo primjena prethodno naučenih metoda i načina rješavanja. Stoga, ocjenjivanje mora biti u skladu s primjenom naučenog. Naravno moramo uočiti da su prethodno stečena znanja u uskoj vezi s učenikovom mogućnosti razmišljanja na višoj razini. Kako bi to potvrdili moramo odgovoriti na sljedeća dva pitanja:

- Kakav način učenikova razmišljanja nam ukazuje na mogućnost razmišljanja na višoj razini?
- Kakva je veza između učenikove mogućnosti razmišljanja na višoj razini i uspjeha izmjenjenim na standardnim testovima?

Većina odgovora na prvo pitanje glasila je:

U analiziranju zadanog problema, učenici su pristupili sa svojim najčešćim načinom razmišljanja i primjenom prethodno stečenih tehnika i metoda rješavanja. Kao odgovor na drugo pitanje, provedeno je istraživanje u osnovnoj, slabijim i jačim srednjim školama primjenjujući iste probleme.

Smatrali su da će se rezultati standardnih testova poboljšati s povećanjem razreda, te da bi bilo značajno usporediti rezultate ostvarene na standardnim testovima s rezultatima na testovima sa zadacima otvorenog tipa. Došli su do negativnog odgovora na ovo pitanje, odnosno da rezultati ostvareni na standardnim testovima nisu nužno podjednaki onima na testovima sa zadacima otvorenog tipa. Također su uvidjeli da su odstupanja među školama znatno veća u primjeni testova sa zadacima otvorenog tipa. Kako bi pronašli odgovor na prvo pitanje istraživanja uveli su dodatno pitanje:

Znanje, vještine i načini razmišljanja važan su sastav više razine razmišljanja, mogu li se razviti dodatnim podučavanjem? Ovisi li isključivo o talentu pojedinog učenika, nastavnici nemaju nikakvog utjecaja? Ako je tako, onda se nastavnici mogu koncentrirati samo na stjecanje znanja i vještina.

Je li to uistinu tako?

U svrhu odgovora na pitanja proveli su istraživanje u dva razreda. U jednom se nastava održavala tradicionalno, a u drugom putem zadataka otvorenog tipa, za isti nastavni sadržaj. Nakon eksperimentalnog perioda, oba razreda su pisala završni test nakon kojega smo izvršili usporedbu rezultata.

Statistika nije dovela do konačnog zaključka. Generalni zaključak bio je da se primjenom zadataka otvorenog tipa može postići viša razina razmišljanja. Razvoj svakog učenika ovisi o njegovom znanju, vještinama i talentu ali i o utjecaju nastavnika, pružanju mogućnosti napredovanja i poticanju učenika.

## 9.2 Rasprava okruglog stola o projektu

Nakon provedenog istraživanja, prikupljena su mišljenja i iskustva nastavnika koji su proveli rješavanje otvorenog problema u svojim razredima. Iznijeli su nekoliko stavki o ovakvom načinu poučavanja. Na primjer, vrlo je zanimljiv, učenici mogu otkriti različite ideje ovisno o svojim sposobnostima i gledištima koje razvijaju, ako učenici iznesu neočekivanu ideju, nastavnik uočava novi način razmišljanja koji do sad nije bio vidljiv. Učenici s nižim sposobnostima, koji prije nisu iznosili svoje mišljenje, sad su to činili te su aktivno sudjelovali u satu. Također su zabilježeni i nedostaci. Ponekad je nastavniku teško pronaći odgovarajuće izraze za postavljanje problema ili za postavljanje problema učenicima, teško je sumirati učeničke ideje u smislenu cjelinu na kraju sata.

Nastavnik i učenici mogu uživati u ovakvom načinu rada u razredu, ali nastavnik mora biti sposoban provoditi ovakvu nastavu.

## 9.3 Kako ocjenjivati

Kako ocjenjivati reakcije učenika koji su učili putem otvorenih problema? Postoje dva smjera ocjenjivanja. Jedan je ocjenjivanje učenikova učenja, a drugi je samoučenje cijelog razreda. Za oba smjera važno je ocijeniti opseg (količinu) i kvalitetu.

Objašnjen je proces učenikova učenja u razredu. Na početku sata učenicima je prezentiran problem na kojemu su samostalno radili. Zamolili su učenike da ideje i rješenja do kojih su došli zapišu na jedan prazni papir koje su prikupili po završetku sata. Nakon sata provjerili su učenička rješenja. Pri tome su pazili na sljedeće: Koliko rješenja je učenik pronašao? Koliko različitih ideja je pri tome koristio? Koliko su ideje bile smislene i matematički točne? Je li učenik pokazao istu razinu matematičkog znanja kao i na standardnom satu ili je napredovao? Ponekad znaju vratiti uratke učenicima kako bi raspravili o njihovim idejama i rješenjima suučenika.

Sada ćemo objasniti drugi aspekt ocjenjivanja. Prezentirali su tri puta tijekom tri mjeseca zadatak otvorenog tipa u eksperimentalnim razredima. Pomno su promotrili odgovore učenika i napredovanje u istim od početnog do završnog sata, potom su usporedili rezultate s rezultatima učenika kojima do sada nije prezentiran ovakav pristup zadacima.

Razmatrali su tri smjera učeničkih odgovora: ukupan broj odgovora, ukupan broj točnih odgovora i originalnost odgovora. Uočili su da su učenici koji su koristili zadatke otvorenog tipa ostvaruju veći broj bodova na testovima nego li grupa učenika kojima su takvi zadaci nepoznati.

## 10 Zaključak

U radu su opisani zadaci otvorenog tipa, vrste, klasifikacija, kako od zatvorenih zadatka napraviti otvorene te kako ih primjenjivati na nastavnom satu matematike.

Trudila sam se da prikažem prirodu ovakvih zadataka i njihov značaj u obrazovanju učenika. Na temelju uvjeta za odabir zadataka, prezentaciju i obradu uvidjela sam težinu tog procesa. Pri odabiru zadataka pazila sam da odgovaraju svim kriterijima, kao i da rješenja zadataka prate korake poučavanja problema koji su prezentirani u radu.

Smatram da se ovakav način poučavanja treba integrirati u nastavu matematike jer se pokazao vrlo korisnim i stimulirajućim u poučavanju učenika.

Najznačajnije je što učenici mogu sudjelovati u stvaranju zadataka otvorenog tipa promatrajući svijet „matematičkim naočalama“, te razmišljajući kako određene situacije mogu zapisati u zanimljive matematičke zadatke uz nastavnikovu pomoć. Uvjet tome je da nastavnik ima želju i sposobnost provoditi ovakvu nastavu, te da je voljan uložiti dodatno vrijeme u odabir, razradu, pripremu i prezentaciju zadatka.

Nadam se da će što više nastavnika nastojati barem dva puta godišnje prezentirati učenicima zadatak otvorenog tipa kako bi razvili sposobnosti učenika, ali i popularizirali matematiku.



## 11 Sažetak

U radu je rečeno nešto više o zadacima otvorenog tipa, vrstama i klasifikaciji. Navedeno je na što se treba paziti kod odabira zadataka, kako od zatvorenih zadataka napraviti otvorene te kako organizirati sat u kojem učenici rješavaju zadatak otvorenog tipa.

Prikazano je istraživanje koje je provedeno u Japanu o primjeni zadataka otvorenog tipa te o utjecaju zadataka na poučavanje i učenike.

U Hrvatskoj je još uvijek zastupljena tradicionalna nastava u kojoj nema dovoljno prostora za zadatke otvorenog tipa, rasprave i grupno učenje. Stoga ga treba osigurati kako bi učenici vidjeli da ne postoji uvijek jedan ispravan način rješavanja ili jedno rješenje zadataka.

## 12 The open-ended tasks in mathematic

### Summary

In this paper we will introduce you with the open-ended tasks, task types and classification. It is listed on what to watch out for when selecting tasks, how to make this type of task and how to organize a class in which students solve open-ended task.

It presents study conducted in Japan on the application of open tasks, and the impact of tasks on teaching and students.

Croatia still implements traditional teaching where there is not enough space for open tasks, discussions and group learning. Therefore, it should be ensured for students to see that there is not always one correct way to solve or one solution of the problem.

## Literatura

- [1] J. P. BECKER, S. SHIMADA *The open-ended approach: a new proposal for teaching*, NCTM, (2005).
- [2] Ž. BJELANOVIĆ, *Jedan zadatak-više rješenja*, Matematika i škola, 15 (2002), 208-210.
- [3] B. DAKIĆ, *Otvoreni pristup u nastavi matematike*, Matematika i škola, 58 (2011), 101-107.
- [4] Z. KURNIK, *Zadatci s više načina rješavanja*, HMD, Matkina biblioteka
- [5] E. PEHKONEN, *Use of open-ended problems in mathematics classroom*, Department of Teacher Education, University of Helsinki, (1997).

## 13 Životopis

Rođena sam 03. travnja 1990. godine u Slavonskom Brodu. Godine 1997. upisujem se u Osnovnu školu „Mijat Stojanović“ u Babinoj Gredi. Nakon završetka 2005. godine upisujem srednju „Obrtničko-industrijsku školu“ u Županji, smjer-ekonomist. Završetkom srednje 2009. upisujem se na Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.