Mali rječnik matematičkog obrazovanja

Žeravica, Petra

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Petra Žeravica

Mali rječnik matematičkog obrazovanja

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Petra Žeravica

Mali rječnik matematičkog obrazovanja

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2021.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Akcijsko istraživanje **3**

2 Aktivno podučavanje i učenje matematike **3**

3 Algebarsko rasuđivanje **3**

4 Algoritam **4**

5 Apstraktno mišljenje **5**

6 Direktno podučavanje **5**

7 Ekvivalencija **6**
7.1 Primjeri ekvivalencije u nastavi matematike u osnovnoj školi . . . 7
7.1.1 Podudaranje „jedan na jedan” . . . 7
7.1.2 Oblici: Koje je moje pravilo? . . . 7
7.1.3 Brojevi: Koje je moje pravilo? . . . 8
7.1.4 Što je isto? . . . 8

8 Generalizacija **8**
8.1 Primjeri generalizacije u nastavi matematike u osnovnoj školi . . . 9
8.1.1 Sekvencijalne i globalne generalizacije . . . 10
8.1.2 Tablični prikaz . . . 10

9 Kognitivni zahtjev **11**
9.1 Zadaci više i niže kognitivne razine . . . 11

10 Kognitivni konflikt **14**
10.1 Primjeri kognitivnog konflikta u nastavi matematike . . . 14
10.1.1 Skupovi brojeva . . . 14
10.1.2 Vizualizacija . . . 14
10.1.3 Zbrajanje razlomka . . . 15
10.1.4 Decimalni brojevi . . . 15

11 Kognitivno vođena nastava **17**

12 Kreativnost **17**
12.1 Primjeri kreativnosti u nastavi matematike . . . 18
12.1.1 Prevladavanje mentalnog sklopa . . . 18
12.1.2 Divergentno mišljenje . . . 18
12.1.3 Postavljanje matematičkih pitanja . . . 18
12.1.4 Nerutinski problemi . . . 19

13 Produktivni neuspjeh **19**
13.1 Nastava temeljena na produktivnom neuspjehu 20

14 Računalni algebarski sustavi **21**

15 Uvjerenja/stavovi **21**

16 Vrednovanje u nastavi matematike **22**
16.1 Vrste vrednovanja u nastavi matematike 22
16.1.1 Formativno vrednovanje 22
16.1.2 Sumativno vrednovanje 23
16.1.3 Progresivno vrednovanje 25

Zaključak **26**

Literatura **27**

Sažetak **28**

Summary **29**

Životopis **30**

Uvod

Obrazovanje se može definirati kao organiziran pedagoški proces stvaranja spoznaja i stjecanja znanja, dok je matematičko umijeće znanstveno logički razvijen sustav koji istražuje i analizira prikladne objekte i pojmove nastale apstrakcijom mjerenja i brojenja te veže varijable, apstraktne strukture i prostore. U suvremenom obrazovanju, matematičko obrazovanje smatra se strategijom učenja i podučavanja matematike.

Ovaj diplomski rad mali je rječnik pojmova matematičkog obrazovanja, pojmovi obrađeni u njemu mogu biti vrlo korisni prvenstveno učiteljima matematike, ali i svim ostalim zainteresiranima. U ovom radu objašnjeno je šesnaest pojmova iz matematičkog obrazovanja, a sedam ih je vrlo detaljno obrađeno. Sam diplomski rad sadrži i konkretne primjere kako određene metode primijeniti u nastavi matematike. Tako su, primjerice, pojmovi poput ekvivalencije, generalizacije, kognitivnog zahtjeva, kognitivnog konflikta, kreativnosti te produktivnog neuspjeha detaljno opisani kroz različite primjere koje učitelji mogu primijeniti u vlastitoj nastavi te na taj način obogatiti svoja predavanja, pospješiti kvalitetu same nastave i razinu znanja svojih učenika. Samim time stvoriti i ugodnije ozračje za obje strane, i učitelja i učenike.

Diplomski rad napisan je u formi rječnika stoga je prvi obrađeni pojam upravo akcijsko istraživanje, iako je prvi po abecednom poretku, zapravo je i vrlo važan za početak proučavanja same nastave. Provođenjem akcijskog istraživanja učitelj može utvrditi kakva je zapravo nastava koju provodi te kakvo je razumijevanje njegovih učenika, može ispitati opravdanost nekih metoda koje primjenjuje ili se odlučiti za promjene. Iako većina teži sigurnim opcijama nekada su promjene upravo ono što će obogatiti samu nastavu, stoga je dobro isprobavati različite metode izvođenja nastavnog sata. Jedan dobar primjer promjene pri izvođenju nastavnog sata je, primjerice, nastava temeljena na produktivnim neuspjehu. Istraživanja su pokazala da je nastava u kojoj učenici na početku dožive „neuspjeh" (njihovo prijašnje stajalište tada je u konfliktu s novim tvrdnjama) nastava na kojoj učenici stječu višu razinu razumijevanja nego kod tradicionalne nastave u kojoj učitelj ispredaje točne činjenice. Razvoj tehnologija nam također donosi i mnoge nove opcije i pogodnosti koje možemo primijeniti u nastavi takva je upravo i upotreba računalnih algebarskih sustava čija je svrha pojednostavljivanje nezgrapnog algoritama, no također i poboljšavanje razumijevanja i učenja novih koncepata.

Uz sve do sada navedene pojmove obrađeni su i pojmovi: aktivno podučavanje i učenje matematike, algebarsko rasuđivanje, algoritam, direktno podučavanje te kognitivno vođena nastava. U pojmovima aktivno podučavanje i učenje matematike, direktno podučavanje i kognitivno vođenja nastava navedene su prednosti i nedostaci te vrste nastave u odnosu na druge vrste. Primjerice, aktivno podučavanje i učenje matematike pedagoški je pristup koji učeniku omogućuje dinamično sudjelovanje u sadržaju, sa svrhom učenja, a u suprotnosti je s tradicionalnim metodama gdje učenik pasivno gleda učitelja koji pokazuje postupke i objašnjava. Iako je direktno podučavanje, primjerice, metoda kojom učenici najprije uče o novim konceptima, a zatim rješavaju zadatke vezane uz taj koncept, ono nije nužno tradicionalni oblik nastave, već oblik nastave koji je u potpunosti strukturiran. Dodatne prednosti i nedostaci ovih metoda opisani su u samom radu.

Zadnji pojam ovog diplomskog rada je vrednovanje u nastavi matematike, iako je zadnji zbog abecednog poretka bitan je jer on upravo sabire sve do sada rečeno, odnosno vrednovanjem zapravo ispitujemo koliko su primijenjene metode stvarno doprinijele razumijevanju učenika. Vrednovanjem i učitelji kao i učenici dobivaju povratnu informaciju o učeničkom znanju. Ovisno o vrsti vrednovanja koje se provodi dobivamo različite povratne informacije.

1 Akcijsko istraživanje

Akcijsko istraživanje je oblik samorefleksivnog istraživanja koje provode sudionici u socijalnim situacijama kako bi poboljšali racionalnost i opravdanost vlastite prakse, svog razumijevanja te prakse i situacija u kojima se ona odvija. U obrazovanju, akcijsko istraživanje često je povezano s proučavanjem nekog aspekta školovanja, u svrhu poboljšanja nastave i učenja. Akcijsko istraživanje učiteljima omogućuje održavanje i unošenje promjena u neke aspekte njihove prakse, poput kurikuluma i kulture u razredu. Učitelji koji proučavaju aspekte vlastite prakse mogu kontinuirano usavršavati svoja istraživanja dok iskušavaju nove varijante kurikularne ili nastavne intervencije sa svojim učenicima. Akcijsko istraživanje razlikuje se od ostalih vrsta istraživanja s obzirom na ciljnu orijentaciju i očekivanja istraživanja.

Primjerice, istraživanje u svrhu pisanja disertacije napisano je radi postignuća određenog znanstvenom stupnja, najčešće doktorata znanosti iz nekog znanstvenog područja, te mora udovoljavati rigoroznim kriterijima, dok bi akcijsko istraživanje trebalo biti s ciljem poboljšanja svoje prakse.

2 Aktivno podučavanje i učenje matematike

Aktivno podučavanje i učenje matematike pedagoški je pristup koji učeniku omogućuje dinamično sudjelovanje u sadržaju, sa svrhom učenja. Ovaj pristup je u suprotnosti s tradicionalnim nastavnim metodama, gdje učenik pasivno gleda učitelja koji pokazuje postupke ili objašnjava matematičke pojmove. Elementi aktivnog podučavanja i učenja matematike već dugo prožimaju matematičko obrazovanje. Međutim, kao konstruktivistička teorija učenja postala je uvriježenija i razumljivija tijekom drugog dijela 20. stoljeća, tako su pedagoške metode aktivnog podučavanja i učenja postale istaknutije u obrazovanju matematike. U procesu aktivnog podučavanja i učenja matematike učitelji stvaranju radno okruženje u kojem se od učenika traži da istražuju i obrazlažu metode rješavanja problema, opravdavaju svoj rad i razgovaraju o svojim razmišljanjima sa svojim vršnjacima kako bi razvili i koristili vještine razmišljanja višeg reda. Na taj način učenici aktivno grade svoje znanje i razumijevanje matematike, koja se tada proučava na približno isti način na koji matematičari otkrivaju novu matematičku teoriju.

Kao što smo već rekli ovakav pristup poučavanju i učenju suprotnost je pasivnom učenja, gdje se od učenika očekuje da gledaju i slušaju dok učitelj pokazuje postupak rješavanja problema. Kod pasivnog učenja, učenici zatim vježbaju postupak na nizu sličnih problema u svrhu ovladanija vještine rješavanja zadanog i sličnih problema. Pokazalo se da aktivno učenje donosi bolja postignuća učenika na ispitima iz matematike, te kod učenika stvara povjerenje u vlastitu sposobnost bavljenja matematikom.

3 Algebarsko rasuđivanje

Algebarsko rasuđivanje opisano je kao proces u kojem učenici generaliziraju matematičke pojmove i postupke. Algebarsko rasuđivanje prožima sva područja matematike i neophodno je za stvaranje matematike koja se koristi u svakodnevnom životu. Algebarsko rasuđivanje postoji u kurikulumu matematike, počevši već od osnovne škole te se nastavlja i dalje.

Jedan od najpoznatijih slučajeva generalizacije aritmetike proizlazi iz izazova koji je dan Gaussu dok je još bio malo dijete. Priča govori da je njegov učitelj iz osnovne škole iscrpio brojne aktivnosti za Gaussa i odlučio ga okupirati zadatkom da zbroji brojeve od 1 do 100. Gauss je brzo otkrio da grupiranjem brojeva koji u sumi daju 101, tj. $100+1, 99+2, 98+3, \ldots,$ dobiva upravo 50 takvih pribrojnika i vratio se svom učitelju s rezultatom $50 \cdot 101$, odnosno 5050. Ovaj je obrazac generaliziran kao formula za pronalaženje zbroja svih brojeva od 1 do n: $S = [n(n+1)]/2$ (gdje je n prirodni broj).

Mnogi matematičari su pokušali opisati algebarsko mišljenje, ali najuspješniji u tome bio je James Kaput, koji opisuje pet različitih oblika algebarskog zaključivanja: generalizacija aritmetike i uzoraka, korištenje simbola i njihovo značenje, proučavanje strukture brojevnih sustava, proučavanje uzoraka i funkcija te proces matematičkog modeliranja ([8]). Algebarsko mišljenje nije samo jedna ideja već se sastoji od različitih oblika mišljenja i razumijevanja simbola. Također bi trebalo kod učenika od samog početka obrazovanja razvijati takav oblik mišljenja kako bi njegovo učenje bilo što produktivnije. Carpenter i ostali ([2]) opisuju dječju intuitivnu upotrebu svojstva distributivnosti i asocijativnosti s ciljem olakšavanja provedbe računskih operacija. Primjerice upotreba svojstva distributivnosti množenje prema zbrajanju za računanje $8 \cdot 15$ razlaganjem broja 15 na 10 i 5, te zatim množenjem $8 \cdot 10$ i $8 \cdot 5$ i kasnije zbrajanjem tih produkata $(80+40 = 120)$. Učenici koji intuitivno koriste asocijativno svojstvo množenja mogli bi kontinuirano udvostručavati broj 15 kako bi dobili odgovor $2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 15)) = 120$.

4 Algoritam

Algoritam se definira kao skup simbola i općenitih postupka za rješavanje zadataka iz neke određene klase matematičkih problema. Primjerice Euklidov se algoritam koristi za pronalaženje najveće zajedničke mjere dvaju prirodnih brojeva. Riječ algoritam dolazi od latinske riječi algorism koja je izvedena iz imena matematičara i astronoma âl-Khowarizmi-a. Kako su matematičari su otkrili nove metode za rješavanje problema i rješenja počeli bilježiti pomoću novih zapisa, pojam algoritam postao sinonim za procedure vezane za numeričke izračune.

Na primjer, $382 \cdot 43$ moglo bi se riješiti pomoću sljedećih šest množenja:
$(300 + 80 + 2) \cdot (40 + 3) = n$
$300 \cdot 40 + 300 \cdot 3 + 80 \cdot 40 + 80 \cdot 3 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 3 = n.$

Ovaj je proces generaliziran kao svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju za sve realne brojeve. Posljednjih desetljeća neki su učitelji matematike upozoravali na prekomjernu upotrebu algoritama te kako učenje standardiziranih algoritama napamet može biti štetno. Učenici na taj način mogu napustiti vlastitu produktivnost, zaključivanje i primjenu različitih strategija jer se fokusiraju na izvođenje algoritama koje ne razumiju.

5 Apstraktno mišljenje

Apstraktno mišljenje može se opisati kao mišljenje kojim se obrađuju sadržaji i ideje smješteni izvan fizičkoga prostora. Ono uključuje razmišljanje izvan fizičkih prikaza ili slučajeva matematičkog pojma tijekom procesa izdvajanja temeljne suštine ideja. Često je u kontrastu s konkretnim mišljenjem koje uključuje razmišljanje unutar konkretnih, fizičkih situacija, tj. koje se usredotočuje na fizički svijet i njegove elemente.

Matematika se kao znanost apstraktnih objekata, oslanja na logiku, simulaciju pa čak i eksperimentiranje kao sredstvo za otkrivanje istine. Takve simulacije i eksperimentiranja su uobičajeni postupci učenika koji istražuju matematiku s konkretnim materijalima i primjerima. Otkrivanjem novih obrazaca, promatranjem konkretnih primjera i generalizacijom učenici su uključeni u postupak apstrahiranja.

Primjer jedne takve interakcije u kognitivnom razvoju djeteta jest brojanje, čija je ideja da se svakom broju uvijek može dodati još jedan broj, na taj se način kod djece razvija apstraktna ideja da brojanje brojeva ide u beskonačnost. To je proces u kojem se od pojedinačnog primjera dolazi do generalizacije kojoj težimo. Kad se djeca „odmaknu“ od određenog primjera, kako bi razmotrila opći slučaj, tada se stvarno bave matematičkim zaključivanjem. Učitelj je zadužen za pružanje iskustava koja podupiru apstraktno mišljenje.

6 Direktno podučavanje

Direktno podučavanje je metoda kojom učenici najprije uče o novom konceptu i različitim postupcima, a nakon toga rješavaju zadatke vezane uz taj koncept i postupke. Direktno poučavanje nije nužno tradicionalni nastavni oblik predavanja, gdje učitelj priča, a učenici pasivno slušaju, već oblik nastave koji je u potpunosti strukturiran. Primjerice, učitelj motivacijskim i heurističkim razgovorom uvodi novi koncept ili postupak, daje primjere i potiče diskusiju, a nakon toga tek daje zadatke s ciljem da se provježba naučeno. Postoji više razloga koji podupiru direktno poučavanje, a jedan od njih je vezan s činjenicom da učenici stječu jasna znanja i nauče ispravne postupke, tim načinom smanjuje se i mogućnost od zabluda i pogrešaka. Također, još jedan razlog koji podupire direktno podučavanje je i taj da učenici tijekom rješavanja problema za koji nemaju znanje, uglavnom pretražuju svoje postojeće znanje, odnosno problemski prostor, i aktiviraju kognitivne procese u potrazi za pronalaskom rješenja, takvi procesi od njih traže veći kognitivni angažman te opterećuju ograničene sposobnosti radne memorije. A ako je radna memorija većinom opterećena takvim pretraživanjem problemskog prostora, ona pruža manju dostupnost za učenje novih koncepata i postupaka. Dakle, ako se učitelj koristi direktnim poučavanjem, odnosno pokazuje učeniku točno što treba učiniti i kako to učiniti, smanjuje opterećenje kognitivnih resursa i tako olakšava razvoj ispravnoga znanja i postupaka o novom konceptu. Nadalje, direktnim poučavanjem mogu se umanjiti frustracije koje učenik doživljava prilikom rješavanjem problema.

No, postoje dva glavna problema kod direktnog podučavanja. Ponajprije učenici ne mogu odrediti koja prethodna znanja su im potrebna za novi koncept. Ako su im novi koncepti i postupci prezentirani na kvalitetno strukturiran način, učenici često ne mogu razumjeti iz kojeg su razloga ti koncepti i postupci sastavljeni baš na taj način. Iz toga razloga neki istraživači preporučuju odgodu strukturiranog poučavanja radi bolje učinkovitost samog učenja ([3]). Drugi problem je usmjeren na to da bi učenici trebali stvarati vlastita razumijevanja, poimanja i prikaze. Različite studije ističu kako su poteškoće za vrijeme učenja izrazito korisne i potrebne. One ukazuju učenicima kako je potpuno u redu pogriješiti te kako se treba učiti na vlastitim pogreškama.

7 Ekvivalencija

Ekvivalencija je tehnički matematički termin kojem odgovara izraz iz svakodnevnog jezika, „isto je kao“. U učenju matematike djeca često nailaze na situacije u kojima moraju prepoznati da su sve stvari u danom skup na neki način „iste“. Ovaj proces prepoznavanja „istih“ u skupovima matematičkih objekata važan su način razmišljanja u matematici.

Pogledajmo to detaljnije. Prepoznavanje sličnosti i razlika temeljni je spoznajni proces pomoću kojeg organiziramo i osmišljavamo svoja iskustva. Taj je proces značajan u većini područja ljudske djelatnosti, od društvene interakcije sve do znanosti. Stoga ne čudi da ima posebnu primjenu u učenju matematike, u smislu ekvivalencije (što je isto?) i transformacije (što je drugačije?). U ranim fazama učenja, djeca uče prepoznati da postoji nešto „isto“ između dvije skupine objekata: jednu čine tri čokolade, a drugu tri medvjedića. Ove dvije skupine objekata međusobno se razlikuju (medvjedići se razlikuju od čokolade), ali postoji nešto vrlo značajno isto o njima. Obje skupine, i medvjedići i čokolade su opisane pridjevom „tri“. Činjenica da oba pojma dijele zajedničko svojstvo može se prikazati podudaranjem „jedan na jedan“, odnosno pridruživanjem jednog medvjedića i jedne čokolade. Svojstvo da su dva skupa ekvivalentna jer oba sadrže tri stvari dovodi nas do pojma kardinalnog broja. Ovo je samo jedan primjer koji ilustrira koliko ima apstraktnih matematičkih pojmova nastalih identificiranjem ekvivalenata. Geometrija nudi mnogo takvih primjera. Na primjer, učeći koncept „kvadrata“ djeca se mogu baviti sortiranjem skupa geometrijskih likova koji uključuje niz kvadrata različitih veličina. Kad slože sve kvadrate u podskup jer su „svi istog oblika“, koriste se zaključivanjem na temelju ekvivalencije. Oblici nisu svi isti jer se, na primjer, mogu razlikovati u veličini ili boji. No, svi su na neki način isti, dijele neko isto svojstvo, odnosno postoji ekvivalentnost.

Ovo je jedan od razloga zašto je ovakvo razmišljanje tako moćno i temeljno u matematici. Ono omogućuje učenicima da u svom umu drže jednu konceptualnu ideju (poput „tri“ ili „kvadrata“) koja je apstrakcija njihova iskustva na mnogim konkretnim primjerima, koji su na neki način ekvivalentni. Pritom, učenik kombinira niz individualnih iskustava na određenim primjerima, koji su prepoznati kao isti u nekom smislu, u jednu apstrakciju.

Do pojma klasa ekvivalencije učenici mogu doći, na primjer, istražujući ostatke pri dijeljenju prirodnih brojeva od 1 do 20 s brojem 3. Rješavajući taj matematički problem otkrivaju da postoje tri podskupa s brojevima koji daju ostatke 0, 1 i 2:

1. $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$;

2. $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$;

3. $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 30\}$.

Unutar svakog od ova tri podskupa brojevi imaju zajedničko svojstvo.

1. Svi su višekratnici 3.

2. Svi pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1.

3. Svi pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2.

Tako dobivena tri podskupa se nazivaju „klase ekvivalencije".

Kada uče matematiku, djeca često sortiraju matematičke objekte u klase ekvivalencije. Na primjer, sortiranje skupa dvodimenzionalnih oblika u one s istim brojem stranica generiraju ove klase ekvivalencije: trokute, četverokute, peterokute, šesterokute, itd.

Ako se dva matematička objekta u nekom smislu smatraju istima, dakle ekvivalentnima u odgovarajućim okolnostima, jedan član klase ekvivalencije može se zamijeniti bilo kojim drugim članom. Na primjer, razlomci se mogu razvrstati u skupove ekvivalentnih razlomaka, kao što su $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \dots\}$. Razlomak $\frac{2}{8}$ nije u svakom smislu isto što i razlomak $\frac{1}{4}$, primjerice jedan komad izrezanog kolača na četiri jednaka dijela nije identičan u svakom pogledu s dva komada kolača narezanog na 8 jednakih dijelova. Međutim, radi se o istoj količini kolača. Ovdje postoji jednakovrijednost koju učenici moraju naučiti prepoznati, a zatim koristiti. Na primjer, pri zbrajanju razlomaka $\frac{3}{8}$ i $\frac{1}{4}$ prikladno je, i korisno, moći zamijeniti $\frac{1}{4}$ ekvivalentnim razlomkom $\frac{2}{8}$. Učitelji osnovnih škola stoga bi trebali biti svjesni važnosti promicanje ove vrste razmišljanja kod učenika.

7.1 Primjeri ekvivalencije u nastavi matematike u osnovnoj školi

7.1.1 Podudaranje „jedan na jedan"

Mala djeca dobivaju iskustvo podudaranja „jedan na jedan" postavljanjem stola za šest osoba, pri čemu svako mjesto ima jedan nož, jednu vilicu, jedan tanjur, jednu šalicu, jedan tanjurić te jednu žlicu. Učitelj i učenici prvo zajedno izbroje koliko komada od svake stavke ima na stolu, a zatim ih raspoređuju na različite načine kako bi podudaranje bilo eksplicitno. Učitelj u više navrata koristi izraze poput „jedan od ovih za jednu od onih" i „broj ovih jednak je broju onih".

7.1.2 Oblici: Koje je moje pravilo?

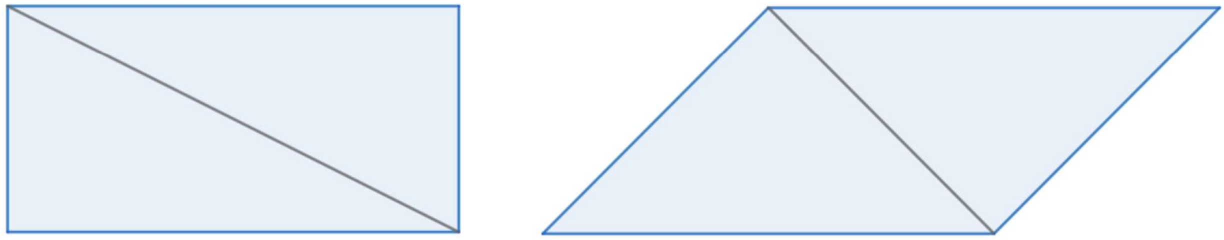
Učitelj i skupina učenika zajedno gledaju skupinu geometrijskih tijela. Učitelj govori učenicima da postoji pravilo za sortiranje ovih oblika. Ako određeno geometrijsko tijelo zadovoljava pravilo, ono ulazi u skupinu „da", a inače u skupinu „ne". Učitelj učenicima na nekoliko primjera pokaže kako sortirati geometrijska tijela, a onda zatraži od učenika da ostala geometrijska tijela sami sortiraju u te dvije skupine, iako im on nije rekao pravilo. Kada je sortiranje dovršeno, od učenika se traži da kažu što je isto jednoj skupini geometrijskih tijela te koje je pravilo učitelj koristio? Nakon toga, ovu aktivnost ponavljaju s različitim pravilima. Tada će učenici imati priliku koristiti vlastita pravila za sortiranje oblika. Svaki put kada to budu radili, skupina „da“ pokazivat će ekvivalentnost. Na primjer, ako se koristi pravilo „svi kutovi su pravi kutovi“, tada je skup ekvivalentnih oblika skup kvadara.

7.1.3 Brojevi: Koje je moje pravilo?

Ovu aktivnost možemo provesti i s cijelim brojevima, ne samo prirodnim. Učitelj govori učenicima da predlaže neke brojeve koje on zatim zapisuju na ploču u dva skupa, skup „da“ ili skup „ne“. Djeca moraju pogoditi pravilo i reći što je isto za sve brojeve u skupu „da“. Primjeri pravila mogu biti „između 9 i 100“ (skup dvoznamenkastih brojeva) ili „posljednja znamenka je 6 ili 1“.

7.1.4 Što je isto?

Učenici imaju dva geometrijska lika (poput ovih na slici 1) ili dva broja (kao što su 16 i 36) i zadano im je da pronađu što više elemenata po kojima su dva broja ili dva lika ista. Učenici trebaju formuliraju rečenice počevši s riječima: „oba lika ...“ ili „oba broja ...“. Na primjer, za likove mogu reći „oba lika imaju četiri strane“ ili za brojeve mogu reći „oba su broja kvadrati nekih brojeva“.

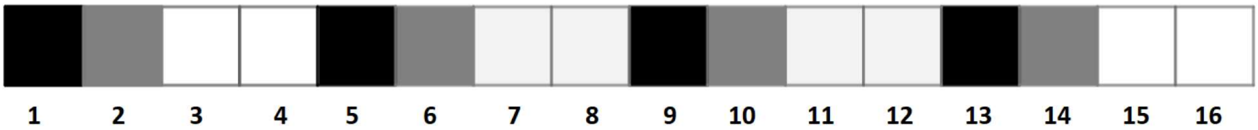


Slika 1: Geometrijski likovi na kojima učenici trebaju uočiti „što je isto“

8 Generalizacija

Generalizacija je jedan od temeljnih i karakterističnih procesa matematičkog razmišljanja i zaključivanja. Generalizacija je bitan aspekt u matematici koji je svoje mjesto našao u svim nastavnim cjelinama na svim razinama. U svom utjecajnom istraživanju psihologije matematičkih sposobnosti u školske djece, Krutetskii je identificirao sposobnost za brzu i jasnu generalizaciju matematičkih objekata i relacija, kao jednu od ključnih komponenti koja razlikuje učenike koji su sposobniji u matematici od onih koji su manje sposobni. Krutetskii identificira dva aspekta ove sposobnosti: (a) sposobnost reorganiziranja te primjene generalizacije koju učenik već zna u određenoj situaciji; (b) sposobnost primjećivanja nečeg općenitog i zasad nepoznatog učeniku u jednom ili više posebnih slučajeva ([5]). Drugim riječima, učenici moraju naučiti primjenjivati opće na posebno i iz općeg izvesti posebno. Djeca od najranije dobi koriste svoju svijest i odgovaraju na obrazac za formuliranje i korištenje generalizacija u matematici.

Na primjer, u procesu brojanja, jednoznamenkasti brojevi ponavljaju se uvijek istim redom, odnosno dobivamo obrazac „...jedan,...dva,...tri“, koji se ponavlja za svakih deset brojeva. Djeca prepoznaju da će se taj obrazac uvijek pojaviti, a zatim upotrjebljavaju generalizaciju i nastavljaju brojati sa sve većim brojevima. Učenici koriste generalizacije kad god upotrebljavaju riječi kao što su „uvijek“, „svaki“, „sve“, „nikad“, „zauvijek“. Na primjer, dolje su navedeni neki od načina na koje djeca mogu generalizirati obrazac kvadrata (Slika 2).



Slika 2: Primjer generalizacije

- Uvijek ide crno, sivo pa dva bijela kvadrata.
- Nakon svakog sivog kvadrata slijede dva bijela kvadrata.
- Svaki put kad dobijete crni kvadrat, sljedeći dobivate sivi kvadrat.
- Svi sivi kvadrati slijede crne kvadrate.
- Sljedeći kvadrat nakon crnog kvadrata nikada nije bijeli kvadrat.
- Uzorak bi se mogao nastaviti crno, sivo, bijelo, bijelo, zauvijek.

Učinkoviti učitelji matematike u školama potiču učenike da upotrebljavaju riječi poput ovih kako bi artikulirali svoja zapažanja obrazaca u matematici i dali izjave o onome što uvijek vrijedi. Posebno važno u formuliranju matematičkih generalizacija je jezična struktura, „ako..., onda ... “, prvenstveno jer jasno razlikuje dvije različite tvrdnje, „ako p, onda q“ i „ako q, onda p“. Na primjer, ispravna generalizacija o višekratnicima broja 5 može se izraziti na slijedeći način „ako cijeli broj završava s 5, onda je to višekratnik broja 5“. Obrnuta tvrdnja je netočna generalizacija: „ako je cijeli broj višekratnik broja 5, onda on završava na 5“. Generalizacija tvrdi da tvrdnja uvijek vrijedi. Netočne tvrdnje možemo dokazati traženjem samo jednog primjera gdje to nije slučaj. To se naziva protuprimjer. Na primjer, broj 20 je protuprimjer za generalizaciju, „ako je cijeli broj višekratnik broja 5, onda on završava na 5“. Broj 20 je višekratnik broja 5, ali ne završava s 5.

8.1 Primjeri generalizacije u nastavi matematike u osnovnoj školi

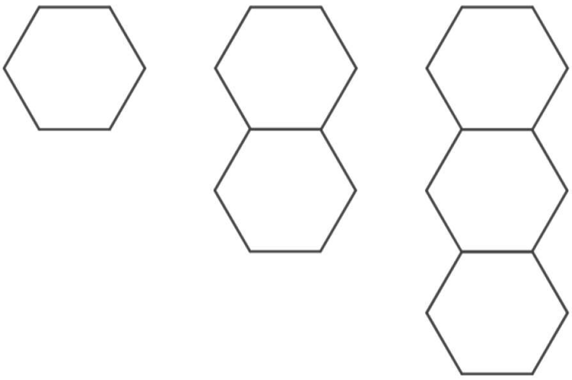
Budući da je stvaranje generalizacija osnova matematičkog mišljenja, učitelji učenicima trebaju pružiti mogućnosti za njezin razvoj.

8.1.1 Sekvencijalne i globalne generalizacije

Od učenika se može zatražiti da numeriraju kvadrate prikazane na slici 2, s $1, 2, 3, 4, \ldots$ itd., a zatim im zadati da istraže koji se nizovi brojeva nalaze u kvadratima različitih boja. Za crne kvadrate, na primjer, učenici bi istraživali uzorak s nizom brojeva: $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ Ovdje bi se obrazac mogao artikulirati pomoću sekvencijalne generalizacije, poput: „da bismo došli do sljedećeg broja uz crni kvadrat uvijek dodajemo 4“. Isto možemo izraziti i pomoću snažnije globalne generalizaciji, poput: „brojevi uz crne kvadrate pri dijeljenju s 4 daju ostatak 1“.

8.1.2 Tablični prikaz

Jedan od najučinkovitijih pristupa generalizaciji je tablično prikazivanje rezultata. To je korisno rabiti i kod proučavanja nizova brojeva i likova. Na primjer, za izradu jednog šesterokuta potrebno je 6 štapića. Slika 3 prikazuje kako je za izradu niza od dva, tri i četiri šesterokuta potrebno 11, 16 i 21 štapić. Rezultate možemo bilježiti u tablici. Učenicima se nakon toga zadaje zadatak da predvide koliko će štapića biti potrebno za nizove koje čini pet i šest šesterokuta, a zatim se provjeravaju njihova predviđanja. To uključuje prepoznavanje i primjenu generalizacija, kao što je „svaki put dodajemo 5“. Veći je izazov predvidjeti koliko će štapića biti potrebno za izgradnju niza kojeg čini 20 šesterokuta. To uključuje prepoznavanje i primjenu globalne generalizacije, kao što je „pomnožite broj šesterokuta s 5 i dodajte 1“. Učenici s boljim matematičkim sposobnostima to će moći izraziti i u algebarskom smislu: $n = 5m + 1$, gdje je n potreban broj štapića, a m je broj šesterokuta. Formuliranje globalne generalizacija poput ove, ključni je korak u razvoju algebarskog razmišljanje.



BROJ ŠESTEROKUTA	BROJ ŠTAPIĆA
1	6
2	11
3	16
4	21
5	?
6	?
20	?

Slika 3: Primjer generalizacije: zadatak sa štapićima i pripadni tablični prikaz

9 Kognitivni zahtjev

Kognitivni zahtjev je razina matematičkog mišljenja i zaključivanja potrebna za rad s matematičkim problemima. Pojam kognitivni zahtjev uključuje i zadatke niže razine, koji zahtijevaju zapamćenu činjenicu ili pojednostavljeno proceduralno rješenje i zadatke više razine, koji zahtijevaju generaliziranje obrazaca ili ne-algoritamsko mišljenje. Do kasnih 70-ih godina 20. stoljeća provedeno je mnogo istraživanja o tome kako razne značajke školskog sustava mogu utjecati na učenje učenika. Primjerice, veličina razreda, vrijeme provedeno na nastavi, učiteljevo ponašanje te slično. Krajem sedamdesetih i osamdesetih godina prošlog stoljeća istraživači su počeli sve više proučavati vrste zadataka koje učenici imaju, s ciljem poboljšanja učenja. Doyle je istraživao ulogu problema u učenju učenika. Naveo je četiri vrste zadataka na temelju potrebnih kognitivnih operacija: memorijski zadaci, gdje učenik reproducira sadržaj iz memorije; proceduralni ili rutinski zadatci, gdje učenik koristi standardiziranu formulu za izradu odgovora; zadaci razumijevanja, gdje se od učenika može zahtijevati da odlučuju među nekoliko postupaka u rješavanju problema; i zadaci mišljenja, gdje učenici izlažu svoja razmišljanjima o problemu ([4]).

9.1 Zadaci više i niže kognitivne razine

Rješavanje zadataka najčešća je učenička djelatnost na satima matematike, stoga zadaci kojima izlažemo učenike uvelike utječu na matematičko znanje koje stu, umijeća te navike. Zadaci koji se biraju za učenike pridonose razvoju njihovih matematičkih sposobnosti i kreativnog mišljenja. Zadaci koje treba davati učenicima trebali bi poticati razvoj logičkog mišljenja, matematičkih sposobnosti, kreativnosti te interesa za matematiku. Zadatke koji se pojavljuju u nastavi matematike mogu se raspodijeliti u dvije skupine: u zadatke više i niže kognitivne skupine.

Pri tome bi u zadatke niže kognitivne skupine ubrajali zadatke koji od učenika traže reprodukciju prethodno naučenih formula, definicija, pravila i činjenica. Takvi zadaci su algoritamski, odnosno od učenika zahtijevaju poznavanje određenih algoritama i njihovu primjenu. Cilj takvih zadatka je davanje točnog odgovora, za razliku od zadataka više razine koji su usmjereni na razvoj matematičkog razumijevanja. Zadaci niže kognitivne razine od učenika ne traže objašnjenja, nego su fokusirani na opis korištenog postupka.

Primjeri zadataka niže kognitivne razine:

Primjer 1: Povežite formule s odgovarajućim pojmovima iz drugog stupca (Slika 4).

Primjer 2: Marko ima starijeg brata, omjer njihovih godina je 1:2. Ako znamo da Marko ima 13 godina, koliko godina ima Markov brat?

Primjer 3: Izračunajte duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta ukoliko znamo da su duljine kateta 3 cm i 4 cm.

Za razliku od zadatka niže kognitivne razine, u zadatke više kognitivne razine ubrajamo zadatke koji traže dublje razumijevanje matematičkih ideja i pojmova te višestruke načine prikazivanja matematičkih pojmova. Prelaskom iz jednog načina prikazivanja u drugi, kod učenika

$P = \frac{1}{2}av_a$ ili $P = \frac{1}{2}bv_b$ ili $P = \frac{1}{2}bv_b$	Površina romba
$O = a + b + c$	Površina trapeza
$O = 4a$	Površina kvadrata
$P = a^2$	Opseg paralelograma
$P = \frac{1}{2}(a + c)v$	Površina pravokutnika
$O = a + b + c$	Opseg trapeza
$P = \frac{1}{2}ab$	Površina trokuta
$O = 2(a + b)$	Opseg trokuta
$P = ab$	Površina pravokutnog trokuta
$P = av_a$	Površina paralelograma
$P = bv_b$	Opseg romba

Slika 4: Primjer zadatka niže kognitivne razine

se razvija razumijevanje veza među prikazima. Takvi zadaci zahtijevaju određeni stupanj kognitivnog napora jer od učenika traže da analiziraju zadatke te da ispituju uvijete zadatka.

Primjeri zadataka više kognitivne razine:

Primjer 1: Luka je ljestve duljine 25 metara postavio uz zid. Donji kraj ljestvi udaljen je 7 metara od zida. Ukoliko gornji kraj ljestvi sklizne za 4 metra dolje, koliko će sada donji kraj ljestvi biti udaljen od zida?

Primjer 2: Na kvadratnoj mreži dimenzije $10 \ldots 10$, označite dio mreže koji pokazuje postotak jednak razlomku 4/5. Kako to zapisali kao decimalni broj?

Zadatke niže kognitivne razine možemo modificirati u zadatke više kognitivne razine primjenom slijedećih smjernica. Od učenika treba tražiti da informacije prikazuju na različite načine, primjerice slikom, grafom, tablicom, simbolima, jednadžbom ili u nekom kontekstu. Učenicima treba zadati zadatke prije nego što su napamet naučili pravila koja mogu primijeniti ili različite algoritme za rješavanje. Od učenika treba zahtijevati da postave vlastite hipoteze te da ih testiraju. Također, treba koristiti upite koji zahtijevaju primjenu generalizacije, usporedbu različitih načina rješavanja te usporedbu različitih matematičkih odnosa.

Swan ([12]) je smatrao da učenici ostvaruju veći kognitivni angažman, produbljuju razumijevanje i razvijaju matematičko mišljenje surađujući s drugim učenicima. Stoga smatra poželjnim, u nastavi zahtijevati međusobnu suradnju učenika pri rješavanju matematičkih problema. Neki od primjera takvih zadatka su slijedeći:

Primjer 1: Razvrstaj sljedeće brojeve u skupine u ovisnosti o tome jesu li višekratnici broja 3 ili višekratnici broja 4. U koju skupinu pripada broj 24, obrazloži svoj odgovor.

20	15	60	76	84	21	195	188	56	165

Višekratnici broja 3							
Višekratnici broja 4							

Primjer 2: Slijedeće tvrdnje pridruži odgovarajućoj kategoriji četverokuta:

1. dijagonale četverokuta su međusobno okomite
2. četverokut ima jedan par paralelnih stranica
3. dijagonale četverokuta su jednake duljine
4. sve stranice četverokuta su jednake duljine
5. četverokut ima dva para paralelnih stranica
6. dijagonale četverokuta se raspolovljuju

KVADRAT	TRAPEZ	PRAVOKUTNIK	PARALELOGRAM	ROMB

Tijekom aktivnog učenja učenici kontinuirano propitkuju pretpostavke te kritički prosuđuju tuđe odgovore. Za to vrijeme učenici odlučuju jesu li određene tvrdnje istinite „uvijek“, „ponekad“ ili „nikada“. Ukoliko u nastavu matematike uključimo zadatke koji traže takav angažman, tada se kod učenika potiče razvoj preciznih matematičkih objašnjenja te precizne matematičke argumentacije. Učenike se potiče da smišljaju primjere i protuprimjere kako bi obranili svoja stajalište.

10 Kognitivni konflikt

Kognitivni konflikt je proces u kojem se učenici suočavaju s odstupanjima od njihovih ideja, s rezultatima koji se razlikuju od njihovog predviđanja ili s tvrdnjama koje su u sukobu s njihovim postojećim razumijevanjem. Rješavanje ovog sukoba može dovesti do povećanja znanja i razumijevanja. Kognitivni konflikt u nastavi matematike se stoga može koristiti za povećanje razumijevanja. Učitelji se često susreću s učeničkim greškama i neadekvatnim idejama o matematičkim temama. Da bi daljnje podučavanje bilo kvalitetno i razumljivo učitelj prvo treba ustvrditi gdje leži učenikov problem, odnosno razumjeti zašto učenik griješi. Proces otkrivanja i rješavanja učenikove pogreške važan je za formativno vrednovanje. Svrha formativnog vrednovanja je pomoći učeniku i učitelju da shvate koliko učenici razumiju gradivo. Dobivenom se informacijom koristi učenik kako bi poboljšao učenje, ali i učitelj kako bi poboljšao podučavanje.

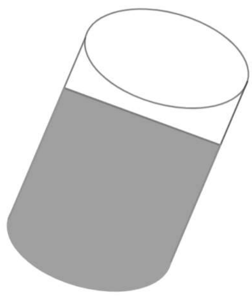
10.1 Primjeri kognitivnog konflikta u nastavi matematike

10.1.1 Skupovi brojeva

Od učenika se može tražiti da razvrstaju sljedeće brojeve: 1, 3, 5, 9, 10, 13, 15, 20, 23, 25 u dvije skupine, u višekratnike broja 5 i neparne brojeve. Ukoliko se učenicima zadaju brojevi poput 5, 15, 25 učenici se suočavaju sa situacijom da ti brojevi pripadaju u oba skupa, budući da su višekratnici broja 5, a ujedno i neparni brojevi. Ova je situacija primjer kognitivnog konflikta u kojem učitelj treba pomoći učenicima da otkriju poteškoću te da se s njom suoče i riješe problem. Ovakav bi kognitivni konflikt mogao dovesti do toga da učenici samostalno zaključe da su brojevi 5, 15, 25 elementi oba skupa brojeva te da se pri prikazu Vennova dijagrama moraju „preklapati“. Stoga rješavanje kognitivnog konflikta za posljedicu ima bolje matematičko razumijevanje.

10.1.2 Vizualizacija

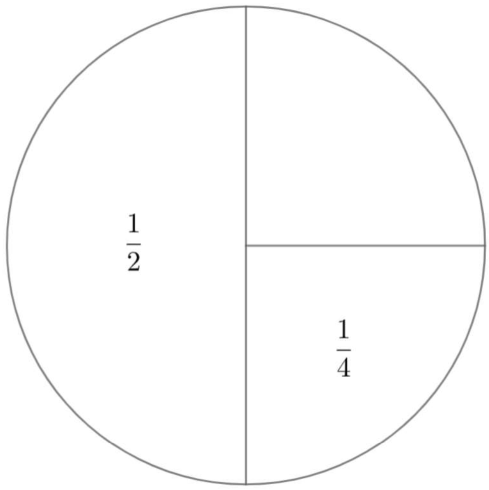
Učenicima se prikazuje prozirna čaša s vodom unutra. Učenike se zatim zamoli da zamisle kako je čaša s vodom nagnuta na jednu stranu te da tu situaciju i nacrtaju. Mnoga djeca razinu vode crtaju paralelno s gornjim dijelom čaše, a ne paralelno sa stolom na kojem čaša stoji, kao što je prikazano na slici 5. Kako bi se učenike dovelo u kognitivni konflikt, na čaši bi se mogla nacrtati pravac koji prati razinu vode dok čaša nije nagnuta. A kada se časa s vodom nagne, učenike se može upitati da usporede njihovo predviđanje sa stvarnom situacijom.



Slika 5: Prikaz moguće učeničke pogreške

10.1.3 Zbrajanje razlomka

Učenici često pri računanju s razlomcima na neprimjeren način rabe postupke koje su naučili pri računanju s prirodnim brojevima. Na primjer, na upit da izračunaju $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ učenici mogu pogrešno primijeniti svoje postojeće znanje o zbrajanju prirodnih brojeva te kao rješenje dobiti $\frac{1}{6}$ ili $\frac{2}{6}$. Rješavanje problema crtanjem kao na slici 6, može dovesti učenike u kognitivni konflikt neophodan da bi učenici shvatili da iste metode ne vrijede za zbrajanje cijelih brojeva i za zbrajanje razlomaka. Ova spoznaja je mnogim učenicima vrlo važno iskustvo za daljnje razumijevanje razlomaka.



Slika 6: Primjer kognitivnog konflikta u nastavi matematike: zbrajanje razlomaka

10.1.4 Decimalni brojevi

Tanner i Jones ([13]) opisali su studiju provedenu na jedanaestogodišnjacima kojima je dan sljedeći zadatak:

Zaokružite najmanju ponuđenu vrijednost:

a) 0.3751

b) 0.25

c) 0.5

d) 0.125.

Rezultati učenika su slijedeći: a) 34% b) 2% c) 43% i d) 17%, odnosno 34% učenika misli da je 0.3751 najmanja ponuđena vrijednost, 2% učenika da je 0.25, 43% da je 0.5 te 17% učenika misli da je 0.125. U istraživanjima je često dokumentirana pogreška učenika, zanemarivanje decimalne točke i promatranje vrijednosti značajnih znamenki kao prirodnih brojevi. A to je potvrdila i ova studija s čak 43%. Druga česta učenička pogreška povezana je uz broj decimala iza decimalne točke, odnosno glasi: veći broj decimala iza decimalne točke, znači manji broj. Zato se 34% učenika odlučilo za odgovor pod a).

Kako bi se učenicima olakšalo razumijevanje problema uspoređivanja dvaju decimalnih brojeva, moglo bi im se zadati ovakav kognitivni konflikt:

Marta tvrdi 390 je veće od 150, što je veće od 45. Pa je prema tome $0.390 > 0.150 > 0.45$? Je li Marta u pravu?

Učenici o ovom problemu trebaju diskutirati u skupinama, a odgovore koje predlažu mogu poslužiti kao glavna aktivnost poučavanja. Tijekom poučavanja važno je koristiti brojevni pravac za vizualizaciju brojeva. U završnom dijelu sata treba se vratiti na početnu aktivnost te zatražiti od učenika da uz pomoć brojevnog pravca objasne zašto su njihove početne ideje bile netočne.

Upravo rješavanje ovakvih kognitivnih konflikta dovodi do boljeg razumijevanja matematičkih pojmova te je stoga namjerno izlaganje učenika vlastitim pogreškama, odnosno dovođenje učenika u kognitivni konflikt s vlastitim idejama, primjer jedne dobre nastavne strategije koja potiče razvoj razumijevanja i olakšava učeniku, ali i učitelju shvaćanje nadolazećih matematičkih sadržaja.

Piaget je odgovorio na pitanje kada i zašto nastaje kognitivni konflikt. On ovaj pojam naziva još i neravnoteža te ga tumači vrlo jednostavno. Asimilacijom naziva slijedeći proces: kada osoba uči, ugrađuje nova iskustva u svoje mentalne strukture. Ukoliko se prethodno formirane mentalne strukture sukobe s novo asimiliranim informacijama dolazi do neravnoteže. Stanje neravnoteže motivira osobu da pronalazi ravnotežu. Pronalazak ravnoteže dovodi do pojma koji Piaget naziva akomodacija, odnosno razvoj novih mentalnih struktura ([10]).

Kognitivni konflikt je dobra nastavna strategija kojom se omogućuje bolje razumijevanje matematičkih sadržaja, no treba voditi računa i o osjećajima koje učenici proživljavaju u takvim trenutcima. U situacijama kada se učenikovo znanje ne slaže s stvarnom situacijom, učenik može osjećati frustraciju, nelagodu, želju za istraživanjem nove situacije ili se može osjećati bespomoćnim te odustati. Stoga je u takvim situacijama vrlo važna uloga učitelja, koji je tu da pomogne učenicima koji su se našli u kognitivnom konfliktu na način da im pruži potporu i motivira ih na istraživanje.

Primjer kognitivnog konflikta ne mora biti nužno razgovor učitelja i učenika, on se može dogoditi i pri razgovoru dvaju ili više učenika o dobivenom rješenju. U takvim se situacijama kod učenika budi radoznalost i zanimanje da shvate zašto imaju različite odgovore.

Bell ([1]) i Swan ([11]) proveli su niz studija u kojima su pokazali da je nastava matematike u kojoj se koristi kognitivni konflikt učinkovitija od predavačke nastave ili nastave u kojoj se koristi metoda vođenog otkrivanja. Osmislili su tada tijek sata s primjernom kognitivnog konflikta te su ga nazvali dijagnostičko poučavanje. Takav sat počinje s problemom koji je potrebno riješiti, zatim slijedi prezentiranje učeničkih ideja, nastavlja se raspravom unutar manjih skupina i završava diskusijom u kojoj sudjeluje cijeli razred s ciljem rješavanja problema na koje su učenici naišli. Istraživači su došli do zaključka da je izbjegavanje konflikta, odnosno davanje objašnjenja prije nego se zada problem manje učinkovito od dijagnostičkog poučavanja. Stoga je rješavanje kognitivnog konflikta pomoću diskusije ključno je za ovaj nastavni pristup.

Mišurac-Zorica i Cindrić ([9]) provele su u jednoj školskoj godini eksperimentalnu studiju, u kojoj su longitudinalno pratile 234 učenika petog razreda osnovne škole. Učenike su podijelile u dvije jednake skupine. Jedna je skupina bila eksperimentalna, te su se u njoj koristile metode diskusije i kognitivnog konflikta, a nastava je bila usmjerena na otkrivanje pogriješih ideja učenika. Druga je skupina bila kontrolna, u toj su skupini učenici učili postupke i vježbali rješavanje zadataka. Ovom je studijom ispitana uspješnost učenika iz obje skupine na temu dijeljenja decimalnih brojeva. Rezultatima studije pokazano je da učenici koji su bili u eksperimentalnoj skupini, tj. poučavani primjenom strategije kognitivnog konflikta i diskusije, postižu bolje rezultate od učenika iz kontrolne skupine. Eksperimentalna skupina učenika u zadatcima koji ispituju konceptualno znanje u potpunosti je nadmašila učenike iz kontrolne skupine, razlika u rezultatima bila je statistički značajna.

11 Kognitivno vođena nastava

Kognitivno vođena nastava je profesionalno razvijen matematički program za učitelje, čiji je cilj pomoći učiteljima da razumiju kako učenici rješavaju probleme i razmišljaju algebarski. Kognitivno vođena nastava temelji se na čvrstom znanju o tome kako djeca razmišljaju o konceptu brojeva i strategijama rješavanja problema. Teza kognitivno vođene nastave je ta da djeca ulaze u školu s velikim neformalnim ili intuitivnim znanjem matematike koja može poslužiti kao osnova za razvoj razumijevanja matematike iz osnovnoškolskog kurikuluma.

Sudionici u programu kognitivno vođene nastave sudjeluju u aktivnostima koje im pružaju priliku da nauče o različitim vrstama problema te o različitim strategijama rješavanja problema. Ove se aktivnosti temelje na studijama koje pokazuju da učitelji koji su sudjelovali u programu kognitivno vođene nastave znaju više o strategijama rješavanja problema svojih učenika. Jedno rano istraživanje o programu kognitivno vođene nastave pokazalo je da su učenici, čiji je učitelj sudjelovao u programu kognitivno vođene nastave, postizali bolje rezultate u rješavanju zadataka od učenika čiji učitelji nisu sudjelovali.

12 Kreativnost

Kreativnost u matematici viša je kategorija sposobnosti koja se razlikuje od postignuća na konvencionalnim testovima matematičkih vještina, znanja i razumijevanja. Pojam kreativnosti koristi se u obrazovanju na mnogo različitih načina. A korisnu definiciju dao je National Advisory Committee on Creative and Cultural Education koji je kreativnost opisao na slijedeći način: „kreativnost je maštovita aktivnost oblikovana tako da proizvodi ishode koji su i originalni i vrijedni“. Ova definicija uključuje četiri načela: da kreativnost mora uključivati razmišljanje ili maštovito ponašanje, da mora imati neku svrhu, da plod kreativnosti mora na neki način biti originalan, ali da, također, mora imati i vrijednost te biti primjeren cilju zadatka ([5]).

Kreativnost u području matematike u osnovnoj školi fokusirana je na divergentno i fleksibilno razmišljanje, otvoreno za mnoge mogućnosti, za razliku od konvergentnog razmišljanje koje uvijek traže samo jedan prihvatljiv odgovor. Mnogi matematiku i kreativnost smatraju ne spojivim pojmovima, to ponajviše proizlazi iz pretpostavke da znanje matematike uključuje primjenu strogo definiranih pravila te da je cilj učenja matematika reproduciranje istih.

Također, matematiku ne vide kao područje u kojem ima mjesta za otkrivanje novih spoznaja, istraživanje te spontanost. Stoga je, upravo, cilj kreativnosti u matematici razbijanje takvih mentalnih sklopova i nadvladavanje uvriježenih mišljenja o matematici i rješavanju matematičkih problema. Zanimljivo matematičko pitanje o rješavanju problema je sljedeće: „Zašto ne mogu riješiti matematički problem kada imam na raspolaganju sve matematičke vještine i potrebno znanje?“ Često odgovor leži u tome da ograničavamo svoje razmišljanje zbog nekog mentalnog sklopa. Karakteristika kreativnog rješavanja problema u matematici je spremnost na otvoreno razmatranje niza različitih pristupa. „Neprijatelji“ kreativnog mišljenja u matematici su krutost u obradi matematičkih informacija, pridržavanje rutine u svim okolnostima te stereotipni pristupi rješavanju matematičkih problema.

12.1 Primjeri kreativnosti u nastavi matematike

Neki primjeri načina na koje učitelji mogu promovirati kreativno razmišljanje u matematici dano je u nastavku.

12.1.1 Prevladavanje mentalnog sklopa

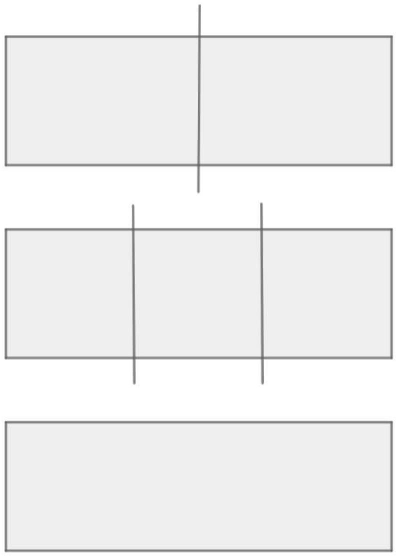
Učenicima je prikazana slika 7 i objašnjeno da je za rezanje pravokutnika na dva jednaka dijela potrebna jedan pravac, a za rezanje na tri jednaka dijela, dva pravca. Zatim se učenicima postavlja pitanje: koliko je pravca potrebno za rezanje pravokutnika na četiri jednaka dijela, šest jednakih dijelova te devet jednakih dijelova? „Nekreativni“ odgovori su tri, pet i osam. Učenik može pokazati matematičku kreativnost prevladavanjem mentalnog sklopa uspostavljenog u prva dva slučaja, te za rješavanje ovog problema koristiti dva pravca za četiri dijela, tri pravca za šest dijelova i četiri pravca za devet dijelova.

12.1.2 Divergentno mišljenje

Kod učenika se divergentno mišljenje može razvijati na sljedeći način: za razliku od klasičnih matematičkih testova učenicima se može zadati da izvedu što je više moguće činjenica iz jednog zadanog rezultata. Na primjer, učenicima se može dati navedeni rezultat $27 \cdot 92 = 2484$ te ih zamoliti da izvedu što više drugih činjenica. Matematički kreativan učenik razmotrio bi, na primjer, mogućnosti generiranja novih rezultata pomoću drugih operacija osim množenja (kao što je $2484 : 27 = 92$) i decimalnih brojeva, odnosno brojeva koji nisu cijeli prirodni (poput $13.5 \cdot 92 = 1242$).

12.1.3 Postavljanje matematičkih pitanja

Učenici mogu pokazati svoju fleksibilnost i originalnost smišljajući matematička pitanja na koja se može odgovoriti o danoj situaciji. Učenici bi mogli dobiti nekoliko posuda i boca s vodom,



Slika 7: Primjer kreativnosti u nastavi matematike

te bi im se moglo zadati da postave što više različitih matematičkih pitanja o danim posudama i bocama vode, na koje se može odgovoriti. Starijim učenicima moglo bi se dati primjerak dnevnih novina te im zadati izazov da postave zanimljiva matematička pitanja o novinama, s ciljem istraživanja odgovora na postavljena pitanja.

12.1.4 Nerutinski problemi

Učitelji mogu učenicima zadati nerutinske matematičke probleme koji zahtijevaju samo osnovne matematičke vještine, no zahtijevaju kreativnost te nestandardno korištenje osnovnih vještina kako bi se pronašlo rješenje. Sljedeća dva problema primjer su nerutinskih zadataka. Oni zahtijevaju vrlo jednostavnu aritmetiku, ali i malo kreativnog razmišljanja.

1. Dvoje učenika želi kupiti bombonijeru. Svaki od njih posjeduje određenu količinu novca, nažalost prvom nedostaje 25 kn, a drugom 2 kn. Oni zatim odlučuju da udruže svoj novac. Ali još uvijek nemaju dovoljno za kupnju bombonijere. Koliko košta bombonjera?

2. Učitelj je jednom učeniku zadao jedan broj te ga je zamolio da od zadanog broja oduzme 3, a zatim ga podijeli sa 2. Učenik nije obraćao pažnju i zadanom broju dodao je 2, a zatim ga podijelio s 3. No imao je sreće jer je ipak dobio točan odgovor! Koji je broj bio zadan?

13 Produktivni neuspjeh

Produktivni neuspjeh je metoda kojom učenici prvo rješavaju problem, a zatim uče o novom pojmu i postupcima. Ova metoda suprotna je direktnom podučavanju. Naziva se produktivni neuspjeh jer učenici prilikom rješavanja problema, za koji nemaju dovoljno znanja, mogu doživjeti neuspjeh. Istraživanja ([6],[7]) pokazuju kako je ova metoda vrlo korisna strategija u nastavi matematike. Svrha ove metode nije da učenici dožive neuspjeh tijekom rješavanja problema, već da učenici upotrijebe svoje ranije stečeno znanje da bi stvorili podrješenja ili pak netočna rješenja. Iako stvaranje rješenja može povećati kognitivno opterećenje, takve poteškoće zapravo pomažu pri pripremanju učenika na bolje učenje iz uputa koje slijede iz početnog rješavanja problema, a njih će dobiti od učitelja. Također, ovom metodom učenici razvijaju i ustrajnost, jer nastoje naći neko rješenje za dani problem, iako ne nalaze način da riješe problem. Još jedna od prednosti ove metode jest ta da se generiranjem rješenja prije poučavanja može pomoći učenicima da primijete nedosljednosti i granice svoga prethodnog znanja. Aktiviranjem prethodnoga znanja i razlikovanjem važnijih dijelova znanja od manje važnih, pomaže se učenicima u približavanju ključnih elementa novoga koncepta. Zaključno, produktivni neuspjeh objedinjuje prednosti istraživačkoga rješavanja problema i direktnog poučavanja te tim načinom ublažuje mogućnost od ne uspijevanja otkrivanja ispravnih koncepata i postupka kod učenika.

13.1 Nastava temeljena na produktivnom neuspjehu

Manu Kapur ([7]) provodio je istraživanja u kojima je utvrđivao i potvrđivao efikasnost produktivnog neuspjeha, a neke od tih istraživanja proveo je u Singapuru, državi poznatoj po snažnoj orijentaciji na uspjeh u matematici i testiranju matematičkoga znanja standardiziranim testovima. Rezultatima svojih istraživanja uvjerio je Ministarstvo obrazovanja u Singapuru da statistiku u školama poučavaju upravo na ovaj način. Sudionici u njegovim istraživanjima bili su učenici viših razreda osnovne škole i prvih razreda srednje škole. U jednom od eksperimenata M. Kapur opisuje kako organizirati nastavu temeljenu na produktivnom neuspjehu. M. Kapur je za istraživanje oformio dvije skupine, eksperimentalnu i kontrolnu. U eksperimentalnoj skupini, učenici su prvo imali fazu rješavanja problema, a onda je slijedila faza poučavanja. U kontrolnoj skupini, učenici su prvo imali fazu direktnog poučavanja, a zatim fazu rješavanja problema. Isti je učitelj pratio rad obje skupine. U obje su skupine materijali, vrijeme provedeno rješavajući problem te broj riješenih zadataka bili jednaki. Učenici su u fazi rješavanja problema morali generirati što više rješenja danoga problema. Zadani problem je bio povezan s standardnom devijacijom s kojom se učenici do tada nisu susreli. Rad je bio individualan, učenici su radili bez ikakve pomoći. Na praznim listovima A4 papira, koje su dobili, trebali su jasno numerirati i razgraničiti svoja rješenja, s obzirom da su se učenici oslanjali isključivo na svoje prethodno znanje za kreiranje rješenja, broj učenikovih rješenja uzimao se za mjeru njegovog prethodnog aktiviranja i diferencijacije znanja. U fazi poučavanja učitelj je poučavao koncept standardne devijacije (SD) i pripadne postupke, dok su učenici sjedili u učionici. Nastava je bila osmišljena oko četiri problema, uključujući primjere kojima se uvodi novi koncept, prikaz adekvatnih postupaka te učenikovo vježbanje i povratnu informaciju.

Rezultati ovog eksperimenta pokazali su da obje strategije, i direktno poučavanje i produktivni neuspjeh, dovode do visoke razine proceduralnog znanja, no da su učenici koji su prvo rješavali problem, a zatim učili novi koncept standardne devijacije pokazali su značajno veće konceptualno znanje i sposobnost transfera znanja na novi problem. Također, rezultati studija pokazali su kako se strategija produktivnog neuspjeha može organizirati i u suradničkom obliku, a ne samo u individualnom ([6]).

Također, važan je i Kapurov kvazi-eksperiment u kojem odabir učenika nije bio slučajan, nego je proučavao tri paralelna razredna odjeljenja, koji su imali istog učitelja matematike. U jednom razrednom odjeljenju podučavalo se metodom produktivnog neuspjeha, zatim, u drugom metodom direktnog podučavanja, a u trećem razredu metodom vođene istraživačke nastave. Učenici koji su podučavani produktivnim neuspjehom nisu imali nikakav oblik podrške ili vodstva pri rješavanju problema, dok su oni učenici koji su bili podučavani vođenom istraživačkom nastavom dobili kognitivnu podršku te vođenje tijekom cijelog procesa. Rezultati post-testa, kojim je testirano matematičko znanje učenika iz sva tri razredna odjeljenja, pokazali su da su učenici koji su podučavani produktivnim neuspjehom postigli bolje rezultate od učenika podučavanih s ostale dvije metode.

14 Računalni algebarski sustavi

Računalni algebarski sustavi odnose se na numeričke ili simboličke matematičke softverske programe. Postoji mnogo primjera takvih programa, a neki od njih su: Mathematica, TI-Nspire i SINGULAR. Glavna svrha ovih programa je pojednostavljenje nezgrapnih algoritama, no također mogu poboljšati i učenje pojedinih koncepata. Neke su studije pokazale da učenici koji koriste računalne algebarske sustave pri učenju matematike nadmašuje učenike koji su bili izloženi samo tradicionalnim metodama. Na primjer, Palmiter ([4]) je proučavao uspješnost studenata na nastavi integralnog računa sa i bez korištenja računalnih algebarskih sustava. Rezultati njegovih studija pokazali su da su studenti koji su koristili MACSYMA računalni algebarski sustav nadmašili studente poučavane tradicionalnim metode na konceptualnim i računskim zadacima. Heid i Edwards ([4]) nude četiri moguće uloge računalnih algebarskih sustava unutar učenja matematike: generiranje simboličkih rezultata, generiranje simboličkih postupaka, traženje uzorka iz generiranja više primjera i generiranje rezultata pri apstraktnom rješavanju problema. Mogućnosti računalnih algebarskih sustava smanjuju količinu vremena koje bi studentima trebalo za izračunavanje odgovora i povećaju količinu vremena koje mogu provesti praveći nagađanja i usredotočujući se na velike ideje iz matematike. Kako se tehnologija nastavlja razvijati sve većom brzinom, uloga računalnih algebarskih sustava nastavit će utjecati na poučavanje i učenje matematike.

15 Uvjerenja/stavovi

Uvjerenja/stavovi tiču se načela, interesa i gledišta koji se formiraju pri susretu s različitim fenomenima i koji utječu na to kako se tim fenomenima pristupa. Proučavanje uvjerenja/stavova ima dugu povijest u matematičkom obrazovanju. Pri ocjenjivanju stavova o matematici može se koristiti i Likertova ljestvica, koja je najčešće primjenjivana ljestvica za mjerenje stavova. Likertova ljestvica sastoji se najčešće od 15 do 20 tvrdnji na koje se odgovara s pozitivnim ili negativnim stavom. U jednoj od temeljnih studija o postignućima učenika i stavovima o matematici, Fennema i Sherman ([4]) otkrili su značajne razlike među spolovima u stavovima prema matematici iako nisu pronađene značajne razlike između postignuća muškaraca i žena.

16 Vrednovanje u nastavi matematike

Vrednovanje u nastavi matematike uključuje mjerenje i vrednovanje učenika formalnim sredstvima (npr. kvizovi, ispiti), kao i neformalnim postupcima (npr. razgovori s učenicima). Organizirani prema namjeni. Postoje tri kategorije vrednovanja u matematici: formativno vrednovanje, sumativno vrednovanje i progresivno vrednovanje ([4]).

U području matematičkog obrazovanja, svako vrednovanje uključuje odlučivanje o tome koji su dokazi su odgovarajući i pokazuju razumijevanje matematičkog pojma i postupaka, kako prikupiti informacije od učenika koji uče matematički pojam ili postupak, te kako tumačiti i na odgovarajući način priopćiti rezultate procjene. Ove odluke se donose u svrhu vrednovanja učenika tijekom procesa učenja.

16.1 Vrste vrednovanja u nastavi matematike

16.1.1 Formativno vrednovanje

Procjene koje su formativnog tipa obično se koriste za pomoć u procesu učenja. Njegova je svrha pomoći učeniku i učitelju da shvate koliko učenici razumiju gradivo. Dobivenim se informacijama koristi učenik kako bi poboljšao učenje, ali i učitelj kako bi poboljšao podučavanje. To je iznimno korisna karakteristika za poboljšanje učeničkih postignuća i motivacije. Zbog toga ovaj način vrednovanja nema izrečene numeričke vrijednosti. Primjer formativnog vrednovanja, može biti izlazna kartica kojom u završnom dijelu sata provjeravamo ostvarenost ishoda učenja.

Primjer formativnog vrednovanja:

Izlazna kartica – linearna funkcija

Funkciju oblika $f(x) = ax + b$, gdje su a i b realni brojevi uz uvjet da je $a \neq 0$, zovemo __________________________. Realni brojevi a i b su koeficijenti: a je ________________, a b ____________________.

Graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$ je __________ čija je jednadžba _________________.
U jednadžbi pravca $y = ax + b$ realni broj a nazivamo _____________________, a realni broj b ______________________.

Za $b = 0$ pravac ima jednadžbu $y = ax$ i on prolazi _________________.

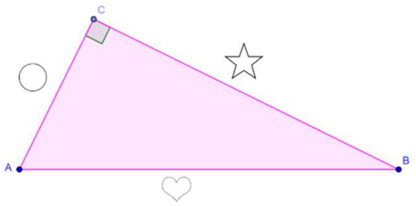
Funkcija $f(x) = ax + b$ ___________ za $a > 0$ i ____________ za $a < 0$.

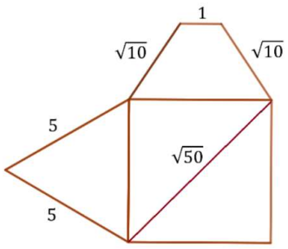
Nul-točka funkcije je vrijednost x_0 za koju je ____________.

16.1.2 Sumativno vrednovanje

Procjene koje su sumativnog tipa koriste se na temelju profesionalne procjene učitelja o razumijevanju učenika. Sumativne ocjene daju numerički prikaz znanja učenika na kraju određene nastavne jedinice, cjeline ili određenog razdoblja, za razliku od formativnog vrednovanja. Sumativno vrednovanje može se provoditi pomoću pisanih i usmenih provjera, rada na projektima, izlaganja i dr.

Primjer sumativnog vrednovanja:

Pisana provjera znanja: Pitagorin poučak	
1. a) Napiši formulu Pitagorina poučka za trokut na slici. 	MK: /1 bod
Matematička komunikacija *Razina ostvarenosti:* dobra	
b) Ako je  = 290 mm, a  = 21 cm, izračunaj  .	MK: /3 boda
Matematička komunikacija *Razina ostvarenosti:* zadovoljavajuća	
2. Širina pravokutnika iznosi 1.2 cm, a duljina njegove dijagonale je 20 mm. Izračunaj površinu tog pravokutnika.	RP: /2 boda MK: /3 boda
Rješavanje problema *Razina ostvarenosti:* zadovoljavajuća ***Matematička komunikacija*** *Razina ostvarenosti:* dobra	
3. Izračunaj površinu i opseg jednakostraničnog trokuta čija je visina dugačka $\sqrt{75}$ dm.	RP: /4 boda MK: /3 boda
Rješavanje problema *Razina ostvarenosti:* vrlo dobra ***Matematička komunikacija*** *Razina ostvarenosti:* vrlo dobra	

4. Izračunaj površinu lika sa slike. 	RP: /7 boda MK: /4 boda
Rješavanje problema *Razina ostvarenosti:* iznimna ***Matematička komunikacija*** *Razina ostvarenosti:* iznimna	

RAZINE OSTVARENOSTI
ZADOVOLJAVAJUĆA • Računa duljinu nepoznate stranice pravokutnoga trokuta pomoću Pitagorinoga poučka. • Opisuje postupak matematičkim jezikom.
DOBRA • Izriče Pitagorin poučak i zapisuje matematičkim jezikom. • Primjenjuje Pitagorin poučak za računanje nepoznatih elemenata kvadrata i pravokutnika.
VRLO DOBRA • Primjenjuje Pitagorin poučak za računanje nepoznatih elemente trokuta i romba. • Primjenom obrata Pitagorinoga poučka istražuje i otkriva postojanje pravokutnoga trokuta.
IZNIMNA • Bira strategije za pojednostavljivanje algebarskih izraza u svrhu prikazivanja veličina proizašlih iz primjene Pitagorinoga poučka matematičkim formulama.

Prikazanom pisanom provjerom znanja učenici mogu biti ocijenjeni s dvijema ocjenama. Jednu ocjenu čini Matematička komunikacija, a drugu Rješavanje problema. Bodovna skala za oba elementa vrednovanja dana je u slijedećoj tablici.

BODOVNA SKALA
Rješavanje problema
12 - 14 izvrstan (5)
10 - 11 vrlo dobar (4)
8 - 9 dobar (3)
6 - 7 dovoljan (2)
0 - 5 nedovoljan (1)
Matematička komunikacija
13 - 14 izvrstan (5)
11 - 12 vrlo dobar (4)
8 - 10 dobar (3)
5 - 7 dovoljan (2)
0 - 4 nedovoljan (1)

16.1.3 Progresivno vrednovanje

Zamagljuje granice između formativnog i sumativnog vrednovanja. U idealnom slučaju, ova vrsta vrednovanja služi formativno učeniku i učitelju, ali se također može koristiti i kao sumativno vrednovanje.

Zaključak

Diplomski rad „Mali rječnik matematičkog obrazovanja“, rad je u formi rječnika s abecedno poredanim pojmovima. Svi pojmovi su detaljno opisani, a pojmovi koji bi za učitelje mogli biti od velikog značaja, odnosno, pojmovi ekvivalencije, generalizacije, kreativnosti, kognitivnog zahtjeva, nastave temeljene na produktivnom neuspjehu te vrednovanja u nastavi matematike detaljno su prikazani pomoću konkretnih primjera, slika i ideja primjenjivih u svakodnevnoj nastavi. Na taj način učitelji mogu poboljšati svoje dosadašnje izvođenje nastavnog sata ili ga samo obogatiti novim interesantnim primjerima koji će kod djece izazvati bolje razumijevanje i veću zainteresiranost za nastavne teme. Kao što je već u samom radu rečeno matematika je znanost apstraktnih objekata, stoga se može zaključiti da kod učenika treba težiti razvitku algebarskog mišljenja, a to se najbolje razvija primjenom nekih od, u radu, opisanih pojmova. Primjerice, traženjem od učenika da među mnogim primjerima nađu sličnosti i razlike kod učenika se razvija shvaćanje ekvivalentnih pojmova, a to je od iznimne važnosti jer postoji mnoštvo apstraktnih matematičkih pojmova nastalih identificiranjem ekvivalenata. Jedan takav je, primjerice, kardinalni broj skupa. Također, ukoliko se u nastavu uvedu primjeri generalizacije učenici će naučiti primjenjivati opće na posebnom i iz općeg izvesti posebno, a takav način razmišljanja može biti presudan za daljnje bavljenje matematikom. Učenicima treba postavljati izazove, a ne servirati im gotove algoritme za rješavanje zadataka, stoga bi učitelji zadatke niže kognitivne razine trebali pretvoriti u izazovnije zadatke više kognitivne razine, kao i primjenjivati nastavu temeljenu na kognitivnom konfliktu. A kao najvažniji pojam za bavljenje mnogim područjima ljudskog djelovanja može se izdvojiti kreativnost. Stoga se zaključuje da kreativnost u matematici, također, zauzima veliku važnost. Cilj matematike nije reproduciranje naučenih algoritama i davanje točnog rješenja nego razvitak logičkog, matematičkog i kreativnog načina razmišljanja.

Literatura

[1] A. Bell, *Some experiments in diagnostic teaching*, Educational Studies in Mathematics, 24(1993), 115–137.

[2] T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi,*Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*, Heinemann, Portsmouth, 2003.

[3] M. DeCaro, B. Rittle-Johnson, *Exploring mathematics problems prepares children to learn from instruction* Journal of Experimental Child Psychology, 113(2012), 552–568.

[4] S. W. Dingman, L. B. Kent, K. K. McComas, C. C. Orona, *The Language of Mathematics Education: An Expanded Glossary of Key Terms and Concepts in Mathematics Teaching and Learning*, Brill Sense, Leiden, 2019.

[5] D. Haylock, F. Thangata, *Key Concepts in Teaching Primary Mathematics*, Sage Publications, Trowbridge, 2007.

[6] M. Kapur, *Productive failure in mathematical problem solving*, Instructional Science, 38(2010), 523–550.

[7] M. Kapur, *A further study of productive failure in mathematical problem solving: unpacking the design components*, Instructional Science, 39(2011), 561–579.

[8] J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton, *Algebra in the early grades*, Routledge, New York, 2017, 27-40.

[9] I. Mišurac- Zorica, M. Cindrić, *Prednosti diskusije i kognitivnog konflikta kao metode rada u savremenoj nastavi matematike*, Zbornik instituta za pedagoška istraživanja, 44 (2012), 92-110.

[10] J. Piaget, *The Development of Thought: Equilibration of Cognitive Structures*, Viking Press, New York, 1977.

[11] M. Swan, *Collaborative learning in mathematics*, 2006,
`http://twittermathcamp.pbworks.com/w/file/fetch/98345576/Collaborative%2520 Learning%2%2520520inMathematics.pdf`

[12] M. Swan, *Improving learning in mathematics: Challenges and strategies*, Department for Education and Skills Standards Unit, 2005.

[13] H. Tanner, S. Jones, *Becoming a successful teacher of mathematics*, Routledge, London, 2000.

Sažetak

Matematičko obrazovanje složeni je proces u kojemu sudjeluju i učitelji i učenici. Pošto matematiku možemo promatrati kao znanost apstraktnih objekata njezino učenje temelji se na otkrivanju novih obrazaca, stoga je važno, u procesu učenja matematike, kod učenika podupirati razvoj apstraktnog mišljenja kroz generalizaciju, uočavanje ekvivalentnosti i kreativnost. Iako mnogi matematiku i kreativnost smatraju nespojivim pojmovima, kreativnost u matematici ima važnu ulogu u razbijanju uvjerenja da znanje matematike uključuje primjenu strogo definiranih pravila te da je cilj učenja matematike reproduciranje tih pravila. Svaki učitelj trebao bi težiti da svojim učenicima omogući što bolje razumijevanje nastavnih sadržaja, u tu svrhu učitelj može provoditi akcijska istraživanja, kojima može procijeniti znanje svojih učenika i kvalitetu svoje nastave. Također, za postizanje više razine razumijevanja kod svojih učenika, učitelj u svoju nastavu može uključiti neku od slijedećih metoda: aktivno podučavanje, direktno podučavanje, nastavu temeljenu na produktivnom neuspjehu, primjenjivati zadatke više kognitivne razine ili upotrebljavati računalske algebarske sustave koji olakšavaju provođenje složenih matematičkih računa i omogućuju bolje razumijevanje određenih matematičkih koncepata. Kako u ničemu ne treba pretjerivati, odnosno sve matematičke metode treba podjednako provoditi, tako je i s vrednovanjem u matematici, odnosno treba podjednako provoditi formativno, sumativno i progresivno vrednovanje.

Ključne riječi: obrazovanje, ekvivalecija, apstraktno mišljenje, generalizacija, kreativnost, vrednovanje.

Summary

Mathematics education is a complex process in which both teachers and students participate. Since mathematics can be viewed as the science of abstract objects, its learning is based on discovering new patterns, so it is important, in the process of learning mathematics, to support the development of abstract thinking through generalization, perception of equivalence and creativity. Although many consider mathematics and creativity to be incompatible concepts, creativity in mathematics plays an important role in breaking the belief that knowledge of mathematics involves the application of strictly defined rules and that the goal of learning mathematics is to reproduce those rules. Every teacher should strive to provide their students with the best possible understanding of the teaching content, for this purpose the teacher can conduct action research, which can assess the knowledge of their students and the quality of their teaching. Also, to achieve a higher level of understanding in their students, the teacher may include in his teaching one of the following methods: active teaching, direct teaching, teaching based on productive failure, apply higher cognitive tasks or use computer algebraic systems that facilitate complex mathematical calculations and allow a better understanding of certain mathematical concepts. As nothing should be exaggerated, i.e. all mathematical methods should be implemented equally, so is the case with evaluation in mathematics, i.e. formative, summative and progressive evaluation should be implemented equally.

Keywords: education, equivalence, abstract thinking, generalization, creativity, assessment.

Životopis

Rođena sam 29. lipnja 1997. godine u Osijeku. Svoje obrazovanje započela sam 2004. godine u Osnovnoj školi Franje Krežme u Osijeku, koju sam pohađala do 2012. godine. Sve razrede osnovne škole završila sam s odličnim uspjehom, a sudjelovala sam i na školskim i županijskim natjecanjima iz fizike i kemije. Nakon završene osnovne škole 2012. godine upisujem Isusovačku klasičnu gimnaziju s pravom javnosti u Osijeku koju 2016. godine završavam s odličnim uspjehom. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sam sudjelovala također na raznim natjecanjima. Završetkom srednjoškolskog obrazovanja, 2016. godine upisujem Sveučilišni integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.