Novi laktacijski model temeljen na Woodovom i MilkBot laktacijskom modelu

Janković, Miroslav

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:694948

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-20**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij
Smjer: Financijska matematika i statistika

Miroslav Janković

Novi laktacijski model temeljen na Woodovom i MilkBot laktacijskom modelu

Diplomski rad izrađen u suradnji s tvrtkom Farmeron d.o.o.

Osijek, 2016.

Sveučilište J J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij
Smjer: Financijska matematika i statistika

Miroslav Janković

Novi laktacijski model temeljen na Woodovom i MilkBot laktacijskom modelu

Diplomski rad izrađen u suradnji s tvrtkom Farmeron d.o.o.

Mentor:
doc. dr. sc. Nenad Šuvak
Komentor:
Ana Leko, mag. math.

Osijek, 2016.

Zahvala

Želio bih se zahvaliti svom menotru, doc. dr. sc. Nenadu Šuvaku, na vodstvu i pomoći prilikom izrade diplomskog rada. Isto tako zahvalio bih se svim profesorima koji su mi predavali tijekom studiranja na pruženom i stečenom znanju.

Htio bih se zahvaliti i Filipu Paradžiku na suradnji prilikom izrade seminarskog rada iz kolegija Stručna praksa pod nazivom *Woodov i MilkBot laktacijski model* zahvaljujući kojem sam se odlučio za ovu temu diplomskog rada.

Velike zahvale cijelom timu iz tvrtke Farmeron d.o.o., a posebno Ani Leko, mag. math., i Kruni Stražancu, mag. math., na suradnji, interesu i savjetovanju tokom izrade diplomskog rada te pristupu podacima koji predstavljaju osnovu ovog diplomskog rada.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Laktacija i laktacijska krivulja **2**

3 Statistička analiza podataka **3**
3.1 Analiza prinosa mlijeka s obzirom na redni broj laktacije 3
3.2 Razlike u prinosu mlijeka s obzirom na redni broj laktacije 5

4 Laktacijski modeli **9**
4.1 Levenberg-Marquardt algoritam 9
4.2 Woodov laktacijski model 10
4.2.1 Definicija i interpretacija parametara 10
4.2.2 Procjena parametara na temelju stvarnih dnevnih podataka o prinosu mlijeka 11
4.2.3 Modifikacija Woodovog laktacijskog modela 15
4.3 Wilminkov laktacijski model 18
4.3.1 Definicija i interpretacija parametara 18
4.3.2 Procjena parametara na temelju stvarnih dnevnih podataka o prinosu mlijeka 19
4.4 MilkBot laktacijski model 22
4.4.1 Definicija i interpretacija parametara 22
4.4.2 Procjena parametara na temelju stvarnih dnevnih podataka o prinosu mlijeka 23

5 Usporedba laktacijskih modela **28**
5.1 Prinos mlijeka u prvoj laktaciji 28
5.2 Prinos mlijeka u drugoj laktaciji 31
5.3 Prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji 34

6 Kombinacija Woodovog i MilkBot laktacijskog modela **38**
6.1 Prinos mlijeka u prvoj laktaciji 38
6.2 Prinos mlijeka u drugoj laktaciji 42
6.3 Prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji 46

7 Zaključak **50**

1 Uvod

U diplomskom radu proučavamo laktacijske modele kojima se opisuje dnevna proizvodnja mlijeka tijekom laktacijskog ciklusa krave. Jedan od glavnih ciljeva na farmama muznih krava maksimizirati je proizvodnju mlijeka, jer ona predstavlja glavni izvor prihoda na farmama te minimizirati troškove proizvodnje mlijeka kako bi u konačnici profit od proizvodnje mlijeka bio što veći. Na proizvedenu količinu mlijeka utječu brojni čimbenici. Neke od njih moguće je kontrolirati, no neke ipak nije. Neki od čimbenika preko kojih se može utjecati na proizvedenu količinu mlijeka su: prehrana, razmnožavanje i zdravstveno stanje. Kravi je potrebno osigurati adekvatnu količinu hrane, odnosno adekvatan unos nutritivnih vrijednosti te adekvatnu veterinarsku skrb kako oboljenja ne bi dovela do smanjenja prinosa mlijeka ili čak uginuća krave te kako bi se razmnožavanje odvijalo u normalnim ciklusima. Prinos mlijeka na farmama muznih krava ne mora se ili se ne može evidentirati svaki dan, jer ne posjeduje svaka farma tehnološka dostignuća koja joj to omogućuju. Tako se mjerenja prinosa mlijeka mogu vršiti jednom tjedno ili čak jednom mjesečno. Upravo u tim situacijama do izražaja dolaze laktacijski modeli. Koristeći ih, moguće je pratiti prinos mlijeka svake pojedine krave, usporediti kako se prinos mlijeka jedne krave kreće u odnosu na prinos mlijeka drugih krava i utvrditi zadovoljava li pojedina krava prethodno postavljene ciljeve.

Od tvrtke Farmeron d.o.o. ustupljena nam je baza podataka koja sadrži informacije o prinosu mlijeka krava tijekom laktacije. Podatke smo podijelili u tri grupe jer na oblik laktacijske krivulje utječe, osim brojnih aspekata navedenih ranije, i redni broj laktacije u kojoj se krava nalazi (vidi [7]). Prvu grupu čine krave koje su u prvoj laktaciji, drugu krave koje su u drugoj laktaciji i treću krave koje su u trećoj ili većoj laktaciji.

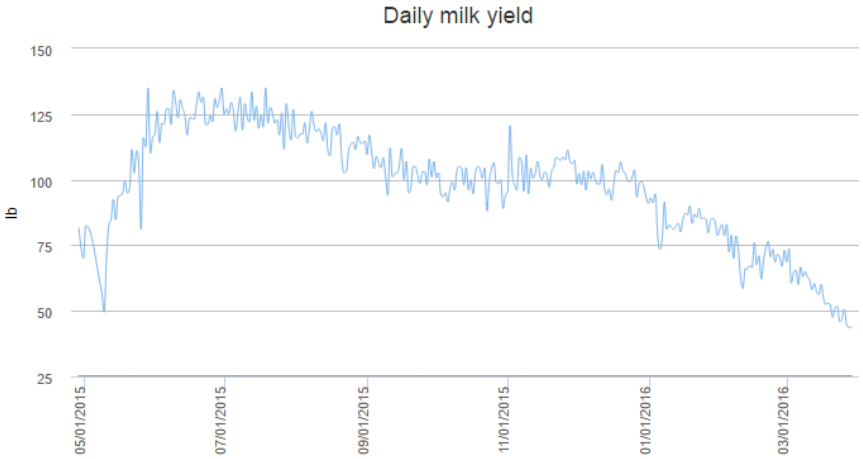
U prvom dijelu diplomskog rada navest ćemo i definirati osnovne pojmove kao što su laktacija, prinos mlijeka, laktacijska krivulja, vrh prinosa mlijeka te perzistencija. Zatim se usmjeravamo na podatke koji su nam ustupljeni, odnosno na statističku analizu podataka. Ona uključuje deskriptivnu statistiku, grafičke prikaze prinosa mlijeka i kutijastih dijagrama s obzirom na redni broj laktacije te primjenu različitih testova kojima ćemo opravdati podjelu u tri grupe.

Nakon statističke analize podataka prelazimo na glavnu tematiku rada, a to su laktacijski modeli. Navest ćemo i definirati četiri laktacijska modela. To su Woodov laktacijski model i njegova modifikacija te Wilminkov i MilkBot laktacijski model. Svaki model u svojoj definiciji sadrži određeni broj parametara koje ćemo procijeniti te usporediti s obzirom na redni broj laktacije. Osim što modeli omogućuju modeliranje i prediktiranje dnevnog prinosa mlijeka, također omogućuju i procjenu maksimalnog prinosa mlijeka, trenutka u kojem se on dostiže te procjenu teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom određenog perioda laktacije. To ćemo iskoristiti kako bismo usporedili laktacijske modele tako da gledamo odstupanja od stvarnih vrijednosti. Osim toga, usporedit ćemo ih i koristeći grafičke prikaze laktacijskih krivulja dobivenih modelima i mjere kvalitete modela od kojih ćemo koristiti korigirani R^2, standardnu grešku reziduala te Akaike i Bayesov informacijski kriterij.

U zadnjem dijelu diplomskog rada prikazat ćemo novi model dobiven kombinacijom Woodovog i MilkBot laktacijskog modela te njegovu usporedbu s Woodovim, MilkBot i Wilminkovim laktacijskim modelom. Novi model pokazat će se kao najbolji za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka krava.

2 Laktacija i laktacijska krivulja

Laktacija je period u kojem krava daje mlijeko. Ona započinje teljenjem te standardno traje 305 dana nakon čega slijedi razdoblje zasušivanja. Ono standardno traje 60 dana i služi kravi kao odmor te priprema za novo teljenje i novu laktaciju. Pod prinosom mlijeka smatramo količinu mlijeka koju krava daje tijekom laktacije. Razlikujemo dnevni i ukupni prinos mlijeka. Dnevni prinos mlijeka je prinos mlijeka koji krava daje u određenom danu laktacije, dok pod ukupnim prinosom mlijeka smatramo količinu mlijeka koju je krava dala u određenom periodu laktacije. Za potrebe ilustriranja dnevnog prinosa mlijeka tijekom laktacije koristimo se laktacijskom krivuljom. Sljedeća slika prikazuje primjer jedne laktacijske krivulje.



Slika 1: Grafički prikaz dnevnog prinosa mlijeka kroz vrijeme (laktacijska krivulja).

Sa Slike 1 možemo uočiti da dnevni prinos mlijeka raste u početnom periodu laktacije i obično 4-10 tjedana nakon teljenja, odnosno početka laktacije, krava dostiže svoj vrhunac. Točka u kojoj krava dostiže maksimalni dnevni prinos mlijeka tijekom cijele laktacije naziva se vrh prinosa mlijeka (engleski *peak yield*) i označavamo ju s PY. S PT (engleski *peak time*) označavamo dan u kojem je krava dostigla maksimalni prinos mlijeka. Prema tome, $PY = (PT, Y_{max})$. Nakon što krava dostigne svoj maksimalni dnevni prinos mlijeka on počinje postepeno opadati otprilike za 7%-10% mjesečno. Sposobnost krave da održi maksimalni prinos mlijeka naziva se perzistencija. Možemo uočiti da je razdoblje u kojem dnevni prinos mlijeka raste obično kraće od razdoblja tijekom kojeg on opada.

Sam oblik laktacijske krivulje razlikuje se pasmine do pasmine pa čak i od krave do krave. Na prinos mlijeka utječu različiti načini upravljanja farmom te mnogi čimbenici koji se mogu pratiti kao što su prehrana, razmnožavanje, zdravstveno stanje itd. Još jedan od bitnih čimbenika koji utječe na oblik laktacijske krivulje je redni broj laktacije u kojoj se krava trenutno nalazi. Stoga ćemo promatrati i analizirati prinose mlijeka s obzirom na redni broj laktacije u kojoj se krava nalazi. Iako se maksimalni prinos mlijeka i perzistencija razlikuju od krave do krave ipak postoje određena pravila kada gledamo upravo redni broj laktacije u kojoj se krava trenutno nalazi. Tako krave koje su u prvoj laktaciji imaju veću perzistenciju od krava koje su u drugoj, trećoj ili većoj laktaciji. U pravilu to znači da će prinos mlijeka najsporije opadati kod krava koje su u prvoj laktaciji. Isto tako krave u prvoj laktaciji dostižu manji maksimalni prinos mlijeka od krava u drugoj laktaciji i on se dostiže kasnije, krave u drugoj laktaciji dostižu manji maksimalni prinos mlijeka od krava u trećoj ili većoj laktaciji.

3 Statistička analiza podataka

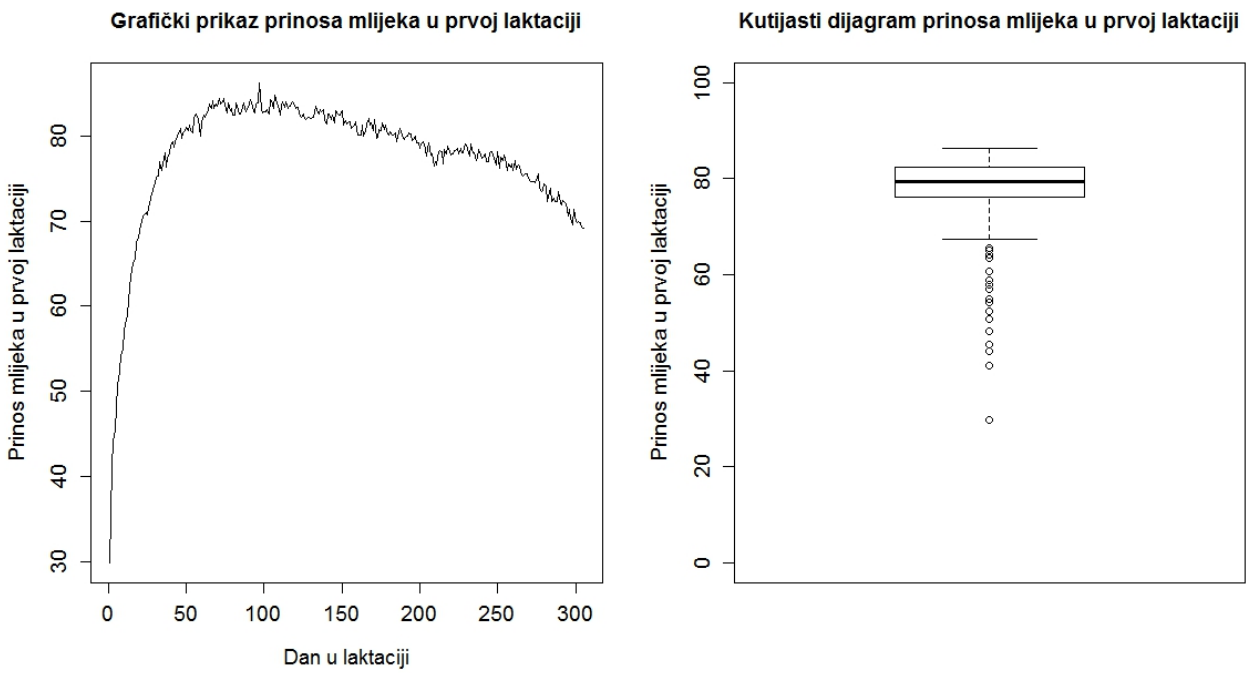
Od tvrtke Farmerom d.o.o. ustupljena nam je baza podataka koja sadrži podatke o stvarnom prinosu mlijeka više od 400 međusobno različitih krava koje su u prvoj, drugoj te trećoj ili većoj laktaciji (a koja nije nužno njihova trenutna laktacija) imale barem 305 dana u laktaciji. Time je osigurano da za sve krave raspolažemo s podacima unutar promatranih 305 dana laktacije.

Krave ćemo podijeliti u tri grupe. Prvu grupu čine krave koje su u prvoj laktaciji, drugu krave koje su u drugoj laktaciji i treću krave koje su u trećoj ili većoj laktaciji. Za svaku grupu krava konstruirali smo novu slučajnu varijablu kojom modeliramo prosječni dnevni prinos mlijeka svih krava koje se nalaze u toj laktaciji, jer će daljnja analiza biti usmjerena upravo na te varijable. U nastavku diplomskog rada pod prinosom mlijeka u laktaciji smatrat ćemo upravo opisani prosječni dnevni prinos mlijeka svih krava u toj laktaciji. S *dim* označavamo broj dana u laktaciji, odnosno vremensku razliku između promatranog dana i dana teljenja krave. Prinos mlijeka izražen je u funtama (lb), $1lb = 0.4536kg$.

3.1 Analiza prinosa mlijeka s obzirom na redni broj laktacije

Prvi korak je, kao i kod svake analize podataka, napraviti deskriptivnu statistiku prinosa mlijeka.

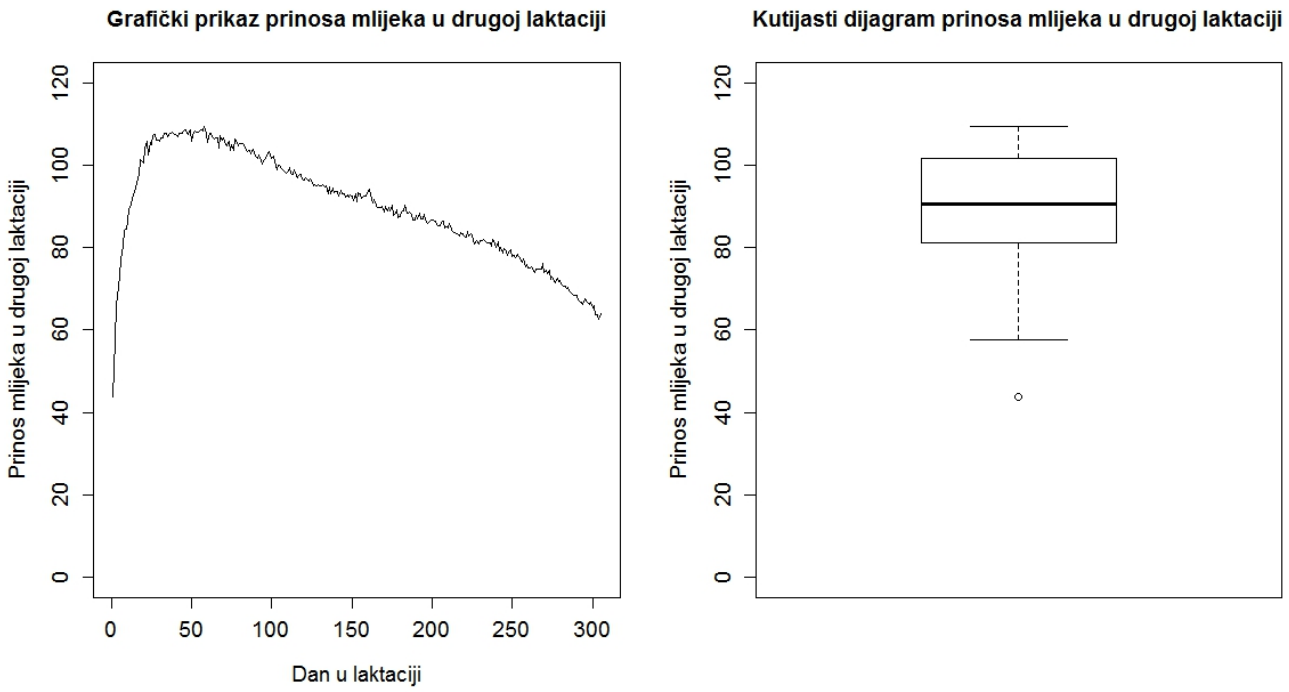
Usmjerimo se prvo na prinos mlijeka u prvoj laktaciji. On se kreće u rasponu od minimalno izmjerenog $29.84lb$ do maksimalno izmjerenog $86.28lb$. Prosječni prinos mlijeka u prvoj laktaciji iznosi $77.66lb$. Nadalje, medijan iznosi $79.49lb$, što znači da je barem 50% prinosa mlijeka u prvoj laktaciji manje od ili jednako $79.49lb$ te da je barem 50% prinosa mlijeka u prvoj laktaciji veće od ili jednako $79.49lb$.



Slika 2: Grafički prikaz i kutijasti dijagram prinosa mlijeka u prvoj laktaciji.

Stršeće vrijednosti koje uočavamo na kutijastom dijagramu su prvenstveno prinosi mlijeka na početku laktacije. Kako je normalno da na početku laktacije prinos mlijeka bude najmanji, a i kako se radi o stvarnim izmjerenim prinosima mlijeka, nećemo ih izbaciti, nego ćemo ih ostaviti i u nastavku raditi s njima.

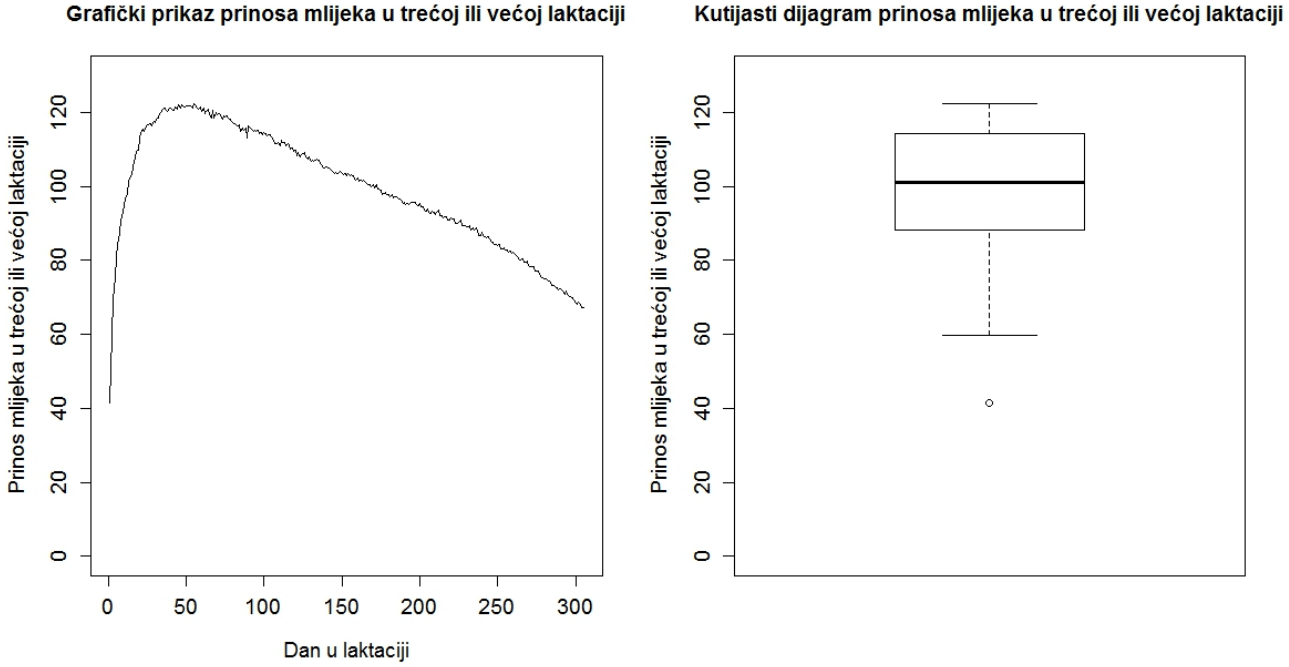
Minimalni prinos mlijeka u drugoj laktaciji iznosi 43.83lb, dok maksimalni iznosi 109.33lb. Prosječni prinos mlijeka u drugoj laktaciji iznosi 90.01lb, dok je medijan 90.43lb, što znači da je barem 50% prinosa mlijeka u drugoj laktaciji manje od ili jednako 90.43lb te da je barem 50% prinosa mlijeka u drugoj laktaciji veće od ili jednako 90.43lb.



Slika 3: Grafički prikaz i kutijasti dijagram prinosa mlijeka u drugoj laktaciji.

Opet uočavamo jednu stršeću vrijednost no kako je riječ o stvarnim prinosima mlijeka nastavljamo raditi s njom.

Nadalje, za krave koje se nalaze u trećoj ili većoj laktaciji, prinos mlijeka kreće se u rasponu od najmanje izmjerenog 41.41lb do najviše izmjerenog 122.27lb. Medijan prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji iznosi 101lb, dok je prosječni prinos mlijeka 99.49lb.



Slika 4: Grafički prikaz i kutijasti dijagram prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

Analogno kao i kod prinosa mlijeka u prvoj i drugoj laktaciji stršeću vrijednost ne izbacujemo.

3.2 Razlike u prinosu mlijeka s obzirom na redni broj laktacije

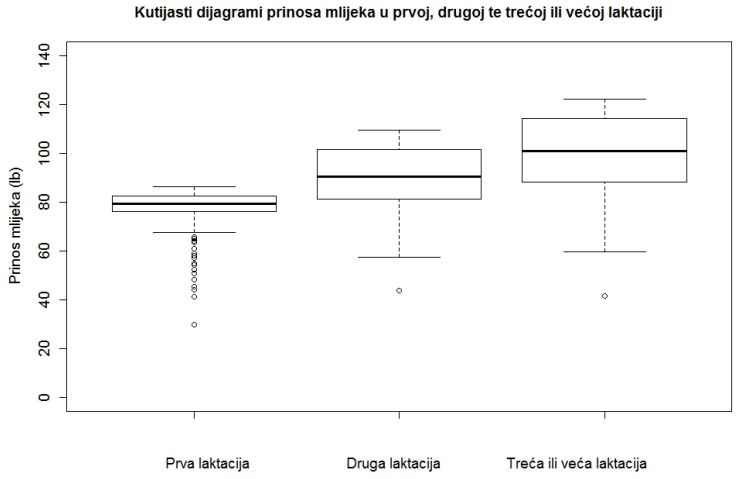
Prirodno je postaviti si pitanje postoje li razlike u prinosu mlijeka s obzirom na redni broj laktacije u kojoj se krava trenutno nalazi. Samo postojanje razlika mogli smo uočiti već kada smo napravili deskriptivnu statistiku. Sljedeća tablica prikazuje sumaran pregled numeričkih karakteristika deskriptivne statistike prinosa mlijeka s obzirom na redni broj laktacije u kojoj se krava nalazi.

	mininimalni (lb)	maksimalni (lb)	prosječni (lb)	medijan (lb)	1. kvartil (lb)	3. kvartil (lb)
prva laktacija	29.84	86.28	77.66	79.49	76.11	82.42
druga laktacija	43.83	109.33	90.01	90.43	81.11	101.6
treća ili veća laktacija	41.41	122.27	99.49	101	88.11	114.4

Tablica 1: Minimalni, maksimalni i prosječni prinos mlijeka, medijan prinosa mlijeka te prvi i treći kvartil prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

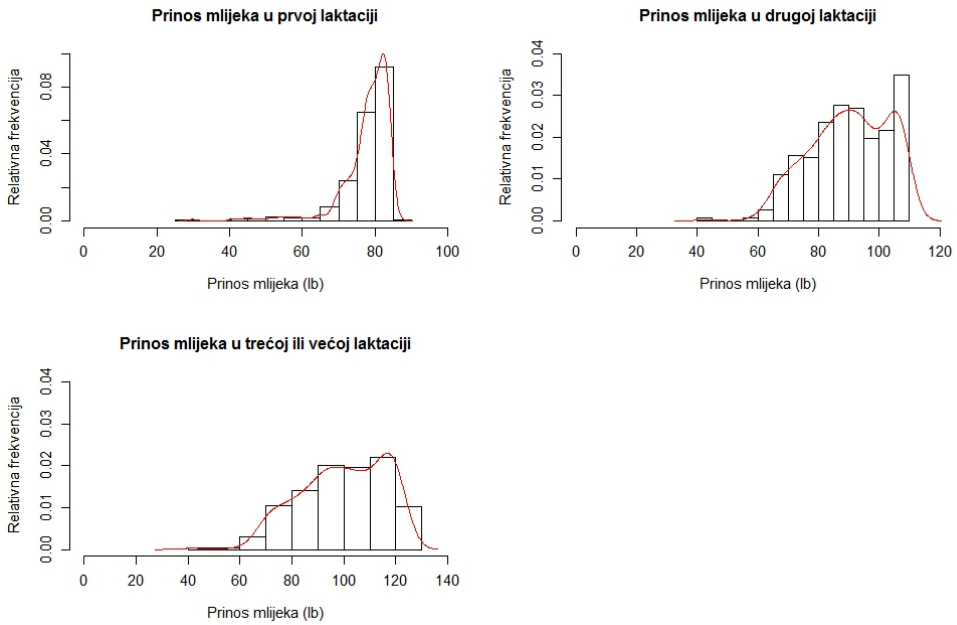
Iz Tablice 1 uočavamo da su vrijednosti svih numeričkih karakteristika osim minimalnog prinosa mlijeka najmanje u prvoj laktaciji i najveće u trećoj ili većoj laktaciji.

Uvid u postojanje razlika također možemo dobiti prikažemo li usporedno kutijaste dijagrame prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.



Slika 5: Usporedni kutijasti dijagrami prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

Naslućujemo da bi razlike u prinosu mlijeka s obzirom na redni broj laktacije mogle postojati pa provedimo odgovarajuće testove kojima ćemo to potvrditi.



Slika 6: Histogrami relativnih frekvencija i grafovi uzoračkih funkcija gustoća prinosa mlijeka u prvoj, drugoj te trećoj ili većoj laktaciji.

Pogledamo li prvo Sliku 6, možemo naslutiti da prinosi mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji nemaju normalnu distribuciju. Provedemo li Shapiro-Wilkov test, kod kojeg je nul-hipoteza normalna distribuiranost slučajne varijable, dobijemo p-vrijednosti koje aproksimativno iznose nula pa na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipotezu i

prihvaćamo alternativnu koja nam kaže da prinosi mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji nemaju normalnu distribuciju.

Za ispitivanje postojanja razlika u očekivanim prinosima mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji koristit ćemo t-test. Njega je moguće provesti iako podaci ne dolaze iz normalne distribucije jer raspolažemo dovoljno velikim uzorkom. Prije toga potrebno je ispitati jednakost varijanci prinosa mlijeka s obzirom na redni broj laktacije. Za sve tri usporedbe varijanci prinosa mlijeka s obzirom na redni broj laktacije, koristeći F-test, dobijemo p-vrijednosti znatno manje od 0.05 pa na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipotezu o jednakosti varijanci i prihvaćamo alternativnu o postojanju razlika među varijancama prinosa mlijeka s obzirom na redni broj laktacije.

Ispitajmo sada t-testom postojanje razlika u očekivanim prinosima mlijeka s obzirom na redni broj laktacije. Kako smo na razini značajnosti 0.05 prihvatili alternativnu hipotezu o različitosti varijanci koristit ćemo Welcheov t-test. Prvo ispitajmo postoje li razlike u prinosu mlijeka između prve i druge laktacije. Hipoteze su:

H_0: očekivani prinos mlijeka u prvoj laktaciji jednak je očekivanom prinosu mlijeka u drugoj laktaciji,
H_1: očekivani prinos mlijeka u prvoj laktaciji različit je od očekivanog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji.

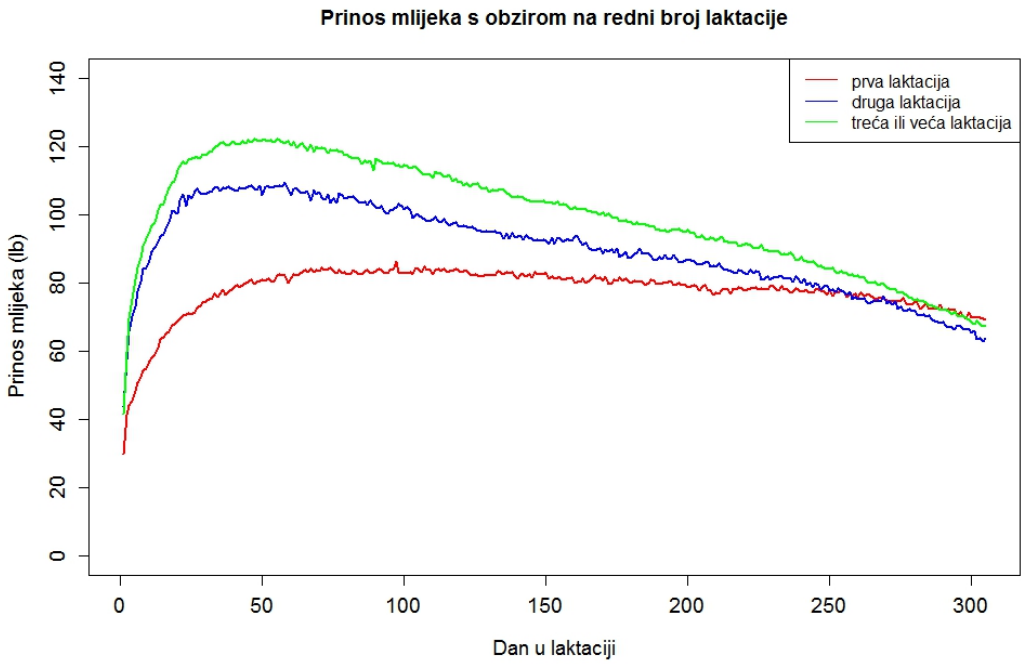
p-vrijednost aproksimativno iznosi nula pa na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipotezu te prihvaćamo alternativnu koja kaže da je očekivani prinos mlijeka u prvoj laktaciji različit od očekivanog prinos mlijeka u drugoj laktaciji. Ispitajmo sada postojanje razlika u prinosu mlijeka u prvoj i trećoj ili većoj laktaciji. Hipoteze su:

H_0: očekivani prinos mlijeka u prvoj laktaciji jednak je očekivanom prinosu mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji,
H_1: očekivani prinos mlijeka u prvoj laktaciji različit je od očekivanog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

p-vrijednost je opet aproksimativno nula pa na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipotezu te prihvaćamo alternativnu koja kaže da je očekivani prinos mlijeka u prvoj laktaciji različit od očekivanog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji. Još je ostalo ispitati postoje li razlike u prinosu mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji. Slično kao i u prethodna dva testa hipoteze su:

H_0: očekivani prinos mlijeka u drugoj laktaciji jednak je očekivanom prinosu mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji,
H_1: očekivani prinos mlijeka u drugoj laktaciji različit je od očekivanog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

I ovdje p-vrijednost također aproksimativno iznosi nula pa na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipotezu te prihvaćamo alternativnu koja kaže da je očekivani prinos mlijeka u drugoj laktaciji različit od očekivanog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji. Dakle, rezultat statističkih testova je prihvaćanje, na razini značajnosti 0.05, hipoteze o postojanju statistički značajnih razlika u prinosu mlijeka s obzirom na redni broj laktacije. Upravo iz tih razloga promatrat ćemo svaku laktaciju posebno te ćemo za svaku laktaciju posebno procjenjivati parametre laktacijskih modela.



Slika 7: Stvarni prinosi mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji tijekom 305 dana laktacije.

Svaku laktaciju razmatrat ćemo posebno i iz razloga što se uobičajeni oblik laktacijske krivulje počinje formirati tek kod krava u trećoj ili većoj laktaciji što možemo vidjeti i na Slici 7.

4 Laktacijski modeli

Ovo poglavlje predstavlja ključnu tematiku diplomskog rada, a odnosi se na laktacijske modele. Opisat ćemo četiri laktacijska modela, a to su Woodov laktacijski model i njegova modifikacija te Wilminkov i MilkBot laktacijski model. Sva četiri modela omogućuju modeliranje i predikciju dnevnog prinosa mlijeka krava. Svaki model u svojoj definiciji uključuje određeni broj parametara koje ćemo kasnije navesti i interpretirati, a koje je potrebno procijeniti. Parametre modela procjenjivat ćemo Levenberg-Marquardt algoritmom. Prilikom procjene parametara modela nećemo iskoristiti svih 305 podataka kojima raspolažemo, nego ćemo iskoristiti 275 podataka kako bismo bili u mogućnosti vidjeti jesu li modelom prediktirani prinosi mlijeka u skladu sa stvarnim vrijednostima prinosa mlijeka.

Svaki model, osim što omogućuje modeliranje dnevnog prinosa mlijeka i prediktiranje budućeg prinosa mlijeka, omogućuje i izračunavanje teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka i trenutka u kojem se on dostiže te teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom određenog perioda laktacije kao površinu ispod laktacijske krivulje. Woodov i MilkBot laktacijski model također omogućavaju izračunavanje perzistencije krava. Navedimo stoga prvo njihove stvarne vrijednosti kako bismo ih kasnije mogli usporediti s teorijskim vrijednostima.

	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
prva laktacija	86.28	97	21525.86	23685.5
druga laktacija	109.33	58	25409.94	27452.89
treća ili veća laktacija	122.27	55	28185.62	30343.94

Tablica 2: Stvarne vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} za prvu, drugu i treću ili veću laktaciju.

Iz Tablice 2 vidimo da krave koje se nalaze u trećoj ili većoj laktaciji imaju najveći maksimalni prinos mlijeka i on iznosi $122.27lb$, dok je za krave u drugoj laktaciji on nešto manji i iznosi $109.33lb$. Krave koje su u prvoj laktaciji imaju najmanji maksimalni prinos mlijeka i on iznosi $86.28lb$. Također možemo uočiti da će krave u trećoj ili većoj laktaciji najbrže dostići maksimalni prinos mlijeka, u 55. danu od dana teljenja, dok će ga krave u prvoj laktaciji dostići najkasnije, tek u 97. danu laktacije. Ukupni prinos mlijeka u 305 dana laktacije najveći je za krave u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi $30343.94lb$, dok je najmanji za krave u prvoj laktaciji i iznosi $23685.5lb$. Za krave u drugoj laktaciji on iznosi $27452.89lb$.

4.1 Levenberg-Marquardt algoritam

Prije nego definiramo i opišemo laktacijske modele opišimo u nekoliko rečenica algoritam koji ćemo koristiti za procjenu parametara u svim laktacijskim modelima, budući da su svi nelinerani u parametrima.

Kao što smo već i rekli parametre laktacijskih modela procjenjivat ćemo Levenberg-Marquardt algoritmom koji je poznat još i pod nazivom metoda prigušenih najmanjih kvadrata (engleski *damped least-squares (DLS)*). On predstavlja standardni algoritam koji se koristi za rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvaradata. Metode, kao navedeni algoritam, koje se koriste za rješavanje nelineranih problema najmanjih kvadrata uključuju iterativno poboljšanje vrijednosti parametara kako bi se smanjila suma kvadrata reziduala, odnosno suma kvadrata razlika između izmjerenih vrijednosti i modelom procijenjenih vrijednosti. Kod same implementacije, odnosno procjene parametara, potrebno je zadati početne vrijednosti parametara od kojih metoda starta.

Navedeni algoritam kombinacija je dviju metoda za pronalaženje minimuma funkcije, metode najbržeg spusta i Gauss-Newton metode. Kada je trenutna suma kvadrata reziduala daleko od minimalne, odnosno kada su vrijednosti parametara daleko od optimalnih, algoritam se ponaša kao metoda najbržeg spusta, a kada je blizu minimalne vrijednosti, odnosno kada su vrijednosti parametara blizu optimalnih, algortiam se ponaša kao Gauss-Newton metoda. Za više informacija o navedenim algoritmima pogledati [9], [11] i [12].

4.2 Woodov laktacijski model

4.2.1 Definicija i interpretacija parametara

Prvi model koji ćemo definirati i opisati je Woodov laktacijski model. Prinos mlijeka krava opisan je pomoću sljedeće jednadžbe:

$$Y_t = at^b e^{-ct}. \tag{1}$$

Y_t opisuje prinos mlijeka u trenutku t, gdje t označava trenutak u laktaciji u kojem promatramo prinos mlijeka. Parametar a laktacijskog modela (1) predstavlja inicijalni, odnosno početni, prinos mlijeka u laktaciji. Parametar b kontrolira rastući dio laktacijske krivulje, dok parametar c kontrolira padajući dio laktacijske krivulje. Parametri a, b i c određuju izgled laktacijske krivulje. Kako u diplomskom radu analiziramo standardnu laktacijsku krivulju vrijednosti parametara a, b i c su pozitivni brojevi.

Shvatimo li Y_t kao zavisnu slučajnu varijablu kojom modeliramo prinos mlijeka u danu t cilj je procijeniti paramtere a, b i c koji određuju model kojim modeliramo prinos mlijeka u trenutku t. Kao što smo već rekli, model nam omogućuje da odredimo trenutak (dan) u kojem se dostiže teorijski maksimalni prinos mlijeka, koliko on iznosi, kolika je perzistencija te koliki je teorijski ukupni prinos mlijeka u proizvoljno odabranom vremenskom periodu.

Trenutak u kojem se dostiže teorijski maksimalni prinos mlijeka u laktaciji maksimum je funkcije (1). Naime, deriviramo li (1) po t dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y_t &= a\left[bt^{b-1}e^{-ct} + t^b e^{-ct}(-c)\right] \\ &= ae^{-ct}\left[bt^{b-1} - ct^b\right] \\ &= at^b e^{-ct}\left[\frac{b}{t} - c\right]. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$t = \frac{b}{c}$$

je stacionarna točka funkcije (1).

Pogledamo li drugu derivaciju funkcije (1) i uvrstimo li vrijednost $t = \frac{b}{c}$ dobivamo

$$a\left(\frac{b}{c}\right)^b e^{-b}\left(-\frac{c^2}{b}\right) < 0.$$

Točka $t = \frac{b}{c}$ je točka lokalnog maksimuma funkcije (1).

Dakle, teorijski maksimalni prinos mlijeka dostiže se u trenutku

$$PT = \frac{b}{c}. \tag{2}$$

Uvrštavanjem (2) u (1) teorijski maksimalni prinos mlijeka u laktaciji dan je sljedećim izrazom:

$$Y_{max} = a \left(\frac{b}{c}\right)^{b} e^{-b}. \tag{3}$$

Perzistencija krava računa se prema formuli

$$P = -\left(b+1\right) ln\left(c\right). \tag{4}$$

Teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana, koliko traje standardna laktacija, određen je površinom ispod laktacijske krivulje, odnosno sljedećim određenim integralom:

$$M_{305} = a \int_{1}^{305} t^{b} e^{-ct}\, dt. \tag{5}$$

4.2.2 Procjena parametara na temelju stvarnih dnevnih podataka o prinosu mlijeka

Usmjerimo se sada na procjenu vrijednosti parametara a, b i c i grafički prikažimo laktacijske krivulje. Promotrimo prvo prinos mlijeka u prvoj laktaciji. Procijenjene vrijednosti parametara Woodovog laktacijskog modela i pripadne standardne greške za prinos mlijeka u prvoj laktaciji možemo vidjeti u Tablici 3.

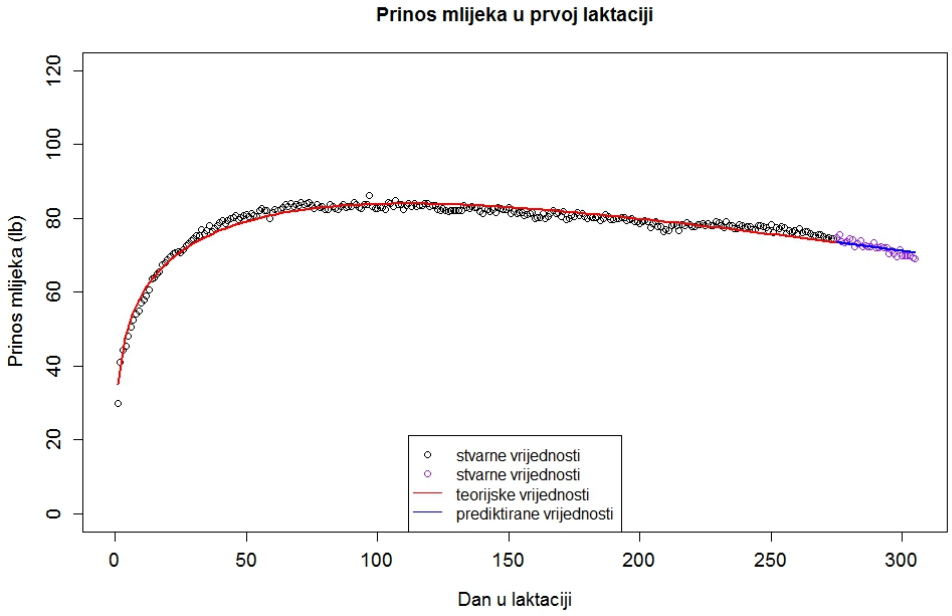
parametar	procjena	standardna greška
a	35.15731	0.37567
b	0.23465	0.00309
c	0.00211	0.000033

Tablica 3: Tablica procijenjenih vrijednosti parametara Woodovog laktacijskog modela i pripadne standardne greške za prinos mlijeka u prvoj laktaciji.

Budući da su p-vrijednosti t-testova, koji u nul-hipotezama pretpostavljaju jednakost parametra nuli, manje od 0.05, na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipoteze i prihvaćamo alternativne, tj. zaključujemo kako su svi parametri modela statistički značajni. Drugim riječima, na razini statističke značajnosti 0.05 svi procjenjeni parametri bitno utječu na oblik laktacijske krivulje. Procijenjena vrijednost parametra a laktacijskog modela (1), kojim opisujemo početnu količinu mlijeka, iznosi 35.15731. Procijenjena vrijednost parametra koji kontrolira rastući dio laktacijske krivulje iznosi 0.23465, dok procijenjena vrijednost parametra koji kontrolira padajući dio laktacijske krivulje iznosi 0.00211. Na osnovu procijenjenih vrijednosti parametara iz Tablice 3, model za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji definiran je sljedećim izrazom:

$$Y_t = 35.15731 \cdot t^{0.23465} \cdot e^{-0.00211 \cdot t}. \tag{6}$$

Na Slici 8 prikazana je laktacijska krivulja dobivena modelom (6) te stvarni prinosi mlijeka u prvoj laktaciji.



Slika 8: Laktacijska krivulja dobivena modelom (6) i stvarni dnevni prinosi mlijeka u prvoj laktaciji.

Uočavamo da je laktacijska krivulja dobivena modelom (6) dobro usklađena sa stvarnim prinosima mlijeka. Također možemo uočiti da postoje razlike u teorijskom i stvarnom maksimalnom prinosu mlijeka te danu u kojem se oni dostižu. Teorijski maksimalni prinos mlijeka dostiže se prije stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka. Konkretniju usporedbu napravit ćemo nešto kasnije. Isto tako možemo uočiti da vrijednosti prediktirane modelom (6) ne odstupaju značajnije od stvarnih vrijednosti.

Procijenjene vrijednosti parametara Woodovog laktacijskog modela za prinos mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji i pripadne standardne greške možemo vidjeti u Tablici 4.

	parametar	procjena	standardna greška
druga laktacija			
	a	59.57381	0.87753
	b	0.18605	0.0.00442
	c	0.00312	0.000052
treća ili veća laktacija			
	a	60.24992	0.78639
	b	0.22001	0.00391
	c	0.0036	0.000046

Tablica 4: Tablica procijenjenih vrijednosti parametara Woodovog laktacijskog modela za prinose mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji i standardne greške.

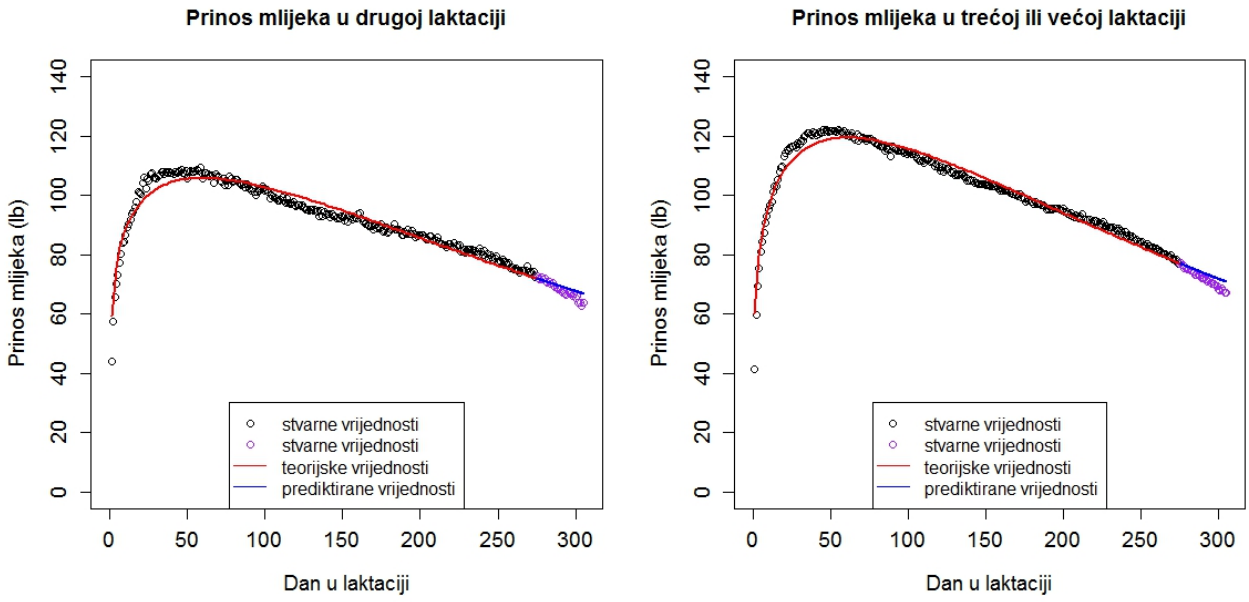
Budući da su p-vrijednosti t-testova, koji u nul-hipotezama pretpostavljaju jednakost parametra nuli, i u prvoj i u drugoj laktaciji manje od 0.05, na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipoteze i prihvaćamo alternativne, tj. zaključujemo kako su svi parametri modela i u prvoj i u drugoj laktaciji statistički značajni. Drugim riječima, na razini statističke značajnosti 0.05 svi procijenjeni parametri i u prvoj i u drugoj laktaciji bitno utječu na oblik laktacijske krivulje. Usporedimo li vrijednosti parametara modela s obzirom na redni broj laktacije

uočavamo da se vrijednosti parametara a i c povećavaju za prinos mlijeka u većoj laktaciji. Najmanje su za prinos mlijeka u prvoj laktaciji, a najveće za prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji. Vrijednost parametra b ne pokazuje konzistentan trend. Najveća je za prinos mlijeka u prvoj laktaciji, dok je najmanja za prinos mlijeka u drugoj laktaciji. Laktacijski modeli za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji navedeni su u Tablici 5.

	model
druga laktacija	$Y_t = 59.57381 \cdot t^{0.18605} \cdot e^{-0.00312 \cdot t}$
treća ili veća laktacija	$Y_t = 60.24992 \cdot t^{0.22001} \cdot e^{-0.0036 \cdot t}$

Tablica 5: Laktacijski modeli prinosa mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji..

Grafički prikaz laktacijskih krivulja dobivenih modelima iz Tablice 5 u odnosu na stvarne prinose mlijeka možemo vidjeti na Slici 9.



Slika 9: Laktacijske krivulje prinosa mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji dobivene modelima iz Tablice 5 i stvarni dnevni prinosi mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

Laktacijske krivulje dobivene modelima iz Tablice 5 dobro opisuju stvarne prinose mlijeka, ali u većem dijelu prije dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka podcjenjuju stvarne dnevne prinose mlijeka. Odmah nakon dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka laktacijske krivulje počinju precjenjivati stvarne prinose mlijeka, dok na kraju laktacije ne uočavamo niti značajnija podcjenjivanja niti značajnija precjenjivanja stvarnih prinosa mlijeka. Najočitija razlika je, kao i u prvoj laktaciji, u vremenu dostizanja stvarnog i teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Vidimo da model procjenjuje da će se maksimalni prinos mlijeka dostići nešto kasnije nego što je to stvarno slučaj. Vrijednosti prediktirane modelima iz Tablice 5 pokazuju veća odstupanja od stvarnih prinosa mlijeka, nego što je to bio slučaj za prinos mijeka u prvoj laktaciji.

Odredimo sada teorijski maksimalni prinos mlijeka, trenutak u kojem se on dostiže, perzistenciju te teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacijskog ciklusa.

	Y_{max} (lb)	PT	P	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
prva laktacija	83.97	111.12	7.605	21474.47	23637.09
druga laktacija	105.85	59.72	6.845	25345.23	27425.07
treća ili veća laktacija	119.5	61.1	6.864	28119.06	30334.1

Tablica 6: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, P, M_{275} i M_{305} dobivenih na temelju procijenjenih vrijednosti parametara a, b i c za prvu, drugu i treću ili veću laktaciju.

Uočavamo da maksimalni prinos mlijeka određen modelom raste kako se povećava redni broj laktacije u kojoj se krava nalazi. Najmanji je u prvoj, a najveći u trećoj ili većoj laktaciji. Dan laktacije u kojem se dostiže teorijski maksimalni prinos mlijeka za prvu laktaciju iznosi 111.12, dok je za drugu i treću ili veću laktaciju on dosta manji. Za drugu laktaciju iznosi 59.72, dok za treću ili veću laktaciju iznosi 61.1. Kao i kod stvarnih prinosa mlijeka prisutno je povećanje teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275, odnosno 305 dana laktacije što se krava nalazi u većoj laktaciji. Najveći teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacijskog ciklusa imaju krave u trećoj ili većoj laktaciji i on iznosi 30334.1lb, dok je najmanji za krave u prvoj laktaciji i iznosi 23637.09lb. Perzistencija krava pokazuje suprotan trend od teorijskog maksimalnog i teorijskog ukupnog prinosa mlijeka. Najveća je za krave u prvoj laktaciji i iznosi 7.605, dok krave u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji imaju približno jednake perzistencije. Perzistencija krava u drugoj laktaciji iznosi 6.845, dok je perzistencija krava u trećoj ili većoj laktaciji 6.864. To znači da će nakon dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka prinos mlijeka najsporije opadati kod krava koje su u prvoj laktaciji, dok će nešto brže opadati za krave koje su u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji, a tako bi u pravilu i trebalo biti.

Usporedimo li sada teorijske vrijednosti iz Tablice 6 sa stvarnim vrijednostima iz Tablice 2 možemo uočiti da nemamo značajnijih odstupanja osim u trenutku dostizanja teorijskog i stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka. Za krave koje su u prvoj laktaciji maksimalni prinos mlijeka određen modelom dostiže se u trenutku 111.12, dok se stvarno on postiže znatno ranije, u 97. danu od dana teljenja. Maksimalni prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji dostiže se u 55. danu od dana teljenja, dok modelom dobivamo da se on postiže kasnije, u trenutku 61.1. Promatramo li prinos mlijeka u drugoj laktaciji vidimo da imamo odstupanje za manje od dva dana što nije loše. Uočavamo da teorijski maksimalni i teorijski ukupni prinos mlijeka ne pokazuju značajnija odstupanja u odnosu na stvarne vrijednosti te da, kao i u slučaju stvarnih vrijednosti, rastu što su krave u većoj laktaciji. Isto tako možemo uočiti da Woodov laktacijski model u sva tri slučaja podcjenjuje stvarni maksimalni i ukupni prinos mlijeka. Razlika između stvarnog i teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji iznosi 2.31lb, u drugoj laktaciji iznosi 3.48lb, a u trećoj ili većoj laktaciji iznosi 0.55lb. Promatramo li teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana laktacijskog ciklusa najveća razlika u odnosu na stvarni ukupni prinos prisutna je u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi 66.56lb, dok je najmanja u prvoj laktaciji i iznosi 51.39lb. Uključimo li u analizu i zadnjih trideset dana laktacijskog ciklusa koje nismo iskoristili prilikom procjene parametara vidimo da teorijski ukupni prinos mlijeka i dalje podcjenjuje stvarnu količinu mlijeka. Razlika je sada nešto manja, a to se događa iz razloga što je u zadnjem dijelu laktacijskog ciklusa prisutno precjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka. Tako razlika stvarnog i teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana laktacije u prvoj laktaciji iznosi 48.41lb, u drugoj laktaciji 27.82lb, a u trećoj ili većoj laktaciji 9.84lb.

4.2.3 Modifikacija Woodovog laktacijskog modela

Kao i što smo vidjeli u prethodnom potpoglavlju Woodov laktacijski model podcjenjuje stvarni prinos mlijeka u periodu do dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka posebice u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji, a odmah nakon njegovog dostizanja dosta precjenjuje stvarne prinose mlijeka. Upravo zbog te činjenice Cappio-Borlino i ostali (vidi [6]) predlažu novi model, odnosno modifikaciju Woodovog modela.
Dnevni prinos mlijeka opisan je sljedećom jednadžbom:

$$Y_t = at^{be^{-ct}}. \tag{7}$$

Kao što vidimo iz same jednadžbe, i ovaj model, kao i Woodov, ima tri parametra koji određuju oblik laktacijske krivulje. Analogno kao kod Woodovog modela, Y_t opisuje prinos mlijeka u trenutku t, gdje t predstavlja trenutak u laktaciji u kojem promatramo prinos mlijeka. Parametar a modela (7) opisuje inicijalni prinos mlijeka. Parametri b i c u odnosu na Woodov laktacijski model imaju drugačije značenje, odnosno interpretaciju. Parametar c povezujemo s trenutkom dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Naime, prva derivacija funkcije (7) definirana je sljedećim izrazom:

$$at^{be^{-ct}}b \cdot \left(\frac{e^{-ct}}{t} - ce^{-ct}log(t) \right). \tag{8}$$

Izjednačimo li (8) s nulom slijedi

$$c = \frac{1}{PT \cdot log(PT)}, \tag{9}$$

gdje s PT označavamo trenutak u kojem je dostignut teorijski maksimalan prinos mlijeka (vidi [6]). Parametar b u modelu (7) kontrolira padajući dio laktacijske krivulje. Kako u diplomskom radu analiziramo standardnu laktacijsku krivulju vrijednosti parametara a, b i c su pozitivni brojevi. Usmjerimo se sada na procjenu parametara a, b i c modela (7) u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji. Procijenjene vrijednosti parametara i standardne greške možemo vidjeti u Tablici 7.

	parametar	procjena	standardna greška
prva laktacija			
	a	34.50758	0.32706
	b	0.23624	0.00272
	c	0.00202	0.000015
druga laktacija			
	a	53.46589	0.47551
	b	0.22745	0.00267
	c	0.00482	0.000048
treća ili veća laktacija			
	a	53.15859	0.41451
	b	0.26549	0.00233
	c	0.0046	0.000033

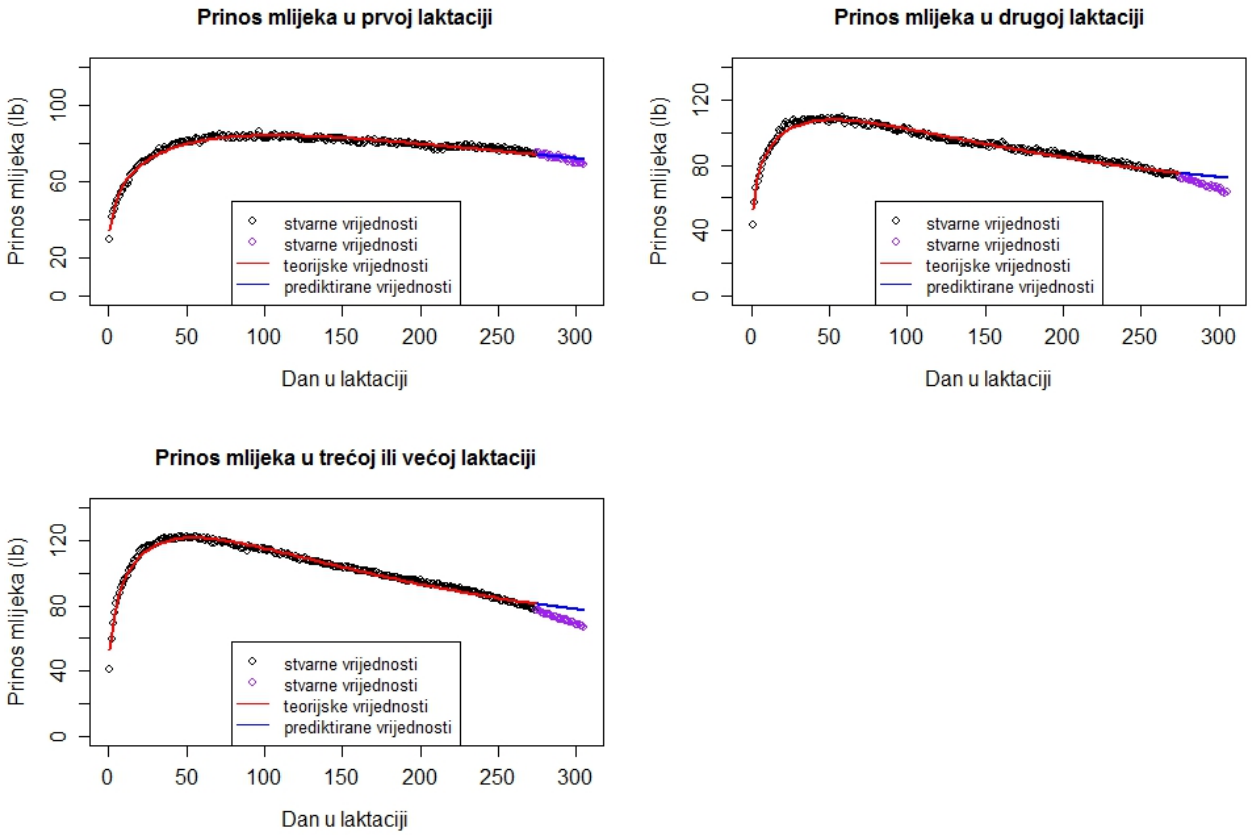
Tablica 7: Tablica procijenjenih vrijednosti parametara modifikacije Woodovog laktacijskog modela za prinos mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji i pripadne standardne greške.

Budući da su p-vrijednosti t-testova, koji u nul-hipotezama pretpostavljaju jednakost parametra nuli, u svim grupama manje od 0.05, na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipoteze i prihvaćamo alternativne, tj. zaključujemo kako su svi parametri modela u svim grupama značajni. Drugim riječima, na razini statističke značajnosti 0.05 svi procjenjeni parametri u svim grupama bitno utječu na oblik laktacijske krivulje.
Laktacijski modeli za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji navedeni su u sljedećoj tablici.

	model
prva laktacija	$Y_t = 34.50758 \cdot t^{0.23624 \cdot e^{-0.00202 \cdot t}}$
druga laktacija	$Y_t = 53.46589 \cdot t^{0.22745 \cdot e^{-0.00482 \cdot t}}$
treća ili veća laktacija	$Y_t = 53.15859 \cdot t^{0.26549} \cdot e^{-0.0046 \cdot t}$

Tablica 8: Laktacijski modeli za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

Na Slici 10 prikazane su laktacijske krivulje dobivene modelima iz Tablice 8.



Slika 10: Laktacijske krivulje prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji dobivene modelima iz Tablice 8 i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Možemo uočiti da je laktacijska krivulja u prvoj laktaciji dobro usklađena sa stvarnim podacima o prinosu mlijeka i ne pokazuje značajnija odstupanja tijekom cijelog laktacijskog ciklusa od 305 dana. To znači da niti prinosi mlijeka prediktirani modelom za zadnjih trideset dana laktacije ne odstupaju značajnije od stvarnih prinosa mlijeka. Nešto lošija situacija

je u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji i to na kraju laktacijskog ciklusa. Vidimo da laktacijske krivulje dobro opisuju stvarne prinose mlijeka do otprilike 260. dana laktacijskog ciklusa nakon čega ih počinju precjenjivati. Ako pogledamo samo zadnjih trideset dana, vidimo da su vrijednosti prediktirane modelima dosta "udaljene" od stvarnih vrijednosti, odnosno odstupanja postaju sve izraženija. Cilj modifikacije Woodovog modela u odnosu na Woodov model poboljšati je procjenu maksimalnog prinosa mlijeka, smanjiti podcjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka prisutno u rastućem dijelu lakacijske krivulje te smanjiti precjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka nakon dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Prisjetimo li se, razlike u trenutku dostizanja teorijskog i stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka kod Woodovog modela bile su očite već sa grafičkih prikaza. Ovdje to nije slučaj. Možemo vidjeti da odstupanja postoje, no da ona nisu toliko izražena kao kod Woodovog modela. Stoga možemo doći do zaključka da je modificirani Woodov model ispunio očekivanja, no da ipak postoji problem na kraju laktacijskog ciklusa, budući da je prisutno precjenjivanje veće nego što je bilo Woodovim modelom. Konkretniju usporedbu modela napravit ćemo u sljedećem poglavlju.

Kao i kod Woodovog modela odredimo teorijski makismalni prinos mlijeka, dan u kojem se on dostiže te teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacijskog ciklusa.

	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
prva laktacija	84.01	106.12	21474.15	23658.15
druga laktacija	107.63	52.44	25348.11	27555.59
treća ili veća laktacija	121.42	54.37	28122.62	30493.37

Tablica 9: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih modelima iz Tablice 8 .

Pogledamo li Tablicu 9 odmah uočavamo da je teorijski maksimalni prinos mlijeka najmanji za krave u prvoj laktaciji, dok je najveći za krave u trećoj ili većoj laktaciji, što bi u pravilu i trebalo biti. Isto tako, teorijski maksimalni prinos mlijeka najsporije dostižu krave u prvoj laktaciji, dok ga krave u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji dostižu znatno brže. Krave u prvoj laktaciji teorijski maksimalni prinos mlijeka dostižu u trenutku 106.12, krave u drugoj laktaciji u trenutku 52.44, a krave u trećoj ili većoj laktaciji u trenutku 54.37. Kao što je bio slučaj i sa teorijskim makismalnim prinosom mlijeka, teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacijskog ciklusa raste što su krave u većoj laktaciji. Najveći su za krave u trećoj ili većoj laktaciji i iznose $28122.62lb$ tijekom 275 dana laktacijskog ciklusa te $30493.37lb$ tijekom 305 dana laktacijskog ciklusa. Najmanji su za krave u prvoj laktaciji i iznose $21474.15lb$ tijekom 275 dana laktacijskog ciklusa te $23658.15lb$ tijekom 305 dana laktacijskog ciklusa. Teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana laktacijskog ciklusa za krave u drugoj laktaciji iznosi $25348.11lb$, a tijekom 305 dana laktacijskog ciklusa iznosi $27555.59lb$. Možemo uočiti da je teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacijskog ciklusa dosta veći u odnosu na teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana laktacijskog ciklusa što je rezultat velikog precjenjivanja stvarnih prinosa mlijeka na samom kraju laktacijskog ciklusa.

Usporedimo li vrijednosti iz Tablice 9 sa stvarnim vrijednostima navedenim u Tablici 2 uočavamo značajnija odstupanja samo u danu u kojem se dostižu stvarni i teorijski maksimalni prinos mlijeka. Najveće odstupanje pojavljuje se u prvoj laktaciji. Prema modelu, maksimalni prinos mlijeka dostiže se u trenutku 106.12, no stvarno se on dostiže znatno ranije, u 97. danu od dana teljenja. Krave u drugoj laktaciji teorijski maksimalni prinos mlijeka dostižu u trenutku 52.44, no stvarno se on dostiže u 58. danu od dana teljenja. Za

krave u trećoj ili većoj laktaciji najmanje je odstupanje trenutka dostizanja stvarnog i teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Model procjenjuje da će krave maksimalni prinos mlijeka dostići u trenutku 54.37, a on se stvarno dostiže u 55. danu od dana teljenja. Teorijski maksimalni prinos mlijeka i teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacijskog ciklusa ne pokazuju velika odstupanja od stvarnih vrijednosti. Teorijski maksimalni prinos mlijeka manji je od stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka u sva tri slučaja, što znači da je prisutno podcjenjivanje stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka. Najveće odstupanje teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka od stvarnog javlja se kod krava u prvoj laktaciji i iznosi $2.27lb$, dok je najmanje prisutno kod krava u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi $0.85lb$. Odstupanje kod krava u drugoj laktaciji iznosi $1.7lb$. Teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana laktacijskog ciklusa u sva tri slučaja podcjenjuje stvarni ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana. Najveće odstupanje teorijskog od stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 dana prisutno je kod krava u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi $63lb$, dok je najmanje za krave u prvoj laktaciji i iznosi $51.71lb$. Odstupanje kod krava u drugoj laktaciji iznosi $61.83lb$. Uključivanjem i zadnjih trideset podataka o prinosu mlijeka, koje smo izostavili prilikom procjene parametara, imamo nešto drugačiju situaciju. Podcjenjivanje stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana laktacijskog ciklusa prisutno je samo kod krava u prvoj laktaciji i ono iznosi $27.35lb$. U drugoj i trećoj ili većoj laktaciji teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana precjenjuje stvarni ukupni prinos mlijeka. U drugoj laktaciji je on veći od stvarnog za $102.7lb$, dok je u trećoj ili većoj laktaciji veći za $149.43lb$. Veća vrijednost teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana u odnosu na stvarni rezultat je velikog precjenjivanja stvarnih prinosa mlijeka na kraju laktacijskog ciklusa što možemo vidjeti i na Slici 10.

4.3 Wilminkov laktacijski model

4.3.1 Definicija i interpretacija parametara

Dnevni prinos mlijeka u Wilminkovom laktacijskom modelu definiran je jednadžbom

$$Y_t = a + bt + ce^{-kt}. \tag{10}$$

Y_t opisuje prinos mlijeka u trenutku t, gdje t označava trenutak u laktaciji u kojem promatramo prinos mlijeka. Za razliku od prethodna dva modela, Wilmink u svoj model uključuje četiri parametra. Isto kao i prethodna dva modela i Wilminkov model je nelinearan u parametrima. Parametar a predstavlja količinu mlijeka. Parametar b kontrolira padajući dio laktacijske krivulje, tj. dio nakon dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Parametar c kontrolira rastući dio laktacijske krivulje, tj. dio prije dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Četvrti parametar, parametar k, dovodi se u relaciju s trenutkom dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. U literaturi se često vrijednost ovog parametra fiksira i postavlja na 0.05. Kada bismo iskoristili ovo pojednostavljenje i uzeli da je $k = 0.05$ prilikom procjene parametara mogli bismo koristiti linearnu regresiju budući da je tada model (10) linearan u parametrima. Kako smo se tijekom ovog diplomskog rada već uvjerili u činjenicu da trenutak dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka varira s obzirom na redni broj laktacije, a kako se parametar k dovodi u relaciju s njim, i parametar k ćemo procijeniti. Parametre ćemo procjeniti Levenberg-Marquardt algoritmom kojeg smo opisali na samom početku ovog poglavlja. Kako u diplomskom radu analiziramo standardnu laktacijsku krivulju vrijednosti parametara b i c su negativni brojevi, dok su vrijednosti parametara a i k pozitivni brojevi. Funkciju (10), tj. funkciju kojom opisujemo dnevni prinos mijeka u

Wilminkovom laktacijskom modelu promatramo na segmentu $[1, 305]$, tj. u periodu od 305 dana koliko traje standardna laktacija.

Kao i u Woodovom modelu i Wilminkov model definira trenutak u kojem se dostiže teorijski maksimalni prinos mlijeka, koliko on iznosi te teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom određenog perioda laktacije.
Deriviramo li (10) po t slijedi

$$\frac{d}{dt}Y_t = b - kce^{-kt}. \tag{11}$$

Izjednačimo li (11) s nulom dobivamo

$$t_1 = -\frac{1}{k} \cdot ln\left(\frac{b}{ck}\right). \tag{12}$$

Prema tome, (12) je stacionarna točka funkcije (11).
Pogledamo li drugu derivaciju funkcije (11) i uvrstimo li vrijednost (12) dobivamo

$$ck^2e^{-kt_1} < 0,$$

jer je $c < 0$ i $k > 0$. Slijedi da je (12) točka lokalnog maksimuma funkcije (11).
Dakle, teorijski maksimalni prinos mlijeka dostiže se u trenutku

$$PT = -\frac{1}{k} \cdot ln\left(\frac{b}{ck}\right) \tag{13}$$

i iznosi

$$Y_{max} = Y(PT). \tag{14}$$

Teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana definiran je sljedećim određenim integralom:

$$M_{305} = \int_1^{305} (a + bt + ce^{-kt})\, dt. \tag{15}$$

4.3.2 Procjena parametara na temelju stvarnih dnevnih podataka o prinosu mlijeka

Kao što smo veći i naveli, vrijednost parametra k nećemo fiksirati na $k = 0.05$, nego ćemo i parametar k procijeniti. U sljedećoj tablici navedene su procijenjene vrijednosti parametara a, b, c i k modela (10) i pripadne stadardne greške za prinos mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

	parametar	procjena	standardna greška
prva laktacija			
	a	88.36507	0.23277
	b	-0.04562	0.00124
	c	-52.07323	0.45795
	k	0.04871	0.00085
druga laktacija			
	a	115.82936	0.20316
	b	-0.15108	0.00118
	c	-70.45471	0.81851
	k	0.09464	0.00176
treća ili veća laktacija			
	a	132.79612	0.23578
	b	-0.19356	0.00135
	c	-84.41868	0.82618
	k	0.082	0.00133

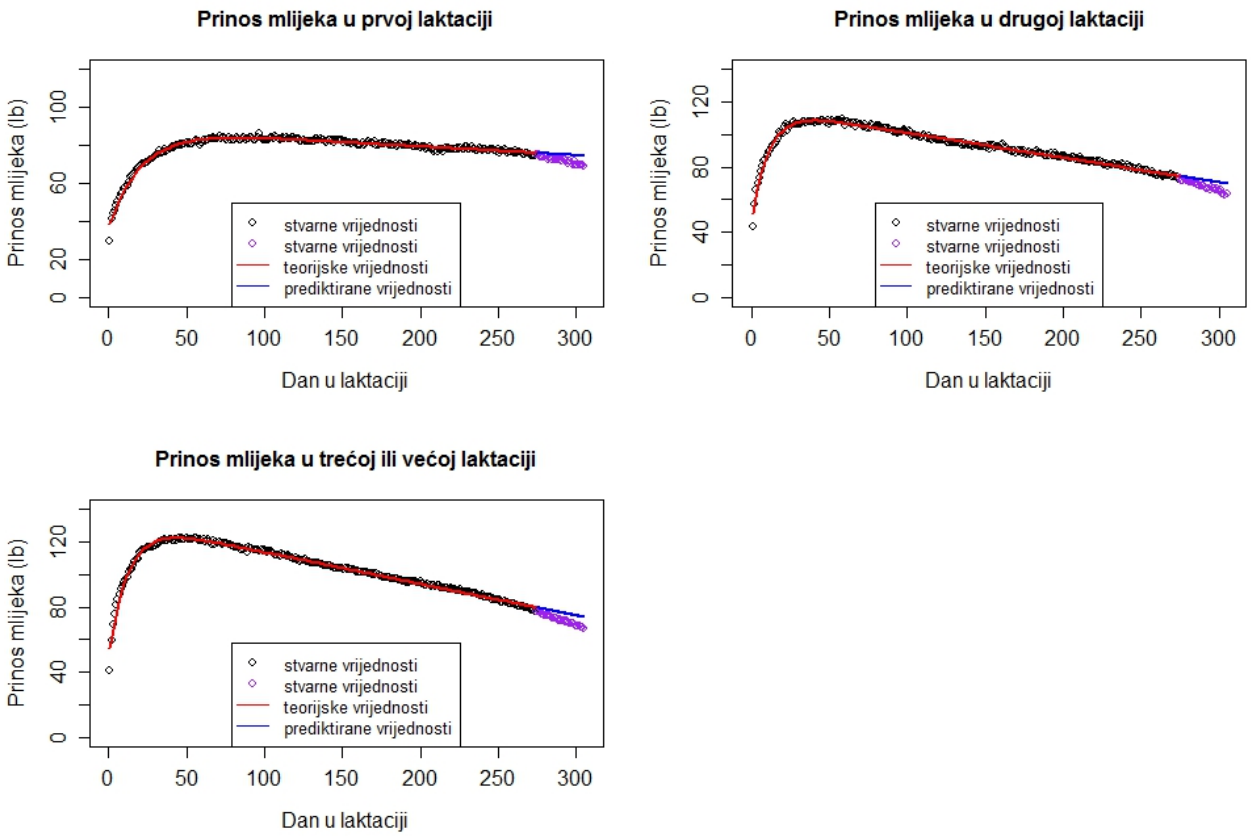
Tablica 10: Tablica procijenjenih vrijednosti parametara Wilminkovog laktacijskog modela za prinos mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji i pripadne standardne greške.

Budući da su p-vrijednosti t-testova, koji u nul-hipotezama pretpostavljaju jednakost parametra nuli, u svim grupama manje od 0.05, na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipoteze i prihvaćamo alternativne, tj. zaključujemo kako su svi parametri modela u svim grupama značajni. Drugim riječima, na razini statističke značajnosti 0.05 svi procjenjeni parametri u svim grupama bitno utječu na oblik laktacijske krivulje. Pogledamo li Tablicu 10 možemo uočiti trend u parametrima s obzirom na redni broj laktacije. Uočavamo da parametar a raste što su krave u većoj laktaciji, a to smo mogli i očekivati. Najmanja vrijednost je u prvoj laktaciji i iznosi 88.36507, dok je najveća u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi 132.79612. Vrijednost parametara b i c, koji kontroliraju padajući i rastući dio laktacijske krivulje, pokazuju suprotan trend od vrijednosti parametra a. Naime, što su krave u većoj laktaciji vrijednosti parametara su manje. Parametar k ne pokazuje nikakav konzistentan trend. Najmanji je u prvoj laktaciji, a najveći u drugoj laktaciji. Kako je parametar k povezan s trenutkom dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka takvo ponašanje nas ne iznenađuje jer smo kroz prethodna poglavlja vidjeli da krave u drugoj laktaciji dostižu maksimalni prinos mlijeka nešto brže od krava u trećoj ili većoj laktaciji.
Sljedeća tablica prikazuje nam Wilminkove laktacijske modele za modeliranje prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

	model
prva laktacija	$Y_t = 88.36507 - 0.04562 \cdot t - 52.07323 \cdot e^{-0.04871 \cdot t}$
druga laktacija	$Y_t = 115.82936 - 0.15108 \cdot t - 70.45471 \cdot e^{-0.09464 \cdot t}$
treća ili veća laktacija	$Y_t = 132.79612 - 0.19356 \cdot t - 84.41868 \cdot e^{-0.082 \cdot t}$

Tablica 11: Laktacijski modeli za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

Prikažimo grafički laktacijske krivulje dobivene modelima iz Tablice 11 kako bismo teorijske vrijednosti mogli usporediti sa stvarnim prinosima mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.



Slika 11: Laktacijske krivulje prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji dobivene modelima iz Tablice 11 i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Sa Slike 11 možemo vidjeti da su laktacijske krivulje dobivene modelima iz Tablice 11 dobro usklađene sa stvarnim prinosima mlijeka. Niti u jednom slučaju ne uočavamo značajnija precjenjivanja, odnosno podcjenjivanja stvarnih prinosa mlijeka. Ipak, na kraju laktacije, vrijednosti prediktirane modelima počinju precjenjivati stvarne prinose mlijeka. Značajnije razlike između stvarnog i teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka ne možemo uočiti. Isto tako, trenuci dostizanja stvarnog i teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka bliski su jedan drugom, tj. razlike nisu očite sa grafičkih prikaza kao što je to bio slučaj kod Woodovog laktacijskog modela.

Koristeći formule navedene prilikom definiranja Wilminkovog laktacijskog modela izračunajmo teorijski makismalni prinos mlijeka, dan u kojem se on dostiže te teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacijskog ciklusa.

	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
prva laktacija	83.67	82.49	21468.78	23722.81
druga laktacija	108.19	40.02	25347.38	27507.87
treća ili veća laktacija	121.99	43.62	28118.8	30418.71

Tablica 12: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih modelima iz Tablice 11 .

Vidimo da se model ponaša u skladu s uobičajenim rezultatima i pravilima. Vrijednosti teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka i teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 i

305 dana laktacije rastu što su krave u većoj laktaciji. Najmanji su za krave u prvoj laktaciji, a najveći za krave u trećoj ili većoj laktaciji. Teorijski maksimalni prinos mlijeka najsporije dostižu krave u prvoj laktaciji, u trenutku 82.49. Trenuci dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji ne razlikuju se puno, no ipak ga prije dostižu krave u drugoj laktaciji, u trenutku 40.02. Krave u trećoj ili većoj laktaciji dostižu ga u trenutku 43.62. Opet uočavamo značajan porast teorijskog ukupnog prinosa mlijeka ukoliko uključimo u analizu i podatke koje nismo koristili prilikom procjene parametara. Razlog povećanja je veliko precjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka na kraju prve, druge i treće ili veće laktacije.

Usporedimo sada vrijednosti dobivene modelom, tj. vrijednosti iz Tablice 12 sa stvarnim vrijednostima iz Tablice 2. Iako nam to nije bilo vidljivo sa grafičkih prikaza najveća odstupanja pojavljuju se u trenutku dostizanja teorijskog i stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka. Najveće odstupanje pojavljuje se u drugoj laktaciji. Prema modelu, maksimalni prinos mlijeka dostiže se u trenutku 40.02, no stvarno se on dostiže znatno kasnije, u 58. danu od dana teljenja. Najmanje odstupanje prisutno je u trećoj ili većoj laktaciji. Teorijski maksimalni prinos mlijeka dostiže se u trenutku 43.62, no stvarno se on dostiže kasnije, u 55. danu od dana teljenja. Stvarni maksimalni prinos mlijeka u prvoj laktaciji dostiže se u 97. danu od dana teljenja, no model procjenjuje da će se on dogoditi nešto ranije, u trenutku 82.49. Teorijski maksimalni prinos mlijeka ne pokazuje veća odstupanja od stvarnih vrijednosti. Najveće odstupanje teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka od stvarnog javlja se kod krava u prvoj laktaciji i iznosi $2.61lb$, dok je najmanje odstupanje prisutno kod krava u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi svega $0.28lb$. Odstupanje kod krava u drugoj laktaciji iznosi $1.14lb$. Teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana laktacijskog ciklusa u sva tri slučaja podcjenjuje stvarni ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana. Najveće odstupanje teorijskog od stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 dana prisutno je kod krava u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi $66.7lb$, dok je najmanje za krave u prvoj laktaciji i iznosi $57.08lb$. Odstupanje kod krava u drugoj laktaciji iznosi $62.56lb$. Uključivanjem i zadnjih trideset podataka o prinosu mlijeka, koje smo izostavili prilikom procjene parametara, imamo nešto drugačiju situaciju. Modeli precjenjuju stvarni ukupni prinos tijekom 305 dana laktacije u sve tri grupe. Najveće precjenjivanje prisutno je u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi $74.77lb$, a najmanje u prvoj laktaciji i iznosi $37.31lb$. Teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacije u drugoj laktaciji veći je od stvarnog za $54.98lb$. Veća vrijednost teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana u odnosu na stvarni rezultat je velikog precjenjivanja stvarnih prinosa mlijeka na kraju laktacijskog ciklusa što možemo vidjeti i na Slici 10.

4.4 MilkBot laktacijski model

4.4.1 Definicija i interpretacija parametara

Posljednji model na koji ćemo se osvrnuti je MilkBot laktacijski model. Kao i kod Wilminkovog modela, i u definiciji ovog laktacijskog modela pojavljuju se četiri parametra. Dnevni prinos mlijeka definiran je izrazom

$$Y_t = a \cdot \left(1 - \frac{exp(\frac{c-t}{b})}{2}\right) \cdot exp(-dt). \tag{16}$$

Kao i prethodni modeli, i MilkBot laktacijski model nelinearan je u parametrima. Isto tako Y_t predstavlja količinu mlijeka u trenutku t. Svaki parametar modela ima svoje značenje i naziv koje ćemo u nastavku opisati i navesti.

Parametar a modela (16) je parametar skaliranja (engleski *scale parameter*), a predstavlja količinu mlijeka. Vrijednosti ovog parametra uvijek su pozitivni brojevi, a izražava se u lb/dan. On također ima značenje teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka koji se približava stvarnoj vrijednosti kako se vrijednost parametra b približava nuli. Povezanost s teorijskim maksimalni prinosom mlijeka omogućuje parametru a da odredi razmjer laktacije koji ovisi, kako smo i vidjeli do sada, o rednom broju laktacije u kojoj se krava nalazi. Kao i parametar k u Wilminkovom modelu, parametar a je od izuzetne važnosti za model. Zašto je važan? Primjerice, u Woodovom laktacijskom modelu, u kojem nemamo parametar koji nam određuje razmjer laktacije, dolazi do značajnijeg odstupanja teorijskih od stvarnih prinosa mlijeka.

Ostala tri parametra modela određuju oblik laktacijske krivulje. Parametar b (engleski *ramp parameter*) kontrolira rastući dio laktacijske krivulje, tj. dio odmah nakon teljenja do postizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Vrijednosti ovog parametra su pozitivni brojevi i iskazuju se kao vrijeme pri čemu se često uzima dan. Parametar c (engleski *offset parameter*) kontrolira vrijeme između teljenja i početka laktacije. Vrijednosti ovog parametra iskazuju se kao vrijeme i često su to dani, no za razliku od parametra b ovaj parametar može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli. Model se može pojednostaviti fiksiranjem vrijednosti ovog parametra na nulu što je ekvivalentno činjenici da laktacija počinje u trenutku teljenja. Parametar d (engleski *decay parameter*) kontrolira padajući dio laktacijske krivulje i njegove vrijednosti su pozitivni brojevi. Brzina opadanja proizvodnje mlijeka povezuje se s perzistencijom pa tako i sama vrijednost ovog parametra. Perzistencija je definirana izrazom

$$P = \frac{0.693}{d}.$$

Ovako definiranu perzistenciju interpretiramo kao vrijeme potrebno kako bi se prinos mlijeka prepolovio s time da ignoriramo rastući dio laktacijske krivulje.

Kao i prethodna dva modela i MilkBot model definira formule za izračunavanje trenutka u kojem se dostiže teorijski maksimalni prinos mlijeka, koliko on iznosi te teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom određenog perioda laktacije (vidi [8]).
Trenutak u kojem se dostiže teorijski maksimalni prinos mlijeka definiran je sljedećim izrazom:

$$PT = c - b \cdot ln\left(\frac{2bd}{1+bd}\right). \tag{17}$$

Prema tome teorijski maksimalni prinos mlijeka iznosi

$$Y_{max} = Y(PT). \tag{18}$$

Želimo li izračunati koliko iznosi teorijski ukupni prinos mlijeka, primjerice tijekom 305 dana laktacijskog ciklusa, možemo vrlo jednostavno, koristeći određeni integral, odnosno računajući površinu ispod laktacijske krivulje. Dakle, teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacijskog ciklusa definiran je sljedećim izrazom:

$$M_{305} = a \cdot \int_1^{305} \left(\left(1 - \frac{exp\left(\frac{c-t}{b}\right)}{2}\right) \cdot exp(-dt)\right) dt. \tag{19}$$

4.4.2 Procjena parametara na temelju stvarnih dnevnih podataka o prinosu mlijeka

U ovom dijelu napravit ćemo procjenu parametara MilkBot laktacijskog modela za prinos mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji. Procijenjene vrijednosti navedene su u sljedećoj tablici zajedno sa standardnim greškama.

	parametar	procjena	standardna greška
prva laktacija			
	a	88.73279	0.25804
	b	21.0049	0.38485
	c	3.47288	0.15611
	d	0.00057	0.000016
druga laktacija			
	a	118.60954	0.26894
	b	11.81268	0.23654
	c	2.24265	0.1121
	d	0.00165	0.000014
treća ili veća laktacija			
	a	137.25193	0.38086
	b	14.07275	0.28626
	c	3.26698	0.12284
	d	0.00191	0.000017

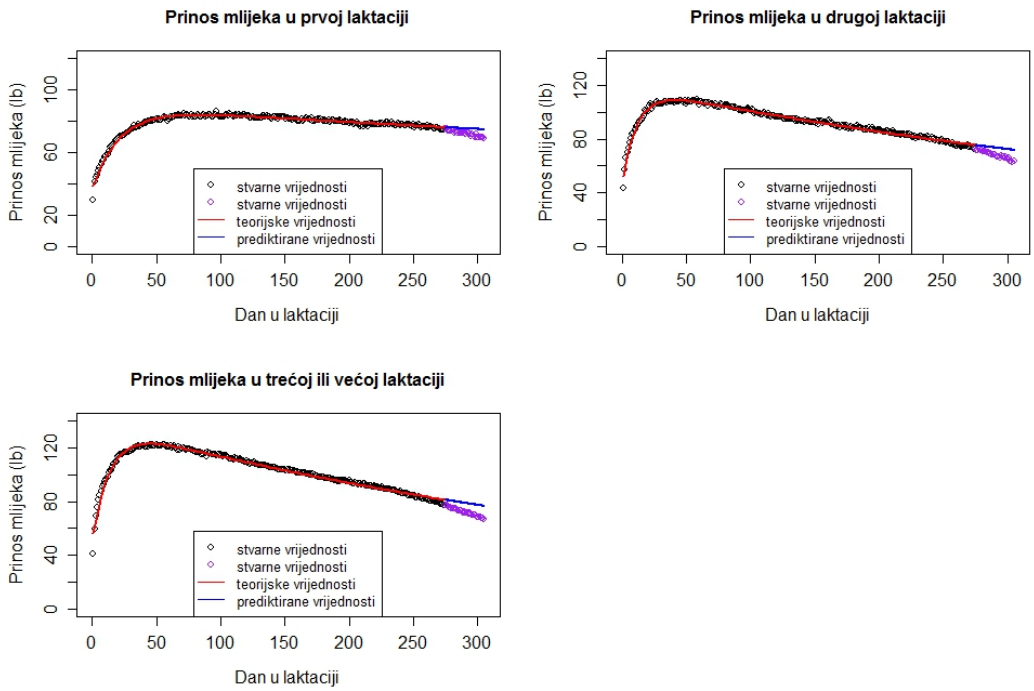
Tablica 13: Tablica procijenjenih vrijednosti parametara MilkBot laktacijskog modela za prinos mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji i pripadne standardne greške.

Budući da su p-vrijednosti t-testova, koji u nul-hipotezama pretpostavljaju jednakost parametra nuli, u svim grupama manje od 0.05, na razini značajnosti 0.05 odbacujemo nul-hipoteze i prihvaćamo alternativne, tj. zaključujemo kako su svi parametri modela u svim grupama značajni. Drugim riječima, na razini statističke značajnosti 0.05 svi procjenjeni parametri u svim grupama bitno utječu na oblik laktacijske krivulje. Uočavamo rastući trend vrijednosti parametra a što su krave u većoj laktaciji. Najmanji je za krave u prvoj laktaciji i iznosi 88.73279, a najveći za krave u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi 137.25193. Isti trend prisutan je i u vrijednostima parametra d. Najveći ja za krave u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi 0.00191, a najmanji za krave u prvoj laktaciji i iznosi 0.00057. Kao što smo i naveli parametar d dovodimo u vezu s perzistencijom. Znamo da je perzistencija krava manja što su krave u većoj laktaciji. Upravo iz tog razloga mogli smo i očekivati ovakvo ponašanje parametra d. Parametri b i c ne pokazuju konzistentan trend. Najmanji su za krave u drugoj laktaciji, a najveći za krave u prvoj laktaciji.
Navedimo sada MilkBot laktacijske modele za modeliranje prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

	model
prva laktacija	$Y_t = 88.73279 \cdot \left(1 - \frac{exp\left(\frac{3.47288 - t}{21.0049}\right)}{2}\right) \cdot exp(-0.00057 \cdot t)$
druga laktacija	$Y_t = 118.60954 \cdot \left(1 - \frac{exp\left(\frac{2.24265 - t}{11.81268}\right)}{2}\right) \cdot exp(-0.00165 \cdot t)$
treća ili veća laktacija	$Y_t = 137.25193 \cdot \left(1 - \frac{exp\left(\frac{3.266698 - t}{14.07275}\right)}{2}\right) \cdot exp(-0.00191 \cdot t)$

Tablica 14: MilkBot laktacijski modeli za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

Prvu usporedbu stvarnih prinosa mlijeka s teorijskim vrijednostima napravit ćemo grafički tako da prikažemo stvarne dnevne prinose mlijeka i laktacijske krivulje dobivene laktacijskim modelima iz Tablice 14.



Slika 12: Laktacijske krivulje prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji dobivene modelima iz Tablice 14 i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Sa Slike 12 možemo vidjeti da su laktacijske krivulje dobivene modelima iz Tablice 14 dobro usklađene sa stvarnim prinosima mlijeka. Gledajući laktacijske krivulje ne možemo uočiti niti značajnija podcjenjivanja niti značajnija precjenjivanja stvarnih prinosa mlijeka u početnom i srednjem periodu laktacije. Odmah je uočljivo veliko odstupanje od stvarnih prinosa mlijeka na kraju laktacijskog ciklusa. Naime, vrijednosti prediktirane modelom već u prvoj laktaciji počinju dosta odstupati od stvarnih vrijednosti i to odstupanje se povećava što su krave u većoj laktaciji. Vidimo da je u trećoj ili većoj laktaciji odstupanje od stvarnih vrijednosti

najdrastičnije. Što se tiče razlika u trenucima dostizanja teorijskog i stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka one nisu vidljive, kao ni same razlike između njih.

Sljedeću usporedbu napravit ćemo između teorijskog i stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka, dana u kojem se oni dostižu te teorijskog i stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacijskog ciklusa. Odredimo prvo teorijske vrijednosti koristeći formule navedene prilikom definiranja MilkBot laktacijskog modela.

	Y_{max} (lb)	PT	P	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
prva laktacija	83.69	82.21	1221.231	21468.75	23726.23
druga laktacija	108.78	40.81	420.54	25346.85	27553.54
treća ili veća laktacija	122.7	44.77	362.69	28118.8	30485

Tablica 15: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih modelima iz Tablice 14 .

Kao i kod ostalih modela navedenih ranije vidimo da se model ponaša u skladu s uobičajenim rezultatima i pravilima. Vrijednosti teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka i teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacije rastu što su krave u većoj laktaciji. Najmanji su za krave u prvoj laktaciji, a najveći za krave u trećoj ili većoj laktaciji. Teorijski maksimalni prinos mlijeka najsporije dostižu krave u prvoj laktaciji, u trenutku 82.21. Trenuci dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji ne razlikuju se puno, no ipak ga prije dostižu krave u drugoj laktaciji, u trenutku 40.81. Krave u trećoj ili većoj laktaciji dostižu ga u trenutku 44.77. Opet uočavamo značajan porast teorijskog ukupnog prinosa mlijeka ukoliko uključimo u analizu i podatke koje nismo koristili prilikom procjene parametara. Razlog povećanja veliko je precjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka na kraju prve, druge i treće ili veće laktacije. Perzistencija je najveća za krave u prvoj laktaciji, a najmanja za krave u trećoj ili većoj laktaciji. U pravilu to znači da prinos mlijeka najsporije opada kod krava u prvoj laktaciji, a najbrže kod krava u trećoj ili većoj laktaciji.

U odnosu na stvarne vrijednosti navedene u Tablici 2 ne uočavamo značajnija odstupanja osim trenutka u kojem se dostiže stvarni i teorijski maksimalni prinos mlijeka iako to s grafičkih prikaza nismo mogli uočiti. Najveće odstupanje prisutno je kod krava u drugoj laktaciji, budući da se stvarni maksimalni prinos mlijeka dostiže u 58. danu od dana teljenja, dok model procjenjuje da bi se on trebao dogoditi u trenutku 40.81. Najmanje odstupanje prisutno je kod krava u trećoj ili većoj laktaciji. Naime, model procjenjuje da se maksimalni prinos mlijeka treba dogoditi u trenutku 44.27, a stvarno se on dostiže u 55. danu od dana teljenja. Za krave u prvoj laktaciji model procjenjuje da se maksimalni prinos mlijeka dostiže u trenutku 82.205, a stvarno se on dostiže ipak dosta kasnije, u 97. danu od dana teljenja. Usporedimo li vrijednosti teorijskog i stvarnog maksimalnog prinos mlijeka prvi puta uočavamo precjenjivanje stvarnog maksimalnog prinos mlijeka i to u trećoj ili većoj laktaciji. Ono iznosi $0.43lb$. U prvoj i drugoj laktaciji i dalje je prisutno podcjenjivanje stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka. Ono u prvoj laktaciji iznosi $2.59lb$, dok u drugoj laktaciji iznosi $0.55lb$. Kao i u prethodnim modelima prisutno je podcjenjivanje stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 dana laktacijskog ciklusa u sve tri grupe. U prvoj laktaciji ono iznosi $57.11lb$, u drugoj laktaciji $63.09lb$, a u trećoj ili većoj laktaciji $66.82lb$. Uključimo li u analizu i zadnjih trideset podataka koje smo izostavili prilikom procjene parametara modela, kao i kod Wilminkovog modela imamo situaciju da se stvarni ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacije precjenjuje. Najveće precjenjivanje prisutno je u trećoj ili većoj laktaciji i iznosi $141.06lb$, a najmanje je u prvoj laktaciji, gdje iznosi $41.34lb$. Teorijski ukupni

prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacije u drugoj je laktaciji veći od stvarnog za $100.65lb$. Razlog tako velikog precjenjivanja možemo vidjeti, odnosno naslutiti i sa Slike 12. Naime, vrijednosti prediktirane modelom na kraju laktacijskog ciklusa počinju dosta odstupati od stvarnih prinosa mlijeka.

5 Usporedba laktacijskih modela

U ovom poglavlju napravit ćemo usporedbu laktacijskih modela koje smo naveli i obradili u prethodnom poglavlju. Usporedit ćemo ih grafički tako da prikažemo laktacijske krivulje modela za svaku grupu posebno. Zatim ćemo navesti tablicu koja sadrži podatke o teorijskim i stvarnim maksimalnim prinosima mlijeka, trenucima u kojima se oni dostižu te teorijskim i stvarnim ukupnim prinosima mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacijskog ciklusa. U njoj ćemo navesti isto tako i odstupanja u odnosu na stvarne vrijednosti. Treću usporedbu napravit ćemo preko određenih kriterija, kao što su korigirani R^2, standardna greška reziduala te Akaike i Bayesov informacijki kriterij.

Korigirani R^2 (oznaka R^2_{adj}) definiran je sljedećim izrazom

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{n-1}{n-p} \cdot \left(1 - R^2\right), \tag{20}$$

gdje je R^2 koeficijent determinacije, n broj opservacija, a p broj prametara u modelu. Koeficijent determinacije R^2 definiran je izrazom

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}, \tag{21}$$

gdje je RSS suma kvadrata reziduala, a TSS ukupna suma kvadrata odstupanja stvarnih prinosa mlijeka od prosječnog prinosa mlijeka.

Standardna greška reziduala (oznaka RSD) definirana je izrazom

$$RSD = \frac{\sqrt{RSS}}{\sqrt{n-p}}, \tag{22}$$

gdje je RSS suma kvadrata reziduala, n broj opservacija, a p broj parametara u modelu.

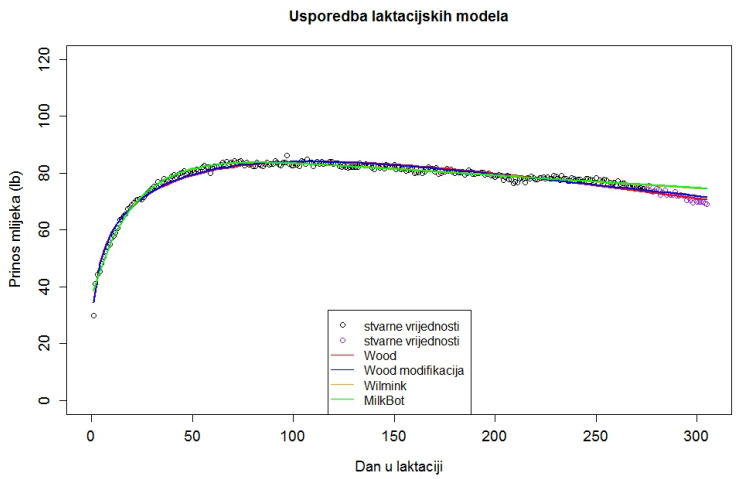
Za određivanje vrijednosti Akaike i Bayesovog informacijskog kriterija koristiti ćemo već ugrađene funkcije u programskom paketu R.

U konačnici najbolji model je onaj koji ima najmanju standardnu grešku reziduala, najmanji iznos Akaike i Bayesovog informacijskog kriterija i najveću vrijednost korigiranog R^2.

5.1 Prinos mlijeka u prvoj laktaciji

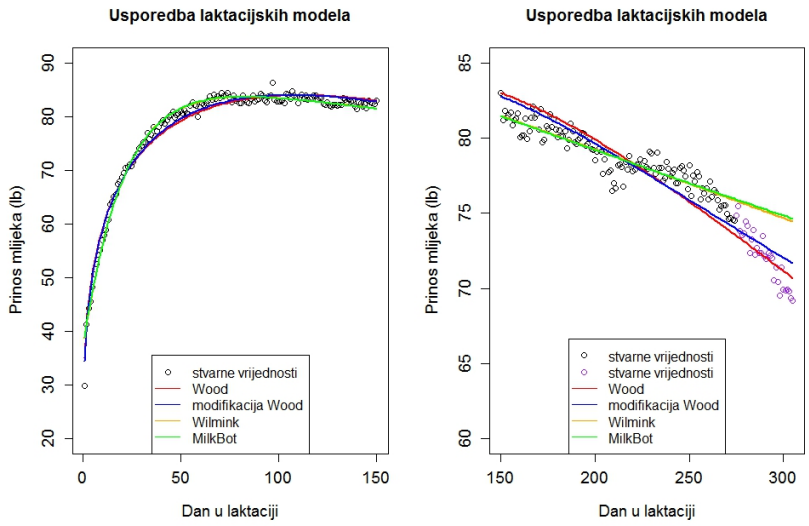
Usporedimo prvo sve laktacijske modele (Woodov laktacijski moodel i njegovu modifikaciju te Wilminkov i MilkBot laktacijski model) za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji.

Prikažimo prvo laktacijske krivulje dobivene laktacijskim modelima u odnosu na stvarne prinose mlijeka u prvoj laktaciji.



Slika 13: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom te Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Sljedeća slika predstavlja prikaz laktacijskih krivulja po dijelovima, odnosno od 1. do 150. dana u laktaciji te od 150. do 305. dana u laktaciji kako bismo lakše uočili razlike između modela.



Slika 14: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom te Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Pogledamo li prvo Sliku 13 naslućujemo da razlike u laktacijskim modelima postoje posebno na kraju laktacijskog ciklusa krave. Razlike su još uočljivije ukoliko pogledamo Sliku 14. Laktacijske krivulje dobivene Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom bolje su usklađene sa stvarnim prinosima mlijeka do otprilike 270. dana laktacijskog ciklusa, nakon čega ih počinju precjenjivati. Nakon 270. dana stvarne prinose mlijeka bolje opisuju laktacijske krivulje dobivene Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom. Isto tako možemo uočiti da su vrijednosti prediktirane Woodovim laktacijskim modelom i njegovom

modifikacijom bolje usklađene sa stvarnim prinosima mlijeka u odnosu na vrijednosti prediktirane Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom koji se tijekom cijelog laktacijskog ciklusa gotovo pa podudaraju. Što se tiče razlika između Woodovog laktacijskog modela i njegove modifikacije razlike su uočljive tek kod modelima prediktiranih vrijednosti. Vidimo da ih modifikacija Woodovog modela na samom kraju laktacije više precjenjuje.

Usporedimo sada odstupanja teorijskih maksimalnih prinosa mlijeka, trenutaka u kojima se oni dostižu i teorijskih ukupnih prinosa mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacije od stvarnih vrijednosti. Odstupanja ćemo navesti u zagradama pri čemu će negativna razlika označavati podcjenjivanje, a pozitivna precjenjivanje stvarnih vrijednosti.

model	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
stvarne vrijednosti	86.28	97	21525.86	23685.5
Wood	83.97 (-2.31)	111.12 (14.12)	21474.47 (-51.39)	23637.09 (-48.41)
modifikacija Woodovog modela	84.01 (-2.27)	106.12 (9.12)	21474.15 (-51.71)	23658.15 (-27.35)
Wilmink	83.67 (-2.61)	82.49 (-14.51)	21468.78 (-57.08)	23722.81 (37.31)
MilkBot	83.69 (-2.59)	82.21 (-14.795)	21468.75 (-57.11)	23726.23 (41.34)

Tablica 16: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom te Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom i odstupanja od stvarnih vrijednosti za prinos mlijeka u prvoj laktaciji.

Vidimo da su odstupanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka od stvarnog približno jednaka u svim modelima. Razlike se pojavljuju tek na prvom decimalnom mjestu. U svim laktacijskim modelima prisutno je precjenjivanje stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka. Najveće odstupanje prisutno je kod Wilminkovog laktacijskog modela i ono iznosi $2.61lb$, dok je najmanje kod modifikacije Woodovog modela i iznosi $2.27lb$. Što se tiče trenutka u kojem se dostiže teorijski i stvarni maksimalni prinos mlijeka imamo zanimljivu situaciju. Woodov model i njegova modifikacija procjenjuju da će se makismalni prinos mlijeka dostići kasnije nego što se on stvarno dostiže, dok Wilminkov i MilkBot procjenjuju da će se on dostići ranije. Modifikacija koju su predložili Cappio-Borlino i ostali doprinosi smanjenju precjenjivanja trenutka dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka u usporedbi s Woodovim modelom. Teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana laktacije u svim modelima podcjenjuje stvarni. Najveće odstupanje pojavljuje se u MilkBot modelu i ono iznosi $57.11lb$, dok je najmanje u Woodovom modelu i iznosi $51.39lb$. Uključimo li u analizu i zadnjih trideset dana koje smo izostavili prilikom procjene parametara vidimo da Woodov model i njegova modifikacija i dalje podcjenjuju stvarni ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacije, dok ga Wilminkov i MilkBot model precjenjuju. Podcjenjivanje je manje u modifikaciji Woodovog modela, a precjenjivanje u Wilminkovom modelu.

Odredimo sada mjere kvalitete modela i usporedimo ih.

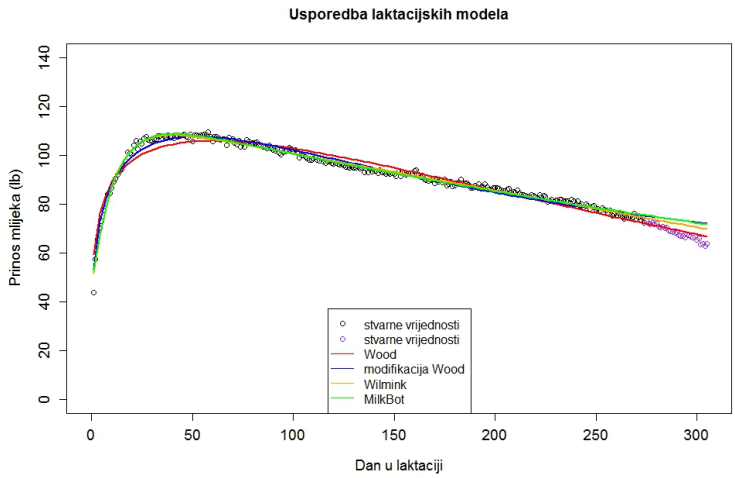
model	R^2_{adj}	RSD	AIC	BIC
Wood	0.9683	1.329	941.906	956.373
modifikacija Woodovog modela	0.9761	1.114	864.36	878.827
Wilmink	0.9832	0.934	768.59	786.374
MilkBot	0.9828	0.978	774.101	792.184

Tablica 17: Korigirani R^2 (R^2_{adj}), standardna greška reziduala (RSD), Akaike informacijski kriterij (AIC) i Bayesov informacijski kriterij (BIC) Wodovog laktacijskog modela i njegove modifikacije te Wilminkovog i MilkBot laktacijskog modela za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji.

Uočavamo da svi modeli imaju visoke vrijednosti korigiranog R^2, što je dobro. No, ipak postoje razlike. Vidimo da je najmanji za Woodov model i iznosi 0.9683, dok je najveći za Wilminkov model i iznosi 0.9832. Istu stvar uočavamo i s Akaike i Bayesovim informacijskim kriterijem. Što se tiče standardne greške reziduala ona pokazuje suprotno kretanje. Najveća je za Woodov model i iznosi 1.329, a najmanja je za Wilminkov model i iznosi 0.934. Prema svim navedenim karakteristikama u Tablici 17 Wilminkov model pokazuje se kao najbolji za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji. Ali moramo biti svjesni činjenice da laktacijska krivulja dobivena Wilminkovim modelom precjenjuje stvarne prinose mlijeka na kraju laktacije, odnosno da predikcija dosta odstupa od stvarnih vrijednosti što možemo vidjeti i na Slici 13 i na Slici 14. Što se tiče same usporedbe Woodovog modela i njegove modifikacije vidimo da modifikacija ima nešto bolje vrijednosti mjera kvalitete modela.

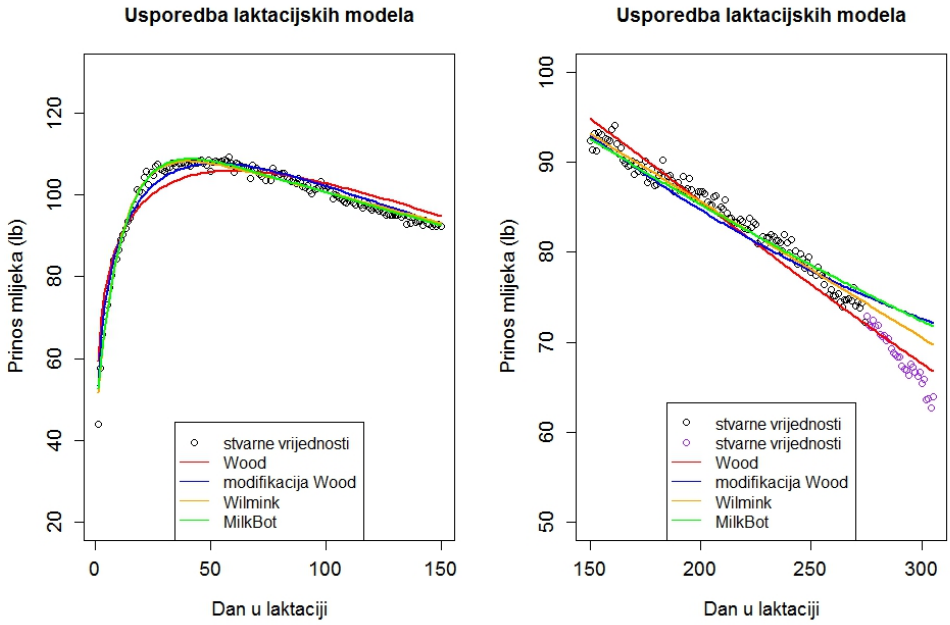
5.2 Prinos mlijeka u drugoj laktaciji

Prikažimo prvo laktacijske krivulje svih laktacijskih modela u odnosu na stvarne dnevne prinose mlijeka u drugoj laktaciji.



Slika 15: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom te Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Na sljedećoj slici možemo vidjeti prikaz laktacijskih krivulja po dijelovima, odnosno od 1. do 150. dana u laktaciji te od 150. do 305. dana u laktaciji.



Slika 16: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom te Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

S grafičkih prikaza uočavamo da su razlike u modelima prisutne i da su one veće nego što je to bio slučaj s laktacijskim krivuljama u prvoj laktaciji. Uočavamo da laktacijske krivulje dobivene Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom dosta podcjenjuju stvarne prinose mlijeka u periodu laktacije u kojem prinos mlijeka raste, odnosno do dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka. Prisutno podcjenjivanje ipak je manje u modifikaciji Woodovog modela. To nije slučaj sa MilkBot i Wilminkovim laktacijskim modelom. Nakon toga slijedi period u kojem Woodov laktacijski model precjenjuje stvarne prinose mlijeka, dok su ostala tri modela dobro usklađena sa stvarnim prinosima mlijeka. Na kraju samog laktacijskog ciklusa imamo obratnu situaciju. Najmanje odstupanje od stvarnih prinosa mlijeka pokazuje Woodov model, dok ih ostala tri modela počinju precjenjivati. Pogledamo li modelima prediktirane vrijednosti, vidimo da odstupanja postaju sve veća, posebno u Wilminkovom i MilkBot laktacijskom modelu te modifikaciji Woodovog modela. Od ta tri modela najmanja odstupanja ipak pokazuje Wilminkov model. Iako su odstupanja prisutna i u Woodovom modelu vidimo da ona nisu izražena kao u ostala tri.

Napravimo sada usporedbu teorijskih maksimalnih prinosa mlijeka, trenutaka u kojima se oni dostižu i teorijskih ukupnih prinosa mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacije i odstupanja od stvarnih vrijednosti. Odstupanja ćemo navesti u zagradama pri čemu će negativna razlika označavati podcjenjivanje, a pozitivna precjenjivanje stvarnih vrijednosti.

model	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
stvarne vrijednosti	109.33	58	25409.94	27452.89
Wood	105.85 (-3.48)	59.72 (1.72)	25345.23 (-64.71)	27425.07 (-27.82)
modifikacija Woodovog modela	107.63 (-1.7)	52.44 (5.56)	25348.11 (-61.83)	27555.59 (102.7)
Wilmink	108.19 (-1.14)	40.02 (-17.98)	25347.38 (-62.56)	27507.87 (54.98)
MilkBot	108.78 (-0.55)	40.81 (-17.19)	25346.85 (-63.09)	27553.54 (100.65)

Tablica 18: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom, Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom i odstupanja od stvarnih vrijednosti za prinos mlijeka u drugoj laktaciji.

Kao i kod laktacijskih modela za modeliranje prinosa mlijeka u prvoj laktaciji niti u drugoj laktaciji ne uočavamo značajnija odstupanja teorijskih od stvarnog maksimalno prinosa mlijeka. Ipak najveće odstupanje pokazuje Woodov laktacijski model i ono iznosi $3.48lb$, dok najmanje odstupanje pokazuje MilkBot laktacijski model i ono iznosi samo $0.55lb$. Kao i u prvoj laktaciji trenutak dostizanja stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka, Woodov model i njegova modifikacija precjenjuju, a MilkBot i Wilminkov model precjenjuju. Najveće odstupanje pokazuje Wilminkov model koje iznosi nešto manje od osmanaest dana, dok najmanje odstupanje pokazuje Woodov model i ono iznosi manje od dva dana. Podcjenjivanje stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 dana laktacije prisutno je u svim modelima. Najmanje je u modifikaciji Woodovog modela, a najveće u MilkBot modelu. Za razliku od prinosa mlijeka u prvoj laktaciji stvarni ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacije podcjenjuje samo Woodov model i to odstupanje je ujedno i najmanje, a iznosi svega $27.82lb$. Najveće odstupanje, odnosno precjenjivanje prisutno je u modificiranom Woodovom modelu i ono iznosi $102.7lb$. Najmanje precjenjivanje pokazuje Wilminkov model, dok je precjenjivanje MilkBot modela na razini modificiranog Woodovog modela.

Sljedeća tablica prikazuje vrijednosti određenih mjera kvalitete modela.

model	R^2_{adj}	RSD	AIC	BIC
Wood	0.944	2.665	1324.453	1338.92
modifikacija Woodovog modela	0.9776	1.683	1071.7	1086.167
Wilmink	0.9885	1.206	889.37	907.453
MilkBot	0.9871	1.278	921.367	939.451

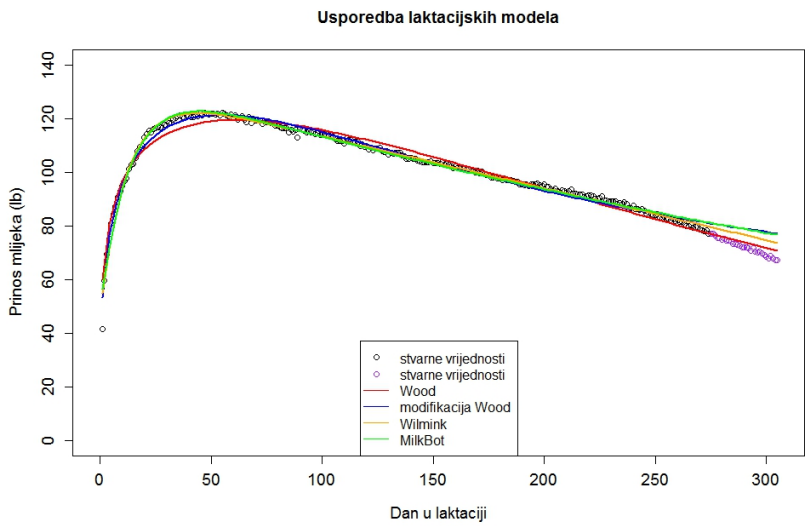
Tablica 19: Korigirani R^2 (R^2_{adj}), standardna greška reziduala (RSD), Akaike informacijski kriterij (AIC) i Bayesov informacijski kriterij (BIC) Wodovog laktacijskog modela i njegove modifikacije te Wilminkovog i MilkBot laktacijskog modela za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji.

Usporedimo li vrijednosti mjera kvalitete modela u drugoj laktaciji s vrijednostima u prvoj laktaciji možemo vidjeti da su one lošije, osim korigiranog R^2. Uočavamo da su njegove vrijednosti Woodovog laktacijskog modela i njegove modifikacije manje u odnosu na vrijednosti iz prve laktacije, dok su vrijednosti Wilminkovog i MilkBot laktacijskog modela veće. Nadalje, u odnosu na prvu laktaciju očituje se povećanje standardne greške reziduala te

Akaike i Bayesovog informacijskog kriterija. Pogledamo li vrijednosti korigiranog R^2 svih modela vidimo da su one i dalje na vrlo visokoj razini što je dosta dobro. Razlike uočavamo tek na drugom decimalnom mjestu. Najlošiji model prema ovom kriteriju je, kao i u prvoj laktaciji, Woodov laktacijski model. Korigirani R^2 Woodovog laktacijskog modela iznosi 0.944. Pogledamo li i ostale kriterije možemo vidjeti da je i prema njima Woodov laktacijski model najlošiji. Ima najveću standardnu grešku reziduala koja iznosi 2.66 i najveće vrijednosti Akaike i Bayesovog informacijskog kriterija koje iznose 1324.453, odnosno 1338.92. Najmanju vrijednost standardne greške reziduala ima Wilminkov laktacijski model i ona iznosi 1.206. Isto tako i vrijednosti Akaike i Bayesovog informacijskog kriterija najmanje su za Wilminkov laktacijski model i iznose 889.373, odnosno 907.453. Prema tome, najbolji model za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji je, kao i u prvoj laktaciji, Wilminkov laktacijski model. No, moramo biti svjesni činjenice da vrijednosti prediktirane Wilminkovim laktacijskim modelom dosta odstupaju od stvarnih vrijednosti što se odrazilo i u povećanju teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana laktacije.
Što se tiče usporedbe Woodovog laktacijskog modela i njegove modifikacije vidimo da je prema mjerama kvalitete modela, Woodov laktacijski model lošiji od njegove modifikacije. Ali, isto kao i kod Wilminkovog laktacijskog modela, vrijednosti prediktirane modificiranim Woodovim laktacijskim modelom odstupaju znatno više od vrijednosti prediktiranih Woodovim laktacijskim modelom što se moglo uočiti i na grafičkim prikazima te u povećanju teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana laktacije.

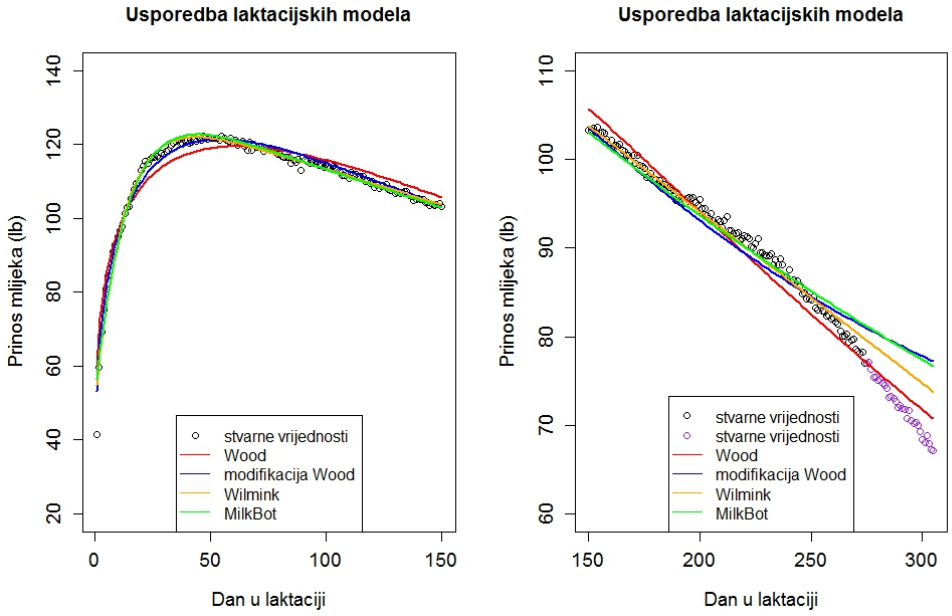
5.3 Prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji

Analogno kao i u prethodna dva potpoglavlja pogledajmo prvo grafičke prikaze laktacijskih krivulja dobivene laktacijskim modelima opisanim u prethodnom poglavlju.



Slika 17: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom te Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Na sljedećoj slici možemo vidjeti dijelove laktacijskih krivulja, odnosno laktacijske krivulje od 1. do 150. dana u laktaciji te od 150. do 305. dana u laktaciji.



Slika 18: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom te Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Naslućujemo da bi razlike u modelima mogle postojati. Kao i u drugoj laktaciji vidimo da Wilminkov i MilkBot laktacijski model bolje opisuju stvarne prinose mlijeka u početnom i srednjem periodu laktacije. Na kraju laktacije, odnosno od 260. dana laktacije ta dva modela počinju precjenjivati stvarne prinose mlijeka. Isto tako, uočavamo da vrijednosti prediktirane tim modelima dosta odstupaju od stvarnih prinosa mlijeka, precjenjuju ih. Precjenjivanje je veće kod MilkBot modela. Modificirani Woodov model ponaša se nešto lošije od ta dva modela. U početnom periodu laktacije vidljivo je da podcjenjuje stvarne prinose mlijeka, nakon čega ih većim dijelom počinje precjenjivati u periodu od 50. do 100. dana laktacije. Nakon toga opet slijedi period podcjenjivanja, da bi u 260. danu laktacije precjenjivanja počela značajnije odstupati, kao što je slučaj i s MilkBot modelom. Woodov model se pokazuje kao najbolji na kraju laktacije. Vidimo da su odstupanja od stvarnih vrijednosti najmanja te da vrijednosti prediktirane Woodovim modelom najmanje odstupaju od stvarnih vrijednosti. Problem kod Woodovog modela je u tome što u svojoj definiciji ne sadrži parametar koji je povezan s razmjerom laktacije ili s trenutkom dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Koliko je on značajan mogli smo vidjeti na grafičkim prikazima laktacijske krivulje i u drugoj, ali i u ovoj grupi. Naime, od svih modela opisanih u prethodnom poglavlju Woodov laktacijski model se najlošije ponaša u periodu do dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka. Vidimo da u tom periodu do 75. dana laktacijska krivulja puno više odstupa od stvarnih vrijednosti za razliku od ostalih modela. Nakon toga slijedi period precjenjivanja stvarnih vrijednosti. Modifikacijom je to eliminirano, no modifikacija Woodovog modela, kao što smo i rekli, puno više precjenjuje stvarne prinose mlijeka na kraju laktacijskog ciklusa.

Pogledajmo sada postoje li značajnije razlike u teorijskim maksimalnim prinosima, trenucima u kojima se oni dostižu te teorijskim ukupnim prinosima mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacije. Odstupanja od stvarnih vrijednosti navesti ćemo u zagradama pri čemu će podcjenjivanje predstavljati negativna razlika, a precjenjivanje pozitivna razlika.

model	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
stvarne vrijednosti	122.27	55	28185.62	30343.94
Wood	119.5 (-2.77)	61.1 (6.1)	28119.06 (-66.56)	30334.1 (-9.84)
modifikacija Woodovog modela	121.42 (-0.85)	54.37 (-0.63)	28122.62 (-63)	30493.37 (149.43)
Wilmink	121.99 (-0.28)	43.62 (-11.38)	28118.8 (-66.7)	30418.71 (74.77)
MilkBot	122.7 (0.43)	44.77 (-10.23)	28118.8 (-66.82)	30485 (141.06)

Tablica 20: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih Woodovim laktacijskim modelom i njegovom modifikacijom te Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom i odstupanja od stvarnih vrijednosti za prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

Vidimo da svi laktacijski modeli imaju vrlo niska odstupanja teorijskog od stvarnog maksimalno prinosa mlijeka osim Woodovog modela. Woodov model podcjenjuje stvarni maksimalni prinos mlijeka za $2.77lb$. Njegova modifikacija i Wilminkov laktacijski model podcjenjuju ga za manje od $1lb$. Jedino u MilkBot laktacijskom modelu uočavamo precjenjivanje stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka koje iznosi $0.43lb$. Slična situacija je i sa trenutkom dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka. Jedini model u kojem je prisutno precjenjivanje je Woodov laktacijski model, dok ga ostala tri modela podcjenjuju. Vidimo da je najmanje podcjenjivanje prisutno u modificiranom Woodovom modelu, dok su podcjenjivanja Wilminkovim i MilkBot laktacijskim modelom na istoj razini, nešto više od 10 dana. Teorijski ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana laktacije podcjenjuju svi modeli. Podcjenjivanja se kreću u rasponu od $63lb$ do $66lb$. Najmanje podcjenjivanje prisutno je u modificiranom Woodovom laktacijskom modelu, dok je najveće u MilkBot modelu. Zbog velikih odstupanja modelima prediktiranih vrijednosti, isključujući Woodov, javljaju se velika precjenjivanja stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana laktacije. Dosta velika odstupanja pokazuju modificirani Woodov model i MilkBot model koja iznose $149.43lb$, odnosno $141.06lb$. Najmanje odstupanje prisutno je u Woodovom modelu koji ga podcjenjuje za $9.84lb$.

Izračunajmo sada mjere kvalitete modela i usporedimo ih.

model	R^2_{adj}	RSD	AIC	BIC
Wood	0.9673	2.537	1297.476	1311.943
modifikacija Woodovog modela	0.9876	1.562	1030.566	1045.033
Wilmink	0.9912	1.325	940.8615	958.945
MilkBot	0.9869	1.607	1047.381	1065.465

Tablica 21: Korigirani R^2 (R^2_{adj}), standardna greška reziduala (RSD), Akaike informacijski kriterij (AIC) i Bayesov informacijski kriterij (BIC) Wodovog laktacijskog modela i njegove modifikacije te Wimlinkovog i MilkBot laktacijskog modela za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

Vrijednosti korigiranog R^2 su i u ovoj grupi na visokoj razini. Razlike se uočavaju tek na drugom decimalnom mjestu. Najmanju vrijednost ima Woodov laktacijski model koja iznosi 0.9673, a najveću Wilminkov koja iznosi 0.9912. I prema svim ostalim pokazateljima najbolji model za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji je Wilminkov, budući da ima najmanju standardnu grešku reziduala i najmanje vrijednosti Akaike i Bayesovog informacijskog kriterija. Najlošiji je i u ovoj grupi Woodov model. Njegova modifikacija ima nešto bolje vrijednosti mjera kvalitete modela, no kao što smo vidjeli u prethodnoj analizi vrijednosti prediktirane ovim modelom dosta precjenjuju stvarne prinose mlijeka što se posebno očituje u velikom odstupanju teorijskog od stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana laktacije.

6 Kombinacija Woodovog i MilkBot laktacijskog modela

Cilj ovog poglavlja izgraditi je novi model kao kombinacju Woodovog i MilkBot laktacijskog modela. Ideja je prikazati laktacijske krivulje Woodovog i MilkBot laktacijskog modela, pronaći njihova sjecišta te u početnom dijelu laktacije iskoristiti MilkBot laktacijski model, a na kraju laktacije Woodov laktacijski model. Taj način podjele napraviti ćemo jer smo u prošlom poglavlju kod usporedbe laktacijskih modela vidjeli da se MilkBot model bolje ponaša u početnom i srednjem periodu laktacije, a Woodov u zadnjem periodu laktacije. Za svaki od modela radit ćemo novu procjenu parametara na temelju podataka o stvarnim prinosima mlijeka iz segmenta za koji ćemo iskoristiti modele.

Na osnovu analize u prethodnom poglavlju došli smo do zaključka da je najbolji laktacijski model za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka Wilminkov laktacijski model, dok je najlošiji Woodov laktacijski model. Iako se Wilminkov model pokazao kao najbolji u sve tri grupe odabrali smo MilkBot model iz razloga što se značajnije razlike između ta dva modela u početnom i srednjem periodu laktacije ne uočavaju i to nam je važno. Na kraju laktacije iskoristiti ćemo Woodov model. Cilj izgradnje novog modela smanjiti je podcjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka koje je prisutno u Woodovom modelu u periodu do postizanja maksimalnog prinosa mlijeka i precjenjivanje odmah nakon dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka te smanjiti precjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka na kraju laktacije prisutno u MilkBot modelu što je posebno vidljivo kod prediktiranih vrijednosti.

Prisjetimo li se definicije Woodovog modela i interpretacije parametara, parametar b opisivao je, odnosno kontrolirao rastući dio laktacijske krivulje. Kako ćemo Woodov model koristiti samo za padajući dio laktacijske krivulje fiksirat ćemo vrijednost parametra b na nulu pa ćemo prilikom procjene parametara Woodovog modela procjenjivati samo parametre a i c. Kod MilkBot laktacijskog modela procjenjivat ćemo sve parametre budući da ćemo ga koristiti nad podacima koji uključuju i padajući i rastući dio laktacijske krivulje.

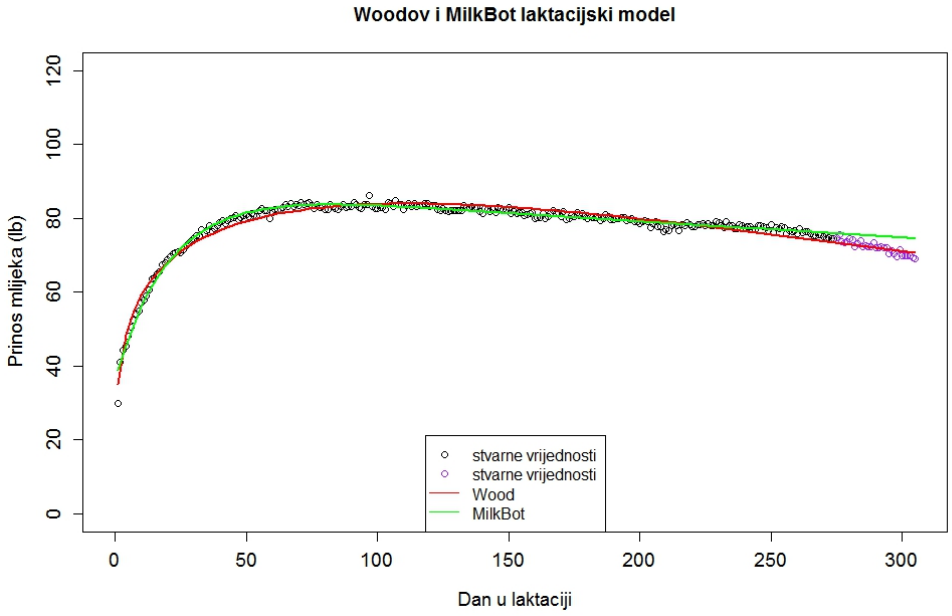
Prinos mlijeka u tako opisanom modelu, koji je kombinacija Woodovog i MilkBot modela, definiramo izrazom:

$$Y_t = a_1 \left(1 - \frac{exp\left(\frac{c_1 - t}{b_1}\right)}{2} \right) \cdot e^{-d_1 t} \cdot I_{[1,T]} + a_2 e^{-c_2 t} \cdot I_{<T,305]}, \tag{23}$$

gdje T predstavlja posljednji trenutak laktacije u kojem Woodov i MilkBot model primaju jednake vrijednosti.
Interpretacija parametara modela (23) analogna je interpretacijama parametara Woodovog i MilkBot laktacijskog modela. Nadalje, teorijski maksimalni prinos mlijeka i trenutak u kojem se on dostiže modela (23) izračunavaju se prema formulama (17) i (18) definiranim kod MilkBot laktacijskog modela.

6.1 Prinos mlijeka u prvoj laktaciji

Prikažimo prvo laktacijske krivulje Woodovog i MilkBot laktacijskog modela izgrađene nad 275 podataka o stvarnim prinosima mlijeka.



Slika 19: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom i stvarni dnevni prinosi mlijeka.

Vidimo da se laktacijske krivulje dobivene Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom sijeku u četiri točke. Trenuci laktacije u kojima modeli primaju istu vrijednost su: 1.96, 21.25, 91.09 i 220.28. Vrijednost u prvom trenutku iznosi $41.007lb$, u drugom trenutku iznosi $68.864lb$, u trećem $83.613lb$, a u četvrtom $78.305lb$. Sa Slike 19 vidimo da laktacijska krivulja dobivena MilkBot modelom bolje opisuje stvarne prinose mlijeka do zadnjeg sjecišta, odnosno do trenutka 220.28, nakon čega stvarne prinose mlijeka bolje opisuje Woodov model, što je posebno vidljivo kod prediktiranih vrijednosti. U sljedećoj tablici navesti ćemo sume kvadrata reziduala od 1. do 220. dana i od 220. dana do 275. dana te sume kvadrata grešaka predikcija kako bismo vidjeli jesu li slutnje točne. Greške predikcije u ovom kontekstu predstavljat će razliku između stvarnih i modelom prediktiranih vrijednosti od 276. do 305. dana.

model	suma kvadrata reziduala (od 1. do 220. dana)	suma kvadrata reziduala (od 221. do 275. dana)	suma kvadrata grešaka predikcije (od 276. do 305. dana)
Wood	385.92	94.62	27.72
MilkBot	230.94	28.22	372.4

Tablica 22: Sume kvadrata reziduala od 1. do 221. dana i od 220. do 275. dana te sume kvadrata grešaka predikcija Woodovog i MilkBot laktacijskog modela za prinos mlijeka u prvoj laktaciji.

Vidimo da je suma kvadrata reziduala MilkBot modela manja u oba slučaja, no uočavamo da je suma kvadrata grešaka predikcija dosta veća u odnosu na Woodov model. Stoga ćemo izgraditi novi model kao kombinaciju Woodovog i MilkBot laktacijskog modela. Model ćemo izgraditi tako da ćemo MilkBot laktacijski model koristiti do zadnjeg sjecišta, a nakon zadnjeg sjecišta koristiti ćemo Woodov laktacijski model. Napravimo sada procjenu parametara tako definiranog laktacijskog modela.

Procijenjene vrijednosti parametara navedene su u sljedećoj tablici.

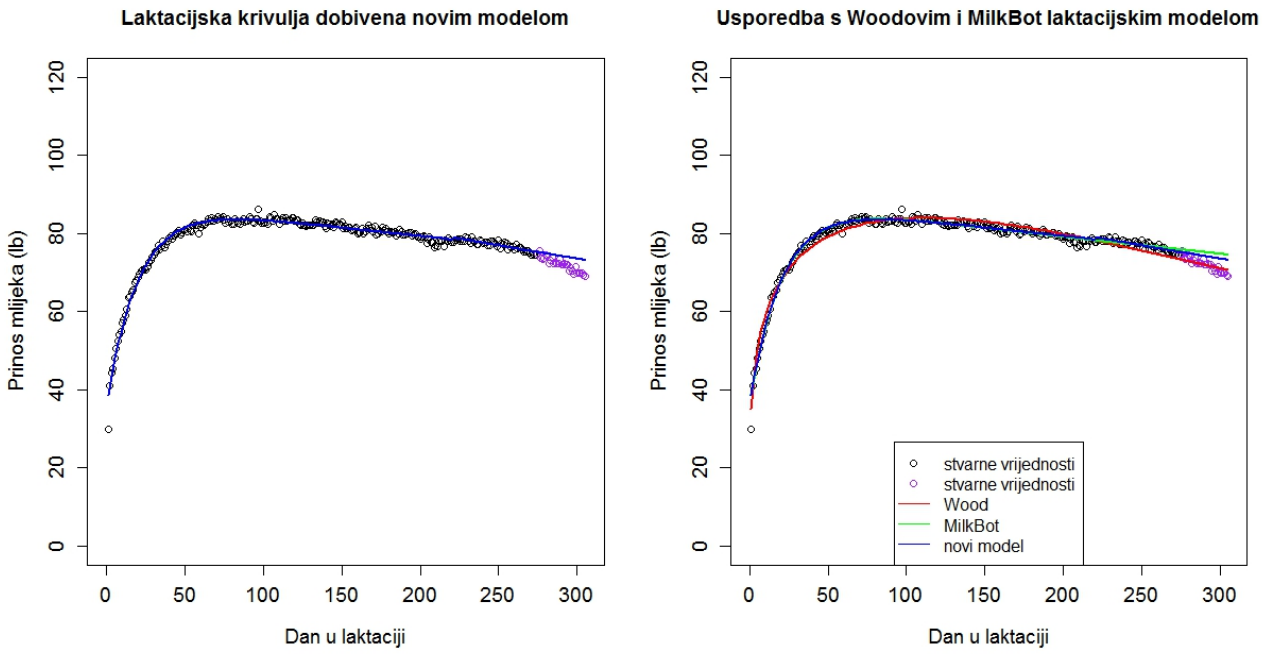
model	parametar	procjena	standardna greška
MilkBot	a_1	88.36078	0.36064
	b_1	20.62953	0.45392
	c_1	3.42882	0.16733
	d_1	0.000539	0.000026
Wood	a_2	96.23561	1.458406
	c_2	0.000896	0.000066

Tablica 23: Procijenjenje vrijednosti parametara i pripadne standardne greške MilkBot laktacijskog modela na temelju stvarnih prinosa mlijeka u prvoj laktaciji od 1. do 220. dana i Woodovog laktacijskog modela na temelju stvarnih prinosa mlijeka u prvoj laktaciji od 221. do 275. dana.

Novi model za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji definiran je izrazom

$$Y_t = 88.36078 \cdot \left(1 - \frac{exp\left(\frac{3.42882 - t}{20.62953}\right)}{2} \right) \cdot e^{-0.000539 \cdot t} \cdot I_{[1,220.28]} + 96.23561 \cdot e^{-0.000896 \cdot t} \cdot I_{<220.28,305]}$$

Prikažimo sada grafički laktacijsku krivulju dobivenu novim modelom i usporedbu s Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom.



Slika 20: Laktacijska krivulja dobivena novim modelom i usporedba s Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom za prinos mlijeka u prvoj laktaciji.

Uočavamo da je laktacijska krivulja dobivena novim modelom bolje usklađena sa stvarnim prinosima mlijeka u odnosu na laktacijske krivulje dobivene samo Woodovim ili samo MilkBot laktacijskim modelom. Vidimo da smo kombinacijom ovih dvaju modela riješili podcjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka u početnom i precjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka u srednjem periodu laktacije prisutno u Woodovom laktacijskom modelu te precjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka prisutno u MilkBot modelu na samom kraju laktacije što je i bio cilj. Isto tako uočavamo da vrijednosti prediktirane novim modelom manje odstupaju od stvarnih prinosa mlijeka u odnosu na MilkBot laktacijski model, no ipak više odstupaju od vrijednosti prediktiranih Woodovim laktacijskim modelom. Razlike između laktacijskih krivulja bit će vidljivije u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji.

Pogledajmo vrijednosti teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka, trenutka u kojem se on dostiže i teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacije i odstupanja od stvarnih vrijednosti te ih usporedimo s vrijednostima Woodovog i MilkBot laktacijskg modela.

model	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
stvarne vrijednosti	86.28	97	21525.86	23685.5
Wood	83.97 (-2.31)	111.12 (14.12)	21474.47 (-51.39)	23637.09 (-48.41)
MilkBot	83.69 (-2.59)	82.21 (-14.795)	21468.75 (-57.11)	23726.23 (41.34)
novi model	83.6 (-2.68)	82.18 (-14.82)	21469.27 (-56.59)	23695.24 (9.74)

Tablica 24: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih Woodovim, MilkBot i novim laktacijskim modelom i odstupanja od stvarnih vrijednosti za prinos mlijeka u prvoj laktaciji.

U odnosu na Woodov i MilkBot laktacijski model, novi model pokazuje najveće odstupanje teorijskog od stvarnog maksimalnog prinosa mlijeka. Isto vrijedi i za trenutak u kojima se oni dostižu. Možemo vidjeti da su ta odstupanja na razini odstupanja MilkBot modela, a to se događa iz razloga što smo MilkBot model koristili na segmentu podataka do zadnjeg sjecišta. Vidimo da je odstupanje teorijskog od stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 dana laktacije u novom modelu nešto manje od odstupanja u MilkBot modelu, ali je isto tako veće od odstupanja u Woodovom modelu. Kada uključimo u analizu i zadnjih trideset podataka koje nismo iskoristili prilikom procjene parametara situacija se dosta mijenja. U ovom slučaju novi model i MilkBot model precjenjuju, dok Woodov model podcjenjuje stvarni ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacije. Novi model precjenjuje ga za samo $9.74lb$ što je ujedno i najmanje odstupanje usporedimo li ga s Woodovim i MilkBot modelom.

Odredimo vrijednosti korigiranog R^2 i standardne greške reziduala novog modela te ih usporedimo s vrijednostima dobivenim za Woodov i MilkBot model.

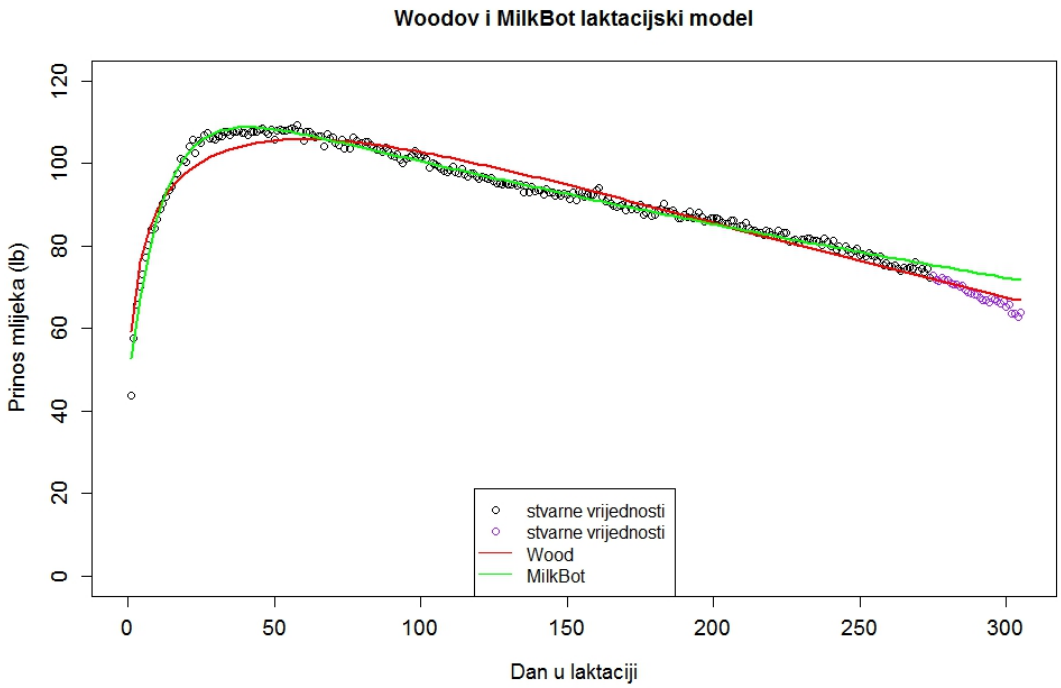
model	R^2_{adj}	RSD
Wood	0.9683	1.329
MilkBot	0.9828	0.978
novi model	0.9834	0.962

Tablica 25: Korigirani R^2 (R^2_{adj}) i standardna greška reziduala (RSD) Woodovog, MilkBot i novog laktacijskog modela za modeliranje prinosa mlijeka u prvoj laktaciji.

Iz Tablice 25 vidimo da je vrijednost korigiranog R^2 novog modela vrlo visoka i iznosi 0.9834 te da je vrijednost standardne greške reziduala na niskoj razini i iznosi 0.962. U odnosu na Woodov i MilkBot model vidimo da novi model ima veću vrijednost korigiranog R^2 i manju vrijednost standardne greške reziduala. Prema tome, kombinacija Woodovog i MilkBot modela bolja je za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji od samo Woodovog ili samo MilkBot modela.
U prethodnom poglavlju Wilminkov model pokazao se najboljim za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u prvoj laktaciji. Usporedimo li sada vrijednosti korigiranog R^2 i standardne greške reziduala Wilminkovog modela s vrijednostima novog modela, vidimo da novi model ima veću vrijednost korigiranog R^2, ali i veću vrijednost standardne greške reziduala.

6.2 Prinos mlijeka u drugoj laktaciji

Kao i u prethodnom potpoglavlju prikažimo prvo laktacijske krivulje dobivene Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom za prinos mlijeka u drugoj laktaciji.



Slika 21: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom i stvarni dnevni prinosi mlijeka u drugoj laktaciji.

Laktacijske krivulje imaju tri sjecišta. Trenuci u kojima modeli imaju jednake vrijednosti su: 12.33, 69.33 i 206.66. Vrijednost modela u prvom trenutku iznosi $91.484lb$, u drugom $105.623lb$, a u trećem $84.376lb$.

Usporedimo prvo sume kvadrata reziduala Woodovog i MilkBot modela od 1. do 206. dana i od 207. do 275 dana te sume kvadrata grešaka predikcija.

model	suma kvadrata reziduala (od 1. do 206. dana)	suma kvadrata reziduala (od 207. do 275. dana)	suma kvadrata grešaka predikcije (od 276. do 305. dana)
Wood	1733.07	198.32	90.38
MilkBot	332.83	109.9	960.86

Tablica 26: Sume kvadrata reziduala od 1. do 206. dana i od 207. do 275. dana te sume kvadrata grešaka predikcija Woodovog i MilkBot laktacijskog modela za prinos mlijeka u drugoj laktaciji.

Suma kvadrata reziduala MilkBot laktacijskog modela manja je u oba slučaja, no uočavamo da je suma kvadrata grešaka predikcija znatno veća u odnosu na Woodov model. Pristup izgradnje modela analogan je kao u prvoj laktaciji. Prvo je potrebno napraviti procjenu parametara za novi model. Procijenjene vrijednosti navedene su u sljedećoj tablici.

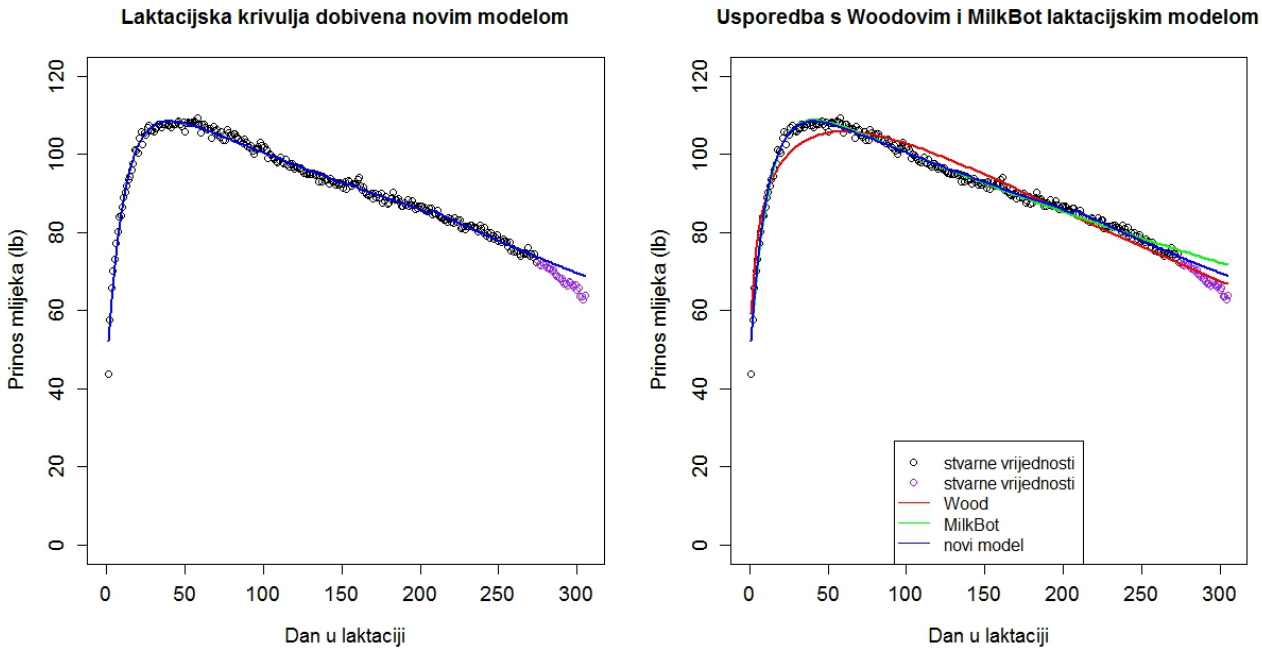
model	parametar	procjena	standardna greška
MilkBot	a_1	117.62254	0.3275
	b_1	11.33083	0.24149
	c_1	2.2062	0.10779
	d_1	0.00157	0.000022
Wood	a_2	136.67987	2.03179
	c_2	0.0025	0.000062

Tablica 27: Procijenjenje vrijednosti parametara i pripadne standardne greške MilkBot laktacijskog modela na temelju stvarnih prinosa mlijeka u drugoj laktaciji od 1. do 220. dana i Woodovog laktacijskog modela na temelju stvarnih prinosa mlijeka u drugoj laktaciji od 221. do 275. dana.

Na osnovu procijenjenih vrijednosti parametara novi model za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji definiran je izrazom

$$Y_t = 117.622254 \cdot \left(1 - \frac{exp\left(\frac{2.2062 - t}{11.33083}\right)}{2} \right) \cdot e^{-0.00157 \cdot t} \cdot I_{[1,206.66]} + 136.67987 \cdot e^{-0.0025 \cdot t} \cdot I_{<206.66,305]}$$

Grafički prikaz laktacijske krivulje dobivene novim modelom i usporedbu s Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom možemo vidjeti na Slici 22.



Slika 22: Laktacijska krivulja dobivena novim modelom i usporedba s Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom za prinos mlijeka u drugoj laktaciji.

Laktacijska krivulja dobivena novim modelom koji je kombinacija Woodovog i Milkbot modela dobro je usklađena sa stvarnim prinosima mlijeka. Uočavamo da nemamo niti značajnija podcjenjivanja niti značajnija precjenjivanja stvarnih prinosa mlijeka. Isto tako, vrijednosti prediktirane novim modelom ne odstupaju značajnije od stvarnih prinosa mlijeka. Pogledamo li usporedbu s Woodovim i MilkBot modelom vidimo da je novi model ispunio ciljeve, odnosno očekivanja. Više nije prisutno podcjenjivanje stvarnog prinosa mlijeka u rastućem dijelu laktacijske krivulje, niti precjenjivanje odmah nakon dostizanja teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka, što je bio slučaj kod Woodovog modela. Precjenjivanje stvarnog prinosa mlijeka na kraju laktacije prisutno u MilkBot modelu u novom modelu je također prisutno, no vidimo da je dosta manje. Vrijednosti prediktirane modelima precjenjuju stvarne prinose mlijeka u sva tri slučaja. Ono je najizraženije u MilkBot modelu stoga je cilj novog modela bio smanjiti precjenjivanje MilkBot modela, tako da na kraju laktacije dnevni prinos mlijeka modeliramo Woodovim modelom. Rezultat je novi model koji precjenjuje stvarne prinose mlijeka dosta manje u odnosu na MilkBot model, no ipak nešto više od Woodovog modela.

Pogledajmo sada što se događa s teorijskim maksimalnim prinosom mlijeka i trenutkom u kojem se on dostiže te teorijskim ukupnim prinosom mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacije u odnosu na stvarne vrijednosti i usporedimo ih s vrijednostima Woodovog i MilkBot modela.

model	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
stvarne vrijednosti	109.33	58	25409.94	27452.89
MilkBot	108.78 (-0.55)	40.81 (-17.19)	25346.85 (-63.09)	27553.54 (100.65)
Wood	105.85 (-3.48)	59.72 (1.72)	25345.23 (-64.71)	27425.07 (-27.82)
novi model	108.49 (-0.84)	40.188 (-17.812)	25346.75 (-63.19)	27482.45 (29.56)

Tablica 28: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih Woodovim, MilkBot i novim laktacijskim modelom i odstupanja od stvarnih vrijednosti za prinos mlijeka u drugoj laktaciji.

Novi model podcjenjuje stvarni maksimalni prinos mlijeka za $0.84lb$. Isto tako podcjenjuje i trenutak njegovog dostizanja. Novi model procjenjuje da se on dostiže u trenutku 40.188, dok se on stvarno dostiže u 58. danu od dana teljenja. Isto tako prisutno je i podcjenjivanje stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 dana laktacije, no kada gledamo 305 dana laktacije prisutno je precjenjivanje što je rezultat precjenjivanja prilikom predikcije. U odnosu na Woodov i MilkBot model vidimo da se vrijednosti većinom kreću na istim razinama kao i kod MilkBot modela, a to proizlazi iz činjenice što nam u novom modelu upravo MilkBot model definira teorijski maksimalni prinos mlijeka i trenutak u kojem se on dostiže. Značajniju razliku u odnosu na MilkBot model uočavamo u teorijskom ukupnom prinosu mlijeka tijekom 305 dana laktacije. Uočavamo da smo korištenjem Woodovog modela na kraju laktacije značajno smanjili precjenjivanje stvarnog ukupnog prinosa mlijeka i to za $71.09lb$.

Odredimo vrijednosti korigiranog R^2 i standardne greške reziduala novog modela te ih usporedimo s vrijednostima dobivenim za Woodov i MilkBot model.

model	R^2_{adj}	RSD
Wood	0.944	2.665
MilkBot	0.9871	1.278
novi model	0.9895	1.155

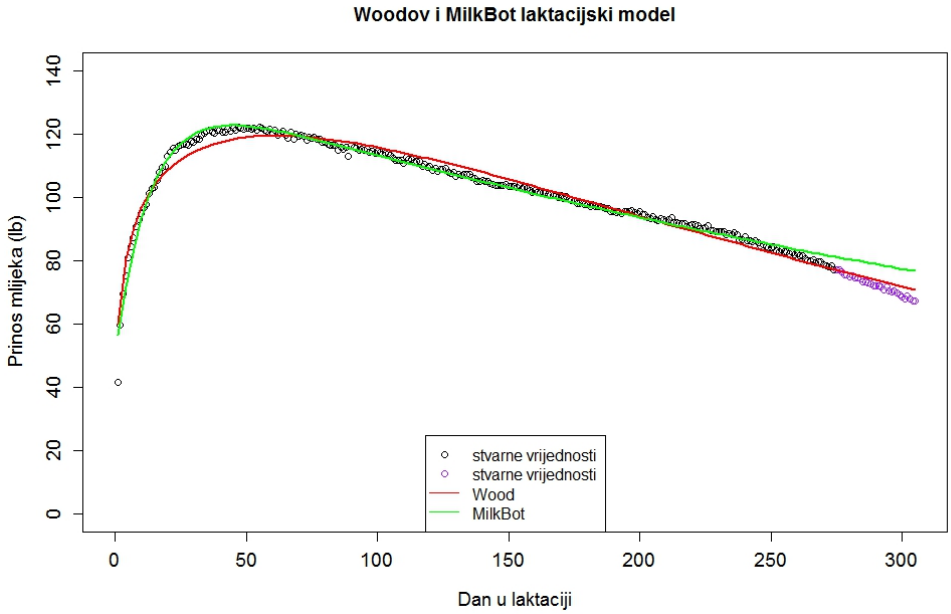
Tablica 29: Korigirani R^2 (R^2_{adj}) i standardna greška reziduala (RSD) Woodovog, MilkBot i novog laktacijskog modela za modeliranje prinosa mlijeka u drugoj laktaciji.

Iz Tablice 29 vidimo da je vrijednost korigiranog R^2 novog modela vrlo visoka i iznosi 0.9895 te da je vrijednost standardne greške reziduala na niskoj razini i iznosi 1.155. U odnosu na Woodov i MilkBot model vidimo da novi model ima veću vrijednost korigiranog R^2 i manju vrijednost standardne greške reziduala. Prema tome, kombinacija Woodovog i MilkBot modela bolja je za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji od samo Woodovog ili samo MilkBot modela.

U odnosu na Wilminkov model, koji nam se u prethodnom poglavlju pokazao kao najbolji model za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji, novi model ima veću vrijednost korigiranog R^2 i manju vrijednost standardne greške reziduala. To znači da je novi model bolji za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u drugoj laktaciji i od Wilminkovog modela.

6.3 Prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji

Grafički prikaz laktacijskih krivulja dobivenih Wodovim i MilkBot laktacijski modelom za prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji možemo vidjeti na Slici 23.



Slika 23: Laktacijske krivulje dobivene Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom i stvarni dnevni prinosi mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

Laktacijske krivulje dobivene Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom imaju tri sjecišta. Trenuci u kojima modeli primaju iste vrijednosti su: 13.89, 72.29 i 207.07. Vrijednost modela u prvom trenutku iznosi 102.243lb, u drugom 119.102lb, a u trećem 92.404lb. S grafičkih prikaza odmah je vidljivo da MilkBot laktacijski model puno bolje opisuje prinose mlijeka do trećeg sjecišta i malo nakon trećeg sjecišta, nakon čega ih bolje opisuje Woodov model. Razlike su posebno vidljive kod modelima prediktiranih vrijednosti. U tom slučaju vrijednosti prediktirane MilkBot modelom više odstupaju od stvarnih prinosa mlijeka.

Napravimo usporedbu suma kvadrata reziduala oba modela od 1. do 207. dana i od 208. do 275. dana te sume kvadrata grešaka predikcija.

model	suma kvadrata reziduala (od 1. do 207. dana)	suma kvadrata reziduala (od 208. do 275. dana)	suma kvadrata grešaka predikcije (od 276. do 305. dana)
Wood	1553.19	197.73	126.17
MilkBot	510.14	189.94	1476.82

Tablica 30: Sume kvadrata reziduala od 1. do 206. dana i od 207. do 275. dana te sume kvadrata grešaka predikcija Woodovog i MilkBot laktacijskog modela za prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

Suma kvadrata reziduala MilkBot laktacijskog modela i dalje je manja u oba slučaja, no isto tako suma kvadrata grešaka predikcija je vrlo visoka u odnosu na Woodov model. Zaključujemo da MilkBot model bolje opisuje stvarne prinose mlijeka, no ipak vrijednosti prediktirane modelom dosta odstupaju od stvarnih vrijednosti. Stoga nastavljamo s izradom modela kao u prethodne dvije grupe. MilkBot model koristimo do zadnjeg sjecišta, a od

zadnjeg sjecišta koristiti ćemo Woodov model. Procijenimo parametre tako definirane kombinacije Woodovog i MilkBot laktacijskog modela.

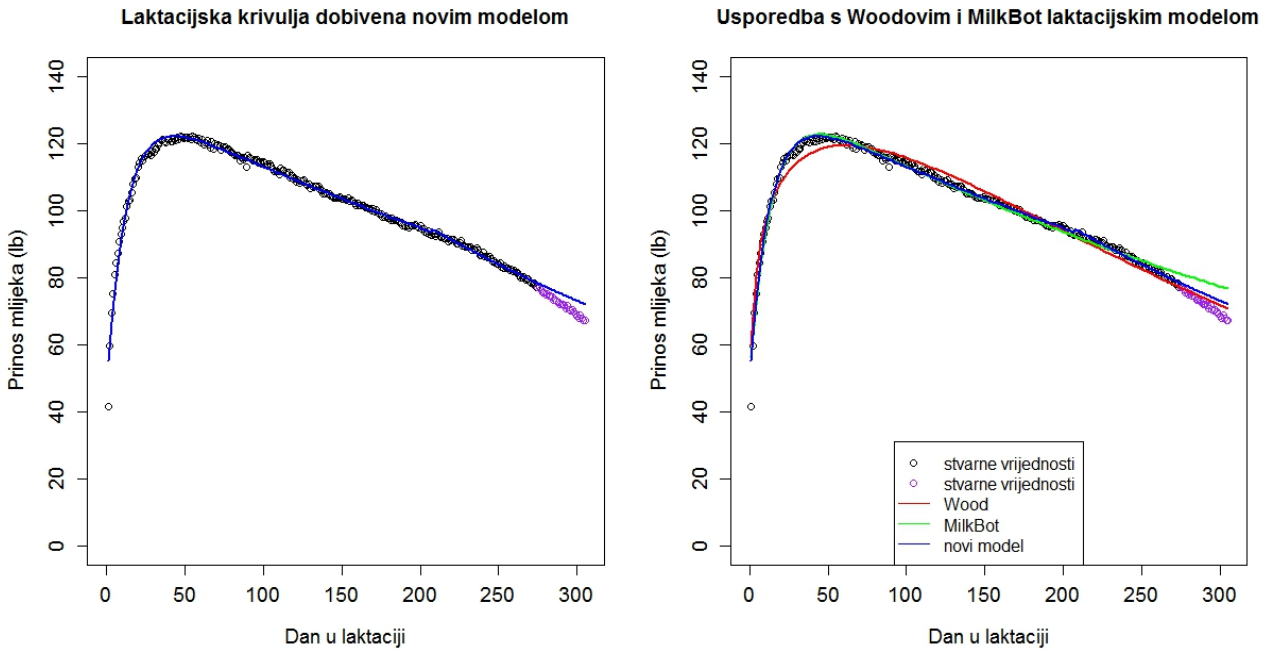
model	parametar	procjena	standardna greška
MilkBot	a_1	134.91403	0.42278
	b_1	12.99814	0.26627
	c_1	3.13863	0.10877
	d_1	0.00176	0.000024
Wood	a_2	167.88602	1.97005
	c_2	0.00277	0.000049

Tablica 31: Procijenjenje vrijednosti parametara i pripadne standardne greške MilkBot laktacijskog modela na temelju stvarnih prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji od 1. do 207. dana i Woodovog laktacijskog modela na temelju stvarnih prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji od 208. do 275. dana.

Prema tome novi model definiran je izrazom

$$Y_t = 134.91403 \cdot \left(1 - \frac{exp\left(\frac{3.13863 - t}{12.99814}\right)}{2} \right) \cdot e^{-0.00176 \cdot t} \cdot I_{[1,207.07]} + 167.88602 \cdot e^{-0.00277 \cdot t} \cdot I_{<207.07,305]}$$

Prikažimo grafički laktacijsku krivulju dobivenu novim modelom te usporedbu s laktacijskim krivuljama dobivenim Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom.



Slika 24: Laktacijska krivulja dobivena novim modelom i usporedba s Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom za prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji laktaciji.

Vidimo da je laktacijska krivulja dobivena kombinacijom Woodovog i MilkBot laktacijskog modela dobro usklađena sa stvarnim prinosima mlijeka. Značajnija odstupanja od stvarnih prinosa mlijeka uočavamo tek kod vrijednosti koje smo prediktirali novim modelom. Pogledamo li usporedbu laktacijske krivulje dobivene novim modelom s laktacijskim krivuljama dobivenim Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom vidimo da je model ispunio ciljeve. Podcjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka u rastućem dijelu i precjenjivanje odmah nakon dostizanja maksimalnog prinosa prisutno u Woodovom modelu nije prisutno kod laktacijske krivulje dobivene novim modelom. Isto tako, precjenjivanje stvarnih prinosa mlijeka na kraju laktacije prisutno kod laktacijske krivulje dobivene MilkBot modelom nije više toliko izraženo u novom modelu. Vrijednosti prediktirane novim modelom pokazuju veća odstupanja u odnosu na Woodov model, no ona su znatno manja nego kod MilkBot modela.

Sljedeću usporedbu kombinacije Woodovog i MilkBot laktacijskog modela sa samim Woodovim i MilkBot laktacijskim modelom napraviti ćemo tako da usporedimo vrijednosti teorijskog maksimalnog prinosa mlijeka i trenutka u kojem se on dostiže te teorijskog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 i 305 dana laktacije.

model	Y_{max} (lb)	PT	M_{275} (lb)	M_{305} (lb)
stvarne vrijednosti	122.27	55	28185.62	30343.94
MilkBot	122.7 (0.43)	44.77 (-10.23)	28118.8 (-66.82)	30485 (141.06)
Wood	119.5 (-2.77)	61.1 (6.1)	28119.06 (-66.56)	30334.1 (-9.84)
novi model	122.17 (-0.1)	43.52 (-11.48)	28120 (-65.62)	30374.26 (30.32)

Tablica 32: Tablica vrijednosti Y_{max}, PT, M_{275} i M_{305} određenih Woodovim, MilkBot i novim laktacijskim modelom i odstupanja od stvarnih vrijednosti za prinos mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

Za razliku od MilkBot laktacijskog modela koji precjenjuje stvarni maksimalni prinos mlijeka, novi model ga podcjenjuje i ujedno je to najmanje odstupanje u odnosu na oba modela, i Woodov i MilkBot. Ono iznosi svega $0.1lb$. Novi model također najmanje podcjenjuje stvarni ukupni prinos mlijeka tijekom 275 dana laktacije. Što se tiče stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 305 dana laktacije prisutno je precjenjivanje koje je znatno manje od precjenjivanja MilkBot laktacijskog modela. Manje je za $110.74lb$. No, novi model ne pokazuje najmanje odstupanje. Ipak Woodov model bolje procjenjuje stvarni ukupni prinos mlijeka tijekom 305 dana laktacije.
Sa Slike 24 i iz Tablice 32 možemo naslutiti da je novi model, u odnosu na Woodov i MilkBot model, bolji za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

Odredimo vrijednosti korigiranog R^2 i standardne greške reziduala novog modela te ih usporedimo s vrijednostima dobivenim za Woodov i MilkBot model.

model	R^2_{adj}	RSD
Wood	0.9673	2.537
MilkBot	0.9869	1.607
novi model	0.9913	1.311

Tablica 33: Korigirani R^2 (R^2_{adj}) i standardna greška reziduala (RSD) Woodovog, MilkBot i novog laktacijskog modela za modeliranje prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji.

Iz Tablice 33 vidimo da je vrijednost korigiranog R^2 novog modela vrlo visoka i iznosi 0.9913 te da je vrijednost standardne greške reziduala na niskoj razini i iznosi 1.311. U odnosu na Woodov i MilkBot model vidimo da novi model ima veću vrijednost korigiranog R^2 i manju vrijednost standardne greške reziduala. Prema tome, kombinacija Woodovog i MilkBot modela bolja je za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji od samo Woodovog ili samo MilkBot modela.
U odnosu na Wilminkov model, koji nam se u prethodnom poglavlju pokazao kao najbolji model za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji, novi model ima veću vrijednost korigiranog R^2 i manju vrijednost standardne greške reziduala. To znači da je novi model bolji za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u trećoj ili većoj laktaciji i od Wilminkovog modela.

7 Zaključak

Analiziranjem stvarnih prinosa mlijeka u prvoj, drugoj i trećoj ili većoj laktaciji došli smo do zaključka da razlike u prinosu s obzirom na redni broj laktacije postoje. Vrijednosti numeričkih karakteristika deskriptivne statistike, osim minimalnog prinosa mlijeka, najveće su bile kod krava u trećoj ili većoj laktaciji, a najmanje za krave u prvoj laktaciji. Maksimalni prinos mlijeka najbrže dostižu krave u trećoj ili većoj laktaciji, dok ga najsporije dostižu krave u prvoj laktaciji. Nakon dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka, prinos mlijeka postepeno opada. Najmanji pad imale su krave u prvoj laktaciji, a najveći krave u trećoj ili većoj laktaciji.

Oslanjajući se na tu činjenicu dnevne prinose mlijeka modelirali smo za svaku laktaciju posebno koristeći četiri laktacijska modela, Woodov i njegovu modifikaciju te Wilminkov i MilkBot. Laktacijske krivulje dobivene tim modelima dobro su usklađene sa stvarnim prinosima mlijeka. Značajnija odstupanja od stvarnih prinosa mlijeka uočena su tek kod vrijednosti prediktiranih modelima. Uspoređivanjem vrijednosti maksimalnog prinosa mlijeka, trenutka dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka i ukupnog prinosa mlijeka dobivenih modelima sa stvarnim vrijednostima značajnija odstupanja uočena su samo u trenutku dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka. U prvoj i drugoj laktaciji Woodov laktacijski model i njegova modifikacija precjenjivali su ga, a Wilminkov i MilkBot laktacijski model podcjenjivali. U trećoj ili većoj laktaciji precjenjivanje je bilo prisutno samo u Woodovom modelu, dok su ga ostala tri modela podcjenivali. Trend povećanja maksimalnog i ukupnog prinosa mlijeka, kako se povećava redni broj laktacije, zadržan je i u vrijednostima koje su dobivene na osnovu modela. Prisutno je podcjenjivanje stvarnog ukupnog prinosa mlijeka tijekom 275 dana laktacije u svim modelima i ona se kreću na istim razinama u svim grupama. Najveća odstupanja teorijskog od stvarng prinosa mlijeka tijekom 305 dana laktacije uočavaju se prvenstveno u MilkBot laktacijskom modelu te modifikaciji Wodovog laktacijskog modela.

Usporedbom laktacijskih modela uočili smo da razlike u modelima postoje. Razlike su posebno vidljive u drugoj i trećoj ili većoj laktaciji. Woodov laktacijski model u odnosu na ostale modele lošije opisuje stvarne prinosa mlijeka u početnom i srednjem periodu laktacije. Ali vrijednosti prediktirane Woodovim modelom najmanje odstupaju od stvarnih prinosa mlijeka za razliku od vrijednosti prediktiranih ostalim modelima. Analizom mjera kvaliteta modela došli smo do zaključka da je Wilminkov laktacijski model najbolji za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u sve tri grupe jer ima najveću vrijednosti korigirang R^2 i najmanje vrijednosti standardne greške reziduala te Akaike i Bayesvog informacijskog kriterija. Woodov model pokazao se kao najlošiji.

U zadnjem dijelu diplomskog rada izgradili smo novi model kao kombinaciju Woodovog i MilkBot laktacijskog modela. Cilj izgradnje novog modela bio je smanjiti podcjenjivanja stvarnog prinosa mlijeka u rastućem dijelu laktacijske krivulje i precjenjivanje odmah nakon dostizanja maksimalnog prinosa mlijeka prisutno u Woodovom laktacijskom modelu te precjenjivanje u zadnjem dijelu laktacije prisutno u MilkBot laktacijskom modelu. Ciljevi kombinacije modela u konačnici su ispunjeni. Novi model pokazao se boljim za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka u sve tri grupe. Isto tako pokazao se boljim i u odnosu na Wilminkov model.

Literatura

[1] Z. Abas, C. Giannakopoulos, M. Karagneli, T. Koutroumanidis, C. Malesios, *Comparison of models for describing the lactation curves of Chios sheep using daily records obtained from an automatic milking system*, Haicta (2011.).

[2] M. A. Aziz, O. M. El-Shafie, A. T. Mahdy, A. Nishida, N. A. Shalaby, *Comparison between the shapes of lactation curve of Egyptian buffalo milk yield estimated by the incomplete gamma function and a new model*, Livestock Research for Rural Development 18 (2006.).

[3] D. Babnik, J. Jeretina, D. Škorjanc, *Modeling lactation curve standards fot test-day milk yield in holstein, brown swiss and simmental cows*, The Journal od Animal and Plant Sciences 23 (2013.), 754-762.

[4] O. C. Bilgin, N. Esenbuga, M. E. Davis, *Comparison od models for describing the lactation curves of Awassi, Morkaraman and Tushin sheep*, Archiv Tierzucht 53 (2010.) 4, 447-456.

[5] S. Cankaya, A. Unalan, E. Soydan, *Selection of mathematical model to describe the lactation curves of Jersey cattle*, Archiv Tierzucht 54 (2011.) 1, 27-35.

[6] A. Cappio-Borlino, G. Pulina, G. Rossi, *A non-linear modification od Wood's equation fitted to lactation curves of Sardinian dairy ewes*, Small Ruminant Research 18 (1995.), 75-79.

[7] DeLaval, Efficient Dairy Herd Management, 2001.
(Url: http://www.delaval.com/Global/PDF/Efficient-dairy-herd-management.pdf)

[8] James L. Ehrlich, *Quantifying inter-group variability in lactation curve shape and magnitude with the MilkBot lactation model*, PeerJ 1:e54 (2013.).

[9] Henri P. Gavin, *The Levenberg-Marquardt method for nonlinear least squares curve-fitting problems*, Department of Civil and Environmental Engineering, Duke University, 2016.

[10] M. Janković, F. Paradžik, *Woodov i MilkBot laktacijski model*, Projektni zadatak iz izbornog kolegija Stručna praksa izrađen u suradnji s tvrtkom Farmeron d.o.o., Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2016.

[11] K. Madsen, H.B. Nielsen, O. Tingleff, *Methods for non-linear least squares problems*, Informatics and Mathematical Modelling Technical University of Denmark, 2nd edition, April 2004.

[12] Manoolis I. A. Lourakis, *A Brief Description of the Levenberg-Marquardt Algorithm Implemened by levmar*, Technical Report, Intstitute of Computer Science, Foundation for Research and Technology-Hellas, 2005.

Sažetak

U radu proučavamo laktacijske modele za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka muznih krava tijekom laktacije. Prvo definiramo osnovne pojmove kao što su laktacija, prinos mlijeka, laktacijska krivulja i perzistencija. Zatim se usmjeravamo na statističku analizu podataka ustupljenih od tvrtke Farmeron d.o.o. koja uključuje deskriptivnu statistiku, grafičke prikaze prinosa mlijeka i kutijastih dijagrama te primjenu različitih statističkih testova. Na osnovu statističke analize podataka prinose mlijeka muznih krava dijelimo u tri grupe. Prvu grupu čine prinosi mlijeka muznih krava u prvoj laktaciji, drugu prinosi mlijeka muznih krava u drugoj laktaciji i treću prinosi mlijeka muznih krava u trećoj ili većoj laktaciji.

Nakon statističke analize podataka prelazimo na glavnu tematiku rada, a to su laktacijski modeli. U radu proučavamo četiri laktacijska modela. To su Woodov laktacijski model i njegova modifikacija te Wilminkov i MilkBot laktacijski model. Svaki model u svojoj definiciji uključuje određeni broja parametara koje je potrebno procijeniti. Procjenu radimo koristeći Levenberg-Marquardt algoritam. Modele uspoređujemo koristeći grafičke prikaze laktacijskih krivulja dobivenih modelima i mjere kvalitete modela od kojih ćemo koristiti korigirani R^2, standardnu grešku reziduala te Akaike i Bayesov informacijski kriterij.

U zadnjem dijelu diplomskog rada prikazat ćemo novi model dobiven kombinacijom Woodovog i MilkBot laktacijskog modela te njegovu usporedbu s Woodovim, MilkBot i Wilminkovim laktacijskim modelom. Novi model pokazat će se kao najbolji za modeliranje dnevnog prinosa mlijeka krava.

Ključne riječi: laktacija, prinos mlijeka, perzistencija, laktacijska krivulja, laktacijski model, Levenberg-Marquardt algoritam.

Summary

The thesis will be dealing with lactation models for modeling the daily milk yield during the lactation period. First we define the basic concepts such as lactation, milk yield, lactation curve and persistency. After that we focus on statstical analysis of data provided by company Farmeron d.o.o which includes descriptive statistics, plot of daily milk yield during lactation period, boxplots and the applications of various statistical tests. We divided dairy cows into three gropus. First group consits from dairy cows in first lactation, second from dairy cows in second lactation and third drom dairy cows in third or bigger lactation.

After statistical analysis we pass to the main thesis of this paper. That are lactation models. We describe four lacation model. That are: Wilmink, MilkBot, Wood lactation model and modification of Wood lactation model. Each model in his definition has several parameters which we need to estimate. We estimate them using Levenberg-Marquardt algorithm. Then we compare lacation models using plots of lactation curves and measures for the quality of models such as adjusted R^2, residual standard deviation, Akaike and Bayesian information criterion.

In the last part of thesis we will show new model which is combination of Wood and MilkBot lactation model and compare him with Wood, MilkBot and Wilmink lactation model that will prove the best for modeling dairy milk yield during lactation in all gropus.

Keywords: lactation, milk yield, persistency, lactation curve, lactation model, Levenberg-Marquardt algorithm.

Životopis

Rođen sam 27. 12. 1992. godine u Slavonskom Brodu. Osnovnoškolsko obrazovanje završio sam u Osnovnoj školi Josip Kozarac u Slavonskom Šamcu. Tijekom osnovne škole sudjelovao sam na općinskim i županijskim natjecanjima iz matematike i hrvatskog jezika. Nakon osnovne šole upisujem Gimanziju Matija Mesić u Slavonskom Brodu gdje stječem srednjoškolsko obrazovanje. Završetkom srednje škole upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku koji uspješno završavam 2014. godine uz završni rad na temu *Kriptografija u srednjem vijeku* pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Ivana Matića. Daljnje obrazovanje nastavljam na Odjelu za matematiku i upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom završne godine diplomskog studija proveo sam mjesec dana na stručnoj praksi u tvrtki Farmeron d.o.o. U suradnji s tvrtkom Farmeron d.o.o. i Filipom Paradžikom izrađujem seminarski rad pod nazivom *Woodov i MilkBot laktacijski model* za koji dobivam rektorovu nagradu.