Euklid

Matić, Marina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marina Matić

Euklid

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marina Matić

Euklid

Diplomski rad
Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2016.

Sadržaj

1 Uvod

Postoje dvije legende o Euklidu. Prva kaže kako je Ptolomej pitao Euklida postoji li jednostavniji način učenja geomerije osim onoga kroz *Elemente*, a on je odgovorio: „Ne postoji kraljevski put do geometrije“. Druga legenda kaže da je jedan učenik nakon učenja prvog teorema pitao Euklida što će dobiti učeći te stvari. Euklid je tada rekao svom robu: „Daj tom učeniku novčić jer on mora ostvariti dobit iz onoga što uči“.

Ptolomej I. Soter bio je makedonski vojskovođa u vojsci Aleksandra Velikog, koji je nakon smrti Aleksandra 323. godine prije Krista zavladao Egiptom, a živio je do 283. godine prije Krista. Iz Proklosovih citata, koji sežu iz doba Ptolomeja I., pretpostavlja se da je Euklid doživio procvat oko 300. godine prije Krista. Većina povjesničara vjeruje da je Euklid bio jedan od prvih učenjaka aktivnih u Aleksandrijskom Muzeju i Knjižnici, koje su osnovali Ptolomej I. Soter i njegov nasljednik Ptolomej II. Filadelf. „Muzej“ ovdje znači „hram muza“, odnosno to je mjesto gdje su se učenjaci sastajali i raspravljali o filozofskim i književnim idejama. Muzej je bio preteča modernog sveučilišta. U njemu su učenici živjeli o državnom trošku. Vladari Egipta nadali su se da će na taj način privući istaknute ljude iz cijelog grčkog svijeta. Zapravo, Muzej i Knjižnica ubrzo su postali žarište najvećih događaja u grčkim znanostima, kako u humanističkim tako i u prirodnim. Učenjaci su se u početku bavili istraživanjima, a budući da su se i mlađi učenici okupljali, ubrzo su počeli i poučavati. Cilj Knjižnice bio je prikupiti cijelo tijelo grčke književnosti u najboljim raspoloživim primjercima i sustavno ih organizirati. Ptolomej III., koji je vladao od 247. do 221. godine prije Krista, posudio je iz Atene originalne tekstove dramatičara Eshila, Sofokla i Euripida, i to bez velikog pologa. No, umjesto da vrati originale, vratio je samo kopije tekstova koje je posudio. Bio je spreman ostati bez pologa. Knjižnica je u konačnici sadržavala više od 500 000 svezaka iz svih znanstvenih područja. Iako su dijelovi Knjižnice uništeni u raznim ratovima, neki dijelovi su ostali netaknuti sve do četvrtog stoljeća.

2 Euklidov život i djela

Prije nego što je Muzej otišao u zaborav, dao je mnoge istaknute znanstvenike, koji su odredili tijek matematike za mnoga stoljeća: Euklid, Arhimed, Eratosten, Apolonije, Papus, Klaudije Ptolomej i Diofant. Najistaknutiji među njima je bio Euklid. Svima je poznat kao autor *Elemenata*, najstarije grčke rasprave o matematici.

Iako Euklidova slava, kako u antici tako i u modernim vremenima, počiva gotovo isključivo na *Elementima*, bio je autor najmanje deset drugih radova koji pokrivaju širok raspon tema. Grčki tekst njegovih *Podataka*, zbirka od 95 zadataka je, osim *Elemenata*, jedini njegov tekst o čistoj geometriji koji je preživio.

Kao i kod drugih velikih matematičara antičke Grčke, znamo iznimno malo o Euklidovu osobnom životu. Znamo sigurno da je osnovao školu i podučavao u Aleksandriji. Komentator Proklos rekao je da je Euklid živio u vrijeme vladavine Ptolomeja I., što bi značilo da je bio aktivan u prvoj polovici trećeg stoljeća prije Krista. Vjeruje se da je matematičko znanje stekao u Ateni od Platonovih učenika.

Slika 1: Euklid

3 Uvod u *Elemente*

Euklidovo djelo *Elementi* najvažniji je matematički tekst grčkog doba, a vjerojatno i svih vremena. Pojavilo se u više izdanja nego bilo koji drugi rad, osim Biblije te je prevedeno na mnogo različitih jezika. Euklid je bio svjestan da određene činjenice o prirodi predmeta treba pretpostaviti bez dokaza da bi se izbjegla cirkularnost. Te pretpostavljene izajve, iz kojih se sve druge zaključuju ili izvode kao logičke posljedice, nazivaju se „aksiomi" i „postulati". Euklid je pokušao izgraditi cijeli kompleks grčkog znanja iz geometrije, skupljenog od Talesovog vremena, na pet postulata geometrijske prirode i pet aksioma, koji predstavljaju opće činjenice.

Modernom čitatelju djelo je nevjerojatno dosadno jer nema primjera, motivacije, dosjetki niti računanja. Ipak, knjiga je intenzivno proučavana. Životopisi mnogih poznatih matematičara pokazuju da ih je upravo Euklidovo djelo potaknulo da postanu matematičari. Iz njega su naučili kako „čista matematika" treba biti napisana s dobro osmišljenim aksiomima, preciznim definicijama, pomno navedenim teoremima i logički povezanim dokazima. Iako su postojale starije verzije *Elemenata* prije Euklidovih, njegovo je djelo jedino preživjelo te je „kompletno" i dobro organizirano.

Euklid je *Elemente* napisao u trinaest knjiga prije otprilike 2300 godina. Međutim ne postoje njegove kopije iz tog vremena. Najraniji postojeći odlomci datiraju od oko 225. godine prije Krista. Na njima su napisane bilješke o dvjema propozicijama iz trinaeste knjige i dio papirusa koji sadrži dijelove iz druge knjige, koja datira od oko 100. godine prije Krista. Od Euklidovog vremena redovito su pisane kopije njegovog djela. Razni sastavljači i prepisivači su unosili svoje primjedbe i poboljšanja. Konkretno, Teon Aleksandrijski, koji je djelovao u četvrtom stoljeću poslije Krista, dao je jedno važno novo izdanje. Većina sačuvanih rukopisa Euklidovih *Elemenata* su kopije tog izdanja. Najranija takva kopija sada je u Bodleian Library u Oxfordu, a datira iz 888. godine. Postoji, međutim, jedan rukopis iz desetog stoljeća u Vatikanskoj knjižnici, koji nije kopija Teonovog izdanja, nego ranije verzije. Iz detaljne usporedbe ovog rukopisa i nekoliko starih kopija Teonove verzije, danski je matematičar J. L. Heiberg 1880. godine sastavio konačnu grčku verziju *Elemenata*, koju smatra najsličnijom originalu. Mi ćemo se u radu orjentirati na teme iz engleskog prijevoda Heibergove grčke verzije.

U prvih šest knjiga sadržana je relativno kompletna obrada dvodimenzionalnih geometrijskih veličina dok se sedma, osma i deveta knjiga bave teorijom brojeva u skladu s Aristotelovim učenjem da treba odvajati proučavanje veličina od proučavanja brojeva. Zapravo, Euklid uvodi dvije potpuno odvojene obrade teorije proporcije tako što u petoj knjizi obrađuje veličine, a u sedmoj brojeve. U desetoj knjizi Euklid uvodi pojmove sumjerljivosti i nesumjerljivosti te pokazuje da se, s obzirom na razmjere, razmjerne veličine mogu tretirati kao da su brojevi. U nastavku knjige je predstavljena podjela nekih nesumjerljivih veličina. Euklid se, nadalje, u jedanaestoj knjizi bavio trodimenzionalnim geometrijskim objektima, a u dvanaestoj knjizi metodom ekshaustije primjenjenom na dvodimenzionalne i na trodimenzionalne objekte. Konačno, u trinaestoj knjizi konstruirao je pet pravilnih poliedara te je svrstao neke od redaka koji su uvedeni u skladu s njegovom organizacijom desete knjige.

Korisno je napomenuti da je velik dio starije matematike iz Egipta i Mezopotamije u nekom obliku uključen u Euklidovo remek-djelo, s izuzetkom suvremene metode aritmetičkog računanja. Metodologija je, međutim, sasvim drugačija. Naime, matematika u ranijim kulturama uvijek uključuje brojeve i mjere te ističe numeričke algoritme za rješavanje različitih problema. No, iz Euklidove matematike je aritmetika potpuno isključena. On nigdje u radu ne koristi numeriku, osim nekoliko malih cijelih brojeva. Isključeno je i mjerenje. Različiti geometrijski oblici se uspoređuju, ali ne pomoću numeričkih mjera. Nema lakta, koji predstavlja drevnu mjeru dužine približno jednaku duljini podlaktice, nema jutra, koji označuje jedinicu površine i nema stupnjeva. Jedina mjera za kutove je pravi kut.

Deset načela zaključivanja, na kojima se temelje dokazi u *Elementima*, Euklid je uveo na sljedeći način:

Postulati:

Neka se postulira:

1. Da se od svake točke do svake druge točke povlači dužina.
2. Da se svaka dužina može produžiti na svaku svoju stranu po volji daleko.
3. Da se oko svakog središta sa svakim polumjerom može opisati kružnica.
4. Da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.
5. Da će se, ako jedan pravac u presjeku sa druga dva pravca tvori s njima s iste strane dva unutarnja kuta, čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta dva pravca dovoljno produžena sjeći, i to s one strane prvog pravca na kojoj se nalaze spomenuti kutovi.

Opće činjenice (aksiomi):

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.
2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.
3. Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostaci su jednaki.
4. Stvari koje se jedna s drugom podudaraju međusobno su jednake.
5. Cjelina je veća od dijela.

Peti postulat, poznat kao Euklidov postulat o paralelama, postao je jedan od najpoznatijih i najkontroverznijih iskaza u povijesti matematike. Geometrijski stručnjaci, kojima je zasmetao postulat o paralelama, nisu mislili da njegov sadržaj nije matematička činjenica. Oni su samo smatrali da nije kratak, jednostavan i očit, kakvi bi postulati trebali biti; njegova složenost sugerirala je da bi trebao biti teorem, a ne pretpostavka. Gotovo od trenutka nastanka *Elemenata*, što se nastavlja i u devetnaestom stoljeću, matematičari su pokušavali postulat o paralelama izvesti iz prva četiri postulata, vjerujući da se iz ostalih aksioma euklidska geometrija mogla potpuno razviti. Svi ti pokušaji dokazivanja petog postulata su neuspješno završili jer se svaki pokušaj sastojao u pretpostavljanju nekog očitog svojstva, koje je zapravo ekvivalentno postulatu o paralelama. Iako nije ostvaren glavni cilj, trud tih matematičara doveo je do otkrića neeuklidske geometrije u kojoj vrijede svi Euklidovi aksiomi, osim postulata o paralelama i svi Euklidovi teoremi su istiniti, osim onih koji se temelje na postulatu o paralelama.

4 Knjiga I i Pitagorin poučak

Kao što je Aristotel rekao, na početku svakog znanstvenog rada trebale bi biti definicije i aksiomi. Na taj je način i Euklid napisao svoje knjige. Prva knjiga *Elemenata* počinje s popisom od 23 definicije, bez uvodnog komentara. To su, na primjer, definicija točke („ono što nema dijelova“) i definicija linije („ono što nema širine“). Popis definicija na kraju zaključuje da su paralelni pravci ravne linije, koje leže u istoj ravnini i koje se, neograničeno produžene u oba smjera, međusobno ne sijeku. To ne bismo trebali shvaćati kao definicije u suvremenom smislu riječi, nego kao naivne opise pojmova, koji se koriste u govoru. Neki formalni pojmovi koji se koriste, kao što je opseg kruga, nisu uopće definirani, dok neke druge pojmove, kao što je romb, možemo pronaći u definicijama, a nigdje se ne koriste u radu. Zanimljivo je da je Euklid definirao paralelne pravce, a nije dao formalnu definiciju paralelograma.

Odabrane definicije iz prve knjige Euklidovih *Elemenata*:

1. Točka je ono što nema dijelova.
2. Linija je duljina bez širine.
3. Krajevi linije su točke.
4. Pravac je linija koja jednako leži prema točkama na njoj.
5. Ploha je ono što ima samo duljinu i širinu.
6. Krajevi plohe su linije.
7. Ravnina je ploha koja jednako leži prema pravcima na njoj.
8. Kut u ravnini je nagib jedne linije prema drugoj, koje se međusobno dodiruju i ne leže na istom pravcu.
9. Kada su linije koje obuhvaćaju kut ravne, kut se naziva pravolinijski.
10. Kada pravac koji siječe drugi pravac čini međusobno jednake susjedne kutove, tada je svaki od jednakih kutova pravi, a za prvi pravac kažemo da je okomit na drugi.

15. Krug je lik u ravnini koji je obuhvaćen jednom linijom takvom da su sve dužine, koje padaju na nju iz jedne točke, od onih koje leže unutar lika, međusobno jednake.
16. Ta se točka naziva središtem kruga.
17. Promjer kruga je bilo koja dužina povučena kroz središte i ograničena s obje strane kružnicom kruga, a koja također raspolavlja krug.
18. Polukrug je lik obuhvaćen promjerom i njime odrezanom kružnicom. A središte polukruga je isto ono koje je središte kruga.

23. Paralelni pravci su pravci koji leže u istoj ravnini i koji se, neograničeno produženi u oba smjera, međusobno ne sijeku ni u jednom smjeru.

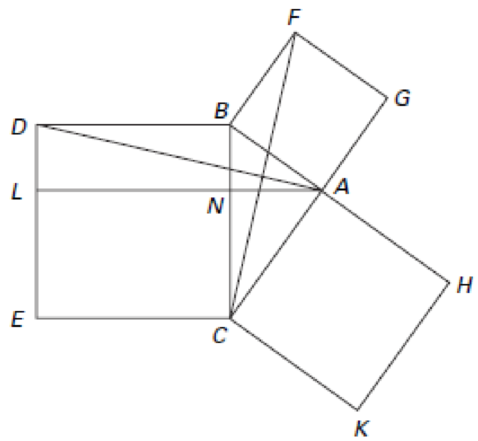
Osim definicija, Euklid je u prvu knjigu uveo već spomenutih pet postulata i pet aksioma. Potom je iz tih deset pretpostavki izveo logički lanac od 465 propozicija, dokazujući tvrdnje jedne iz drugih. Propozicije iz prve knjige, kojih je ukupno 48, uglavnom se bave svojstvima pravaca, trokuta i paralelograma, odnosno onim što danas nazivamo elementarnom geometrijom ravnine. Čitajući prvu knjigu ispočetka, nikad ne znamo što će se sljedeće dogoditi. Tek kad dođemo do kraja knjige, gdje je Euklid dokazao Pitagorin poučak, shvaćamo da je osnovna svrha ove knjige doći do dokaza tog rezultata. Stoga, kako bismo shvatili razloge uvođenja različitih teorema, raspravu o prvoj knjizi počinjemo s Pitagorinim poučkom i njegovim obratom. To nam također omogućuje da vidimo zašto se neki nedokazani rezultati, odnosno aksiomi, moraju pretpostaviti.

Pri razmatranju Euklidovog djela treba imati na umu da on u svojim dokazima nije koristio silogizam. Njegovi su dokazi pisani prirodnim jezikom te on općenito koristi propozicionalnu logiku. Nadalje, Euklid uvijek pretpostavlja da ako je dokazao da rezultat vrijedi za određenu konfiguraciju, koja predstavlja pretpostavke teorema i koja je prikazana na skici, onda je dokazao i rezulat općenito. Na primjer, što ćemo vidjeti i kasnije, on je Pitagorin poučak dokazao tako što je crtao neke linije i označavao neke točke na određenom pravokutnom trokutu, zatim je tvrdio da rezultat vrijedi za taj trokut i nakon toga zaključio da vrijedi za bilo koji pravokutni trokut. Naravno, kada matematičari danas koriste tu strategiju, oni je temelje na jasnim idejama matematičke logike. Euklid, naprotiv, nikada nije objašnjavao svoju filozofiju dokaza. Čini se da je ponekad ovisio o skici više nego što bi suvremeni matematičari to dopustili.

Sada možemo navesti Euklidovu verziju Pitagorinog poučka:

Propozicija I-47. *U pravokutnom trokutu je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.*

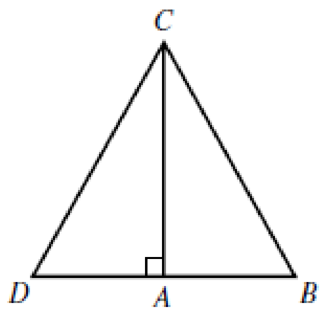
Euklid je dokazao teorem za trokut ABC, najprije konstruiranjem pravca AL, koji je paralelan s BD i koji siječe stranicu $\overline{DE}$ kvadrata nad hipotenuzom u točki L. Nakon toga je pokazao da je pravokutnik s dijagonalom $\overline{BL}$ jednak kvadratu nad katetom $\overline{AB}$ te da je pravokutnik s dijagonalom $\overline{CL}$ jednak kvadratu nad katetom $\overline{AC}$ (Slika 2). Da bi postigao prvu jednakost, Euklid je spojio točke A i D te točke C i F, i tako dobio trokute ADB i CBF.



Slika 2: Propozicija I-47

Zatim je pokazao da su ta dva trokuta jednaka, da je pravokutnik s dijagonalom $\overline{BL}$ dvostruko veći od trokuta ABD te da je kvadrat nad katetom $\overline{AB}$ dvostruko veći od trokuta CBF. Iz toga slijedi prva jednakost. Druga jednakost dokazana je analogno, a iz zbroja tih dviju jednakosti slijedi tvrdnja poučka, jer prema drugom aksiomu vrijedi da kada jednakim stvarima dodamo jednake stvari, i cjeline su jednake.

Nakon Pitagorinog poučka odmah slijedi i dokaz njegovog obrata: Ako je u trokutu ABC kvadrat nad jednom stranicom (recimo $\overline{BC}$) jednak zbroju kvadrata nad drugim dvjema stranicama, onda je kut između tih dviju stranica pravi. Kako bi dokazao obrat, Euklid je konstruirao pravokutan trokut sukladan danom trokutu. Naime, postupak se sastoji od postavljanja dužine $\overline{AD}$ koja je okomita na $\overline{AC}$ i čija je duljina jednaka duljini stranice $\overline{AB}$. Iz pretpostavke vrijedi $|\overline{AC}|^2 + |\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}|^2$, a Pitagorin poučak, primjenjen na trokut CAD, povlači da je $|\overline{AD}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{DC}|^2$. Budući da je $|\overline{AD}| = |\overline{AB}|$, onda je $|\overline{BC}|^2 = |\overline{CD}|^2$, pa je $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$. Iz toga slijedi da su trokuti CAD i CAB sukladni jer su im odgovarajuće stranice sukladne. Dakle, kut CAB jednak je pravom kutu CAD.

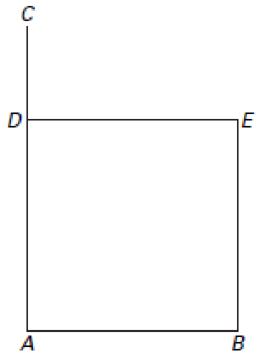


Slika 3: Obrat Pitagorinog poučka

Ovdje moramo razumjeti što je Euklid mislio pod tvrnjom da su dva lika u ravnini jednaka. Očito je mislio da likovi zauzimaju „jednak prostor“, no nigdje nije definirao taj pojam, niti je računao površinu. Njegova alternativa uglavnom je rastaviti cjelinu na dijelove i pokazati da su pojedini dijelovi, u stvari, identični. Taj postupak je opravdan četvrtim aksiomom, prema kojemu su stvari koje se podudaraju jednake. Kasnije ćemo to razmatrati detaljnije. Prvo moramo vidjeti koji rezultati su nam potrebni da bismo došli do Euklidovog dokaza Pitagorinog poučka. Za početak, naravno, trebamo znati kako konstruirati kvadrat nad danom dužinom. Uz to, u teoremu je naveden odnos između određenih kvadrata. Stoga dolazimo do

Propozicija I-46. *Nad danom dužinom konstruirati kvadrat.*

Ova konstrukcija može se izvesti na mnogo različitih načina pa je Euklid morao izabrati jedan od njih. Započeo je konstrukcijom okomice AC na danu dužinu $\overline{AB}$ te određivanjem točke D na AC, takve da je $|\overline{AD}| = |\overline{AB}|$. Zatim je konstruirao pravac kroz točku D paralelan s $\overline{AB}$ i paravac kroz B paralelan s $\overline{AD}$, a njihovo sjecište označio s E. Potom je tvrdio da je dobiveni četverokut $ADEB$ traženi kvadrat (Slika 4). Kako bi došao do tog četverokuta morao je znati konstruirati pravce paralelne i okomite danom pravcu, što je prikazano u Propoziciji I–11 i I–31, a trebao je znati i kako se manja dužina prenosi na veću, što je dano u Propoziciji I–3. Da bi dokazao svoju tvrdnju, Euklid je krenuo sa činjenicom da četverokut $ADEB$ ima dva para paralelnih stranica, odnosno da je paralelogram. Pa su mu, prema Propoziciji I–34, nasuprotne stranice jednake. Iz toga slijedi da su sve četiri stranice paralelograma $ADEB$ jednake. Kako bi pokazao da se radi o kvadratu, nakon navedenih zaključaka, preostalo mu je još pokazati da su svi kutovi pravi. Pravac AD siječe dva paralelna pravca, AB i DE. Dakle, prema Propoziciji I–29, dva unutrašnja kuta s iste strane, naime, kutovi BAD i ADE, jednaki su dvama pravim kutovima. Budući da već znamo da je kut BAD pravi kut, onda je i kut ADE pravi. A kako su, prema Propoziciji I–34, nasuprotni kutovi u paralelogramu jednaki, sva četiri kuta su prava pa je četverokut $ADEB$ kvadrat.



Slika 4: Propozicija I-46

Dakle, iako je stvarna konstrukcija kvadrata prilično očita, dokaz da je ona točna zahtjeva korištenje mnogih drugih propozicija. Prije nego što pogledamo neke od njih, vratit ćemo se na glavni teorem i vidjeti što nam je još potrebno.

Prvi rezultat potreban za dokazivanje Pitagorinog poučka je tvrdnja koja je Euklidu omogućila zaljkučivanje da su trokuti ADE i CBF jednaki. To slijedi iz poznatog stranica–kut–stranica (SKS) teorema, koji je Euklid dokazao u obliku

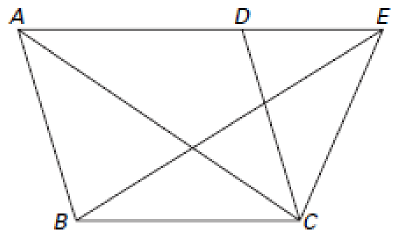
Propozicija I-4. *Ako dva trokuta imaju dvije odgovarajuće stranice jednake i ako su kutovi među njima jednaki, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Ovdje se riječ „sukladan“ koristi kao suvremena skraćenica izraza za Euklidov zaključak da je svaki dio jednog trokuta jednak odgovarajućem dijelu drugog. Euklid je dokazao ovaj teorem po superpoziciji. Naime, on je zamislio da je prvi trokut pomaknut iz svog prvobitnog položaja i postavljen na drugi trokut, tako da je jedna stranica postavljena na odgovarajuću jednaku stranicu drugog trokuta te da su jednaki kutovi također postavljeni jedan preko drugoga. Euklid je ovdje prešutno pretpostavio da je takvo pomicanje uvijek moguće bez deformacije. Matematičari devetnaestog stoljeća bili su spremni uzeti taj teorem kao postulat.

Nadalje, Euklidu je bio potreban i rezultat prema kojemu je pravokutnik dvostruko veći od trokuta s istom bazom i visinom. To proizlazi iz

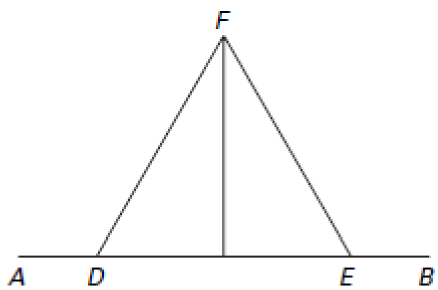
Propozicija I-41. *Ako paralelogram ima istu osnovicu s trokutom i ako leže između istih paralela, onda je paralelogram dva puta veći od trokuta.*

Budući da izraz „između istih paralela“ s današnjeg stajališta označava dva lika sa istom visinom, to bi nas moglo navesti na pomisao da ova propozicija slijedi iz formula za računanje površine trokuta i paralelograma, naime, iz $P = (1/2)bh$ i $P = bh$. Ali, kao što je i ranije spomenuto, Euklid nije koristio formule kako bi pokazao jednakost određenih likova, nego se služio rastavljanjem na dijelove. Dakle, ovdje je pokazao da se paralelogram može rastaviti na dva trokuta, oba jednaka danom trokutu. Na Slici 5 dani paralelogram je $ABCD$, a dani trokut je BCE. Euklid je nacrtao $\overline{AC}$, dijagonalu paralelograma, a zatim naveo da je, prema Propoziciji I–37, trokut ABC jednak trokutu BCE jer imaju istu osnovicu i leže između istih paralela. A Propozicija I–34 povlači da je paralelogram $ABCD$ dvostruko veći od trokuta ABC, stoga je dvostruko veći i od trokuta BCE.



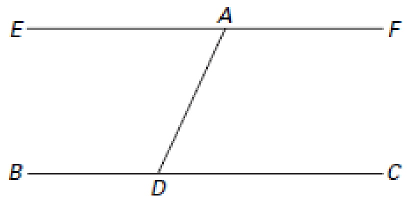
Slika 5: Propozicija I-41

Sjetimo se da je konstrukcija kvadrata zahtjevala konstrukciju oba, okomitog i paralelnog pravca, na dani pravac. Konstrukcija okomitog pravca (Propozicija I–11) počinje crtanjem jednakostraničnog trokuta DFE, u kojemu je središte C stranice $\overline{DE}$ točka kroz koju prolazi okomica (Slika 6). Konstrukcija jednakostraničnog trokuta objašnjena je u Propoziciji I–1, u kojoj je Euklid nacrtao kružnice polumjera $\overline{DE}$ sa središtima u točkama D i E, a zatim sa F označio sjecište tih dviju kružnica. Ta konstrukcija zahtjevala je korištenje šestara i jednobridnog ravnala. Naime, Euklid je trebao pretpostaviti da se kružnica može konstruirati s danim središtem i polumjerom te da se pravac može konstruirati kroz dvije točke, a to su pretpostavke iz prvog i trećeg postulata. No, čak i s ta dva postulata suvremeni komentatori su primjetili da postoji logički nedostatak u ovom dokazu. Kako je Euklid znao da se dvije kružnice, konstruirane oko krajnjih točaka dužine $\overline{DE}$, zaista sijeku? To se čini očito iz skice, ali bilo je potrebno uvesti postulat koji će osigurati „kontinuitet“ pravaca i kružnica. Taj je problem bio predstavljen u devetnaestom stoljeću, a i kasnije se raspravljalo o njemu. No, kad je trokut konstruiran, pravac kroz vrh F i središte C je tražena okomica. Kako bi to dokazao, Euklid je naveo da su trokuti DCF i ECF sukladni prema stranica-stranica-stranica (SSS) teoremu, koji je dokazan u Propoziciji I–8, superpozicijom, kao i SKS teorem.



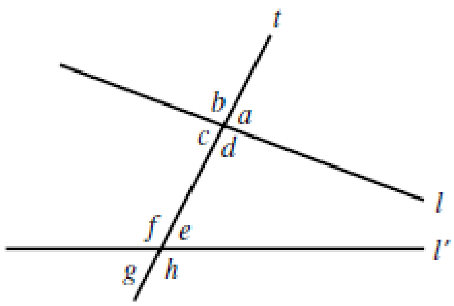
Slika 6: Propozicija I-11

Za konstrukciju pravca kroz danu točku A paralelnog s danim pravcem BC (Propozicija I–31), Euklid je odabrao proizvoljnu točku D na BC te spojio točke A i D (Slika 7). Zatim je, prema Propoziciji I–23, konstruirao kut DAE, jednak kutu ADC i produžio $\overline{AE}$ do dužine $\overline{AF}$. Pretpostavka da se dužina može produžiti dana je u drugom Euklidovom postulatu. Kako bi dokazao da je EF paralelan s BC, Euklid je naveo da su izmjenični unutarnji kutovi DAE i ADC jednaki. Prema Propoziciji I-27, ta dva pravca su paralelna.



Slika 7: Propozicija I-31

Da bismo precizno izrekli sljedeću propoziciju, najprije ćemo definirati potrebne pojmove. Pretpostavimo da pravac t, koji se naziva presječnica, siječe pravce l i l' u dvije različite točke A i B. Na Slici 8 kutovi c, d, e i f nazivaju se unutrašnji kutovi, dok su a, b, g i h vanjski kutovi. Uobičajen naziv, koji se koristi za par kutova c i e, odnosno d i f, je „izmjenični unutrašnji kutovi“, a za kutove b i h, odnosno a i g, se kaže da su „izmjenični vanjski kutovi“.

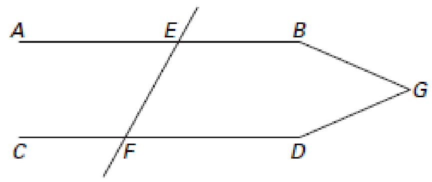


Slika 8: Presječnica paralelnih pravaca

Ovih osam kutova možemo grupirati i u četiri para odgovarajućih kutova; kutovi a i e čine jedan takav par odgovarajućih kutova, a isto tako i kutovi b i f, c i g te d i h. Uz ovu terminologiju možemo razmotriti sljedeću propoziciju.

Propozicija I-27. *Ako pravac siječe druga dva pravca i tvori s njima jednake izmjenične kutove, onda su ta dva pravca paralelna.*

Ovu propoziciju Euklid je dokazao kontradikcijom. To je važan oblik zaključivanja, koji se sastoji u pokazivanju da ako zaključak ne vrijedi, onda mora slijediti apsurd ili nemogući rezultat. Naime, pretpostavio je da, iako su izmjenični kutovi AEF i EFD, dobiveni presjekom pravca EF s pravcima AB i CD, jednaki, pravci AB i CD sami po sebi nisu paralelni (Slika 9). Prema tome, moraju se sjeći u točki G. Iz toga slijedi da je u trokutu EFG vanjski kut AEF jednak unutrašnjem kutu EFD. Ali to je u kontradikciji s Propozicijom I–16, pa je početna pretpostavka lažna i pravac AB je paralelan s CD.

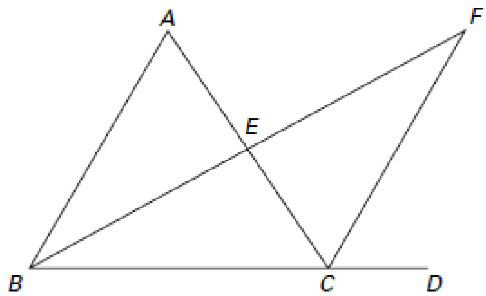


Slika 9: Propozicija I-27

To nas onda vodi natrag do

Propozicija I-16. *U svakom trokutu je vanjski kut dobiven produživanjem jedne stranice veći od svakog od dva nesusjedna unutarnja kuta.*

Produžimo stranicu $\overline{BC}$ trokuta ABC do točke D (Slika 10). Polovište stranice $\overline{AC}$ označimo sa E te spojimo E i B. Prema Euklidu se $\overline{BE}$ tada može produžiti do F tako da bude $|\overline{EF}| = |\overline{BE}|$. Nažalost, ne postoji postulat koji bi mu dopustio produljenje dužine za neku određenu duljinu. Naravno, ako je dana ta pretpostavka, onda je dokaz jasan. Spojimo točke F i C te pokažemo da su trokuti ABE i CFE sukladni. Dakle, kut BAE jednak je kutu ECF, ali kut ECF je dio vanjskog kuta ACD pa je taj vanjski kut veći od kuta BAE. Posljednja izjava također zahtjeva postulat, prema kojemu je cjelina veća od dijela (aksiom 5).



Slika 10: Propozicija I-16

Neposredna posljedica prethodne propozicije je Propozicija I-17 prema kojoj su u svakom trokutu dva kuta uvijek manja od dva prava kuta. Ta je propozicija, temeljena na pogrešnom dokazu Propozicije I-16, bila važna u proučavanju koje je kasnije dovelo do otkrića neeuklidske geometrije.

Mogli bismo nastaviti analizirati dokaz Propozicije I-23, koju smo koristili tijekom dokazivanja Propozicije I-31, no tada bismo morali analizirati i većinu ranijih rezultata iz prve knjige. Zato ćemo izostaviti te rezultate i zaključiti ovo poglavlje s dvije važnije propozicije, koje su već navedene nekoliko puta. Prvo ćemo pogledati

Propozicija I-34. *U paralelogramu su nasuprotne stranice i kutovi međusobno jednaki i dijagonala ga raspolavlja.*

Bitno je napomenuti da su se u dokazima Propozicija I-46 i I-41 koristile sve tri tvrdnje ove propozicije. Kako bismo je dokazali, promatramo najprije presjek jedne od dijagonala s jednim parom paralelnih stranica, a zatim gledamo njezin presjek s drugim parom paralelnih stranica. U oba slučaja, Propozicija I-29 povlači da su izmjenični unutrašnji kutovi jednaki. Iz toga slijedi (prema kut-stranica-kut teoremu) da su dva trokuta, nastala presjecanjem paralelograma njegovom dijagonalom, sukladna. Kut-stranica-kut (KSK) teorem sukladan je Propoziciji I-26. Nadalje, sukladnost tih dvaju trokuta povlači da su oba para nasuprotnih stranica i oba para nasuprotnih kutova jednaki. Treća tvrdnja propozicije slijedi neposredno iz sukladnosti tih trokuta.

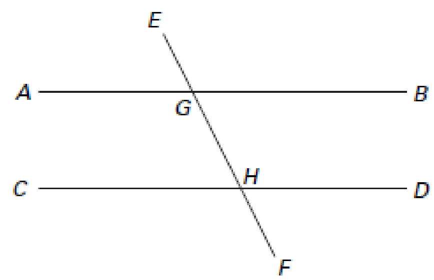
Posljednja propozicija koju ćemo razmatrati je Propozicija I-29. O njoj su ovisile Propozicije I-34 i I-46.

Propozicija I-29. *Ako pravac siječe paralelne pravce, onda on s njima tvori jednake izmjenične kutove, vanjski kut jednak je unutrašnjem s iste strane i dva unutrašnja kuta s iste strane jednaka su dvama pravim kutovima.*

Lako se vidi da su bilo koje dvije tvrdnje ove propozicije jednostavne posljedice treće. Dakle, moramo odlučiti koju od njih ćemo dokazati. Iz različitih grčkih tekstova znamo da je prije Euklida ova propozicija bila vrlo nejasna. Postavljala su se pitanja kao: „Kako dokazati jednu od tih tvrdnji?“ ili „Što treba pretpostaviti?“ Odgovorima na ta pitanja Euklid je pokazao svoju genijalnost. Već je u Propozicijama I-27 i I-28 dokazao obrat ove propozicije. Pokušavao je pronaći način izravnog dokazivanja jedne od navedenih tvrdnji. Budući da nije našao nijedan, shvatio je da bi trebao jednu od tih tvrdnji, ili njezin ekvivalent, postaviti kao postulat. Tako je odlučio tvrdnju, suprotnu trećoj izjavi ove propozicije, postaviti kao postulat. A on je zapisan i na početku prve knjige

Postulat 5. *Ako jedan pravac u presjeku s druga dva pravca tvori s njima s iste strane dva unutarnja kuta, čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta dva pravca će se dovoljno produžena sjeći, i to s one strane prvog pravca na kojoj se nalaze spomenuti kutovi.*

S obzirom na ovaj postulat, Propoziciju I-29 možemo jednostavno dokazati po kontradikciji. Pretpostavimo da je kut AGH veći od kuta GHD (Slika 11). Tada je zbroj kutova AGH i BGH veći od zbroja kutova GHD i BGH. Prvi zbroj jednak je dvama pravim kutovima (prema Propoziciji I-13), pa je drugi zbroj manji od dva prava kuta. Tada se, prema petom postulatu, pravci AB i CD moraju sjeći, što je u suprotnosti s pretpostavkom da su ti pravci paralelni.



Slika 11: Propozicija I-29

Dakle, vidimo da se Pitagorin poučak, završni teorem prve knjige, osim što zahtjeva mnoge ranije rezultate iz te knjige (uključujući sva tri poučka o sukladnosti trokuta), oslanja na postulat o paralelama. Kao što je ranije spomenuto, pri svakom pokušaju dokazivanja postulata o paralelama uvijek bi se pronašla greška ili druga pretpostavka, koja bi možda bila očitija od Euklidovog postulata, ali ipak se nije mogla dokazati pomoću ostalih devet aksioma. Vjerojatno najpoznatija „druga pretpostavka“ danas je poznata kao

Playfairov aksiom. *Kroz danu točku izvan danog pravca može se povući točno jedna paralela s danim pravcem.*

5 Knjiga II i geometrijska algebra

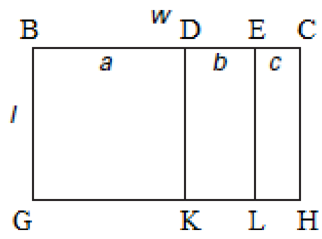
Prva knjiga *Elemenata*, sa svojim poznatim rezultatima, bila je glavna komponenta skupa rezultata grčkih matematičara koji su često korišteni u svim raspravama vezanim za geometriju. Knjiga II je sasvim drugačija. Ona se bavi odnosima između različitih pravokutnika i kvadrata te nema jasan cilj. Zapravo, propozicije iz druge knjige su rijetko korištene u ostalim dijelovima *Elemenata*. Svrha druge knjige bila je tema mnogih rasprava među učenicima grčke matematike. Jedna interpretacija, koja datira iz devetnaestog stoljeća, a koja je učestala i danas, je da ta knjiga, zajedno s nekoliko propozicija iz prve i šeste knjige, najbolje može biti protumačena kao "geometrijska algebra", odnosno prikaz algebarskih pojmova kroz geometrijske oblike. Drugim riječima, kvadrat stranice duljine a može biti shvaćen kao geometrijski prikaz a^2, pravokutnik sa stranicama duljine a i b može se interpretirati kao produkt $a \cdot b$, a veze među takvim objektima mogu se tumačiti kao jednadžbe. Naravno, ovdje se trebamo pitati što se podrazumijeva pod pojmom „algebra“. Ako shvaćamo algebru kao pronalaženje nepoznatih veličina, s obzirom na određene veze između njih i poznatih veličina, bez obzira na to kako su te veličine izražene, onda je sigurno algebra u drugoj knjizi ista kao i u ostalim dijelovima *Elemenata*. Također je lako primijeniti neke Euklidove teoreme na rješavanje kvadratnih jednadžbi, što su i učinili srednjovjekovni islamski matematičari. No, danas većina učenjaka vjeruje da je Euklid Knjigu II namijenio samo za prikaz geometrijskog znanja, koje se može koristiti u dokazivanju daljnih geometrijskih teorema, ako ne u samim *Elementima*, onda u naprednijoj grčkoj matematici, kao što je proučavanje konika, odnosno krivulja drugog reda. U nastavku ćemo pogledati neke rezultate geometrijske algebre.

Euklid je započeo drugu knjigu s definicijom: Za svaki pravokutnik se kaže da je određen dvjema dužinama koje čine pravi kut. Ta definicija pokazuje Euklidovu upotrebu geometrije. Ona ne znači da je površina pravokutnika produkt duljine i širine. Euklid nikad nije množio dvije duljine jer nije imao definiran takav postupak za proizvoljne duljine. Na različitim mjestima je množio duljine brojevima (pozitivnim cijelim brojevima). Postavlja se pitanje može li se Euklidov „pravokutnik“ tumačiti kao pojam „produkt“.

Primjer u kojemu Euklid koristi ovu definiciju je sljedeća propozicija

Propozicija II-1. *Ako postoje dvije dužine i ako je jedna od njih bilo kako podijeljena na bilo koji broj odsječaka, onda je pravokutnik koji je određen tim dvjema dužinama, jednak zbroju pravokutnika određenih dužinom koja nije dijeljena i svakim od odsječaka podijeljene dužine.*

To se algebarski može interpretirati na sljedeći način: ako je dana duljina l i širina w, podijeljena na nekoliko dijelova, recimo, $w = a+b+c$, onda je površina pravokutnika određenog tim dužinama, naime, lw, jednaka zbroju površina pravokutnika određenih duljinom i dijelovima širine, odnosno, $la + lb + lc$. Drugim riječima, taj teorem navodi poznati zakon distributivnosti: $l(a + b + c) = la + lb + lc$. No, pogledajmo Euklidov dokaz. Dane su dvije dužine, $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, i druga je točkama D i E podijeljena na tri dijela (Slika 12). Euklid je zatim nacrtao dužinu $\overline{BG}$, okomitu na $\overline{BC}$, čija je duljina jednaka duljini dužine $\overline{AB}$, te spajajući odgovarajuće točke dovršio pravokutnike $BDKG$, $DELK$ i $ECHL$. Budući da je pravokutnik $BCHG$ „pravokutnik određen dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$“, dok su $BDKG$, $DELK$ i $ECHL$ „pravokutnici određeni dužinom $\overline{AB}$ i svakim od dijelova dužine $\overline{BC}$“, Euklid je mogao iz skice zaključiti da je rezultat bio istinit.

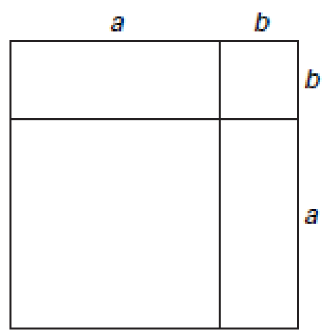


Slika 12: Propozicija II-1

Na prvi se pogled propozicija čini gotovo kao tautologija, odnosno iskaz koji je u svakom slučaju istinit. No, ono što Euklid čini ovdje, kao i kasnije u ovoj knjizi, je dokazivanje rezultata o „nevidljivim“ likovima, odnosno, likovima koji su u teoremu dani samo dvjema početnim dužinama i odsječcima, koristeći „vidljive“ likove, odnosno nacrtane pravokutnike. Euklid je vjerovao da su „vidljivi“ rezultati na skici ispravan temelj za dokazivanje „nevidljivog “ rezultata propozicije. Drugi primjer ovog postupka je

Propozicija II-4. *Ako je dužina nasumično podijeljenja, onda je kvadrat nad cijelom dužinom jednak kvadratima nad odsječcima dužine i dvostrukom pravokutniku određenom tim odsječcima.*

Algebarski, ova tvrdnja je jednostavno pravilo za kvadrat binoma, $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ (Slika 13). Euklidov dokaz je dosta složen budući da je potrebno pokazati da su različiti likovi na skici zapravo kvadrati i pravokutnici, te je opet morao svesti nevidljivi iskaz na vidljivu skicu.



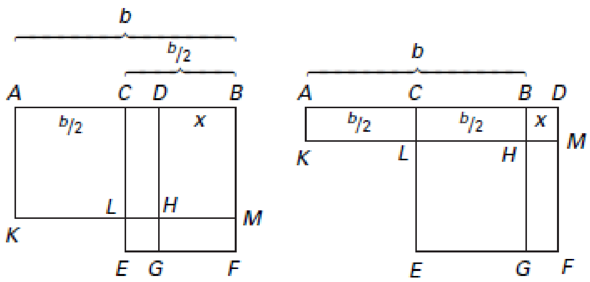
Slika 13: Propozicija II-4

Sljedeće dvije propozicije u devetom su stoljeću predstavljene kao geometrijsko opravdanje standardnog algebarskog rješenja kvadratnih jednadžbi.

Propozicija II-5. *Ako je dužina podijeljena na jednake i nejednake odsječke, onda je pravokutnik određen nejednakim odsječcima zajedno s kvadratom nad dužinom koja se nalazi između točaka presjeka, jednak kvadratu nad polovicom početne dužine.*

Propozicija II-6. *Ako je dužina prepolovljena i dodana joj je još jedna dužina, onda je pravokutnik određen cijelom dužinom zajedno s dodanom dužinom i dodanom dužinom, zajedno s kvadratom nad polovicom početne dužine, jednak kvadratu nad dužinom koja se sastoji od dodane dužine i polovice početne dužine.*

Slika 14 bi trebala razjasniti ove propozicije.



Slika 14: Propozicije II-5 i II-6

Ako je $\overline{AB}$ na obje skice označena s b, dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ s $b/2$ i $\overline{DB}$ sa x, Propozicija II-5 se prevodi u jednadžbu $(b-x)x+(b/2-x)^2 = (b/2)^2$, dok Propozicija II-6 daje $(b+x)x+(b/2)^2 = (b/2+x)^2$. Kvadratna jednadžba $bx - x^2 = c$ (ili $(b-x)x = c$) može se riješiti koristeći prvu jednakost, zapisanu u obliku $(b/2 - x)^2 = (b/2)^2 - c$, iz čega se dobije

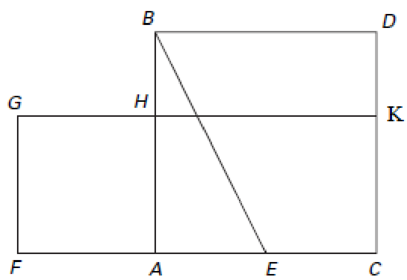
$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Slično tome, jednadžba $bx+x^2 = c$ (ili $(b+x)x = c$) se može riješiti pomoću druge jednakosti koristeći analognu formulu. S druge strane, na obje skice se $\overline{AD}$ može označiti s y i $\overline{DB}$ sa x te se prvi rezultat može prevesti u standardni babilonski sustav $x + y = b$, $xy = c$, a drugi rezultat u sustav $y - x = b$, $yx = c$.

Euklid, naravno, nije izvršio nijedan od navedenih prijevoda. On je samo koristio konstrukcije iz Slike 14 kako bi dokazao jednakosti odgovarajućih kvadrata i pravokutnika. Nigdje nije naznačio da se te propozicije koriste za rješavanje onoga što mi zovemo kvadratnim jednadžbama.

Postavlja se pitanje "Što su ti teoremi onda značili Euklidu?" Možemo vidjeti da se Propozicija II-6 koristi u dokazu Propozicije II-11, a Propozicija II-5 u dokazu Propozicije II-14.

Propozicija II-11. *Podijeliti danu dužinu tako da pravokutnik, određen cijelom dužinom i jednim od odsječaka, bude jednak kvadratu nad preostalim odsječkom.*



Slika 15: Propozicija II-11

Cilj ove propozicije je pronaći točku H na dužini tako da pravokutnik, određen dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{HB}$, bude jednak kvadratu nad $\overline{AH}$ (Slika 15). To je algebarski problem, u smislu ranije navedene definicije, budući da je zadatak pronaći nepoznate veličine uz danu njezinu vezu s nekim poznatim veličinama. Za prevođenje ovog zadatka u suvremeni zapis, označimo $\overline{AB}$ s a i $\overline{AH}$ sa x. Tada je $|\overline{HB}| = a - x$ i problem se svodi na rješavanje jednadžbe

$$a(a - x) = x^2$$

ili

$$x^2 + ax = a^2.$$

Babilonsko rješenje je

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Euklidov dokaz se naizgled svodi upravo na tu formulu. Očigledna metoda za određivanje drugog korijena iz zbroja dvaju kvadrata je korištenje hipotenuze pravokutnog trokuta, čije su katete dani korijeni, u ovom slučaju a i $a/2$. Dakle, Euklid je nacrtao kvadrat nad $\overline{AB}$ i zatim je središte stranice $\overline{AC}$ označio s E. Iz toga slijedi da je $\overline{BE}$ tražena hipotenuza. Kako bi oduzeo $a/2$ od te dužine, nacrtao je dužinu $\overline{EF}$ jednaku dužini $\overline{EB}$ za koju vrijedi da se oduzimajući od nje dužinu $\overline{AE}$ dobije $\overline{AF}$; to je potrebna vrijednost x. Budući da je htio podijeliti dužinu $\overline{AB}$, jednostavno je odabrao točku H takvu da je $|\overline{AH}| = |\overline{AF}|$. Kako bi pokazao da je taj izbor točke H točan, Euklid se pozvao na Propoziciju II-6: Dužina $\overline{AC}$ je prepolovljena i dužina $\overline{AF}$ joj je dodana. Dakle, pravokutnik određen dužinama $\overline{FC}$ i $\overline{AF}$, zajedno s kvadratom nad $\overline{AE}$, jednak je kvadratu nad $\overline{FE}$, a kvadrat nad $\overline{FE}$ jednak je kvadratu nad $\overline{EB}$, koji je pak jednak zbroju kvadrata nad dužinama $\overline{AE}$ i $\overline{AB}$. Iz toga slijedi da je pravokutnik određen dužinama $\overline{FC}$ i $\overline{AF}$ (jednak pravokutniku određenom dužinama $\overline{FC}$ i $\overline{FG}$), jednak kvadratu nad $\overline{AB}$. Oduzimanjem zajedničkog pravokutnika s dijagonalom $\overline{AK}$, dobijemo da je kvadrat nad $\overline{AH}$ jednak pravokutniku određenom dužinama $\overline{HB}$ i $\overline{AB}$, što smo i htjeli pokazati.

Eulkid je tako riješio ono što mi danas nazivamo kvadratnom jednadžbom, iako geometrijskim metodama, na isti način kao i Babilonci. Zanimljivo je da je isti problem ponovno riješio u *Elementima* kroz Propoziciju VI-30. Tu je želio na danoj dužini $\overline{AB}$ pronaći točku H takvu da vrijedi $|\overline{AB}| : |\overline{AH}| = |\overline{AH}| : |\overline{HB}|$. Naravno, to je algebarski prevedeno jednadžba ekvivalentna ranije navedenoj jednadžbi. Omjer $a : x$ iz te navedene jednadžbe, $(\sqrt{5}+1) : 2$, poznat je kao zlatni rez. Od grčkih vremena do danas mnogo je pisano o njegovoj važnosti.[1]

Prije razmatranja primjera, u kojemu se koristi Propozicija II-5, potrebna je mala digresija iz Knjige I.

Propozicija I-44. *Nad danom dužinom, pod danim pravolinijskim kutom, treba konstruirati paralelogram jednak danom trokutu.*

Glavni cilj ove konstrukcije je naći paralelogram ako je poznat jedan njegov kut i ako je jedna njegova stranica jednaka danoj dužini. Odnosno, paralelogram treba biti postavljen nad danom dužinom. Lako je uočiti da se to može protumačiti i algebarski ukoliko je dani kut pravi. Ako se uzme da je površina trokuta c^2 i da je dana dužina duljine a, onda

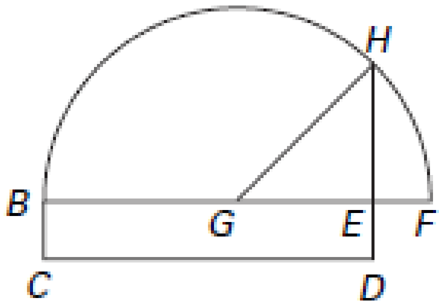
[1]Za više detelja vidjeti Roger Herz-Fischler, A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio (Waterloo, Ont.: Wilfrid Laurier Univ. Press, 1987).

je cilj problema naći dužinu duljine x takvu da površina pravokutnika duljine a i širine x iznosi c^2, odnosno riješiti jednadžbu $ax = c^2$. Budući da se Euklid nije bavio „dijeljenjem“ veličina, za njega se rješavanje sastojalo od traženja četvrte proporcionalne veličine u razmjeru $a : c = c : x$. Budući da nije koristio teoriju razmjera u prvoj knjizi, bio je prisiljen koristiti složeniju metodu koja uključuje površine.

S geometrijskog stajališta, ova konstrukcija omogućuje usporedbu veličina dvaju pravokutnika. Ako je pravokutnik A postavljen nad jednom stranicom pravokutnika B, onda novi pravokutnik C, jednak pravokutniku A, dijeli stranicu s B. Prema tome, omjer površina pravokutnika $A = C$ s B bit će jednak omjeru stranica koje nisu zajedničke niti jednom paru tih pravokutnika. Takve usporedbe, koje koriste ovu propoziciju, mogu se naći u radovima Arhimeda i Apolonija.

Propozicija II-14. *Konstruirati kvadrat jednak danom pravocrtnom liku.*

Ovu konstrukciju možemo gledati kao algebarski problem jer nam je zadatak pronaći nepoznatu stranicu kvadrata, koja ispunjava određene uvijete. U suvremenom zapisu, ovdje nam je zadatak riješiti jednadžbu $x^2 = cd$, gdje su c i d duljine stranica pravokutnika konstruiranog, pomoću I-45, tako da bude jednak danom liku (Slika 16). Postavljajući stranice pravokutnika, $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$, u jednu dužinu $\overline{BF}$ i polovljenjem te dužine u točki G, Euklid je konstruirao polukrug BHF polumjera $\overline{GF}$, gdje je H sjecište tog polukruga s okomicom na BF u točki E. Zatim, budući da je $\overline{BF}$ podijeljena točkom G na jednake dijelove, a točkom E na nejednake dijelove, prema Propozicijji II-5 je pravokutnik, određen dužinama $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$, zajedno s kvadratom nad $\overline{EG}$, jednak kvadratu nad $\overline{GF}$. A budući da je $|\overline{GF}| = |\overline{GH}|$ i da je kvadrat nad $\overline{GH}$ jednak zbroju kvadrata nad dužinama $\overline{GE}$ i $\overline{EH}$, iz toga siljedi da kvadrat nad $\overline{EH}$ zadovoljava uvijet propozicije. Kao II-11, Euklid je i ovaj problem riješio još jednom, koriteći razmjere, kroz Propoziciju VI-13.



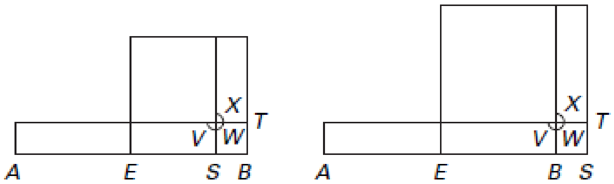
Slika 16: Propozicija II-14

Osim toga, u Knjizi VI Euklid je proširio pojam „postavljanja površina“ na postavljanje koje je „nedovoljno“ ili „prekomjerno“. To je temeljni postupak u Euklidovom radu, ali tu se ne radi toliko o postavljanju površine kao o konstrukciji likova. U najjednostavnijem obliku, proces se sastoji od konstrukcije pravokutnika nepoznate veličine x tako da njegova osnovica leži na danoj dužini $\overline{AB}$, ali na način da površina pravokutnika ili prijeđe određenu veličinu R za kvadrat x^2 ili zaostaje za veličinom R za kvadrat x^2. Obratit ćemo sada pozornost na sljedeće dvije propozicije u kojima je Euklid geometrijski riješio dvije vrste kvadratnih jednadžbi.

Propozicija VI-28. *Nad danom dužinom postaviti paralelogram jednak danom pravocrtnom liku i smanjen za paralelogram sličan danom; prema tome dani pravocrtni lik ne smije* *biti veći od paralelograma, konstruiranog nad polovicom dužine i sličnog nedostatku traženog paralelograma.*

Propozicija VI-29. *Nad danom stranicom postaviti paralelogram jednak danom pravocrtnom liku i produžen za paralelogram sličan danom.*

U prvom slučaju Euklid je predložio konstrukciju paralelograma s danom površinom, čija je osnovica manja od dane dužine $\overline{AB}$. Paralelogram nad nedostastkom, dužinom $\overline{SB}$, je sličan danom paralelogramu. U drugom slučaju konstruirani paralelogram s danom površinom ima osnovicu veću od dane dužine $\overline{AB}$, dok je paralelogram nad produžetkom, dužinom $\overline{BS}$, također sličan danom paralelogramu (Slika 17). Kako bismo pojednostavili i pokazali zašto možemo razmišljati o Euklidovim konstrukcijama kao o rješenju kvadratnih jednadžbi, pretpostavljamo da je dani paralelogram, u oba slučaja, kvadrat. To povlači da su konstruirani paralelogrami pravokutnici.



Slika 17: Propozicije VI-28 i VI-29

Označimo $\overline{AB}$ u oba slučaja s b i površinu danog pravocrtnog lika sa c. Problem se svodi na pronalaženje točke S na $\overline{AB}$ (Propozicija VI-28) ili na produžetku dužine $\overline{AB}$ (Propozicija VI-29) tako da $x = |\overline{BS}|$ zadovoljava jednadžbu $x(b-x) = c$ u prvom slučaju i jednadžbu $x(b+x) = c$ u drugom. Dakle, potrebno je riješiti kvadratne jednadžbe $bx - x^2 = c$ i $bx + x^2 = c$. Euklid je u oba slučaja pronašao središte E dužine $\overline{AB}$ i konstruirao nad $\overline{BE}$ kvadrat površine $(b/2)^2$. U prvom slučaju S je izabrana tako da je $\overline{ES}$ stranica kvadrata površine $(b/2)^2 - c$. Zbog toga je u propoziciji navedeno da površina c ne može biti veća od $(b/2)^2$. Taj izbor od $\overline{ES}$ povlači

$$x = |\overline{BS}| = |\overline{BE}| - |\overline{ES}| = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

U drugom slučaju, S je odabrana tako da je $\overline{ES}$ stranica kvadrata čija je površina $(b/2)^2 + c$. Tada je

$$x = |\overline{BS}| = |\overline{ES}| - |\overline{BE}| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Euklid je u oba slučaja pokazao da je njegov izbor ispravan pokazujući da je traženi pravokutnik jednak zbroju likova X,W i V te da je zbroj površina tih likova jednak danoj površini c. Algebarski se iznos iz prvog slučaja prikazuje u obliku

$$x(b-x) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right] = c,$$

a iz drugog u obliku

$$x(b+x)=\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+c\right]-\left(\frac{b}{2}\right)^2=c.$$

Dugo su trajale rasprave o tome proizlazi li Euklidova geometrijska algebra iz svjesnih transformacija babilonskih kvazi-algebarskih rezultata unutar formalne geometrije. Nekoliko babilonskih rješenja konstruktivnih problema ogledaju se u Euklidovim rješenjima istih. Tako se može tvrditi da je grčka prilagodba na njihovo geometrijsko stajalište, s obzirom na nužnost dokazivanja, bila povezana s otkrićem da nije istina da svaka dužina može biti predstavljena „brojem“. Nadalje se može tvrditi da, nakon što su prevedene činjenice iz geometrije, mogli su se jednako dobro iskazivati i dokazivati rezultati za paralelograme i pravokutnike. Daljnji argument, koji podržava prijenos i prijevod, pokazuje da je izvorna babilonska metodologija opisana u „naivnom“ geometrjskom obliku.

Je li bilo kakvih prilika za direktnu vezu kultura između babilonskih i grčkih matematičara? Obično se smatra da je to gotovo nemoguće jer ne postoji evidencija o babilonskim matematičarima tijekom razdoblja od šestog do četvrtog stoljeća prije Krista, kad bi ta veza trebala biti uspostavljena. Također se smatra nemogućim i zbog toga što bi članovi aristokracije, kojoj su pripadali grčki matematičari, prezirali aktivnosti pisaca, koji u starim babilonskim vremenima nisu bili dio elite. Međutim, nedavna otkrića su pokazala da se matematička aktivnost nastavljala te da je trajala sredinom prvog tisućljeća prije Krista.

S druge strane, unatoč mogućnostima za vezu i logici u argumentima kako je babilonska matematika mogla biti „prevedena“ u grčku geometriju, ne postoji neposredan dokaz o bilo kakvom prenošenju babilonske matematike u Grčku tijekom ili prije četvrtog stoljeća prije Krista. Može se zatim tvrditi da, iako su Grci upotrebljavali ono što mi smatramo algebarskim procedurama, njihovo matematičko razmišljanje je geometrijsko da su sve takve procedure prikazane na taj način. U razdoblju do 300. godine prije Krista Grci nisu koristili algebarski zapis pa time ni na koji način nisu manipulirali izrazima za veličine, osim što su o njima razmišljali u geometrijskim terminima. Zapravo, grčki su matematičari postali vrlo vješti u manipuliranju s geometrijskim objektima. I na kraju, treba imati na umu da ne postoji način, osim geometrijski, na koji su Grci mogli izraziti iracionalna rješenja kvadratnih jednadžbi.

Još nemamo jasan odgovor na pitanje je li babilonska algebra u nekom obliku prenesena u Grčku u četvrtom stoljeću prije Krista. Nadamo se da će daljnja istraživanja originalnih izvora dati odgovor i na to pitanje.

6 Krugovi i konstrukcija peterokuta

Knjige I i II bavile su se svojstvima pravocrtnih likova, odnosno likovima omeđenim dužinama. U knjizi III se Euklid okrenuo svojstvima osnovnog zakrivljenog lika, kruga. Grci su bili impresionirani simetrijom kruga, činjenicom da bez obzira kako ga okrenemo, on uvijek ostaje isti. Smatrali su ga najsavršenijim geometrijskim likom. Isto tako su trodimenzionalni analogon kruga, odnosno kuglu, smatrali najsavršenijim geometrijskim tijelom. Mnogi teoremi iz treće i četvrte knjige datiraju iz najranijeg razdoblja grčke matematike. Kao takvi, postali su dio alata grčkih matematičara za riješavanje drugih problema.

Ako postoji bilo kakvo načelo organizacije u Knjizi III, ono osigurava konstrukciju poligona u Knjizi VI, opisanog i upisanog kružnici. Konkretno, većina propozicija iz druge polovice treće knjige koriste se u najtežoj konstrukciji četvrte knjige, konstrukciji pravilnog peterokuta. Konstrukcije trokuta, kvadrata i šesterokuta su relativno intuitivne i vjerojatno su djelo Pitagorejaca. S druge strane, konstrukcija peterokuta uključuje više naprednih sadržaja i ta se konstrukcija koristi u Euklidovoj konstrukciji nekih pravilnih geometrijskih tijela u Knjizi XIII.

Odabrane definicije iz treće knjige Euklidovih *Elemenata*:

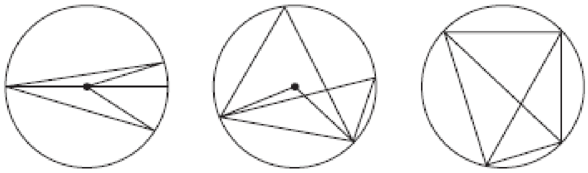
2. Kaže se da pravac dira kružnicu ako siječe kružnicu i ako je produžen ne presjeca.
6. Odsječak kruga je lik omeđen dužinom i kružnicom kruga.
8. Obodni kut je kut koji je, kada se uzme točka na obodu odsječka i pravcima se spoji ta točka s krajevima dužine koja je osnovica odsječka, omeđen pridruženim pravcima.

Nakon predstavljanja nekoliko važnih definicija, Euklid je Knjigu III započeo s nekim osnovnim konstrukcijama i propozicijama, uključujući i vrlo korisnu posljedicu da promjeri raspolavljaju tetive na koje su okomiti. Zatim je pokazao kako konstruirati tangentu na kružnicu:

Propozicija III-16. *Pravac nacrtan pod pravim kutom u odnosu na promjer kruga, kroz njegov kraj, past će izvan kruga, te u prostor između tog pravca i kružnice ne može biti umetnut drugi pravac.*

Ova propozicija tvrdi da je pravac, okomit na promjer kroz njegov kraj, ono što danas nazivamo tangentom. Euklid je u posljedici samo napomenuo da ona „dira“ kružnicu, kao u definiciji 2., ali izjava da se nijedan pravac ne može postaviti između krivulje i pravca je u konačnici postala dio definicije tangente prije uvođenja matematičke analize. Euklid je za dokaz tog rezultata koristio kontradikciju.

Propozicije III-18 i III-19 daju djelomične obrate Propozicije III-16. Propozicija III-18 pokazuje da je pravac kroz središte kruga, koji siječe tangentu, okomit na tangentu dok Propozicija III-19 pokazuje da okomica iz točke dodira tangente prolazi središtem kruga. Propozicije III-20 i III-21 također daju poznate rezultate, odnosno, da je središnji kut dvostruko veći od obodnog, ako oba kuta odjecaju isti kružni luk, i da su kutovi nad istim segmentom jednaki. Dokazi obje propozicije su jasni iz slike 18, kao i dokaz Propozicije III-22, prema kojoj su nasuprotni kutovi četverokuta, upisanog u kružnicu, jednaki dvama pravim kutovima.



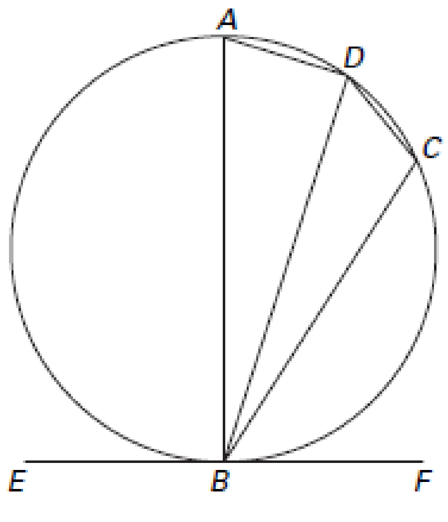
Slika 18: Propozicije III-20, III-21 i III-22

Propozicija III-31 tvrdi da je obodni kut nad promjerom u polukrugu pravi kut. To bi se moglo zaključiti odmah iz Propozicije III-20, ako se za središnji kut uzme ispruženi kut. Tada je kut u polukrugu jednak polovici ispruženog kuta nad promjerom, koji je opet jednak dvama pravim kutovima. Međutim, Euklid nije za kut uzeo ispruženi kut pa je dao drugačiji dokaz.

Propozicija III-32 je složenija, ali je neophodna za konstrukciju peterokuta.

Propozicija III-32. *Ako je pravac tangenta kružnice i iz točke dirališta je nacrtan pravac koji siječe kružnicu, onda će kutovi, koje ti pravci tvore s tangentom, biti jednaki kutovima nad izmjenjivim odsječcima.*

Drugim riječima, ova propozicija tvrdi da jedan od kutova koje čine tangenta EF i sekanta BD, recimo kut DBF, jednak bilo kojem kutu nad „izmjenjivim" odsječkom BD, kao što je kut DAB. (Slika 19). Slično tome, drugi kut koji zatvara tangenta, kut DBE, jednak je bilo kojem kutu nad preostalim odsječkom, kao što je kut DCB. Možemo reći „bilo kojeg kuta" nad segmentom, jer prema Propoziciji III-21, bilo koja dva kuta nad istim segmentom su međusobno jednaka. Da bismo dokazali taj rezultat nacrtamo okomicu AB na tangentu u točki dirališta B. Budući da okomica na tangentu prolazi središtem kruga (Propozicija III-19), kut ADB, kao kut u polukrugu, je pravi (Propozicija III-31). Dakle kutovi DAB i ABD su u sumi jednaki pravom kutu, a i kutovi DBF i ABD su u sumi također jednaki pravom kutu. Iz toga slijedi da je kut DAB jednak kutu DBF, kao što se tvrdi. Jednakost drugih dvaju kutova se zatim lako utvrdi.

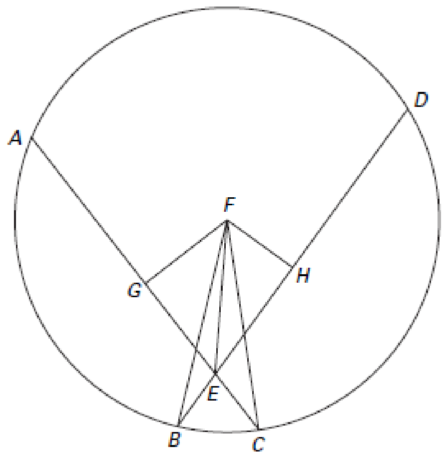


Slika 19: Propozicija III-32

Propozicija III-36 je također potrebna za konstrukciju peterokuta, a budući da je usko povezana s Propozicijom III-35 i zbog toga što Propozicije II-5 i II-6 čine drugi pristup u ovim propozicijama, prvo ćemo pogledati

Propozicija III-35. *Ako se u krugu dva pravca međusobno sijeku, onda je pravokutnik, određen odsječcima jednog, jednak pravokutniku određenom odsječcima drugog pravca.*

Pravokutnici iz propozicije su „nevidljivi" i prikazani su samo kroz Propoziciju II-5. Za dokaz je Euklid najprije naveo da je rezultat očit ako se dva pravca sijeku u središtu kruga. Dakle, pretpostavit ćemo da se $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku u točki E različitoj od središta F (Slika 20). Nacrtamo $\overline{FG}$ i $\overline{FH}$ okomite na $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, te spojimo točku F redom s točkama B, D i E. Znamo da je G polovište $\overline{AC}$. Dakle, možemo primijeniti Propoziciju II-5 na $\overline{AC}$ i zaključiti da je pravokutnik, određen s $\overline{AE}$ i $\overline{EC}$ zajedno s kvadratom nad $\overline{EG}$, jednak kvadratu nad $\overline{GC}$. Dodavanjem kvadrata nad $\overline{GF}$ na obje strane i primjenom Pitagorinog poučka, možemo zaključiti da je pravokutnik, određen s $\overline{AE}$ i $\overline{EC}$, plus kvadrat nad $\overline{FE}$ jednak kvadratu nad $\overline{FC}$, koji je pak jednak kvadratu nad $\overline{FB}$. Uz isti argument, pravokutnik određen s $\overline{DE}$ i $\overline{EB}$ plus kvadrat nad $\overline{FE}$ jednak je kvadratu nad $\overline{FB}$. Iz toga slijedi da je pravokutnik, određen s $\overline{DE}$ i $\overline{EB}$, jednak pravokutniku određenom s $\overline{AE}$ i $\overline{EC}$.

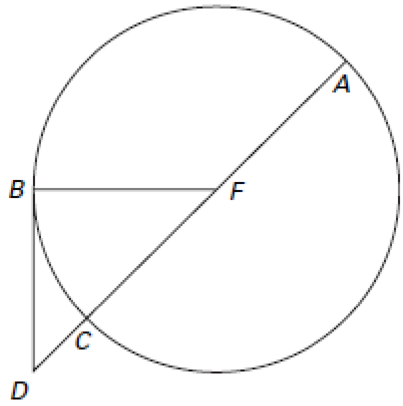


Slika 20: Propozicija III-35

Sljedeća propozicija govori o dvama pravcima koji presjecaju krug i međusobno se sijeku izvan njega:

Propozicija III-36. *Ako iz točke izvan kruga povučemo tangentu i sekantu na kružnicu, onda je pravokutnik, određen cijelom sekantom i tim odsječkom koji se nalazi izvan kruga, jednak kvadratu nad tangentom.*

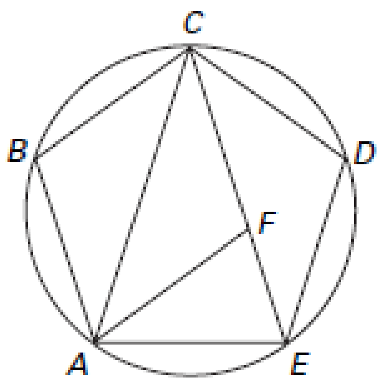
Ovaj nas iskaz može podsjetiti na Propoziciju II-6, koja se koristi u dokazu ovog rezultata. Razmotrit ćemo ovdje samo lakši slučaj, gdje sekanta $\overline{DA}$ prolazi kroz središte F (Slika 21). Dodamo $\overline{FB}$ tako da kut FBD bude pravi. Propozicija II-6 tvrdi da je pravokutnik, određen s $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ zajedno s kvadratom nad $\overline{FC}$, jednak kvadratu nad $\overline{FD}$, ali $|\overline{FC}| = |\overline{FB}|$ i suma kvadrata nad $\overline{FB}$ i $\overline{BD}$ jednaka je kvadratu nad $\overline{FD}$. Stoga je pravokutnik određen s $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ jednak kvadratu nad $\overline{DB}$, što smo i trebali pokazati. Slučaj gdje sekanta ne prolazi kroz središte je malo složeniji.



Slika 21: Propozicija III-36

Propozicija III-37 je obrat Propozicije III-36, koja tvrdi da ako su dva pravca povučena preko kruga iz točke izvan kruga, od kojih je jedan sekanta, a drugi dira kružnicu, i ako je odnos između pravokutnika i kvadrata kao u propoziciji, onda je drugi pravac tangenta. Dokaz uključuje crtanje tangente, a zatim se pomoću Propozicije III-36 pokazuje da je dani pravac jednak tangenti.

Obrada peterokuta počinje u Knjizi IV, nakon što je Euklid pokazao jednostavnije metode upisivanja trokuta i kvadrata u krugove, upisivanja krugova u trokute i pravokutnike, opisivanja trokuta i kvadrata krugovima te opisivanja krugova trokutima i kvadratima. Euklid je zatim podijelio svoju konstrukciju pravilnog peterokuta na dva koraka. Prvi korak je konstrukcija jednakokračnog trokuta, kojemu su oba kuta uz osnovicu dvostruko veća od kuta nasuprot osnovice (IV-10), a drugi korak je upisivanje peterokuta u krug (IV-11). Kao i obično, Euklid nije pokazao kako je došao do konstrukcije, ali pažljivo čitanje o tome može dati dobar uvid u njegovu analizu ovog problema. Stoga ćemo preptostaviti konstrukciju i pokušati vidjeti gdje nas ta pretpostavka vodi.

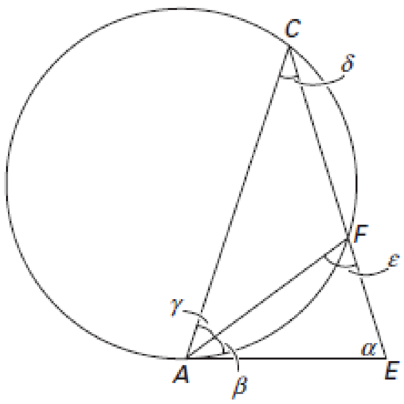


Slika 22: Konstrukcija pravilnog peterokuta

Dakle, pretpostavimo da je $ABCD$ pravilan peterokut upisan u krug (Slika 22). Nacrtamo dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{CE}$. Budući da se svaki od kutova CAE i CEA nalazi nasuprot kružnog luka koji je dvostruko veći od onog nasuprot kuta ACE, iz toga slijedi da je trokut ACE jednakostraničan s kutovima uz osnovicu duplo većim od kuta nasuprot osnovici. Stoga smo sveli konstrukciju peterokuta na konstrukciju tog trokuta. Pretpostavimo dakle, da je trokut

ACE takav jednakokračan trokut i neka $\overline{AF}$ raspolavlja kut pri vrhu A. Iz toga slijedi da su trokuti AFE i CEA slični, pa je $|\overline{EF}| : |\overline{AF}| = |\overline{EA}| : |\overline{CE}|$. Međutim, trokuti AFE i AFC su oba jednakokračni pa je $|\overline{EA}| = |\overline{AF}| = |\overline{FC}|$. Dakle, $|\overline{EF}| : |\overline{FC}| = |\overline{FC}| : |\overline{CE}|$ ili u suvremenom zapisu $|\overline{FC}|^2 = |\overline{EF}| \cdot |\overline{CE}|$. Konstrukcija je sada svedena na pronalaženje točke F na danoj dužini $\overline{CE}$, takve da kvadrat nad $\overline{FC}$ bude jednak pravokutniku koji je određen dužinama $\overline{EF}$ i $\overline{CE}$. To je upravo konstrukcija iz Propozicije II-11. Kad je točka F pronađena, onda se jednakokračan trokut, kojemu su kutovi uz osnovicu dvostruko veći od kuta nasuprot osnovici, može konstruirati crtanjem kružnice sa središtem u C polumjera $\overline{CE}$ te druge kružnice sa središtem u E polumjera $\overline{CF}$. Presjek A tih dviju kružnica je treći vrh traženog trokuta.

Euklid izvodi tu konstrukciju u Propoziciji IV-10 (Slika 23), ali u dokazu njezine valjanosti nije mogao koristiti argumente sličnosti. Cilj je pokazati da je $\alpha = 2\delta$. Ako se pokaže da je $\beta = \delta$, onda je $\beta + \gamma = \delta + \gamma = \epsilon$.



Slika 23: Propozicija IV-10

Budući da je $\alpha = \beta + \gamma$, vrijedi i $\alpha = \epsilon$. Tada je $|\overline{AF}| = |\overline{AE}|$ i budući da je iz konstrukcije $|\overline{AE}| = |\overline{FC}|$, slijedi da je trokut AFC jednakokračan i da je $\delta = \gamma$. Konačno, $\alpha = \beta + \gamma = \delta + \delta = 2\delta$, što je i trebalo pokazati. Da bismo pokazali da je $\beta = \delta$ trokutu AFC opišemo kružnicu. Budući da je pravokutnik, određen dužinama $\overline{CE}$ i $\overline{FE}$, jednak kvadratu nad $\overline{FC}$, iz toga slijedi da je taj pravokutnik također jednak i kvadratu nad $\overline{AE}$. Propozicija III-37 onda tvrdi da je uz te uvijete na pravce CE i AE, AE tangenta na kružnicu. Propozicija III-32 dopušta Euklidu zaključiti da je $\beta = \delta$, što je i htio pokazati.

Ako je dan jednakokračan trokut, kojemu su kutovi uz osnovicu dvostruko veći od kuta nasuprot osnovici, onda je konstrukcija pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu jasna. Euklid je prvo upisao jednakokračan trokut ACE u kružnicu. Zatim je nacrtao simetrale kutova pri vrhovima A i E. Sjecišta tih simetrala s kružnicom su točke D i B. Tada su točke A, B, C, D i E vrhovi pravilnog peterokuta.

Euklid je dovršio četvrtu knjigu konstrukcijom pravilnog šesterokuta i pravilnog 15-erokuta upisanih kružnici, ali nije spominjao konstrukcije drugih pravilnih mnogokuta. Vjerojatno je bio svjestan da je konstrukcija mnogokuta s $2nk$ stranica ($k = 3, 4, 5$) bila lagana za izvesti, počevši s već izvedenim konstrukcijama, pa čak i po analogiji s njegovom konstrukcijom 15-erokuta bilo je jednostavno konstruirati mnogokut s kl stranica (k i l relativno prosti), ako se može konstruirati mnogokut s k stranica, kao i mnogokut s l stranica. Međutim, nije poznato je li znao konstruirati sedmerokut. U svakom slučaju, ta bi konstrukcija, koja je prvi put zapisana u Arhimedovu radu, za Euklida bila dio napredne matematike, prije nego dio „elemenata“, jer ona zahtjeva i druge alate osim šestara i jednobridnog ravnala.

7 Zaključak

U ovom radu smo proučavali prve četiri knjige Euklidovog najpoznatijeg djela *Elementi*. Nakon navedenih nekoliko rečenica o Euklidovom životu i djelima prošli smo kroz njegovu prvu knjigu iz koje smo zapisali neke definicije te poznatih pet postulata i pet aksioma. Najprije smo iskazali i dokazali završni teorem te knjige, Pitagorin počak, i njegov obrat, a zatim smo proučili neke od propozicija koje su bile potrebne za dokaz tog poučka.

Zatim smo razmatrali drugu knjigu koja je protumačena kao geometrijska algebra. U tom dijelu rada smo iskazali i dokazali nekoliko propozicija o odnosima između različitih pravokutnika i kvadrata. Pomoću njih je Euklid dao rješenje kvadratne jednadžbe geometrijskim pristupom, a raspravom o tim rješenjima završili smo razmatranje druge knjige.

Nakon toga smo prikazali neke rezultate iz treće i četvrte knjige. Najprije smo se osvrnuli na treću knjigu i propozicije vezane uz svojstva kružnice, tangenti i sekanti kružnice te središnjih i obodnih kutova, a kasnije smo te rezultate iskoristili za konstrukciju pravilnog peterokuta, koja se nalazila u četvrtoj knjizi.

Proučavanjem *Elemenata* može se zaključiti da oni ne daju savršen model zaključivanja, kritička istraživanja su otkrila brojne nedostatke u njihovoj logičkoj strukturi. Istina je da Euklidov pokušaj postavljanja geometrije na neosporan temelj nije bio uspješan. No, to nije omalovažavanje negovog rada. Naime, tim radom postigao je veličanstven uspjeh, učinio je veliki korak naprijed donoseći pravi početak aksiomatske matematike. Iako su neki njegovi temelji bili nejasni, Euklidovi *Elementi* su i dalje velik rad, vrijedan proučavanja. Sir Thomas Heath je o *Elementima* napisao : „Ova prekrasna knjiga, sa svim svojim nesavršenostima, koje su doista neznatne uzimajući u obzir datum kada je nastala, jest i ostat će najveći matematički udžbenik svih vremena.“

Sažetak

Cilj ovog rada je upoznati se s nekim rezultatima iz Euklidovog djela *Elementi*. U prvom dijelu rada predstavili smo njegove aksiome i postulate te smo proučili njegovu verziju Pitagorinog poučka, kao i neke tvrdnje potrebne za dokaz tog teorema. To je bio sadržaj prve knjige *Elemenata*. Zatim smo pisali o drugoj knjizi i geometrijskoj algebri, te vidjeli bitne rezultate vezane uz rješavanje kvadratnih jednadžbi pomoću geometrije. Nakon toga smo, kroz treću i četvrtu knjigu, proučili propozicije koje govore o svojstvima kružnica i konstrukciji pravilnog peterokuta, čime je rad i završen.

Summary

The aim of this paper is to familiarize with some results from Euclid's Elements. In the first part of the paper we presented his axioms and postulates and have studied his version of the Pythagorean theorem, as well as some things that are necessary to prove this theorem. This was the content of the first book Elements. Then we wrote about the second book and geometric algebra, and we saw significant results related to solving quadratic equations by using geometry. After that, through the third and fourth book, we studied propositions that speak of the properties of circles and construction of regular pentagon, and we completed work with this.

Literatura:

[1] D. Burton, *The History of Mathemathics: An Introduction, 6th Edition*, The McGraw-Hill Companies, 2006.

[2] V. J. Katz, *The History of Mathemathics: An Introduction, 3th Edition*, Pearson, 2009.

Životopis

Zovem se Marina Matić. Rođena sam 15. travnja 1992. godine u Požegi. Završila sam osnovnu školu „Mladost“ u Jakšiću. Srednjoškolsko obrazovanje sam nastavila u Katoličkoj klasičnoj gimnaziji s pravom javnosti u Požegi. Upisala sam Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijek 2011. godine.