Poučavanje i učenje geometrije u osnovnoškolskoj matematici

Šmit, Rebeka

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Rebeka Šmit

Poučavanje i učenje geometrije u osnovnoškolskoj matematici

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Rebeka Šmit

Poučavanje i učenje geometrije

Diplomski rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2022.

Sadržaj

1 Uvod

Geometrija je izvor poticanja matematičkog mišljenja, razvijanja kreativnosti, ukazivanja na različite načine dokazivanja, istraživanja te zanimljivijeg učenja i poučavanja. Glavni cilj ovoga rada je prikazati različite primjere koji se mogu primijeniti unutar nastave geometrije radi postizanja svega navedenog.

Unutar ovog rada nalaze se mnogi primjeri koji mogu pomoći učenicima, ali i nastavnicima približiti geometriju i učiniti je zanimljivijom. U prvog poglavlju nalaze se primjeri koji su većim dijelom iz svakodnevnog života u kojima se primjenjuju povećanje i sličnost. Osim toga, teoremi o polovištu i o transverzali su iskazani kao dobar način povezivanja s povećanjem i sličnosti te njihovo bolje razumijevanje. Drugo poglavlje govori o Pitagorinom poučku. Bavi se problemima razumijevanja Pitagorina poučka, te idejama i načinima njegova prikazivanja na različite načine kako bi ga učenici što bolje shvatili. Od mnogih dokaza Pitagorina poučka, izdvojeno je nekoliko primjera koji su prikladni za učenike osnovnoškolske dobi, te su prikazani algebarski i vizualno. Osim toga, prikazano je nekoliko primjera koji se temelje na primjeni Pitagorina poučka. Posljednje poglavlje namijenjeno je primjerima iz osnovnoškolskih udžbenika koji su vezani za povećanje, sličnost i Pitagorin poučak. Uspoređeni su primjeri iz udžbenika s primjerima iz prva dva poglavlja radi mogućnosti uvođenja dodatnih zadataka i metoda pojašnjavanja ovog dijela gradiva vezanog za geometriju.

2 Povećanje i sličnost

2.1 Povećanje

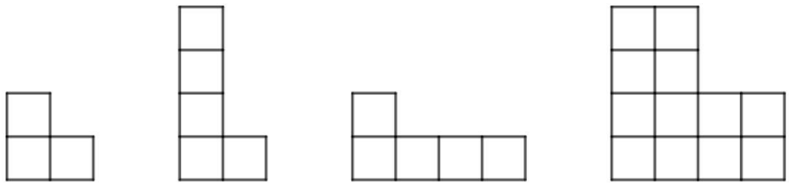
Ideja je povećanja napravi nešto veće, iako u matematičkom smislu može značiti smanjenje veličine. To je postupak za koji ne postoji riječ koja je široko prihvaćena, ali izraz dilatacija može poslužiti za takva proširenja.

Povećanje u općenitom smislu je sveprisutno u našem okruženju, s primjenom u kartama, planovima, crtežima svih vrsta, povećanjima fotografija, fotokopirnim strojevima koji povećavaju i smanjuju te odgovarajućim sadržajima s tekstom i slikama na zaslonu računala. Postoje mnogi primjeri iz svakodnevnog života pomoću kojih se učenicima može približiti smisao i važnost proširenja. Jedan od njih je karta mjerila 1 : 25000, koja se uvećava za faktor razmjera dva od karte mjerila 1 : 50000, dok je u stvarnosti 50000 puta veća od njenog prikaza na toj karti. Još jedan od primjera iz kojeg učenici mogu uvidjeti povećanje je standardni list A3 papira koji je uvećan za faktor razmjera $\sqrt{2}$ u odnosu na A4 papir. Na isti način su povezane i ostale veličine papira.

Radi smanjenog korištenja smanjenja veličina, učenicima je potrebno osvijestiti kako se pri povećanju mijenja veličina. Isto tako je bitno naglasiti da različita svojstva oblika ostaju nepromijenjena, osobito kutovi između stranica u određenom liku te omjeri određenih oblika. Nepromjenjivost kutova nije teško za shvatiti, ali problem može nastati kod omjera zbog nerazumijevanja omjera i udjela, što nadilazi njegovu primjenu na geometriju. O ovom pitanju je detaljnije pojašnjeno u poglavlju o proporcionalnosti u popratnom svesku knjige [3].

Neke od metoda pomoću kojih učenici mogu istraživati svojstva povećanja je transformacija, koristeći se raznim vježbama crtanja na čistom papiru ili na papiru na kvadratiće. Još jedna atraktivna metoda za istraživanje povećanja na jednostavnoj razini prilagođena učenicima je korištenje međusobno povezanih obojenih kocaka. Postoji i suvremena metoda s kojom su se mnogi učenici već susretali i mogu ju iskoristiti za bolje razumijevanje svojstava povećanja, a to je povećanje fotografija.

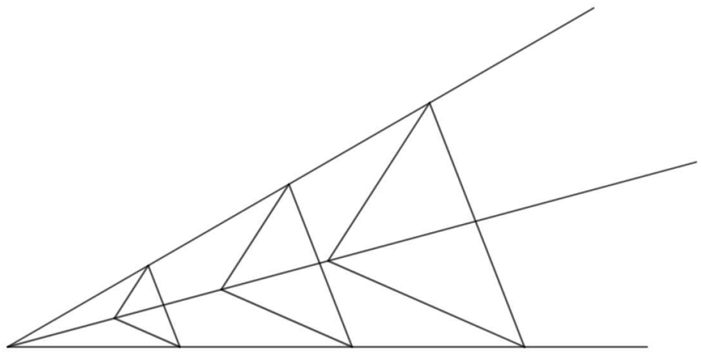
Primjer 1. Slika 1 predstavlja problem onoga što se podrazumijeva pod „dvostruko većim“.



Slika 1: *Dvostruko veće*

Prva slika prikazuje izvorni lik koji želimo dvostruko povećati. Na slici pored je "dvostruko viši" lik od izvornog, dok je na trećoj slici "dvostruko širi" lik. Ta dva primjera iskrivljuju izvornu sliku, odnosno ne uvećavaju je u matematičkom smislu. Pomoću ovog primjera se učenicima slikovito, s međusobno povezanim kvadratima može predočiti dvostruko povećanje pojedinog lika i time osvijestiti kako se sve dimenzije udvostručuju, dok površina postaje četverostruko veća. Štoviše, korištenjem međusobno povezanih kocaka ova ideja se može proširiti na proučavanje udvostručenja volumena. Ovdje će učenici uvidjeti da će im biti potrebno osam puta više kockica, jer je svaka početna kocka zamijenjena kockom čiji su bridovi dvostruko dulji od bridova početne kocke. Ovakvi primjeri s jednostavnim konfiguracijama i slikama koje uključuju udvostručenje mogu biti prvi korak prema idejama povećanja i sličnosti da se čuvaju kutovi i proporcije, te da povećanje oblika s faktorom razmjera k utječe na povećanje površine za faktor k^2 i volumena za k^3.

Primjer 2. Slika 2 prikazuje povećane verzije trokuta s faktorima razmjera 2 i 3 na čistom papiru.



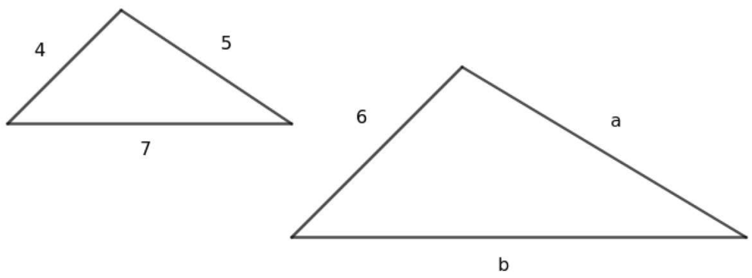
Slika 2: *Povećanje trokuta*

Slika je konstruirana na način da je izabrana točka kao središte povećanja, iz koje su povučene linije koje prolaze svim vrhovima početnog trokuta. Do vrhova dva veća trokuta se dolazi pomicanjem jednakom udaljenosti po svim linijama. Pri tome su sačuvani jedni od najosnovnijih svojstava matematičkog povećanja, a to su sačuvanje kutova i proporcija te paralelnost odgovarajućih stranica. Treba napomenuti da ovo pravilo ne vrijedi u svim situacijama kada se razmatraju različiti primjeri koji uključuju slične trokute.

2.2 Sličnost

Učenici obično probleme s proporcionalnošću pronalaze izravno kada uključuju udvostručavanje, ali ideja postaje teža za faktore razmjera koji su veći cijeli brojevi (npr. 3,4,5,...), a znatno je teža s racionalnim faktorima razmjera jer to uključuje ideju omjera i potrebu za množenjem razlomaka. Ovaj izvor poteškoća koji se u širem kontekstu proporcija raspravlja u [5].

Primjer 3. Na slici 3 prikazan je par sličnih trokuta, manji trokut sa stranicama duljina 4, 5 i 7 mjernih jedinica, dok veći trokut ima duljinu najkraće stranice 6 mjernih jedinica i dvije nepoznate duljine stranica.



Slika 3: *Dva slična trokuta*

U ovom primjeru je problem odrediti duljinu dviju nepoznatih stranica većeg trokuta, označenih s a i b. Česta pogreška kod učenika je ta da zaključe kako su duljine preostale dvije stranice 7 i 9 mjernih jedinica. Do tog zaključka dolaze razmišljajući na način da je poznata stranica većeg trokuta uvećana za dvije mjerne jedinice te to isto primijene na ostale stranice trokuta. Na taj način učenici koriste zbrajanje umjesto proporcionalnog povećanja koje uključuje množenje i to često s razlomkom. Uobičajeno se problemi koji uključuju proporcionalnost rješavaju izjednačavanjem jednakih omjera. Za trokute sa slike 3 prikažimo jednadžbe koje određuju duljinu nepoznatih stranica:

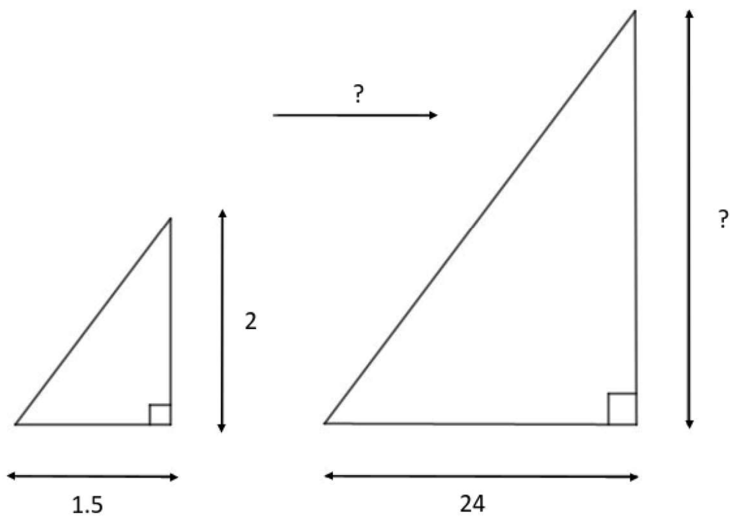
$$\frac{a}{5} = \frac{6}{4} \Rightarrow a = \frac{5 \cdot 6}{4} = 7\frac{1}{2}, \quad \frac{b}{7} = \frac{6}{4} \Rightarrow b = \frac{7 \cdot 6}{4} = 10\frac{1}{2}.$$

Nadovezujući se na ideju proširenja, ovaj problem se može pojednostaviti na način da se odredi faktor razmjera $\frac{6}{4}$ koristeći omjer jednog para odgovarajućih stranica. Taj se omjer pojavljuje kao dio postupka jednakih omjera, ali njegov je značaj mnogo jasniji ako se promotri odvojeno i pojednostavi na $\frac{3}{2}$ ili $1\frac{1}{2}$. Može se zapisati u obliku decimalnog broja ukoliko se u razlomku pojavljuju veliki, neskrativi brojevi. Kada se odredi faktor razmjera, može se koristiti za pronalazak ostalih duljina stranica množenjem na način:

$$a = 1\frac{1}{2} \cdot 5 = 7\frac{1}{2}, \quad b = 1\frac{1}{2} \cdot 7 = 10\frac{1}{2}.$$

Postoji mnogo primjera sličnosti iz svakodnevnih situacija koji će geometriji dati veći smisao i na taj način učenicima približiti važnost primjene geometrije. Takvi primjeri su zanimljiviji učenicima od onih teorijskih primjera iz čiste geometrije i pružaju razvijanje vještina potrebnih za rješavanje ovakvih problema. Pogledajmo tri takva primjera.

Primjer 4. Slika 4 prikazuje dva trokuta čije stranice a i a' redom predstavljaju visine stupa i drveta, dok stranice b i b' predstavljaju duljine sjena koje imaju ta dva objekta.



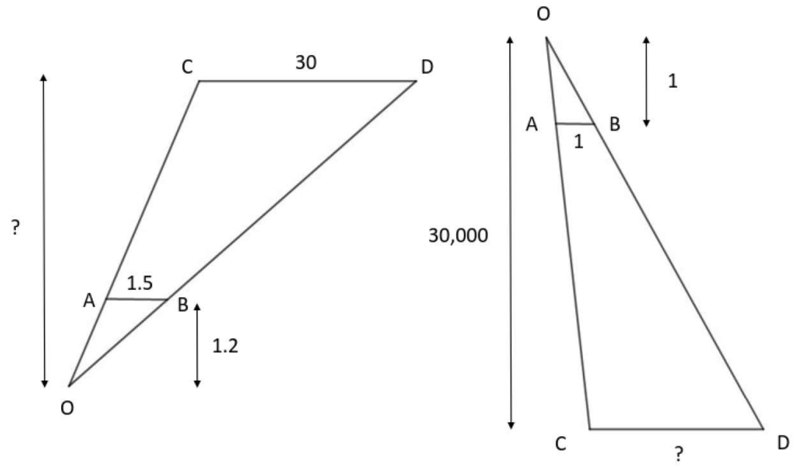
Slika 4: *Pronalaženje visine drveta*

Potrebno je odrediti duljinu visine drveta. To možemo odrediti mjerenjem duljine njegove sjene i usporedbom s dužinom sjene stupa čija se visina može lako izmjeriti. Stup visine 2 metra ima sjenu duljine 1.5 metara, a drvo sjenu duljine 24 metra. Pod pretpostavkom da je tlo vodoravno i da su stup i drvo okomiti, dva su trokuta slična, jer je kut elevacije sunca očito jednak za oba. Označimo li faktor razmjera s k dobivamo:

$$k = \frac{24}{1.5} = 16.$$

Tada je $a' = 16 \cdot 2 = 32$ odnosno visina drveta je 32 metra.

Primjer 5. Lijeva slika prikazuje zrakoplov koji leti s istoka na zapad, od D do C, promatran u daljini kroz prozor okrenut prema jugu, AB. Promatrač O stoji 1.2 m udaljen od prozora koji je širok 1.5 m i promatrajući trag koji avion ostavlja na nebu primjećuje da je zrakoplov vidljiv 3 min dok prelazi nebo od D do C.



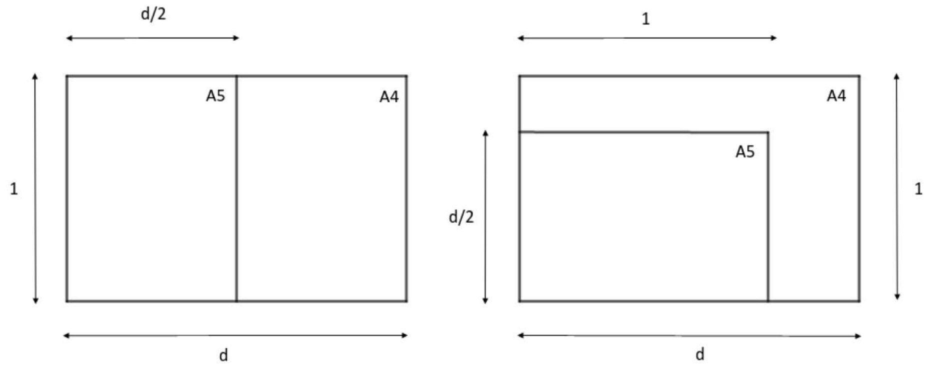
Slika 5: *Dva problema korištenja sličnih trokuta*

Potrebno je odrediti koliko je zrakoplov udaljen. U ovakvim zadacima koji su stvarni problemi iz svakodnevnog života često nedostaju podaci koji su potrebni za rješavanje ovakvih problema. Na taj način potiču učenike na razmišljanje i zaključivanje o tome što bi mogli iskoristiti kako bi riješili zadatak. U ovom primjeru se može iskoristiti činjenica da zrakoplov leti otprilike 600 milja i u tom će slučaju zrakoplov prijeći 30 milja u 3 min. Ova dva korištena sustava mjernih jedinica odražavaju koliko često se moramo susretati s problemima iz stvarnog života i govore da moramo osigurati da se odgovarajuće strane mjere u istim mjernim jedinicama kako bi se očuvao omjer između tih strana. Problem se može riješiti promatrajući dva slična trokuta $\triangle OAB$ i $\triangle OCD$. Označimo li s k faktor razmjera i s d traženu duljinu dobivamo:

$$k = \frac{30}{1.5} = 20, \qquad d = 20 \cdot 1.2 = 24.$$

Na desnoj slici promatrač O nalazi se u zrakoplovu i gleda prema Zemlji na visini od 30000 m i pokušava procijeniti duljinu jezera označenog CD. Ponovno se koristi mješavina mjernih jedinica: ako promatrač drži svoj prst, koji je širok 1 cm, na udaljenosti 30 cm od očiju, tada će promatračev prst pokriti duljinu od 30000 cm na Zemlji ispod i to je ekvivalentno 300 m. Duljina jezera tada se može mjeriti u širinama prstiju. Opet smo upotrijebili dva slična trokuta, $\triangle OAB$ i $\triangle OCD$ i stvorili situaciju u kojoj postoji jednostavan faktor skale od 30000.

Primjer 6. Još jedan primjer sličnosti koji uključuje slične pravokutnike može se naći na standardnim veličinama papira, od kojih je A4 najpoznatiji. Listovi papira A4 i A5 prikazani su na slici 6 u dvije različite orijentacije.



Slika 6: *A4 i A5 papir*

A4 papir ima svojstvo da kada se preklopi na pola, dobiju se dva A5 papira koji imaju površinu upola manju od površine A4 papira. Duljine stranica A4 papira iznose 1 i d te bi iz toga slijedi da su dimenzije A5 papira 1 i $\frac{d}{2}$. Budući da su dva pravokutnika slična, omjeri njihovih stranica su jednaki i to nam omogućuje izračun duljine d na sljedeći način:

$$\frac{1}{2}d : 1 = 1 : d \quad \text{ili} \quad \frac{d}{2} = \frac{1}{d} \quad \Rightarrow \quad d^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{2}.$$

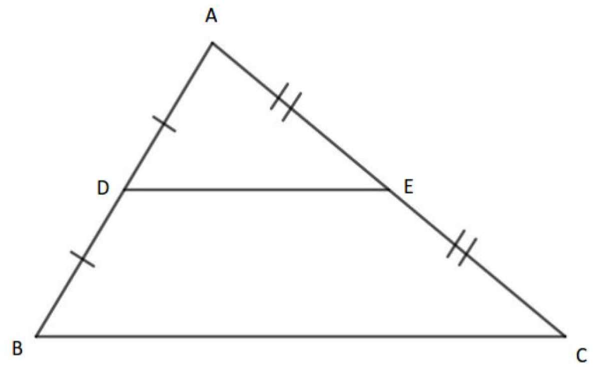
Sustav veličina papira kojem A4 i A5 pripadaju temelji se na pravokutnicima čije su stranice u omjeru $\sqrt{2} : 1$. Najveća je veličina A0 površine 1 kvadratni metar, a manje veličine dobivaju se uzastopnim prepolovljavanjem površine. Za izračun se prikladno može koristiti proračunska tablica, kao što je prikazano u tablici 1. Dimenzije su u centimetrima i kvadratnim centimetrima.

Veličina papira	Površina	Širina	Duljina
A0	10000	84.1	118.9
A1	5000	59.5	84.1
A2	2500	42.0	59.5
A3	1250	29.7	42.0
A4	625	21.0	29.7
A5	312.5	14.9	21.0

Tablica 1: Proračunska tablica koja prikazuje veličinu različitih dimenzija papira u centimetrima

2.3 Teorem o polovištu

Općenito je sličnost učenicima razumljivija kada je u pitanju udvostručavanje i prepolovljavanje i iz tog razloga im je teorem o polovištu privlačan. Osim toga njegov rezultat je očit i ima nekoliko jednostavnih primjera koji uključuju element iznenađenja. Teorem o polovištu prikazan je na slici 7.



Slika 7: *Teorem o polovištu*

U trokutu ABC točke D i E su redom polovišta stranica AB i AC. Trokuti ABC i ADE su slični trokuti jer imaju zajednički kut pri vrhu A, a omjeri $AB : AD$ i $AC : AE$ su $2 : 1$. Isto tako, trokut ABC je povećanje trokuta ADE sa središtem A i faktorom razmjera 2. Sličnost ovih dvaju trokuta povlači da je stranica BC dvostruko dulja od stranice DE te da su te dvije stranice međusobno paralelne.

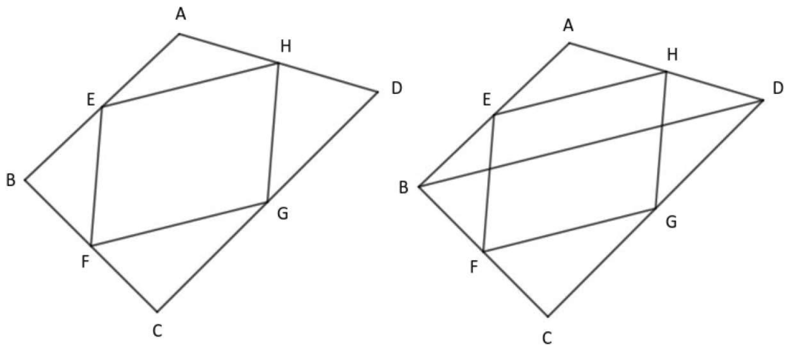
Teorem o polovištu može se izreći na različite načine, ovisno o tome koje se činjenice uzimaju kao polazišta, npr. za trokut ABC vrijedi:

- ako su D i E polovišta stranica AB i AC, tada je $BC = 2DE$ i BC je paralelna s DE
- ako je D polovište stranice AB, a pravac kroz D paralelan s BC siječe AC u točki E, tada je E polovište AC, a također vrijedi i $BC = 2DE$
- ako je D polovište stranice AB, a pravac kroz D siječe AC u točki E tako da je $BC = IDE$, tada je E polovište AC i BC je paralelna s DE
- ako su D i E točke na stranama AB i AC takve da su $BC = 2DE$ i BC i DE paralelne, tada su D i E polovišta stranica.

Primjer 7. U ovom primjeru prisjetimo se Varignonovog teorema:

Teorem 2.1. *Ako su E, F, G i H polovišta stranica bilo kojeg četverokuta $ABCD$, onda je $EFGH$ paralelogram.*

Varignonov teorem je prikazan na slici 8.

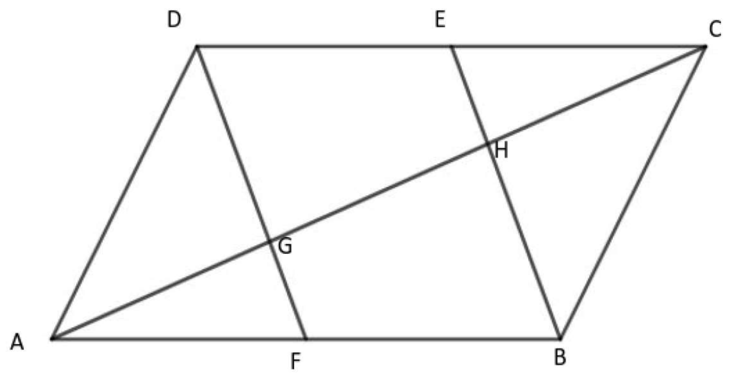


Slika 8: *Varignonov teorem dokazan koristeći teorem o polovištu*

Ukoliko se spoje polovišta susjednih stranica bilo kojeg četverokuta, za rezultat će se uvijek dobiti paralelogram. Često je to za učenike iznenađujuća činjenica i teško da će to uočiti na prvu. Ovaj teorem možemo dokazati koristeći teorem o polovištu, no do problema dolazi kada učenici trebaju uvidjeti gdje na crtežu trebaju povući dodatnu crtu ili više crta kako bi pomoću toga mogli napraviti poveznicu s nekim poznatim rezultatom. Općenito je to najveći problem pri dokazivanjima u geometriji jer ne postoji "pravilo" koje kaže gdje treba povući dodatnu crtu koja bi ih navela na poznatu činjenicu koju mogu iskoristit pri dokazivanju.

U ovom primjeru je potrebno povući dužinu BD koja je dijagonala početnog četverokuta $ABCD$ kao što je prikazano na desnoj slici. Dobiju se dva trokuta, $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ na koje se može primijeniti teorem o polovištu. Posljedica toga je da su duljine dužina EH i FG jednake jer iznose $\frac{1}{2}BD$ te su obje paralelne s dužinom BD. Iz činjenica da su dužine EH i FG jednake duljine i paralelne, slijedi da je četverokut $EFGH$ paralelogram.

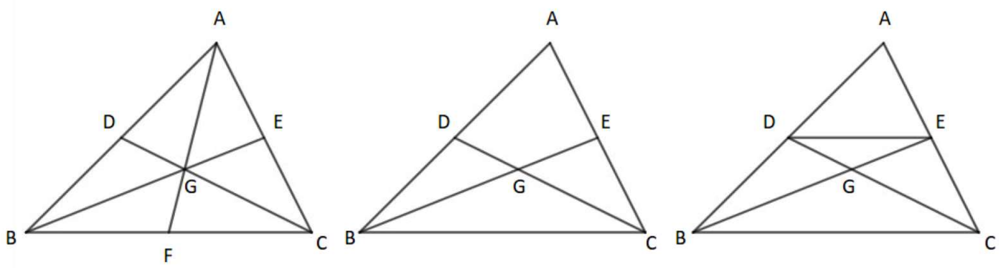
Primjer 8. Na slici 9 prikazan je drugi rezultat koji uključuje polovište jednog para suprotnih stranica u paralelogramu.



Slika 9: *Presijecanje dijagonale paralelograma*

Točka F je polovište stranice AB, a točka E polovište stranice CD paralelograma $ABCD$. G i H su točke u kojima dužine DF i BE sijeku dijagonalu AC. U ovom primjeru teorema o polovištu, nije potrebno povlačiti dodatne crte kao u prethodnom, nego problem nastaje u pronalasku dva relevantna trokuta, $\triangle ABH$ i $\triangle CDG$. Do tog zaključka se može doći uz činjenicu da su DF i BE paralelne, budući da je $ABCD$ paralelogram. Kako bi pomogli učenicima pri ovakvim primjerima, mogu se istaknuti trokuti $\triangle ABH$ i $\triangle CDG$ te na taj način im prepustiti daljnje zaključivanje i povezivanje s poznatim činjenicama. Kako su dužine FG i BH paralelne te točka F raspolavlja dužinu AB, dužine AG i GH su jednake duljine. Na isti način zaključujemo da su jednake duljine dužine CH i HG u trokutu CDG. To povlači da su sve tri dužine AG, GH i HC jednakih duljina, a time je dijagonala AC podijeljena na tri jednaka dijela.

Primjer 9. Na slici 10 na prvom trokutu točke D, E i F su redom polovišta stranica AB, AC i BC trokuta ABC. Težišnice AF, BE i CD tog trokuta se sijeku u zajedničkoj točki označenu s G. Ta točka je težište trokuta i ona dijeli težišnice trokuta u omjeru $2:1$.



Slika 10: *Prikaz težišnica trokuta koristeći teorem o polovištu*

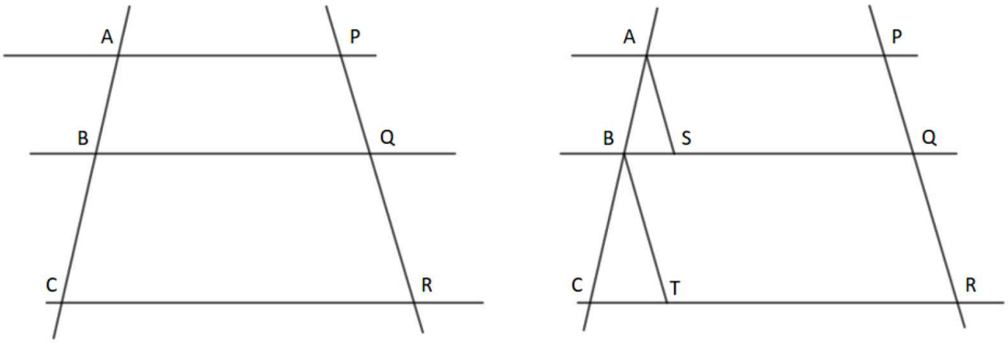
Problem ovog primjera je dokazati podudarnost i omjer 2 : 1. Osim metode dodavanja dodatnih crta, postoji još jedna metoda za pronalaženje geometrijskih dokaza, a to je uklanjanje pojedinih crta. Na ovom primjeru ćemo vidjeti kako nam može pomoći u dokazu. Na drugom trokutu je uklonjena težišnica AF. Cilj je pokazati da se preostale dvije težišnice sijeku u jednoj točki koja svaku dijeli u omjeru 2 : 1. Tada odmah slijedi da isto vrijedi i za bilo koji drugi par težišnica koje stoga moraju dijeliti zajedničku točku. Prisutnost dviju polovišta u trokutu ukazuje na primjenu teorema o polovištu. Ukoliko se spoje točke D i E kao što je prikazano na trećem trokutu, po teoremu o polovištu slijedi da je $BC = 2DE$ i da je DE paralelna s BC. To povlači da su trokuti $\triangle BCG$ i $\triangle DEG$ slični. Prema tome vrijedi da je $BG = 2GE$ i $CG = 2DG$. Time točka G dijeli obje težišnice u omjeru 2 : 1. Budući da se sličan argument odnosi na položaj točke presijecanja bilo kojeg od parova težišnica, one se moraju presijecati u zajedničkoj točki.

2.4 Teorem o transverzali

Za teorem o transverzali bi se moglo reći da je poopćenje teorema o polovištu.

Teorem 2.2. *Ako je skup od tri paralelna pravca presječen parom crta (transverzala), tada su odgovarajući segmenti linija odsječeni na svakoj u istom omjeru.*

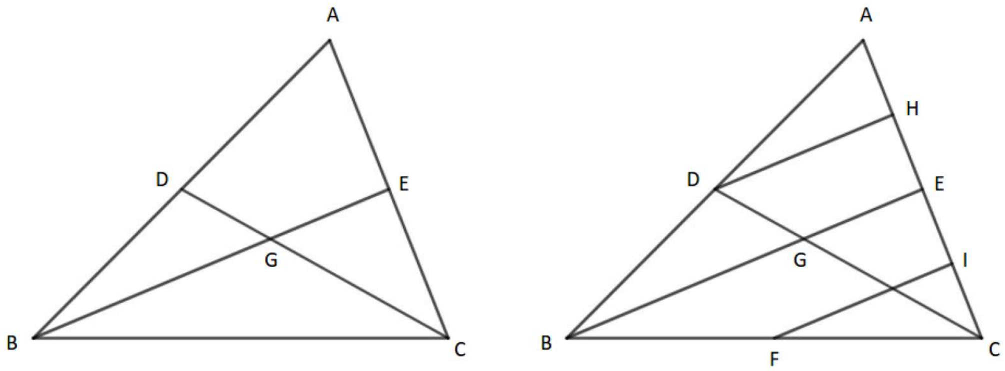
Na lijevoj strani slike 11 su prikazana tri paralelna pravca AP, BQ i CR i dvije transverzale ABC i PQR iz kojih dobijemo omjere $AB : BC$ i $PQ : QR$ koji su jednaki.



Slika 11: *Teorem o transverzali*

Na desnoj strani slike 11 se mogu uočiti dva slična trokuta, $\triangle ABS$ i $\triangle BCT$. AS i BT su povučene na način da budu paralelne s transverzalom PQR. Na taj način se mogu vidjeti jednaki omjeri koji su spomenuti.

Teorem o transverzali je vrlo koristan u slučajima kada su u pitanju paralele koje su jednako razmaknute. Na jednostavan način se može iskoristiti pri dokazu svojstva težišnica i time učenicima približiti svojstvo težišnice kako bi ga koristili s razumijevanjem i vizualno si ga predočili. Na slici 12 je prikazan dokaz svojstva težišnice trokuta koristeći teorem o transverzali.



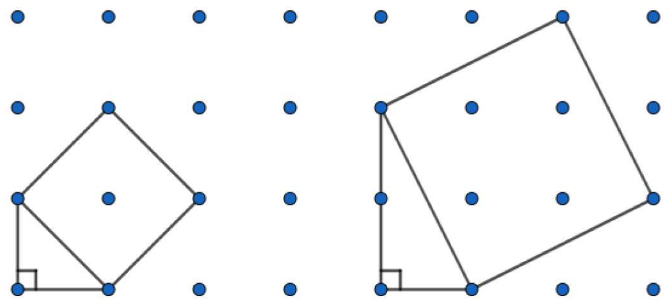
Slika 12: *Svojstvo težišnica trokuta dokazano pomoću teorema o transverzali*

Na lijevoj strani slike 12 se nalazi trokut ABC s D i E kao polovištima stranica AB i AC te točkom G koja je sjecište težišnica BE i CD. Na desnoj strani slike 12 je stranica AC podijeljena na četiri jednaka dijela na način da su točke H i I polovišta redom dužina AE i EC, gdje je E polovište stranice AC. S točkom F je označeno polovište stranice BC. Dužine DH, BE i FI su paralelne te nam teorem o polovištu kaže da je CD podijeljena na tri jednaka dijela te da točka G dijeli CD u omjeru $2:1$.

3 Pitagorin poučak

3.1 Predstavljanje problema

Najbolji oblik uvođenja nove teme, pojma ili nekog problema je onaj u kojem učenici sami otkrivaju. Ponekad je to zahtjevno i nije uvijek uspješno kod svih učenika, ali time učenike potičemo na zaključivanje i razmišljanje u nekom smjeru koji do tada nisu koristili. Ovakvim uvođenjem novih tema i pojmova njihovo znanje često ostaje dugotrajno i naučeno je s puno više razumijevanja. Pitagorin poučak je jedan od tema koje su najbolji primjer gdje učenici sami mogu doći do rezultata istraživajući neke primjere. Učenici trebaju istražiti duljinu hipotenuze za dani pravokutni trokut. Najjednostavniji pravokutni trokut je jednakokračan s dvije jednake stranice jedinične duljine. Nije odmah očito kako pronaći duljinu hipotenuze, osim mjerenja, ali to je problem koji učenici mogu postaviti kao prvi korak prema pronalasku rješenja. Ako se taj trokut nacrta na kvadratnoj mreži, nije teško uočiti kvadrat na hipotenuzi prikazanoj na lijevoj strani slike 13. Vidljivo je da površina tog kvadrata iznosi 2, a duljina hipotenuze $\sqrt{2}$.



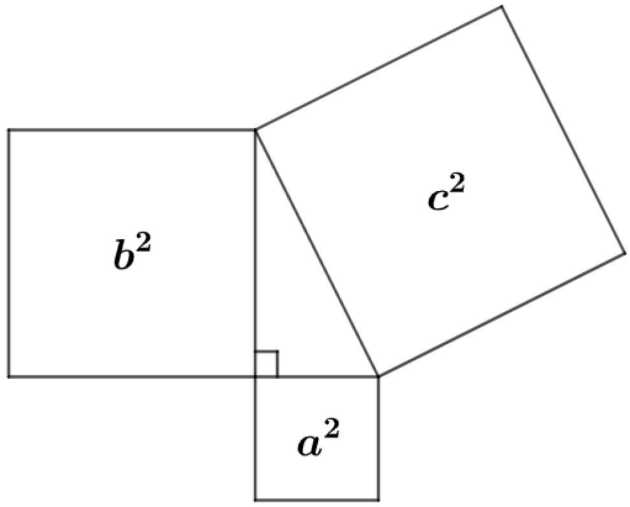
Slika 13: *Koliko je dugačka hipotenuza?*

Ova ideja korištenja površine kvadrata nad hipotenuzom, koji uključuje crtanje pravokutnih trokuta unutar kvadratne mreže, bila je poznata Babiloncima, te u Kini i Indiji mnogo prije vremena Pitagore. Na desnoj strani slike 13 prikazan je trokut sa stranicama duljine 1 i 2, što rezultira kvadratom nad hipotenuzom površine 5. U ovom primjeru učenicima neće biti toliko očito pronaći površinu ovoga kvadrata, kao što je to bilo u prijašnjem primjeru. Postoje dva moguća načina za pronalazak površine objašnjena na početku poglavlja 6 u knjizi [4]. Jedna od strategija pronalaska površine je rastavljanje kvadrata na jednostavnije oblike, a druga da se kvadrat okruži većim kvadratom. Još jedna mogućnost samostalnog zaključivanja je pomoću tablice gdje učenici mogu potražiti vezu između površine kvadrata i duljina dviju stranica trokuta.

Stranice	Kvadrat	Stranice	Kvadrat	Stranice	Kvadrat
1, 1	$2 = 1 + 1$	2, 1	$5 = 4 + 1$	3, 1	$10 = 9 + 1$
1, 2	$5 = 1 + 4$	2, 2	$8 = 4 + 4$	3, 2	$13 = 9 + 4$
1, 3	$10 = 1 + 9$	2, 3	$13 = 4 + 9$	3, 3	$18 = 9 + 9$
1, 4	$17 = 1 + 16$	2, 4	$20 = 4 + 16$	3, 4	$25 = 9 + 16$
1, 5	$26 = 1 + 25$	2,5	$29 = 4 + 25$	3, 5	$34 = 9 + 25$

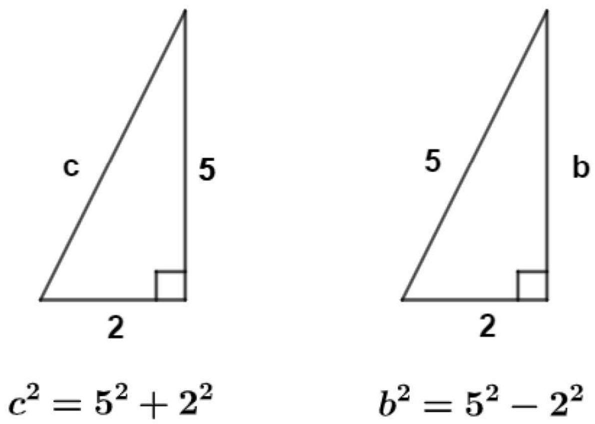
Tablica 2: Pronalaženje veza između kvadrata stranica i stranica

Kada učenicima Pitagorin poučak prikažemo kao algebarsku formulu $a^2 + b^2 = c^2$, gdje su a i b dvije kraće stranice pravokutnog trokuta s hipotenuzom c, rezultat treba prikazati i u geometrijskom smislu kao odnos između kvadrata nad stranicama pravokutnog trokuta. Na taj način ćemo vizualno učenicima moći približiti bolje razumijevanje Pitagorinog poučka.



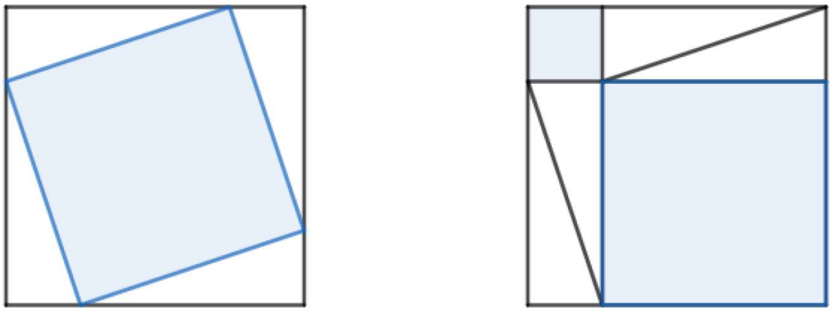
Slika 14: *Pitagorin poučak:* $a^2 + b^2 = c^2$

Kako bi se učenicima proširilo njihovo znanje o Pitagorinom poučku i kako bi ga bolje shvatili, učenici trebaju provesti određeno vrijeme radeći na numeričkim primjerima, računajući jednu stranu pravokutnog trokuta s obzirom na ostale dvije stranice. Ti računi bi trebali biti jednostavni, ali ono što može biti veliki izvor problema je odlučivanje treba li zbrajati ili oduzimati, što rezultira zbrkom između para primjera koji uključuju iste brojeve, poput onih u tablici 2. To se često dogodi jer učenici razmišljaju o postupku rješavanja, bez razumijevanja i logičkog zaključivanja. Kako bi to izbjegli sljedeća slika im može pomoći da vide kako će u jednom slučaju rješenje biti veće od 5, a u drugom slučaju manje od 5.



Slika 15: *Pitagorin poučak: zbrajanje ili oduzimanje?*

Učenicima je kod Pitagorina poučka bitno naglasiti da je on rezultat koji se odnosi na površine kvadrata, iako to nije na prvu vidljivo ako se gleda u algebarskom smislu. Može se koristiti na bilo kojem pravokutnom trokutu, bez obzira jesu li mu duljine stranica cjelobrojne. Jedan od gore spomenutih načina za izračunavanje površine kvadrata na hipotenuzom, prikazan na slici 13, je da se kvadrat okruži većim kvadratom. Taj postupak je prikazan na lijevoj strani slike 16. Na njoj se mogu vidjeti četiri sukladna pravokutna trokuta koji okružuju kvadrat, a trokute možemo translatirati na položaje koji su prikazani na desnoj strani slike 16. Iz toga se jasno može uočiti da je zbroj površina dvaju obojenih kvadrata na desnoj slici jednak površini kvadrata nad hipotenuzom na lijevoj strani slike.



Slika 16: *Geometrijski dokaz Pitagorinog poučka*

Ovo je slikovit prikaz Pitagorina poučka, no jedna stvar ostaje nejasna, a to je kako možemo znati da je obojeni oblik na lijevoj strani slike 16 zapravo kvadrat. Sljedeći dijalog to može pojasniti:

Učitelj: Kako znate da je to kvadrat?

Učenik: Ima četiri jednake strane.

Učitelj: Kako znate da su stranice jednake?

Učenik: Ta stranica je uvijek hipotenuza trokuta i ta četiri trokuta su sukladna.

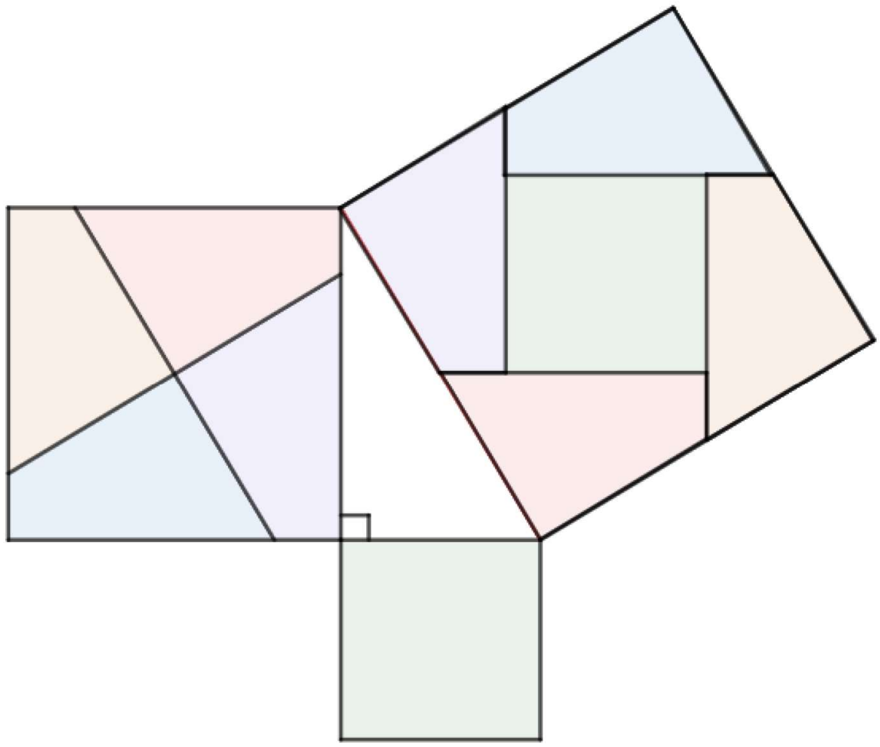
Učitelj: Što još trebaš pokazati?

Učenik: Da su kutovi pravi kutovi.

Učitelj: Kako to možeš pokazati?

Učenik: Pogledajte kutove na donjoj stranici velikog kvadrata. Dva kuta iz trokuta imaju zbroj $90°$, tako da kut od obojenog lika mora biti $90°$

Prije ispitivanje formalnijih načina dokazivanja Pitagorina poučka, postoji još jedan zanimljiva način kako prikazati učenicima geometrijski smisao Pitagorina poučka. Radi se o Perigalovom rastavljanju prikazanom na slici 17. To je domišljat način rastavljanja jednog od manjih kvadrata nad katetom pravokutnog trokuta na četiri dijela. Ta četiri dijela zajedno s manjim kvadratom koji je nad drugom katetom se spajaju u kvadrat nad hipotenuzom. Ovako nešto učenici mogu sami izraditi izrezujući manje dijelove te ih zalijepiti u veliki kvadrat nad hipotenuzom. Na taj način će im ova slika ostati u sjećanju i svakako će im biti zanimljivo i korisno. Učenici će napraviti vlastite verzije rastavljanja, možda odabirući vlastite dimenzije za početni trokut i time dobiti različite primjere. Konstruiranje rastavljanja je jednostavno: kroz središte kvadrata nad katetom povuku se dvije linije, jedna paralelna a druga okomita na hipotenuzu. Time se dobiju četiri dijela kvadrata.



Slika 17: *Perigalovo seciranje*

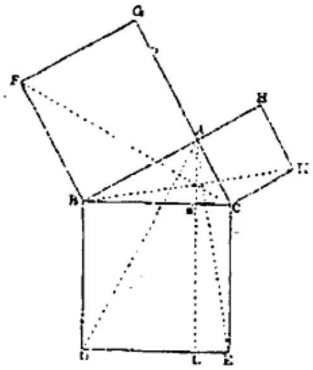
3.2 Dokazivanje Pitagorinog poučka

Pitagorin poučak se pojavljuje kao prijedlog 47 u prvoj knjizi Euklida [6] i pretpostavlja se da je ova verzija dokaza, prikazana na slici 18, potekla od Pitagore.

PROPOSITION XLVII.

THEOREM.—*If a triangle* (ABC) *be right-angled*, the square which is constructed upon the side (BC) subtending the right angle is equal in area to the sum of the squares constructed upon the sides (AB and AC) which form the right angle.

CONSTRUCTION. *On the sides* AB, BC, *and* AC, *construct the squares* BG, BE, *and* CH (*a*); *through* A *draw* AL *parallel to* BD (*b*), *and join* AD *and* FC.

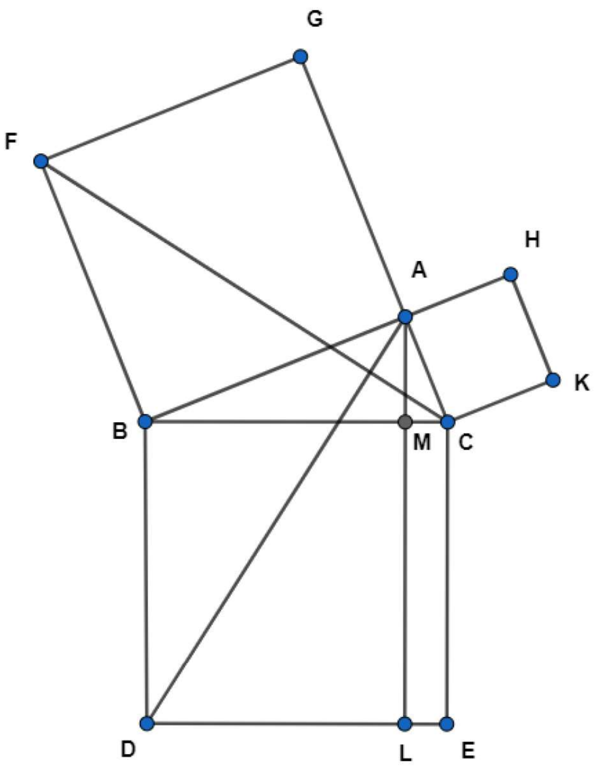


DEMONSTRATION. Because the angles FBA and CBD are both right angles (*a*), therefore they are equal (*c*); add to both the angle ABC, and the angle FBC is equal to ABD (*d*). Because the sides FB and BC are respectively equal to AB and BD (*e*), and the angle FBC to the angle ABD, therefore the triangle FBC is equal to the triangle ABD (*f*). Because the angles GAB and BAC are both right angles, therefore GA and AC are in the same straight line (*g*). Now the parallelogram BL is double of the triangle ABD, because they are on the same base BD and between the same parallels BD and AL (*h*); and the square GB is double of the triangle FBC, being on the same base FB and between the same parallels FB and GC (*h*). But the doubles of equals are equal to one another (*i*), and *therefore the parallelogram* BL *is equal in area to the square* GB. And in the same manner, by joining AE and BK, it may be proved that *the parallelogram* CL *is equal in area to the square* CH. *Therefore the whole square* BDEC *is equal in area to the two squares* BG *and* CH.

(*a*) I. 46.
(*b*) I. 31.
(*c*) Ax. 11.
(*d*) Ax. 2.
(*e*) Def. 28.
(*f*) I. 4.
(*g*) I. 14.
(*h*) I. 41.
(*i*) Ax. 6.

Slika 18: *Pitagorin poučak: Propozicija* 47 *iz prve knjige Euklida [4]*

Način na koji je dokaz predstavljen je teško pratiti, ali je ipak vrlo zanimljiv i stoga je vrijedan pronalaska načina kako ga učiniti pristupačnijim učenicima. Smisao dokaza je pokazati da su površine dvaju manjih kvadrata nad katetama jednake površinama dvaju pravokutnika koji se nalaze na kvadratu nad hipotenuzom. Ti pravokutnici su nastali spuštanjem okomice iz vrha trokuta u kojem se nalazi pravi kut.



Slika 19: *Pitagorin poučak: alternativni pristup za Euklidov dokaz*

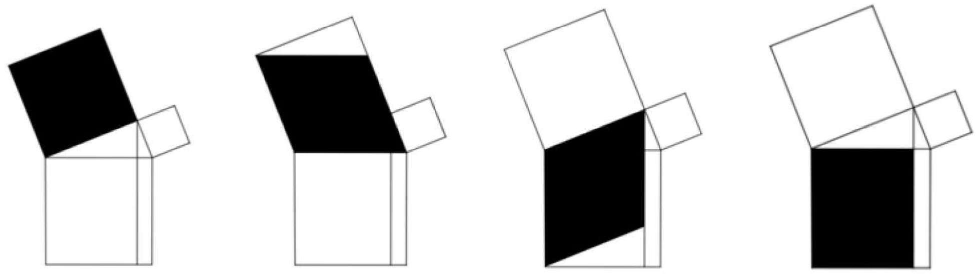
Promatrajući sliku 19, dokaz se može prikazati na sljedeći način:

- Površina je trokuta $\triangle FBC$ jednaka polovini površini kvadrata $ABFG$, a površina je trokuta $\triangle ABD$ jednaka polovini površine pravokutnika $BDLM$, jer u oba slučaja imaju istu bazu i visinu.
- $\triangle FBC$ i $\triangle ABD$ su sukladni prema SKS teoremu o sukladnosti :

$$|FB| = |AB| \text{ (stranice kvadrata)}$$
$$|BC| = |BD| \text{ (stranice kvadrata)}$$
$$\angle FBC = \angle ABD(\angle ABC + 90°).$$

- Kvadrat $ABFG$ i pravokutnik $BDLM$ imaju jednake površine.
- Slično vrijedi i za kvadrat $ACKH$ i pravokutnik $CELM$.
- Dakle, površine dvaju manjih kvadrata nad katetama trokuta su jednake površini kvadrata nad hipotenuzom.

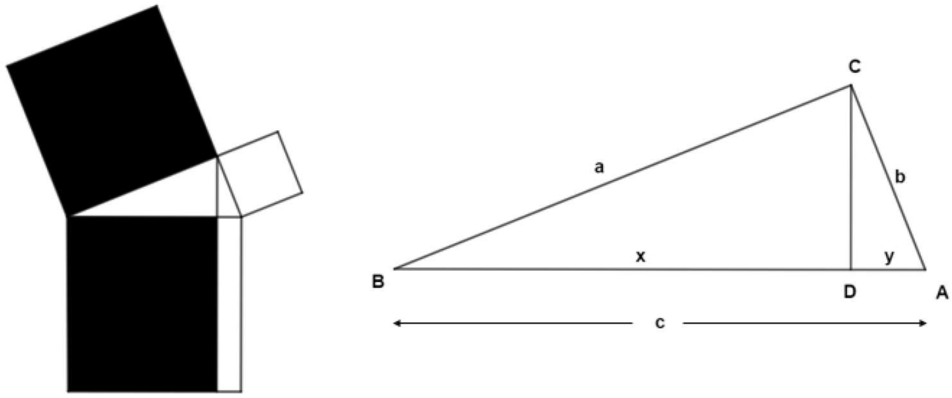
Uobičajeni pisani oblik dokaza često može biti prepreka razumijevanju. To ilustrira Euklidov stil, koji bi trebao biti kratak, ali dovoljan, kako bi cijeli dokaz bio jasan kao i opravdanje svakog koraka. Korištenje boje u skicama i u tekstualnim dijelovima dokaza, radi isticanja bitnih dijelova, dobar je način objašnjavanja dokaza koji ga može učiniti privlačnijim i lakšim za praćenje. Ako se skica prikazuje pomoću softvera za dinamičku geometriju, postoji mogućnost premještanja konfiguracije kako bi se pokazalo da je dokaz još uvijek valjan ako se zadrže njegove bitne značajke. Npr. na slici 19, točka A može biti ograničena na kretanje po skrivenoj kružnici kojoj je $\overline{BC}$ promjer na način da kut u vrhu A ostane pravi kut. U Euklidovom dokazu se koristi niz transformacija kako bi se pokazalo da su odgovarajući likovi jednaki. Na slici 20 su prikazani koraci za dokazivanje jednakosti površina jednog kvadrata i pravokutnika.



Slika 20: *Smicanje i rotacija za dokazivanje Pitagorinog poučka*

U prvom koraku dolazi do translacije, slijedi rotacija za 90°, zatim još jedno smicanje. Svaka ta transformacija ostavlja nepromijenjeno područje. Ovaj dokaz je odličan primjer koji se učenicima može demonstrirati s animiranim nizom dijagrama izrađenim softverom za dinamičku geometriju. To je nešto što učenici ne bi mogli sami primijetiti na samom početku, ali s animacijama ih se može lako zainteresirati i pridobiti njihovu pozornost. Zanimljivo je ove dokaze usporediti s dokazima koji koriste slične trokute kako bi pokazali da odgovarajući kvadrati i pravokutnici imaju jednake površine.

Na lijevoj strani slike 21 se nalaze osjenčani kvadrat i pravokutnik jednakih površina, dok je na desnoj strani uvećani trokut koji se nalazi između tri kvadrata.



Slika 21: *Korištenje sličnih trokuta za dokazivanje Pitagorinog poučka*

Koristeći oznake koje su na slici, potrebno je pokazati da je površina kvadrata a^2 jednaka površini pravokutnika cx. Budući da su $\triangle ABC$ i $\triangle CBD$ slični, možemo koristiti jednake omjere:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a} \Rightarrow a^2 = cx.$$

Na isti način trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ su slični:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b} \Rightarrow b^2 = cy.$$

Spajanjem ova dva rezultata dobili smo Pitagorin poučak:

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y) = c^2.$$

Ovaj se dokaz može prikazati u nešto drugačijem obliku pomoću trigonometrije na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\beta \\ y &= b\cos\alpha \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{aligned}$$

Pomnožimo li obje strane s c, dobijemo:

$$c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha.$$

Pogledamo li $\triangle ABC$ dobijemo sljedeće izraze:

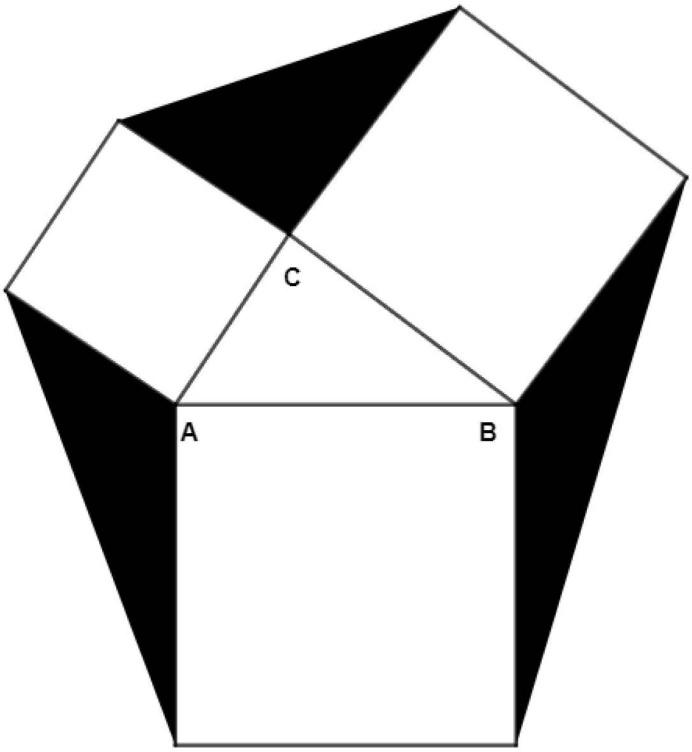
$$a = c\cos\beta$$
$$b = c\cos\alpha$$
$$c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha = a^2 + b^2.$$

Ovakvi dokazi su malo zahtjevniji učenicima, ali nije ih loše pokazati kako bi vidjeli koliko postoji različitih metoda dokazivanja istog poučka. Na taj način proširujemo njihove vidike u području dokazivanja i dajemo im veće mogućnosti biranja smjera razmišljanja kada budu u situaciji da sami trebaju nešto dokazati. Svaki učenik je različit i treba težiti tome da se svako dijete gleda kao pojedinac i prilagodi mu se na neki način. Time ćemo dobiti različita razmišljanja i svatko će izabrati smjer dokazivanja koji je njemu bliži i jednostavniji za shvatiti.

3.3 Neki problemi koji se temelje na Pitagorinom poučku

Pitagorin poučak rezultat je koji se često koristi u rješavanju geometrijskih problema i dokazivanju značajnih rezultata. Iako to često zahtjeva upotrebu algebre ili trigonometrije, uvijek je potrebno prepoznati odgovarajuće trokute i uzeti u obzir druge geometrijske značajke kako bi došli do rješenja. U ovom ćemo potpoglavlju promatrati četiri vrlo različita primjera iz bogate raznolikosti primjera koji će se naći u školskim udžbenicima i drugdje.

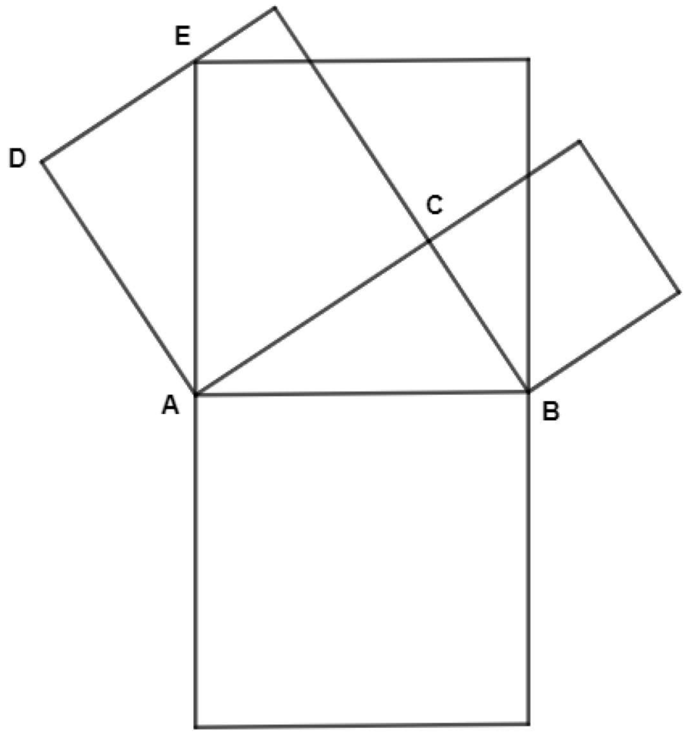
Primjer 10. Webster u [10] opisuje rezultat vezan za kvadrate nad trima stranicama trokuta. Naime, površina svakog od triju osjenčanih trokuta, prikazanih na slici 22, između kvadrata, jednaka je površini trokuta ABC. Ovo je jednostavan primjer koji se može dokazati, izražavanjem površine trokuta ABC u obliku $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, gdje je γ kut pri vrhu C, stranica a je nasuprot vrhu A i stranica b nasuprot vrhu B.



Slika 22: *Iznenađujuće jednake površine*

U gornjem osjenčanom trokutu, mjera kuta pri vrhu C iznosi $180° - \gamma$ što povlači da je površina tog trokuta $\frac{1}{2}ab\sin(180° - \gamma)$, što je jednako $\frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$. Isto se može pokazati i za ostala dva osjenčana trokuta, odnosno njihove površine su jednake površini trokuta u sredini.

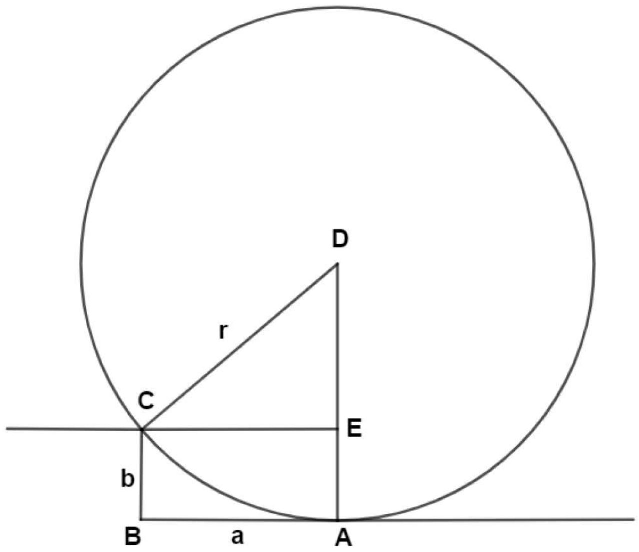
Primjer 11. Schumann i Green u [9] skreću pozornost na svojstvo tri kvadrata nad stranicama pravokutnog trokuta prikazanog na slici 23. Nakon što kvadrat nad hipotenuzom osnosimetrično preslikamo tako da je hipotenuza os simetrije, jedan od vrhova kvadrata koji nisu na hipotenuzi uvijek će ležati na jednom od kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta. Ovaj primjer bi bilo dobro prikazati softverom za dinamičku geometriju, primjenom na različite pravokutne trokute. Rezultat koji se dobije se može objasniti na način da su dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$ sukladni jer imaju dvije stranice jednakih duljina i jednaki kut pri vrhu A.



Slika 23: *Reflektirani kvadrat*

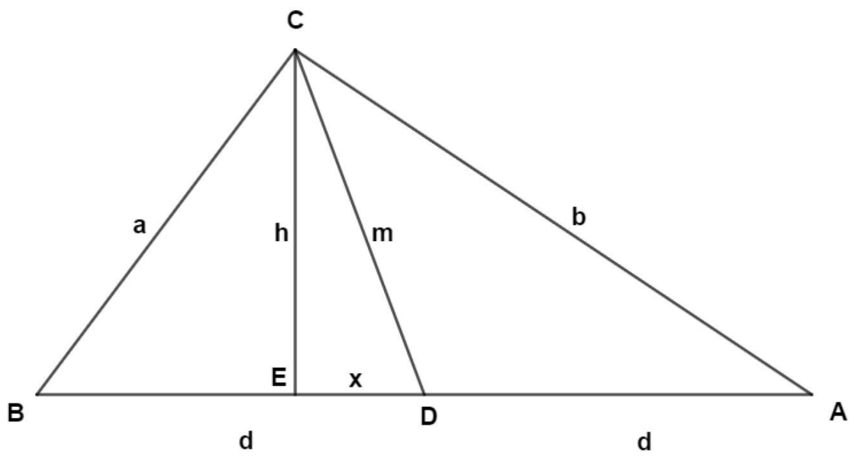
Primjer 12. Metoda pomoću koje se može odrediti polumjer luka kružnice ili kružnice ako je središte nepoznato te se ne može polumjer izmjeriti, prikazana je na slici 24. Slika prikazuje kotač koji dodiruje tlo u točki A i naslonjen je na rub kolnika ili drveni blok u točki C. Ista konfiguracija s parom okomitih pravaca AB i BC, mogla bi se koristiti u odnosu na bilo koji luk kružnice. Ako te dvije dužine označimo s a i b kao na slici, može se doći do radijusa koristeći upravo te dvije stranice. Naime, primjenjujući Pitagorin poučak na pravokutni trokut CDE, dobijemo:

$$r^2 = (r-b)^2 + a^2 \Rightarrow 2br = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \tfrac{a^2+b^2}{2b}.$$



Slika 24: *Pronalaženje radijusa*

Primjer 13. Apolonijev teorem nam daje odnos između duljina težišnica i duljina stranica trokuta.



Slika 25: *Apolonijev teorem*

Na slici 25 točka D je središte stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Uobičajenim zapisom su stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ označene s a i b, dok su s d označene duljine stranica $\overline{BD}$ i $\overline{AD}$ te s m težišnica iz vrha C. Točka E je nožište visine iz vrha C te je ta visina označena s h. U trokutu CDE je dužina $\overline{ED}$ označena s x. Primijenimo li Pitagorin poučak na tri pravokutna trokuta s ove slike, dobit ćemo:

$$\triangle CDE : x^2 + h^2 = m^2 \tag{1}$$

$$\triangle BCE : (d-x)^2 + h^2 = a^2 \tag{2}$$

$$\triangle ACE : (d+x)^2 + h^2 = b^2.$$

Sljedeći korak je zbrajanje (1) i (2) te nakon raspisivanja potrebno je iskoristiti jednakost (1) tako da se lijeva strana jednakosti zamijeni desnom stranom i tada se dobije odnos četiri duljine a, b, d i m koji je poznat kao Apolonijev teorem:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= [(d-x)^2 + h^2] + [(d+x)^2 + h^2] \\ &= 2d^2 + 2x^2 + 2h^2 \\ &= 2d^2 + 2m^2 \\ &= 2(d^2 + m^2). \end{aligned}$$

Ako iskoristimo činjenicu da je $2d = c$ u trokutu ABC, rezultat se može zapisati u obliku:

$$m^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - \tfrac{1}{4}c^2.$$

Označimo li ostale dvije težišnice u trokutu ABC s l i n dobijemo zanimljiv rezultat koji je zapisan na sljedeći način:

$$l^2 + m^2 + n^2 = \tfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

4 Planimetrija u osnovnoškolskim udžbenicima

4.1 Povećanje i sličnost u udžbenicima

Sličnost je jedna od temeljnih planimetrijskih ideja s bogatom primjenom na svakodnevne situacije, kao i obilježje dokaza, teorema i problema. Njena izravna veza s transformacijom povećanja pruža alternativni pristup koji uključuje faktore razmjera. To je bolja ideja jer u samom početku može biti lakši način za shvatiti sličnost od pristupa preko jednakih omjera. Također se lako može nastaviti primjenjivati na probleme koji se tiču površine i volumena u sličnim oblicima i čvrstim tijelima.

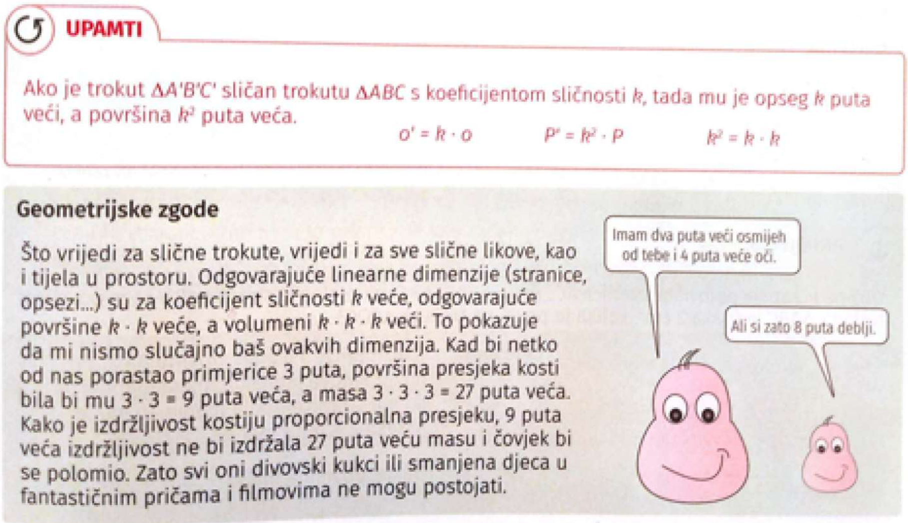
Kao i u svim područjima geometrije, nove ideje trebale bi biti popraćene praktičnim zadacima. Precizno crtanje, korištenje stvarnih oblika i čvrstih tijela, izrada raznih modela te upotreba softvera za dinamičku geometriju, imaju veliki utjecaj u razvoju osnovnog intuitivnog osjećaja za ideju povećanja i sličnosti.

Svakodnevno značenje riječi sličnost podrazumijeva određenu istovjetnost. Iz tog razloga je vrlo moguće da dođe do zbunjenosti kod učenika jer je matematičko značenje sličnosti različito od onoga koje učenici svakodnevno koriste. U svakodnevnom će jeziku učenici reći da su neki oblici, na primjer skup pravokutnika, slični ili da imaju isti oblik jer svi imaju pravi kut i četiri stranice. S druge strane, značenje matematičke sličnosti zahtjeva da oblici imaju jednak broj stranica i jednake kutove, ali osim toga, zahtjeva i da odgovarajuće duljine budu u jednakom omjeru. Proporcionalnost je ključno svojstvo sličnosti koje učenicima zadaje najviše problema. Ono je glavni razlog povezivanja sličnosti s povećanjem i uvođenjem faktora razmjera jer nudi jednostavniji pristup od jednakih omjera. Prvo treba početi s primjerima koji uključuju udvostručavanje i druge jednostavne cjelobrojne faktore razmjera, koji će učenicima biti lakši za shvatiti. Kasnije je moguća primjena s necjelobrojnim faktorom razmjera, no razumijevanje takvih primjera ovisi o tome jesu li učenici stekli stvarno razumijevanje razlomaka i njihovu uporabu. Primjeri koji uključuju prepolavljanje većinom su jednostavniji i puno prirodniji učenicima od onih koji uključuju bilo koji drugi razlomak.

Uz uobičajene primjere koji se koriste u određivanju faktora razmjera i njegovoj upotrebi za izračunavanje duljina, te u kasnijoj fazi povezivanja s površinom i volumenom, trebali bi se koristiti brojni primjeri koji se odnose na poznate situacije iz svakodnevnog života kako bi se razvilo razumijevanje i tečnost. Važno je ponuditi motivirajuće primjere koji potiču znatiželju kod učenika i imaju vizualnu privlačnost te potiču učenike na samostalno razmišljanje.

Kako bismo provjerili što se sve od navedenog nalazi u udžbenicima za osnovnu školu i koliko toga se zaista primjenjuje u praksi poučavanja geometrije, analizirat ćemo dva udžbenika. Radi se o udžbenicima Matematički izazovi 8, ALFA [7] i Matematika 8, Školska knjiga [1].

Povećanje o kojem smo do sada govorili, u udžbenicima se ne spominje kao uvod u sličnost. Alfin udžbenik nema posebnu lekciju koja uključuje povećanje, ali ipak unutar lekcije Opseg i površina sličnih trokuta, nalazi se primjer koji povlači paralelu s primjerom 1 iz poglavlja 2.1.


UPAMTI

Ako je trokut $\Delta A'B'C'$ sličan trokutu ΔABC s koeficijentom sličnosti k, tada mu je opseg k puta veći, a površina k^2 puta veća.

$$o' = k \cdot o \qquad P' = k^2 \cdot P \qquad k^2 = k \cdot k$$

Geometrijske zgode

Što vrijedi za slične trokute, vrijedi i za sve slične likove, kao i tijela u prostoru. Odgovarajuće linearne dimenzije (stranice, opsezi...) su za koeficijent sličnosti k veće, odgovarajuće površine $k \cdot k$ veće, a volumeni $k \cdot k \cdot k$ veći. To pokazuje da mi nismo slučajno baš ovakvih dimenzija. Kad bi netko od nas porastao primjerice 3 puta, površina presjeka kosti bila bi mu $3 \cdot 3 = 9$ puta veća, a masa $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ puta veća. Kako je izdržljivost kostiju proporcionalna presjeku, 9 puta veća izdržljivost ne bi izdržala 27 puta veću masu i čovjek bi se polomio. Zato svi oni divovski kukci ili smanjena djeca u fantastičnim pričama i filmovima ne mogu postojati.

Slika 26: *Primjer povećanja [7]*

Unutar udžbenika Školske knjige u lekciji Sličnost trokuta i mnogokuta, nalazi se primjer uvećanja i smanjivanja šesterokuta s faktorom razmjera 2. Primjer je prikazan na slikama 27 i 28. Vrlo je sličan primjeru 2 iz poglavlja 2.1. U udžbeniku se nakon tog primjera nalazi zadatak koji traži uvećanje zadanog šesterokuta 1.5 puta i umanjenje 3 puta, što učenicima predstavlja veliki izazov.

Uvećavanje i smanjivanje mnogokuta

Mnogokute je jednostavno uvećati ili umanjiti koristeći se kvadratnom mrežom ili programom dinamične geometrije.

12. Primjer Uvećavanje i umanjivanje šesterokuta

Nacrtajmo pravilni šesterokut *ABCDEF*. Zatim nacrtajmo sličan pravilni šesterokut *A'B'C'D'E'F'* kojemu su duljine stranica:

a / 2 puta veće od duljina odgovarajućih stranica šesterokuta *ABCDEF*

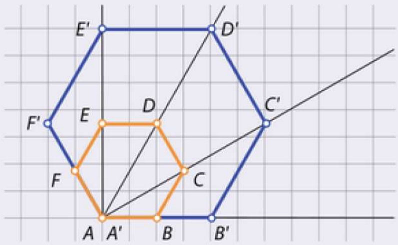
b / 2 puta manje od duljina odgovarajućih stranica šesterokuta *ABCDEF*.

Slika 27: *Primjer uvećanja i smanjenja šesterokuta [1]*

Rješenje:

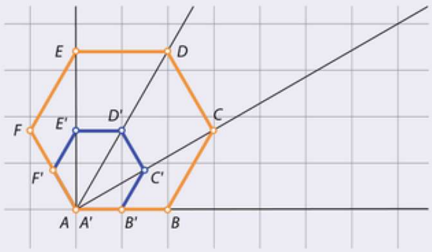
Slični šesterokuti nacrtani su tako da je A = A'. Povučeni su polupravci *AB*, *AC*, *AD*, *AE* i *AF* na koje su nanesene uvećane ili umanjene stranice.

a /



U ovom je primjeru koeficijent sličnosti *k* jednak 2, tj. $k = 2$. Pravilni šesterokut *ABCDEF* uvećan je 2 puta na način da su mu duljine stranica uvećane dva puta.

b /

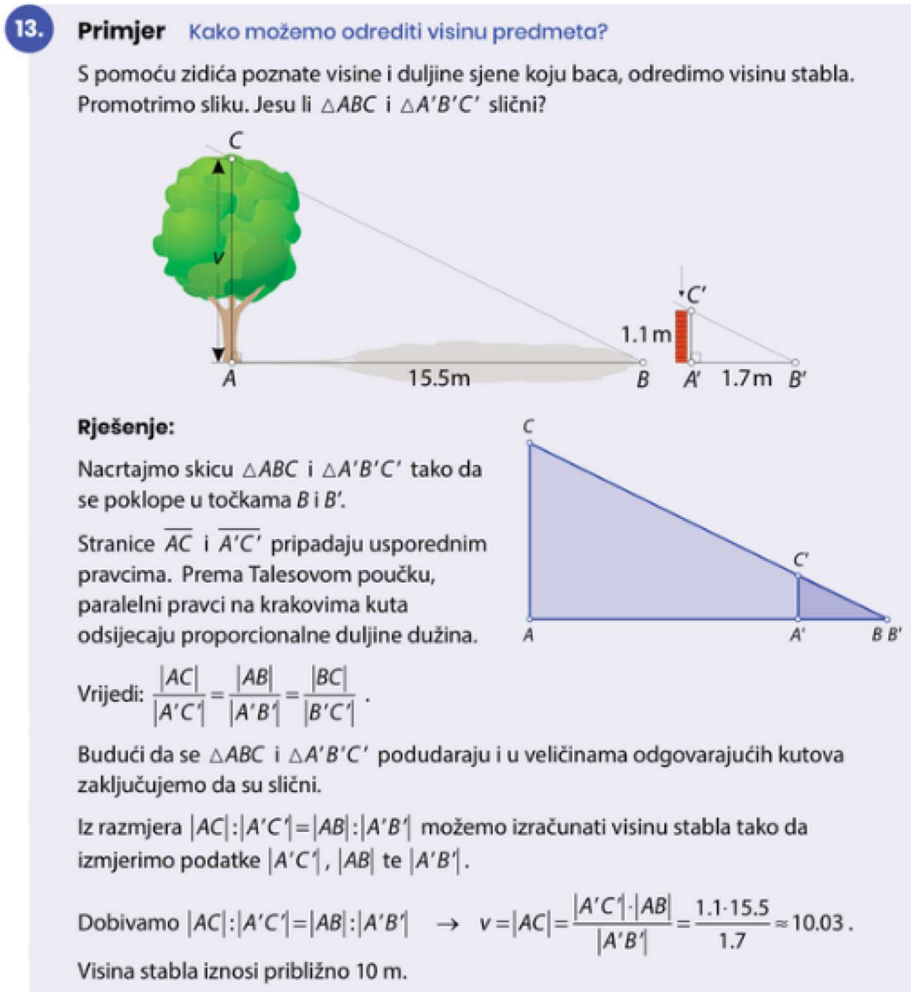


U ovom je primjeru koeficijent sličnosti *k* jednak $\frac{1}{2}$, tj. $k = \frac{1}{2}$. Pravilni šesterokut *ABCDEF* umanjen je 2 puta na način da su mu duljine stranica umanjene dva puta.

Slika 28: *Rješenje primjera [1]*

Što se tiče sličnosti, oba udžbenika sadrže lekciju pod nazivom Sličnost trokuta i mnogokuta te Primjene sličnosti. Alfin udžbenik sadrži lekciju Poučci o sličnosti trokuta, dok to nije slučaj u udžbeniku Školske knjige.

Oba udžbenika imaju vrlo slične primjere primjene sličnosti, koji su na tragu primjera 4 u poglavlju 2.2. Primjer iz udžbenika Školske knjige prikazan je na slici 29. Jedan je od primjera iz svakodnevnog života za koje smo već spomenuli koliko su bitni u učenju i poučavanju novog gradiva. Samim time učenici shvaćaju važnost tog gradiva i mogućnost njegove primjene u svakodnevnim situacijama.



13. **Primjer** Kako možemo odrediti visinu predmeta?

S pomoću zidića poznate visine i duljine sjene koju baca, odredimo visinu stabla. Promotrimo sliku. Jesu li $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ slični?

Rješenje:

Nacrtajmo skicu $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ tako da se poklope u točkama B i B'.

Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{A'C'}$ pripadaju usporednim pravcima. Prema Talesovom poučku, paralelni pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne duljine dužina.

Vrijedi: $\frac{|AC|}{|A'C'|}=\frac{|AB|}{|A'B'|}=\frac{|BC|}{|B'C'|}$.

Budući da se $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudaraju i u veličinama odgovarajućih kutova zaključujemo da su slični.

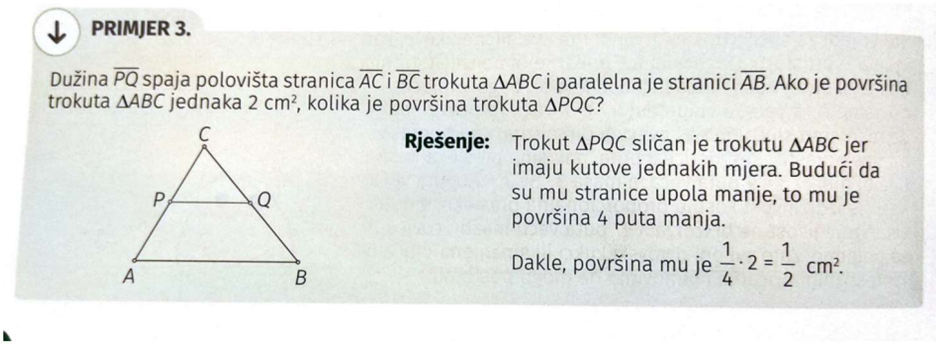
Iz razmjera $|AC|:|A'C'|=|AB|:|A'B'|$ možemo izračunati visinu stabla tako da izmjerimo podatke $|A'C'|$, $|AB|$ te $|A'B'|$.

Dobivamo $|AC|:|A'C'|=|AB|:|A'B'| \rightarrow v=|AC|=\frac{|A'C'|\cdot|AB|}{|A'B'|}=\frac{1.1\cdot 15.5}{1.7}\approx 10.03$.

Visina stabla iznosi približno 10 m.

Slika 29: *Primjer sličnosti [1]*

Teorem o polovištu se ne spominje u udžbenicima niti u jednom primjeru, ali to ne znači da se pri obradi ovog gradiva učenicima ne može spomenuti. Prilikom rješavanja pojedinog primjera tijekom nastavnog sata, može se izreći spomenuti teorem, kao zanimljiva činjenica koju će učenici zapamtiti. Jedan takav primjer je u Alfinom udžbeniku unutar lekcije Opseg i površina sličnih trokuta, prikazan na slici 30.



PRIMJER 3.

Dužina $\overline{PQ}$ spaja polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ΔABC i paralelna je stranici $\overline{AB}$. Ako je površina trokuta ΔABC jednaka 2 cm², kolika je površina trokuta ΔPQC?

Rješenje: Trokut ΔPQC sličan je trokutu ΔABC jer imaju kutove jednakih mjera. Budući da su mu stranice upola manje, to mu je površina 4 puta manja.

Dakle, površina mu je $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ cm².

Slika 30: *Primjer za korištenje teorema o polovištu [7]*

4.2 Pitagorin poučak u udžbenicima

Pitagorin poučak jedan je od najpoznatijih i najupečatljivijih teorema u matematici sa širokim rasponom primjene i od matematičkog i od praktičnog značaja. Učenici trebaju savladati što poučak govori, odakle dolazi taj rezultat, kako ga mogu koristiti i kada ga mogu upotrijebiti. U većini slučajeva, učenici lakše nauče što poučak kaže i kako ga koristiti. Za sve ostalo je potrebno više truda i rada kako s učenikove strane, tako i od strane učitelja. Za Pitagorin poučak je važno istražiti kako se taj rezultat može ostvariti na različite načine, empirijske i deduktivne.

Ponekad je učenicima teško shvatiti zašto nešto vrijedi te objasniti zbog čega smijemo u matematici nešto napraviti, kao što je u linearnim jednadžbama dozvoljeno broj "prebaciti na drugu stranu" i pri tome mu promijeniti predznak. Bitno je da pri tome učitelj objasni koja je pozadina toga, zbog čega se nešto smije upotrijebiti i koji je smisao toga što radimo. Pogledamo li udžbenike za osnovnu školu, svaki od njih se u nečemu razlikuje. Kao i u prethodnom potpoglavlju usporedit ćemo dva udžbenika za osmi razred osnovne škole sa svime što se spominje u ovom radu vezano za

Pitagorin poučak. Radi se o udžbenicima Matematički izazovi 8, Alfa [8] i Matematika 8, školska knjiga [2]. Prva velika razlika je u tome što se u udžbeniku Alfe u prve dvije lekcije ponavlja pretvaranje mjernih jedinica i neke značajke pravokutnog trokuta, dok u drugom udžbeniku nema niti jedne lekcije ponavljanja. S druge strane u školskoj knjizi se nalaze dokazi Pitagorina poučka kojih u Alfi nema. Naime, U školskoj knjizi nema ponavljanja o mjernim jedinicama i preračunavanju kao u Alfinom udžbeniku, nego samo uvodni dio ispod naslova Pitagorin poučak koji ponavlja osnovne činjenice o pravokutnom trokutu. Potrebno je podsjetiti učenike kako su mjerne jedinice za duljinu i površinu bitne za ovu nastavnu cjelinu, no kroz zadatke se učenici mogu podsjetiti tog dijela gradiva. Ono što je nama zanimljivo za Pitagorin poučak u ovom radu je njegov dokaz. Kao što je već spomenuto, dokaz Pitagorina poučka pronalazimo u udžbeniku Školske knjige pod oznakom ISTRAŽITE! Uz popratni tekst koji govori o vrstama dokaza Pitagorina poučka, nalazi se slika dokaza kojeg smo spomenuli u radu i prikazan je na slici 19.

Dokaz Pitagorina poučka

Matematičari su stoljećima nastojali dokazati Pitagorin poučak trudeći se pronaći što bolji dokaz. Poznato je više od stotinu načina dokaza Pitagorina poučka, a i u današnje vrijeme pojavljuju se novi dokazi.

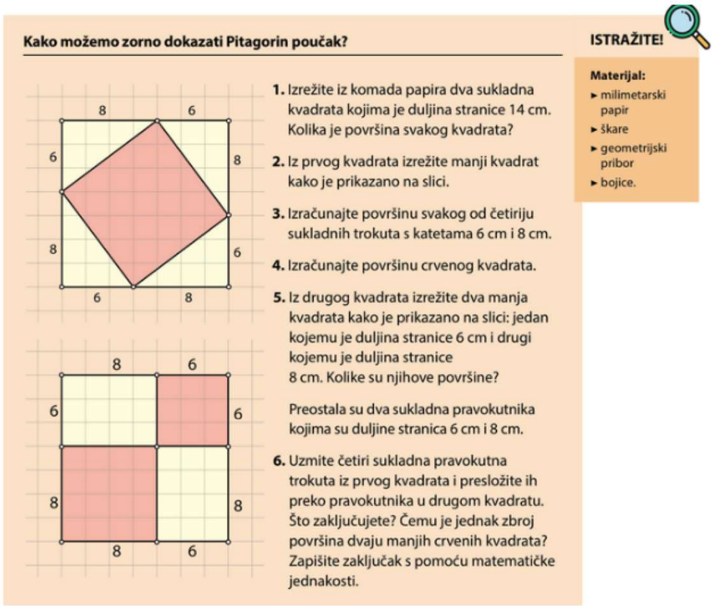
Postoje **algebarski** i **geometrijski dokazi** Pitagorina poučka koji zahtijevaju određenu razinu matematičkog znanja. To su tzv. strogo matematički dokazi.

Zorni dokazi, tj. dokazi „bez riječi" su jednostavan način dokazivanja Pitagorina poučka. Uglavnom se u tu svrhu koriste metode izrezivanja ili presavijanja papira te različiti programi dinamičke geometrije.

Slika 31: *Dokaz Pitagorina poučka [2]*

Osim slike dokaza nema dodatnih pojašnjenja, no to ostavlja učitelju prostor da zainteresira učenike i potakne ih da sami istraže ideju dokaza kojeg ova slika predstavlja.

Ono što je detaljno objašnjeno u udžbeniku je zorni dokaz, odnosno dokaz "bez riječi" prikazan na slici 32.


Kako možemo zorno dokazati Pitagorin poučak?

1. Izrežite iz komada papira dva sukladna kvadrata kojima je duljina stranice 14 cm. Kolika je površina svakog kvadrata?
2. Iz prvog kvadrata izrežite manji kvadrat kako je prikazano na slici.
3. Izračunajte površinu svakog od četiriju sukladnih trokuta s katetama 6 cm i 8 cm.
4. Izračunajte površinu crvenog kvadrata.
5. Iz drugog kvadrata izrežite dva manja kvadrata kako je prikazano na slici: jedan kojemu je duljina stranice 6 cm i drugi kojemu je duljina stranice 8 cm. Kolike su njihove površine?

   Preostala su dva sukladna pravokutnika kojima su duljine stranica 6 cm i 8 cm.
6. Uzmite četiri sukladna pravokutna trokuta iz prvog kvadrata i presložite ih preko pravokutnika u drugom kvadratu. Što zaključujete? Čemu je jednak zbroj površina dvaju manjih crvenih kvadrata? Zapišite zaključak s pomoću matematičke jednakosti.

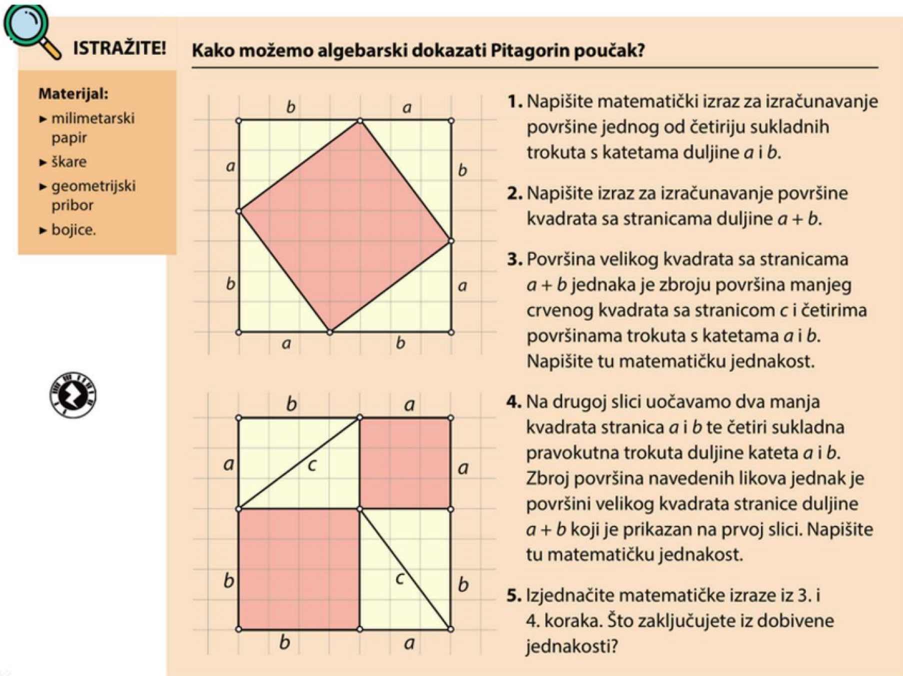
ISTRAŽITE!

Materijal:
- milimetarski papir
- škare
- geometrijski pribor
- bojice.

Slika 32: *Dokaz bez riječi [2]*

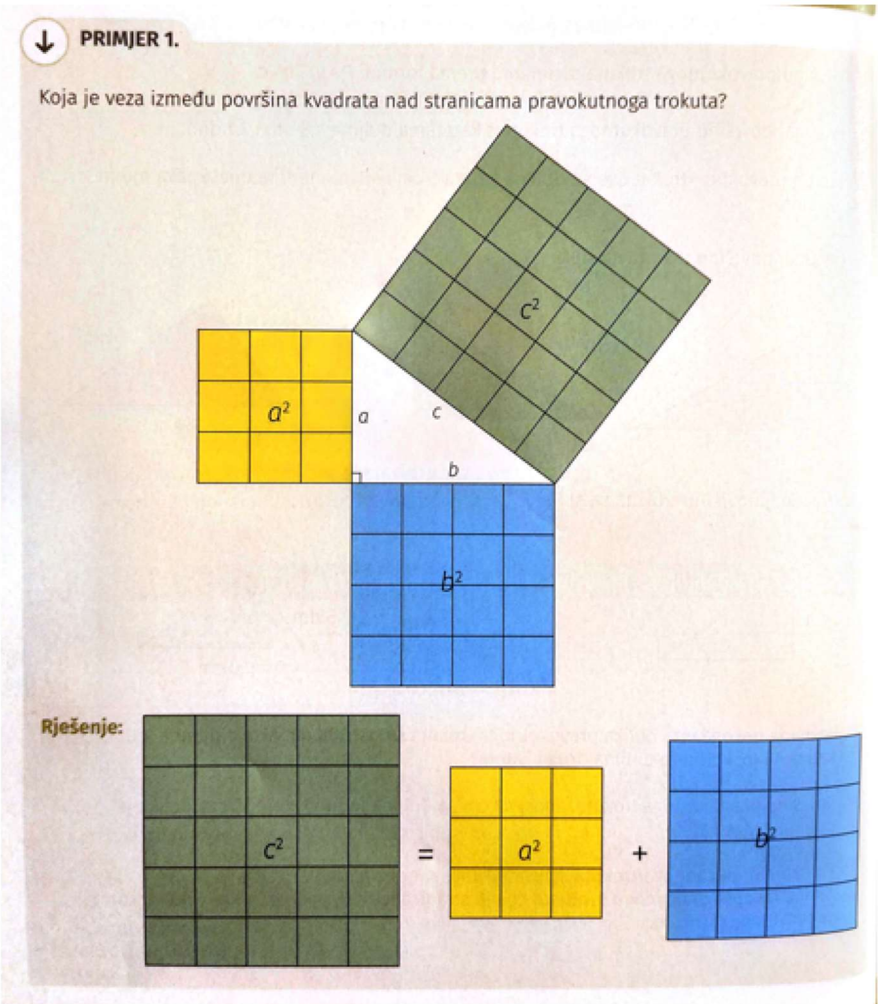
Već smo ranije u radu spomenuli ovaj dokaz i prikazan je na slici 16. U ovom udžbeniku je taj dokaz osmišljen na način da učenici, izrezivanjem i spajanjem pojedinih dijelova, shvate geometrijski smisao Pitagorinog poučka. Ovaj način je prilagođen za učenike ove dobi i njihove kognitivne sposobnosti, što je bolje od same slike kao dokaza ili teksta koji opisuje tu sliku. Ovakav način dokazivanja je za djecu ove dobi zanimljiviji, zabavniji i lakši za zapamtiti, a ipak će učenici dokazivanjem povećati razumijevanje teorema, razviti važne koncepte i strategije te poboljšati svoje iskustvo u geometriji.

Osim ovog dokaza bez riječi, u udžbeniku se pojavljuje i algebarski dokaz Pitagorina poučka. Većini učenika je ovaj način dokazivanja manje drag, ali njegov smisao nije da ga učenici nauče nego da im pomogne u stvaranju intuitivnog osjećaja za rezultat. Način na koji je opisan algebarski dokaz Pitagorina poučka iz udžbenika prikazan je na slici 33.



Slika 33: *Algebarski dokaz [2]*

Osim dokaza Pitagorina poučka, u oba udžbenika se pojavljuje geometrijski prikaz Pitagorina poučka kojeg smo već spomenuli u radu i prikazan je slici 14. Razlika je u tome što je u udžbeniku Školske knjige slika nakon iskazanog Pitagorinog poučka i njegove formule, a u udžbeniku Alfe je taj geometrijski prikaz zamišljen kao uvod i motivacija prije iskaza i formule. Za učenike i njihovo shvaćanje geometrijskog smisla poučka, slika iz Alfinog udžbenika je jasnija jer svaki je kvadrat ispunjen manjim kvadratima koje mogu prebrojati i uočiti da formula zaista vrijedi.



Slika 34: *Geometrijski prikaz Pitagorina poučka [8]*

Vratimo li se na sliku 15 i problem koji učenici imaju prilikom odlučivanja trebaju li zbrojiti ili oduzeti dan par duljina stranica trokuta kako bi izračunali duljinu treće stranice, dolazimo opet do važnosti razumijevanja danog poučka i same formule. U udžbeniku Školske knjige nema niti jedne preoblikovane formule Pitagorinog poučka, $b^2 = c^2 - a^2$ ili $a^2 = c^2 - b^2$, koju će učenici koristiti u zadacima gdje se Pitagorin poučak primjenjuje na ostale geometrijske likove. U zadacima u kojima se primjenjuje poučak i potrebne su ove dvije jednakosti, zadaci su riješeni na način da su unutar formule Pitagorinog poučka uvršteni poznati podaci i do nepoznate duljine se dođe rješavanjem jednadžbe, kao što je prikazano na slici 35.

10. Primjer Izračunavanje nepoznate duljine katete pravokutnog trokuta

Izračunajmo nepoznatu duljinu katete pravokutnog trokuta ako su poznate duljina druge katete i duljina hipotenuze.

a / $a = 15$ cm, $c = 17$ cm **b /** $b = 45$ mm, $c = 53$ mm

Rješenje:

a / U izraz $a^2 + b^2 = c^2$ uvrstimo poznate vrijednosti kao bismo izračunali duljinu katete b.

$a = 15$ cm
$c = 17$ cm
$b = ?$

$$15^2 + b^2 = 17^2$$
$$225 + b^2 = 289$$
$$b^2 = 289 - 225$$
$$b^2 = 64$$
$$b = \sqrt{64} \Rightarrow b = 8 \text{ cm}$$

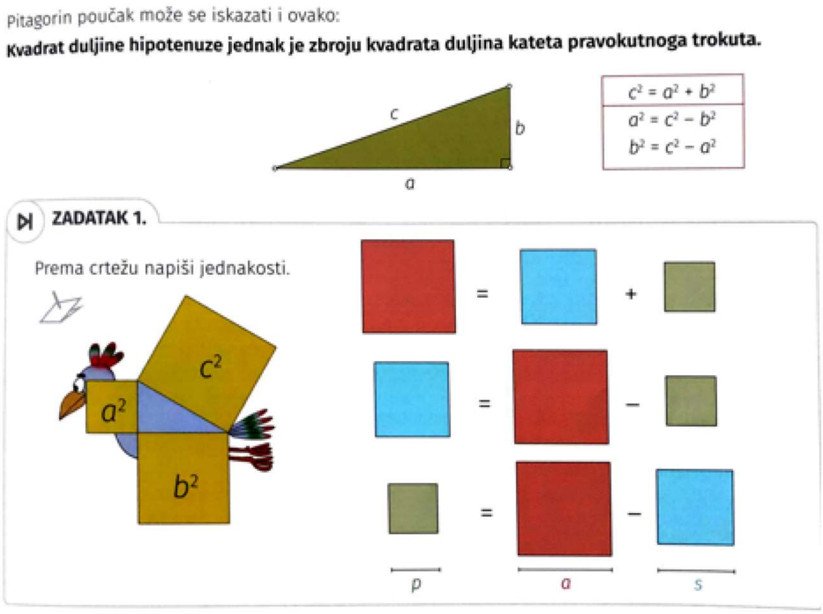
b / U izraz $a^2 + b^2 = c^2$ uvrstimo poznate vrijednosti kako bismo izračunali duljinu katete a.

$b = 45$ mm
$c = 53$ mm
$a = ?$

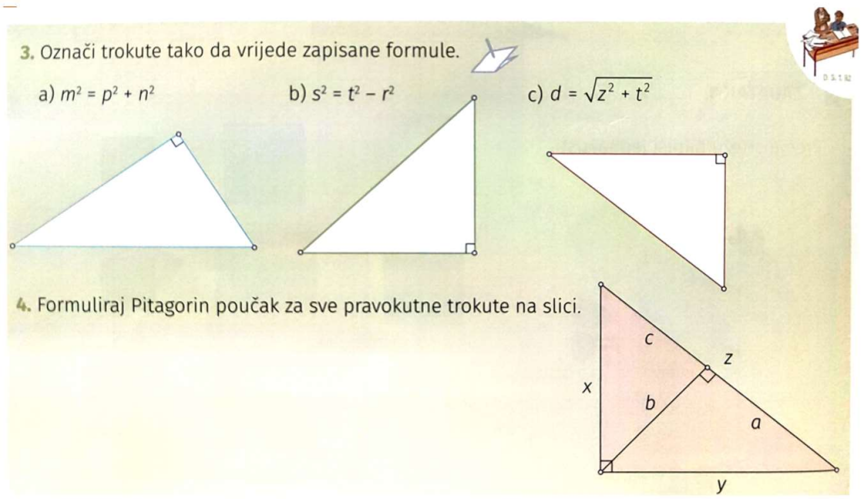
$$a^2 + 45^2 = 53^2$$
$$a^2 + 2\,025 = 2\,809$$
$$a^2 = 2\,089 - 2\,025$$
$$a^2 = 784$$
$$a = \sqrt{784} \Rightarrow a = 28 \text{ mm}$$

Slika 35: *Primjena Pitagorina poučka [2]*

S druge strane, u Alfinom udžbeniku, su korištene sve tri jednakosti, $c^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = c^2 - b^2$ i $b^2 = c^2 - a^2$, uz napomenu da se Pitagorin poučak može iskazati i na taj način. Osim toga, u udžbeniku se pojavljuju dva zadatka u kojima učenici mogu izvježbati sva tri oblika Pitagorina poučka. Jedan zadatak od učenika traži da iz slikovitih prikaza napišu jedan od tri oblika Pitagorinog poučka i prikazan je na slici 36, dok u drugome učenici trebaju na pravokutnim trokutima označiti duljine stranice slovima koja su u danim formulama različitih oblika, što je prikazano na slici 37.



Slika 36: *Tri oblika iskaza Pitagorina poučka [8]*



Slika 37: *Primjena formule Pitagorina poučka [8]*

U oba zadatka su duljine stranica označene raznim drugim slovima, različitim od a, b i c, što je još jedan od načina da učenici Pitagorin poučak nauče s razumijevanjem. Ponekad se dogodi da učenik nauči formulu bez da shvaća što ta formula predstavlja i ukoliko se oznake unutar formule promijene, više je ne zna koristiti.

Literatura

[1] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, L. Havranek Bijuković, P. Brkić, M. Karlo, M. Kuliš, I. Matić, T. Rodiger, K. Vučić, *Matematika 8*, školska knjiga, prvi dio, Zagreb, 2021.

[2] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, L. Havranek Bijuković, P. Brkić, M. Karlo, M. Kuliš, I. Matić, T. Rodiger, K. Vučić, *Matematika 8*, školska knjiga, drugi dio, Zagreb, 2021.

[3] D. French, *Teaching and learning algebra*, Continuum international publishing group, London, 2002.

[4] D. French, *Teaching and learning geometry*, Continuum international publishing group, London, 2004

[5] K.M. Hart, *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, John Murray, London, 1981.

[6] T.L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Publications, New York, 1967.

[7] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 8*, ALFA, prvi dio, 2021.

[8] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 8*, ALFA, drugi dio, 2021.

[9] H. Schumann, D. Green, *Discovering Geometry with a Computer*, Chartwell-Bratt, Bromley, 1994.

[10] R. Webster, *Bride's chair revisited*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

Sažetak

Djeca se u ranoj dobi počinju igrati s igračkama raznih oblika i veličina. Već tada počinju primjećivati njihova svojstva i međusobne odnose. Sve do škole učenici kroz igru nesvjesno uče geometriju. No, geometrijski zadaci u školi, često učenicima predstavljaju problem. Geometrija je velikim dijelom vizualno područje, ali pri rješavanju zadataka nije dovoljno zadatku pristupiti isključivo iz vizualne perspektive. Naime, geometrija i planimetrija prepune su zadataka u kojima je pri rješavanju potrebno koristiti rezultate koji su poznati od prije. Zbog toga učenici imaju otpor prema geometriji jer je malo šablonskih zadataka koje oni preferiraju. Iz tog razloga učenicima treba približiti različite pristupe učenja. Kroz praktične i raznolike zadatke učenici će steći osjećaj za prepoznavanje pojedinih rezultata iz geometrije, potrebnih za daljnje rješavanje problema. Iako se dokazi rijetko pojavljuju unutar osnovnoškolskih udžbenika, trebali bi se koristiti prilikom poučavanju. Dokazima bi se postiglo bolje razumijevanje gradiva kao i zadacima koji imaju primjenu na situacije iz svakodnevnog života.

Ključne riječi: geometrija, učenje, poučavanje, povećanje, sličnost, Pitagorin poučak, udžbenici

Summary

Children at an early age begin to play with toys of various shapes and sizes. Even then, they notice their properties and interrelationships. All the way through school, pupils unconsciously learn geometry through various games. However, geometric tasks in school are often a problem for pupils. Geometry is mostly a visual area, but it is not enough to approach the task exclusively from a visual perspective when it comes to solving problems. Furthermore, geometry and planimetry are full of tasks in which it is necessary to use results that are known from before. Therefore, students have an aversion to geometry because there are not so many template tasks that they prefer. For this reason, pupils need to be introduced to different approaches to learning. Through practical and diverse tasks, students will gain a sense of recognizing individual results in geometry, needed to further solve the problem. Although mathematical proofs rarely appear within elementary school textbooks, they should be used in teaching. Mathematical proofs would provide a better understanding of the curriculum as well as tasks that have an application to everyday life situations.

Key words: geometry, learning, teaching, enlargement, similarity, The Theorem of Pythagoras, textbooks

Životopis

Zovem se Rebeka Šmit. Rođena sam 21. kolovoza 1995. godine u Osijeku. Završila sam osnovnu školu "Tin Ujević" u Osijeku te 2010. godine sam upisala III. gimnaziju Osijek. Nakon završetka, upisala sam sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.