Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu i vremena čekanja

Petrović, Ivana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

Ivana Petrović

Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu i vremena čekanja

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

Ivana Petrović

Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu i vremena čekanja

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2022.

Sadržaj

1 Uvod

Markovljevi lanci su klasa slučajnih procesa koja ima široku primjenu. Koriste se u automobilskoj industriji (kontrola brzine), u biologiji (širenje populacije), čekanje u redovima (u trgovinama, telefonskim linijama), financijama (tečaj valuta) i sl. Naziv su dobili prema ruskom matematičaru Andreju Andrejeviču Markovu koji je poznat po svom radu u grani slučajnih procesa. U radu ćemo se upoznati s osnovama slučajnih procesa, definicijom i konstrukcijom Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu. Definirat ćemo skokove i vremena čekanja Markovljevog lanca, odrediti njihovu distribuciju i vidjeti neka njihova svojstva. Vidjet ćemo kako računati vjerojatnosti prelaska stanja, brzine prelaska, granično ponašanje lanca te razne primjere i primjene Markovljevih lanaca.

2 Markovljevi lanci u neprekidnom vremenu

Za početak uvedimo pojam slučajnog procesa:

Definicija 1. ***Slučajni proces*** *je familija slučajnih varijabli* $X = (X_t,\ t \in T)$ *na istom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *gdje je skup indeksa* $T \subseteq \mathbb{R}$.

Drugim riječima, slučajni proces je funkcija dviju varijabli, $X : \Omega \times T \to S$ definirana s $X(\omega, t) = X_t(\omega)$.

Skup S se naziva **skup stanja**, a T je **skup indeksa** kojim se uobičajeno modelira vrijeme. Skupovi S i T mogu biti diskretni ili neprebrojivi. Kada je skup stanja diskretan, slučajni proces nazivamo lanac, a kada je neprebrojiv nazivamo ga proces s neprekidnim skupom stanja. Ukoliko je T diskretan kažemo da je slučajni proces niz, a ukoliko je T neprebrojiv kažemo da je X proces u neprekidnom vremenu. Za fiksne $\omega \in \Omega, t \in T$, $X_t(\omega)$ se naziva jednom realizacijom slučajnog procesa u trenutku t. Osim toga, ako uzmemo fiksan $\omega \in \Omega$ funkcija $t \mapsto X_t(\omega)$ naziva se **trajektorija** slučajnog procesa.

Nas će zanimati vjerojatnosna svojstva slučajnih procesa u neprekidnom vremenu, međutim za razliku od slučajnih procesa u diskretnom vremenu neka od vjerojatnosnih svojstava ne vrijede za neprebrojivu uniju događaja. Taj problem ćemo riješiti tako da se ograničimo na klasu zdesna neprekidnih slučajnih procesa.

Definicija 2. *Kažemo da je slučajni proces* $(X_t,\ t \geq 0)$ ***neprekidan s desna*** *ako za svaki* $\omega \in \Omega$ *i* $t \geq 0$ *postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da je*

$$X_s(\omega) = X_t(\omega), \forall s \in [t, t + \varepsilon].$$

Prema [2, poglavlje 6.6], svaki zdesna neprekidan proces je u potpunosti definiran pomoću svojih konačnodimenzionalnih distribucija koje su dane s:

$$P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_0} = i_0)$$

za $n \geq 0$, $i_n, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$ i $t_n, t_{n-1}, \dots, t_0 \in T$ takve da je $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$.
Sada možemo uvesti pojam Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu:

Definicija 3. *Za slučajni proces $X = (X_t,\ t \geq 0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s prebrojivim skupom stanja S, kažemo da je* ***Markovljev lanac u neprekidnom vremenu****, ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, sva vremena $t_1, t_2, ...t_n, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n$ i sva stanja $i_1, i_2, ..., i_{n-2}, i, j \in S$ vrijedi:*

$$P(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i, ..., X_{t_1} = i_1) = P(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i). \tag{1}$$

Vjerojatnosno svojstvo (1) se naziva **Markovljevo svojstvo**. Ono osigurava da su uvjetno na poznavanje sadašnjosti, prošlost i neposredna budućnost međusobno nezavisne. Markovljev lanac je zdesna neprekidan proces, a slikoviti prikaz ćemo vidjeti kada uvedemo pojmove vremena skokova i vremena čekanja lanca u poglavlju 2.2.

2.1 Eksponencijalna distribucija i svojstvo zaboravljanja

Obzirom da je eksponencijalna distribucija vrlo važna u teoriji Markovljevih lanaca, prije nego što uvedemo prethodno spomenute pojmove, proći ćemo definiciju eksponencijalne slučajne varijable, svojstvo zaboravljanja te iskazati i dokazati njihovu vezu.

Definicija 4. *Slučajna varijabla $X : \Omega \to [0, \infty\rangle$ ima* ***eksponencijalnu distribuciju*** *s parametrom λ, $0 < \lambda < \infty$ ako je funkcija distribucije dana s*

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

i pišemo $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Funkcija gustoće ove slučajne varijable dana je izrazom:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

a njeno očekivanje je $E[X] = \frac{1}{\lambda}$.

Za slučajnu varijablu X kažemo da ima **svojstvo zaboravljanja** ako vrijedi:

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t),\ \forall s, t \geq 0.$$

Sljedećim teoremom ćemo iskazati vezu eksponencijalne distribucije i svojstva zaboravljanja:

Teorem 2.1 ([2]). *Neka je X slučajna varijabla, $X : \Omega \to \langle 0, \infty\rangle$. Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju ako i samo ako ima svojstvo zaboravljanja.*

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [2, str. 70]. U nastavku navodimo teorem čiji se dokaz može pronaći u [2, str. 71], a bit će nam koristan u nastavku rada kada uvedemo pojam regularnosti u poglavlju 2.3.

Teorem 2.2 ([2]). *Neka je $(E_n,\ n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, gdje je $E_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$, $\lambda_n > 0$. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

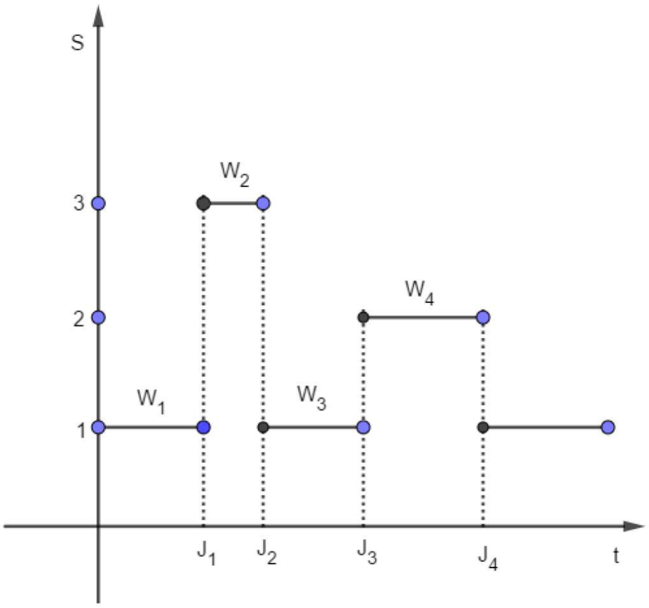
a) $P(\sum_{n=1}^{\infty} E_n < \infty) = 1$ ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$,

b) $P(\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \infty) = 1$ ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$.

2.2 Lanac skokova i vremena čekanja

Ponašanje Markovljevog lanca možemo opisati jednostavnim primjerom:

Primjer 1. *Neka je $X = (X_t, t \geq 0)$ Markovljev lanac i neka je skup stanja $S = \{1, 2, 3\}$. Nadalje, neka proces kreće u stanju 1, tj. $X_0 = 1$. Obzirom da se radi o procesu u neprekidnom vremenu, on može promijeniti stanje u bilo kojem vremenskom trenutku. Nakon slučajno, pozitivno dugo vremena lanac prelazi u stanje 3. Nakon toga, ponovno slučajno, pozitivno dugo vremena ostaje u stanju 3 i prelazi u stanje 1. Na sličan način nastavlja se ponašanje procesa kao na slici:*



Slika 1: Primjer jedne trajektorije Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu [2]

Kao što vidimo sa slike, trajektorija Markovljevog lanaca u neprekidnom vremenu je po dijelovima konstantna i zdesna neprekidna funkcija. Na slici se mogu uočiti trenuci kada lanac mijenja stanja. Ta vremena, u oznaci $J_0, J_1, ...$ se nazivaju **vremena skokova** (jumping times) slučajnog procesa $(X_t, t \geq 0)$. Vremena skokova su dana sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} J_0 &= 0 \\ J_{n+1} &= \inf\{t > J_n : X_t \neq X_{J_n}\} \end{aligned}$$

uz konvenciju da je $\inf \emptyset = \infty$. Vremena između dva skoka su slučajne varijable koje nazivamo **vremena čekanja** ili vremena zadržavanja (waiting time, holding time), u oznaci $W_1, W_2, ...$ Vremena čekanja dana su izrazom:

$$W_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1}, & \text{za } J_{n-1} < \infty \\ \infty, & \text{inače.} \end{cases}$$

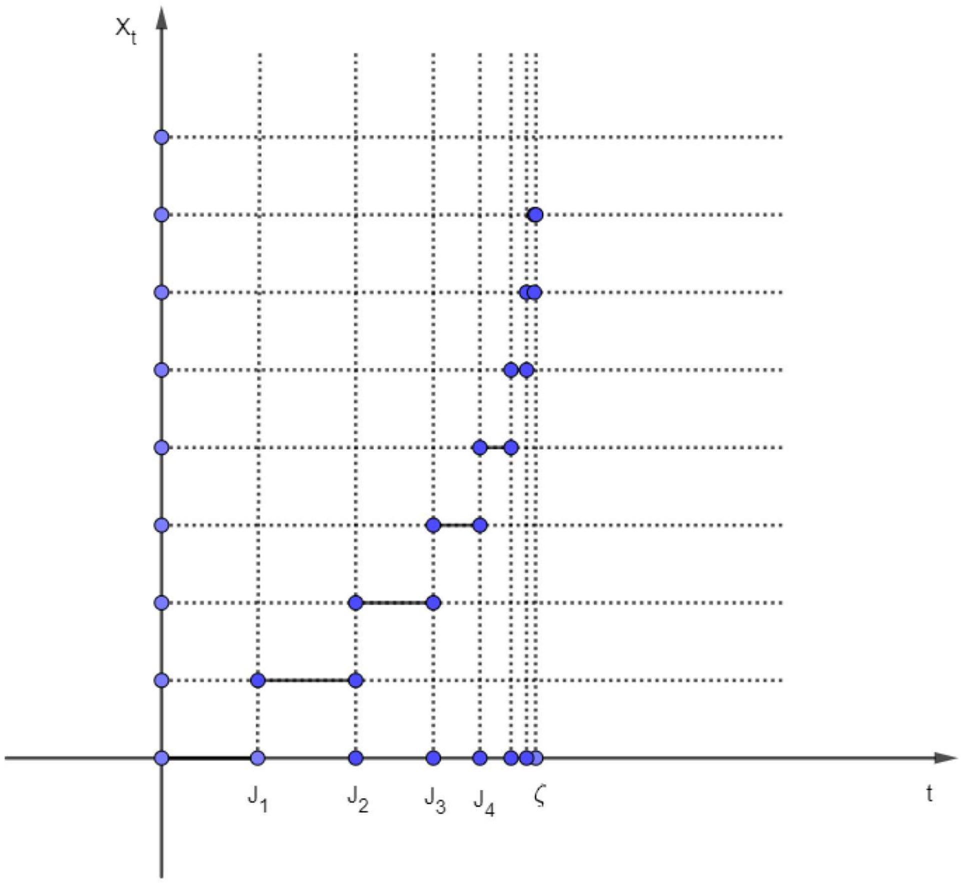
Ukoliko je $J_{n+1} = \infty$ za neki $n \in \mathbb{N}$, onda se uvodi oznaka $X_\infty = X_{J_n}$ i to je njegova posljednja vrijednost (tzv. groblje) . Možemo uočiti da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

Vrijeme prve eksplozije se označava ζ i definira kao

$$\zeta = \lim_{n\to\infty} J_n = \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} W_n.$$

Hoće li doći do eksplozije u nekoj trajektoriji ovisi o vremenima skokova. Trajektorija može imati konačno mnogo skokova u konačnom intervalu, pa ne dolazi do eksplozije. Također se može zadržati beskonačno dugo u jednoj vrijednosti. Međutim, kada trajektorija ima beskonačno mnogo skokova u konačnom intervalu (prikazano na slici ispod), dolazi do eksplozije. Nakon eksplozije lanac kreće ispočetka. Lance možemo promatrati samo do vremena prve eksplozije, pa označavamo $X_t = \infty$ za $t \geq \zeta$ te takve lance nazivamo minimalnim.



Slika 2: Prikaz eksplozije Markovljevog lanca [2]

Obzirom da smo definirali vremena skokova, možemo Markovljevom lancu u neprekidnom vremenu $(X_t,\ t \geq 0)$ pridružiti lanac u diskretnom vremenu $Y = (Y_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ takav da je

$$Y_n = X_{J_n}.$$

Ovaj pridruženi lanac Y naziva se **lanac skokova**, a koristan je jer prati stanja kroz koja prolazi proces X. Sada distribucijska svojstva početnog lanca $(X_t,\ t \geq 0)$ možemo iskazivati pomoću lanca skokova kao primjerice [2]:

$$P(X_t = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y_n = i, J_n \leq t < J_{n+1})$$

te

$$P(X_t = i \text{ za neki } t \in [0, \infty\rangle) = P(Y_n = i \text{ za neki } n \in \mathbb{N}_0).$$

2.3 Prijelazne vjerojatnosti i generatorska matrica

Markovljeve lance u neprekidnom vremenu najjednostavnije ćemo opisati pomoću dijagrama te generatorske matrice (Q-matrice). Za početak ćemo uvesti pojam **prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog lanca** kao vjerojatnosti oblika:

$$P_{ij}(s,t) := P(X_t = j | X_s = i),\ i,j \in S,\ s < t.$$

Ona predstavlja vjerojatnost da će proces koji se u trenutku s nalazi u stanju i, naći u stanju j u trenutku t. Ukoliko prethodna vjerojatnost ovisi samo o razlici vremenskih trenutaka, odnosno ukoliko je $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0, t-s)$ kažemo da je proces **homogen**. Kada je proces homogen možemo prethodnu vjerojatnost pisati i kao funkciju jedne varijable (obzirom da ovisi samo o duljini intervala) pa je $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s)$. Osim toga uvest ćemo i oznaku $\kappa = (\kappa_i,\ i \in S)$ gdje je $\kappa_i = P(X_0 = i)$. Distribucija κ se naziva **početnom distribucijom Markovljevog lanca**.
Nadalje uvodimo familiju $P(t) = (P_{ij}(t),\ i,j \in S),\ t \geq 0$ za koju vrijedi sljedeće:

Teorem 2.3 ([5]). *$(P(t),\ t \geq 0)$ je stohastička polugrupa, odnosno $P(t)$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

a) $P(0) = I$, gdje je $I = (I_{ij}, i,j \in S)$, $I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j \\ 0, & \text{za } i \neq j, \end{cases}$

b) $P_{ij}(t) \geq 0$ i $\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1$, odnosno $P(t)$ je stohastička matrica,

c) $P(t)$ zadovoljava Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe, tj. vrijedi

$$P(s+t) = P(t)P(s), \forall s,t \geq 0.$$

Dokaz. Dokaz ovog teorema ćemo raditi po komponentama matrice $P(t)$.

a) Izrazimo vjerojatnost oblika $P_{ij}(0) = P(X_0 = j|X_0 = i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ za } i = j \\ 0, \text{ za } i \neq j. \end{cases}$
   Dakle $P(0) = I$.

b) Prema definiciji vjerojatnosti uvijek vrijedi $P_{ij}(t) \geq 0$. Pokažimo još $\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1$:

$$\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = \sum_{j \in S} P(X_t = j|X_0 = i) = P\big(\bigcup_{j \in S} X_t = j|X_0 = i\big) = P\big(X_t \in S|X_0 = i\big) = 1.$$

c) Preostaje nam još dokazati da vrijedi $P(s+t) = P(t)P(s), \forall s, t \geq 0$ pa po komponentama vrijedi:

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+s) &= P_j(X_{t+s} = j) \\ &= \sum_{k \in S} P_j(X_{t+s} = j, X_t = k) \\ &= \sum_{k \in S} P_j(X_{t+s} = j \mid X_t = k) P_j(X_t = k) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{t+s} = j \mid X_t = k, X_0 = i) P_j(X_t = k) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{t+s} = j \mid X_t = k) P_j(X_t = k) \\ &= \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s) = (P(t)P(s))_{ij}. \end{aligned}$$

□

Svaki Markovljev lanac je u potpunosti opisan familijom $P(t) = (P_{ij}(t),\ i, j \in S),\ t \geq 0$ i početnom distribucijom κ, a to ćemo dokazati sljedećim teoremom.

Teorem 2.4 ([5]). *Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ Markovljev lanac u neprekidnom vremenu i neka je $\kappa = (\kappa_i,\ i \in S)$ početna distribucija lanca te $P(t) = (P_{ij}(t), i, j \in S)$ prijelazne vjerojatnosti lanca. Tada su sve konačnodimenzionalne distribucije lanca X dane izrazom:*

$$P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1) = \sum_{i \in S} \kappa_i P_{ii_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \tag{2}$$

za $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ i za sve $i_1, i_2, \dots, i_n \in S$. Vrijedi i obrat tvrdnje: ako je X slučajni proces čije konačnodimenzionalne distribucije zadovoljavaju (2) onda je X Markovljev lanac s početnom distribucijom κ i prijelaznim vjerojatnostima $P(t)$.

Dokaz. Koristeći definiciju uvjetne vjerojatnosti i Markovljevog svojstva računamo:

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1) = \\
&= \sum_{i \in S} P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i) \\
&= \sum_{i \in S} P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i) P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i) \\
&= \sum_{i \in S} P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i) \\
&= \sum_{i \in S} P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1} | X_{t_{n-2}} = i_{n-2}) P(X_{t_{n-2}} = i_{n-2} \ldots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i) \\
&= \cdots = \sum_{i \in S} P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) P(X_{t_1} = i_1 | X_0 = i) P(X_0 = i) \\
&= \sum_{i \in S} \kappa_i P_{i i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Osim toga, dokazujemo obrat tvrdnje. Želimo pokazati da lanac zadovoljava Markovljevo svojstvo:

$$
\begin{aligned}
P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1} \ldots X_{t_1} = i_1) &= \frac{P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1} \ldots X_{t_1} = i_1)}{P(X_{t_{n-1}} = i_{n-1} \ldots X_{t_1} = i_1)} \\
&= \frac{\sum_{i \in S} \kappa_i P_{i i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})}{\sum_{i \in S} \kappa_i P_{i i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-2} i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2})} = P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}).
\end{aligned}
$$

□

Pored prijelaznih vjerojatnosti procesa X, proces skokova kao pridruženi lanac u diskretnom vremenu ima matricu jednokoračnih prijelaznih vjerojatnosti, u oznaci $\Pi = (\pi_{ij}, i, j \in S)$ gdje su vremenski trenutci iz $\mathbb{N}_0$. Lanac skokova je Markovljev lanac u diskretnom vremenu (za više informacija o matrici jednokoračnih prijelaznih vjerojatnosti pogledati [3]). U nastavku iskazujemo i dokazujemo distribuciju prvog skoka Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu jer će nam upravo ona poslužiti za definiranje nove funkcije q.

Teorem 2.5 ([3]). *Uvjetno na $\{X_0 = i\}$ distribucija prvog skoka Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu dana je sljedećim izrazom:*

$$P_i(J_1 > t) = e^{P'_{ii}(0)t}.$$

Dokaz. Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ Markovljev lanac koji ima zdesna neprekidne trajektorije te neka je $X_0 = i,\ i \in S$. Želimo izračunati:

$$P_i(J_1 > t) = P_i(X_s = X_0,\ 0 \leq s \leq t) = P(X_s = i,\ 0 \leq s \leq t).$$

Uvedimo za $n \in \mathbb{N}$ skup:

$$B_n = \{X_{\frac{lt}{2^n}} = X_0 : l = 1, 2, \ldots, 2^n\}.$$

Ako raspišemo skupove vrijedi:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{X_{\frac{t}{2}} = X_0, X_t = X_0\} \\
B_2 &= \{X_{\frac{t}{4}} = X_0, X_{\frac{t}{2}} = X_0, X_t = X_0\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

iz čega slijedi da je:

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \ldots$$

i

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{X_s = X_0,\ 0 \leq s \leq t\} = \{J_1 > t\}.$$

Sada ćemo korištenjem Teorema 2 izračunati:

$$
\begin{aligned}
P_i(B_n) &= P(X_{\frac{t}{2^n}} = X_0, \ldots, X_t = X_0 | X_0 = i) = P(X_{\frac{t}{2^n}} = i, \ldots, X_t = i | X_0 = i) \\
&= \left(P_{ii}\left(\frac{(l+1)t}{2^n} - \frac{lt}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \left(1 - \frac{2^n(1 - P_{ii}(\frac{t}{2^n}))}{2^n}\right)^{2^n}.
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da postoji sljedeći limes:

$$P'_{ii}(0) = \lim_{h\to\infty} \frac{P_{ii}(h) - P_{ii}(0)}{h} = -\lim_{h\to\infty} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h}.$$

Možemo izračunati:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\left(1 - P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{t(1 - P_{ii}(\frac{t}{2^n}))}{\frac{t}{2^n}} = -tP'_{ii}(0).$$

Korištenjem jednakosti da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x},$$

kada $x_n \to x$ dobivamo sljedeći izraz:

$$P_i(J_1 > t) = P_i\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P_i(B_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2^n(1 - P_{ii}(\frac{t}{2^n}))}{2^n}\right)^{2^n} = e^{P'_{ii}(0)t}.$$

□

Obzirom da je $W_1 = J_1$, znamo da će i W_1 imati eksponencijalnu distribuciju, a analogno možemo dobiti i za ostala vremena čekanja (uvjetno na prošlost) što ćemo naknadno pokazati u Teoremu 2.6 u poglavlju 2.4.

Napomena 1 ([5]). *Kako vremena čekanja $(W_n, n \in \mathbb{N})$ i vrijeme prvog skoka (J_1) imaju eksponencijalnu distribuciju, prema Teoremu 2.1 oni imaju svojstvo zaboravljanja. S druge strane, mogli smo preko Markovljevog svojstva pokazati da vremena zadovoljavaju svojstvo zaboravljanja, pa samim time imaju eksponencijalnu distribuciju:*

$$
\begin{aligned}
P_i(J_1 > t + s | J_1 > t) &= P_i(X_k = i, 0 \leq k \leq t + s | X_k = i, 0 \leq k \leq t) \\
&= P_i(X_k = i, t \leq k \leq t + s | X_k = i, 0 \leq k \leq t) \\
&= P_i(X_k = i, t \leq k \leq t + s | X_t = i) = P_i(X_k = i, 0 \leq k \leq s) \\
&= P_i(J_1 > s).
\end{aligned}
$$

Na osnovu distribucije prvog skoka definiramo funkciju $q : S \to \langle 0, \infty \rangle$ s $q(i) = q_i = -P'_{ii}(0)$. Sljedeće uvodimo pojam generatorske matrice koja je u potpunosti definirana matricom prijelaznih vjerojatnosti Π i funkcijom q:

Definicija 5. *Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ Markovljev lanac u neprekidnom vremenu. Matrica $Q = (q_{ij},\ i, j \in S)$ koja je definirana izrazom*

$$q_{ij} = \begin{cases} -q(i), & \text{za } j = i \\ q(i)\pi_{ij}, & \text{za } j \neq i \end{cases}$$

*naziva se **generatorska** ili **Q-matrica** Markovljevog lanca X.*

Za svaku Q-matricu vrijede sljedeća svojstva [2]:

a) $0 \leq -q_{ii} < \infty,\ \forall i$,

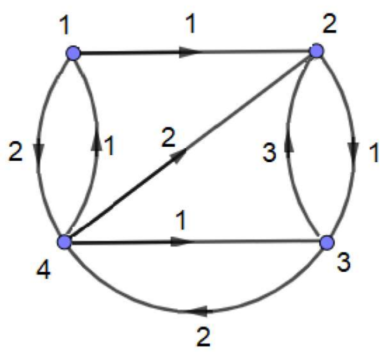
b) $q_{ij} \geq 0,\ \forall i \neq j$,

c) $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0,\ \forall i$,

d) $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$.

U nastavku ćemo napraviti primjer dijagrama Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu i pripadne Q-matrice.

Primjer 2. *Neka je Markovljev lanac dan sa sljedećim dijagramom:*



Slika 3: Dijagram generatorske matrice Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu [2]

Pripadnu Q-matricu popunjavamo tako da se za q_{ij} prepisuju pripadne vrijednosti na strelicama, a za q_{ii} koristimo da je $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$. Dakle, Q-matrica je dana s:

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Obratno, poznavajući Q-matricu možemo definirati $\Pi = (\pi_{ij},\ i,j \in S)$ tako da je:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i}, & \text{za } j \neq i \text{ i } q_i \neq 0 \\ 0, & \text{za } j \neq i \text{ i } q_i = 0 \end{cases}$$

i

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0, & \text{za } q_i \neq 0 \\ 1, & \text{za } q_i = 0. \end{cases}$$

Intuitivnije, matricu prijelaznih vjerojatnosti možemo dobiti iz Q-matrice skalirajući sve nedijagonalne elemente s q_i, a dijagonalne elemente postavimo na nulu kao u sljedećem primjeru.

Primjer 3. *Koristimo Q-matricu iz prethodnog primjera:*

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Pripadna matrica Π dana je s:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu prethodno uvedenih pojmova možemo definirati kada za Q-matricu kažemo da je neeksplozivna (pa samim time i lanac nazivamo regularnim):

Definicija 6. *Za matricu Q Markovljevog lanca X kažemo da je* ***eksplozivna*** *ukoliko je:*

$$P_i(\zeta < \infty) > 0$$

za neki $i \in S$. U suprotnom kažemo da je Q neeksplozivna, a lanac X je ***regularan****.*

Napomena 2. *Naime, definirali smo vrijeme eksplozije kao $\zeta = \lim_{n\to\infty} J_n = \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$. Kasnije u radu ćemo definirati uvjet eksplozije Markovljevog lanca koji se temelji na koeficijentima $q(i), i \in S$ za koje ćemo vidjeti kako su povezani s vremenima čekanja $W_n, n \in \mathbb{N}$ u sljedećem poglavlju. Stoga i Q-matricu nazivamo eksplozivnom.*

Dakle, u ovom poglavlju definirali smo Q-matricu i njezine elemente. Osim što su izraženi preko vjerojatnosti, elementi Q-matrice imaju i intuitivno značenje. Vrijednosti q_{ij} možemo interpretirati kao stopu, odnosno brzinu prelaska iz stanja i u stanje j, a q_i možemo interpretirati kao stopu, odnosno brzinu napuštanja stanja i. Osim toga, lanac X prelazi iz stanja i u stanje j s vjerojatnošću π_{ij}, brzinom q_i, tj. vrijeme čekanja do prelaska iz stanja i u stanje j je eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom q_i.

2.4 Konstrukcija Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu

U primjeni moramo konstruirati Markovljev lanac u neprekidnom vremenu pomoću podataka koji su nam poznati. Osnovni elementi za konstrukciju su: niz nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli $E = (E_n, n \in \mathbb{N})$ takvih da je $E \sim \mathcal{E}(1)$, Markovljev lanac u diskretnom vremenu $Z = (Z_n, n \in \mathbb{N}_0)$ (koji će predstavljati proces skokova Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu), nezavisan od E i funkcija $q : S \to \langle 0, \infty\rangle$. Naime, lanac Z kao lanac skokova prati stanja kroz koja prolazi Markovljev lanac u neprekidnom vremenu, a eksponencijalne slučajne varijable prate koliko brzo se mijenjaju stanja. Definiramo sljedeće [5]:

$$
\begin{aligned}
W_{n+1} &:= \frac{E_{n+1}}{q(Z_n)},\ n = 1, 2, ...\\
J_0 &= 0\\
J_{n+1} &:= J_n + W_{n+1},\ n = 1, 2, ...\\
X_t &:= Z_n,\ t \in [J_n, J_n + 1\rangle.
\end{aligned}
$$

Ovako definiran regularan proces $X = (X_t,\ t \geq 0)$ je Markovljev lanac u neprekidnom vremenu, a to ćemo pokazati u nastavku. Naime, definirali smo da proces kreće u trenutku 0, tj. $J_0 = 0$. Također prema definiciji je $W_1 = \frac{E_1}{q(Z_0)}$ i zanima nas distribucija ove varijable uvjetno na $\{Z_0 = i\}, i \in S$:

$$
\begin{aligned}
P_i(W_1 > s) = P(W_1 > s | Z_0 = i) &= \frac{P(W_1 > s, Z_0 = i)}{P(Z_0 = i)} = \frac{P(\frac{E_1}{q(Z_0)} > s, Z_0 = i)}{P(Z_0 = i)}\\
&= \frac{P(\frac{E_1}{q(i)} > s, Z_0 = i)}{P(Z_0 = i)} = \frac{P(\frac{E_1}{q(i)} > s)P(Z_0 = i)}{P(Z_0 = i)}\\
&= P\left(\frac{E_1}{q(i)} > s\right) = P(E_1 > sq(i)) = e^{-q(i)s}.
\end{aligned}
$$

Dakle, možemo uočiti da se radi o eksponencijalnoj distribuciji s parametrom $q(i)$. Nakon toga, vrijeme sljedećeg skoka je $J_1 = J_0 + W_1 = W_1$, a $X_t = Z_0$ do prvog skoka, odnosno za $t \in [J_0, J_1\rangle$. Sada je $W_2 = \frac{E_2}{q(Z_1)}$ pa računamo distribuciju ove varijable uvjetno na $\{Z_1 = i\}$:

$$
\begin{aligned}
P(W_2 > s | Z_1 = i) &= \frac{P(W_2 > s, Z_1 = i)}{P(Z_1 = i)} = \frac{P(\frac{E_2}{q(Z_1)} > s, Z_1 = i)}{P(Z_1 = i)}\\
&= \frac{P(\frac{E_2}{q(i)} > s, Z_1 = i)}{P(Z_1 = i)} = \frac{P(\frac{E_2}{q(i)} > s)P(Z_1 = i)}{P(Z_1 = i)}\\
&= P\left(\frac{E_2}{q(i)} > s\right) = P(E_2 > sq(i)) = e^{-q(i)s}.
\end{aligned}
$$

Ako nastavimo ovaj postupak možemo uočiti da smo konstruirali vremena skokova i vremena čekanja Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu X, gdje je $X_{J_n} = Z_n$. Uočimo da se X_t može još zapisati kao [5]:

$$
X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n I_{[J_n, J_{n+1}\rangle(t)}.
$$

Međutim, mi još ne možemo tvrditi da je X Markovljev lanac, nego proces u neprekidnom vremenu. Kako bi taj proces bio Markovljev lanac biti će nam potrebna regularnost lanca, a teorem koji to tvrdi slijedi na kraju poglavlja.
U počeku ovog izvoda izostavili smo bitnu pretpostavku kako bi ju komentirali u nastavku. Naime, za q_i treba vrijediti $q_i \in \langle 0, \infty \rangle$. Međutim razmotrimo situacije kada je $q_i = 0$, odnosno $q_i = \infty$. U slučaju kada je $q_i = 0$ slijedit će da je $W_i = \infty$, što znači da je vrijeme zadržavanja u stanju beskonačno. U slučaju kada je $q_i = \infty$ slijedi da je $W_i = 0$, što znači da lanac odmah napušta to stanje i ono se naziva trenutnim stanjem. Konstrukciju ovog poglavlja možemo proširiti na slučaj kada je $q_i = 0$, ali ne dopušta trenutna stanja.
Naredni teorem će nam dati svojstvo niza slučajnih varijabli $(W_n, n \in \mathbb{N})$ na koje ćemo se osvrnuti u poglavlju 2.5.

Teorem 2.6 ([3]). *Slučajne varijable $(W_n, n \in \mathbb{N})$ su uvjetno nezavisne i eksponencijalno distribuirane uz dane realizacije slučajnih varijabli $\{Z_n\}$.*

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti činjenicu da su $(E_n, n \in \mathbb{N})$ međusobno nezavisne, eksponencijalno distribuirane slučajne varijable te da su one nezavisne od $(Z_n, n \in \mathbb{N}_0)$. Za proizvoljne $n \geq 1, u_n \geq 0$ pogledajmo vjerojatnost:

$$\begin{aligned}
P(W_n > u_n \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{n-1} = i_{n-1}) &= P\left(\frac{E_n}{q(Z_{n-1})} > u_n \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{n-1} = i_{n-1}\right) \\
&= P\left(\frac{E_n}{q(i_{n-1})} > u_n \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{n-1} = i_{n-1}\right) \\
&= P\left(\frac{E_n}{q(i_{n-1})} > u_n\right) = e^{-q(i_{n-1})u_n}.
\end{aligned}$$

Možemo primijetiti da je za određivanje distribucije od $(W_n,\ n \in \mathbb{N})$ dovoljno poznavati zadnje posjećeno stanje pa je prema tome:

$$W_{n|\{Z_{n-1}=i_{n-1}\}} \sim \mathcal{E}(q(i_{n-1})).$$

Sada još dokažimo nezavisnost. Za proizvoljne $n, m \geq 1, n < m$ i $u, v \geq 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
&P(W_n > u, W_m > v \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{m-1} = i_{m-1}) \\
&= P\left(\frac{E_n}{q(Z_{n-1})} > u, \frac{E_m}{q(Z_{m-1})} > v \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{m-1} = i_{m-1}\right) \\
&= P\left(\frac{E_n}{q(i_{n-1})} > u, \frac{E_m}{q(i_{m-1})} > v \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{m-1} = i_{m-1}\right) \\
&= P\left(\frac{E_n}{q(i_{n-1})} > u \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{n-1} = i_{n-1}\right) P\left(\frac{E_m}{q(i_{m-1})} > v \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{n-1} = i_{n-1}\right) \\
&= P(W_n > u \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{n-1} = i_{n-1}) P(W_m > v \mid Z_0 = i_0 \ldots Z_{n-1} = i_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

U prethodnom poglavlju uveli smo pojam neeksplozivne matrice i regularnog procesa. Podsjetimo se da je proces regularan ukoliko vrijedi $P_i(\zeta < \infty) = 0$, odnosno $P_i(\zeta = \infty) = 1$. Sljedeći teorem će dati uvjet za regularnost procesa.

Teorem 2.7 ([5]). *Slučajni proces X je regularan ako zadovoljava jedan od sljedećih uvjeta:*

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q(Z_n)} = \infty$ *P_i-g.s.,* $\forall i \in S$,

b) $\sup_{i \in S} q(i) < \infty$.

Dokaz.

a) Obzirom da je $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$, a u Teoremu 2.6 tvrdimo da su varijable međusobno uvjetno nezavisne, imamo zadovoljene pretpostavke Teorema 2.2. Kako je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q(Z_n)} = \infty$ slijedi $P_i(\zeta = \infty) = 1$;

b) Neka je $c := \sup_{i \in S} q(i) < \infty$. Vrijedi sljedeće.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q(Z_{n-1})} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c} = \infty,$$

pa analogno kao prethodni implicira regularnost procesa X.

□

Kako sljedeći teorem zahtjeva korištenje nekoliko dodatnih lema, radi jednostavnosti rada nećemo ga dokazivati, a za one koji žele znati više mogu pogledati u [1].

Teorem 2.8 ([5]). *Pretpostavimo da je proces X koji je konstruiran u ovom poglavlju regularan slučajni proces. Tada je X Markovljev lanac u neprekidnom vremenu.*

Dakle, uz pretpostavku da je proces s početka poglavlja regularan, konstruirali smo Markovljev lanac u neprekidnom vremenu.

2.5 Jednadžba unaprijed i unatrag

U ovom poglavlju izvodimo Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed i unatrag koja će nam poslužiti u računanju vjerojatnosti oblika $P_{ij}(t) = P(X_t = j | X_0 = i)$. Dobit ćemo sustav jednadžbi iz kojeg ćemo brzo moći znati sve vjerojatnosti ovog oblika i samim time lako opisati zadani Markovljev lanac u neprekidnom vremenu. No prije toga dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 2.9 ([4]). *Za sve $i, j \in S$ vrijedi:*

a) $\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = q(i)$,

b) $\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}$, *za* $i \neq j$.

Dokaz.

a) Znamo da je $P'_{ii}(0) = 1$ pa slijedi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{ii}(0) - P_{ii}(h)}{h} = -P'_{ii}(0) = q(i),$$

b) Vjerojatnost $P_{ij}(h)$ predstavlja vjerojatnost da proces koji kreće iz stanja i nakon h vremena bude u stanju j. Pokažimo da vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$P_{ij}(h) = hq(i)\pi_{ij} + o(h),$$

a iz toga će slijediti i da je:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hq(i)\pi_{ij} + o(h)}{h} = q(i)\pi_{ij} = q_{ij}, \text{ za } i \neq j.$$

Naime, događaj $\{X_h = j \mid X_0 = i\}$ će se realizirati ukoliko se u h vremena dogodio samo jedan skok lanca točno iz stanja i u stanje j ili su se mogla dogoditi dva i više skokova gdje se lanac nalazi u stanju j nakon h vremena. Prema tome želimo izračunati sljedeće vjerojatnosti:

$$P(X \text{ napravi jedan skok zaključno s } h \mid X_0 = i)$$

i

$$P(X \text{ napravi barem dva skoka zaključno s } h \mid X_0 = i).$$

Ako iskoristimo činjenicu da za W_1 vrijedi sljedeće:

$$P_i(W_1 > h) = e^{-q(i)h}$$

te iskoristimo razvoj eksponencijalne funkcije u Taylorov red dobivamo:

$$P_i(W_1 > h) = 1 - q(i)h + \frac{(q(i)h)^2}{2!} - \cdots = 1 - q(i)h + o(h).$$

Iz vjerojatnosti suprotnog događaja dobivamo:

$$P_i(W_1 \leq h) = q(i)h + o(h).$$

Zatim iskoristimo činjenicu da je uvjetno na $X_{J_1} = j$, vrijeme čekanja W_2 također eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $q(j)$. Kako vrijedi:

$$\{W_1 + W_2 \leq h\} \subseteq \{W_1 \leq h, W_2 \leq h\}$$

zbog monotonosti i nezavisnosti slučajnih varijabli W_1 i W_2 dobivamo:

$$\begin{aligned} P_i(W_1 + W_2 \leq h | X_{J_1} = j) &\leq P_i(W_1 \leq h, W_2 \leq h | X_{J_1} = j) \\ &= P_i(W_1 \leq h) P_j(W_2 \leq h) = (q(i)h + o(h))(q(j)h + o(h)) \\ &= q(i)q(j)h^2 + (q(i) + q(j))ho(h) + o(h) = o(h). \end{aligned}$$

Sada slijedi:

$$\begin{aligned} &P(X \text{ napravi barem dva skoka zaključno s } h \mid X_0 = i) \\ &\quad = \sum_{j \neq i} P(X \text{ napravi barem dva skoka zaključno s } h \mid X_0 = i, X_{J_1} = j) \\ &\quad \cdot P(X_{J_1} = j | X_0 = i) \\ &\quad = \sum_{i \neq j} P_i(W_1 + W_2 \leq h | X_{J_1} = j)\pi_{ij} = \sum_{i \neq j} o(h)\pi_{ij} = o(h). \end{aligned}$$

Osim toga

$$P(X \text{ napravi nula skokova zaključno s } h \mid X_0 = i) = 1 - q(i)h + o(h)$$

pa je

$$\begin{aligned} &P(X \text{ napravi jedan skok zaključno s } h \mid X_0 = i) \\ &= 1 - (1 - q(i)h + o(h)) - o(h) = q(i)h + o(h). \end{aligned}$$

Konačno možemo zaključiti da vrijedi:

$$P_{ij}(h) = hq(i)\pi_{ij} + o(h),$$

a prema tome vrijedi tvrdnja teorema.

$\square$

Sada možemo iskazati i dokazati jednadžbu unatrag i unaprijed.

Teorem 2.10 (Kolmogorovljeva jednadžba unatrag, [4]). *Neka je X regularan proces. Za sva stanja $i, j \in S$ i sva vremena $t \geq 0$ vrijedi:*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - q(i) P_{ij}(t),$$

odnosno u matričnom obliku:

$$P'(t) = QP(t).$$

Dokaz. Korištenjem Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti koji smo iskazali i dokazali u Teoremu 2.3 slijedi:

$$\begin{aligned} P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - P_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) + P_{ii}(h) P_{ij}(t) - P_{ij}(t) \\ &= \sum_{k \neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - (1 - P_{ii}(h)) P_{ij}(t). \end{aligned}$$

Nakon toga cijelu jednadžbu podijelimo s h te računamo limes:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \frac{(1 - P_{ii}(h))}{h} P_{ij}(t) \right)$$

iz čega prema Teoremu 2.9 slijedi:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - q(i) P_{ij}(t).$$

$\square$

Teorem 2.11 (Kolmogorovljeva jednadžba unaprijed, [4]). *Neka je X regularan proces. Za sva stanja $i, j \in S$ i sva vremena $t \geq 0$ vrijedi:*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - q(j) P_{ij}(t),$$

odnosno u matričnom obliku:

$$P'(t) = P(t)Q.$$

Dokaz. Analogno kao za jednadžbu unatrag. $\square$

2.6 Klasifikacija stanja Markovljevog lanca

Nastavljamo s analizom Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu te uvodimo pojmove vezane za klasifikaciju stanja, vremena čekanja do pogađanja skupova, vjerojatnost pogađanja skupa stanja i očekivano vrijeme čekanja do pogađanja skupa stanja. Za sve definicije pretpostavljamo da imamo Markovljev lanac u neprekidnom vremenu $X = (X_t,\ t \geq 0)$ sa stanjima iz skupa S i pripadnim lancem skokova $Y = (Y_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$.

Definicija 7. *Neka su $i, j \in S$. Za stanje j kažemo da je* ***dostižno*** *iz stanja i ukoliko vrijedi*

$$P(X_t = j | X_0 = i) > 0, \ \textit{za neki } t \geq 0.$$

Pišemo $i \to j$.

Definicija 8. *Kažemo da stanja i i j* ***komuniciraju*** *ako je $i \to j$ i $j \to i$ te označavamo $i \leftrightarrow j$.*

Obzirom da je relacija komuniciranja relacija ekvivalencije na skupu S, ona definira klase ekvivalencije. Klasa komuniciranja K_i dana je izrazom $K_i = \{j \in S : i \leftrightarrow j\}$.
Sljedećim teoremom povezujemo klasifikaciju stanja Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu i pripadnog lanca skokova. Osim toga, dajemo kriterij dostižnosti stanja.

Teorem 2.12 ([2])**.** *Neka su $i, j \in S$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) $i \to j$ u Markovljevom lancu X;

b) $i \to j$ u lancu skokova Y;

c) $q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{n-1} j} > 0$ za neka međustanja $i_1, \dots i_{n-1}$;

d) $P_{ij}(t) > 0$ za sve $t > 0$;

e) $P_{ij}(t) > 0$ za neki $t > 0$.

Dokaz. Pogledajmo prvo tvrdnje $d)$ i $e)$. Očigledno je kako $d) \Rightarrow e)$. Nadalje, prema definiciji dostižnosti $e) \Rightarrow a)$. Lanac skokova prati stanja koja posjećuje Markovljev lanac pa očigledno $a) \Rightarrow b)$. Preostaje još dokazati $b) \Rightarrow c)$ i $c) \Rightarrow d)$.
Neka vrijedi $b)$, tj. $i \to j$ u lancu skokova Y. Prema teoriji Markovljevih lanaca u diskretnom vremenu (detaljnije u [2, poglavlje 1.2]) postoje međustanja $i_1, \dots i_{n-1}$ takva da je $\pi_{ii_1} \pi_{i_1 i_2} \dots \pi_{i_{n-1} j} > 0$. Znamo da vrijedi $q_{kl} = q_k \pi_{kl}$ pa prema tome slijedi $q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{n-1} j} > 0$. Dokažimo posljednju implikaciju. Neka vrijedi $c)$. Koristeći Chapman-Kolmogorovljevu jednakost dobivamo $P_{ij}(t) \geq P_{ii_1}(\frac{t}{n}) \dots P_{i_{n-1} j}(\frac{t}{n})$. Sada ako za proizvoljna stanja k, l vrijedi $q_{kl} > 0$ onda za sve $t > 0$ slijedi:

$$P_{kl}(t) \geq P_k(J_1 \leq t, Y_1 = l, W_2 > t) = \big(1 - e^{-q(k)t}\big) \pi_{kl} e^{-q(l)t} > 0.$$

Odavde slijedi da je $P_{ij}(t) \geq P_{ii_1}(\frac{t}{n}) \dots P_{i_{n-1} j}(\frac{t}{n}) > 0$ za sve $t > 0$. $\square$

Zatim definiramo kada je Markovljev lanac ireducibilan, što će nam poslužiti kao preduvjet u kasnijim teoremima:

Definicija 9. *Markovljev lanac X je* ***ireducibilan*** *ako za svaki $i, j \in S$ vrijedi $i \leftrightarrow j$.*

Drugim riječima, lanac je ireducibilan kada sva stanja komuniciraju. Nadalje, uvodimo vrijeme pogađanja skupa $A \subset S$ za Markovljev lanac X, u oznaci D^A izrazom:

$$D^A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}.$$

Sa H^A označavamo vrijeme pogađanja skupa A u lancu skokova, a definiramo kao:

$$H^A = \min\{n \geq 0 : Y_n \in A\}.$$

Uočimo da za prethodno definirane pojmove vrijedi:

$$\{H^A < \infty\} = \{D^A < \infty\}$$

te je njihov odnos dan sljedećim izrazom:

$$D^A = J_{H^A}.$$

Koristeći vremena pogađanja možemo definirati sljedeće pojmove:

Definicija 10. *Za skup $A \subset S$ kažemo da je* ***zatvoren podskup*** *skupa stanja S ako je za svaki $i \in A$:*

$$P(D^{S \setminus A} = \infty \mid X_0 = i) = 1.$$

Definicija 11. *Za stanje $i \in S$ kažemo da je* ***apsorbirajuće*** *ako je $\{i\}$ zatvoren podskup skupa S.*

Vjerojatnosti oblika $P(D^j < \infty | X_0 = i)$ gdje je j apsorbirajuće stanje nazivamo **apsorpcijskim vjerojatnostima**. Osim toga, želimo računati vjerojatnosti oblika:

$$h_i^A := P_i(D^A < \infty).$$

koje predstavljaju vjerojatnost da lanac koji kreće iz stanja i pogodi skup A. U nastavku slijedi teorem koji će omogućiti računanje tih vjerojatnosti iz sustava jednadžbi za sve $i \in S$.

Teorem 2.13 ([2])**.** *Vektor vjerojatnosti pogađanja $h^A = (h_i^A : i \in S)$ je nenegativno, minimalno rješenje sustava linearnih jednadžbi:*

$$\begin{cases} h_i^A = 1, & \text{za } i \in A \\ \sum_{j \in S} q_{ij} h_j^A = 0, & \text{za } i \notin A. \end{cases}$$

Također će nas zanimati očekivano vrijeme čekanja do pogađanja skupa A pa definiramo:

$$g_i^A := E_i[D^A],$$

a računamo prema sljedećem teoremu.

Teorem 2.14 ([2]). *Neka je $q_i > 0$ za svaki $i \notin A$. Vektor očekivanog vremena čekanja do pogađanja $g^A = (g_i^A : i \in S)$ je nenegativno, minimalno rješenje sustava linearnih jednadžbi:*

$$\begin{cases} g_i^A = 0, & \text{za } i \in A \\ -\sum_{j\in S} q_{ij} g_j^A = 1, & \text{za } i \notin A. \end{cases}$$

Dokaze prethodna dva teorema može se pronaći u [2, poglavlje 3.3], a kako bi pojednostavili razumijevanje, slijedi primjer.

Primjer 4. *Naime, kako Q matrica sadrži parametre eksponencijalnih distribucija trebamo ju iskoristiti kako bi dobili očekivano vrijeme čekanja da lanac dođe u neko stanje. Uzmimo Q matricu iz primjera 2:*

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo očekivano vrijeme čekanja da lanac dođe iz stanja 4 do stanja 1. Dakle, nas zanima $g_4 = E_4[T_1]$ te označimo $g_i = E_i[T_1]$. Sada imamo sustav:

$$\begin{aligned} g_4 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} g_2 + \frac{1}{4} g_3 \\ g_3 &= \frac{1}{5} + \frac{3}{5} g_2 + \frac{2}{5} g_4 \\ g_2 &= 1 + g_3 \end{aligned}$$

pa rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo da je $g_4 = 9$, tj. 9 vremenskih jedinica.

Još ćemo definirati povratno i prolazno stanje, no prije toga ćemo uvesti pojam vremena prvog povratka u stanje $i \in S$ kao:

$$D_i^{(1)} = \inf\{t \geq J_1 : X_t = i\},$$

te očekivano vrijeme do prvog povratka u stanje $i \in S$:

$$m_i = E_i[D_i^{(1)}].$$

Definicija 12. *Za stanje $i \in S$ kažemo da je* ***povratno*** *ako vrijedi:*

$$P_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \text{ je neomeđen}) = 1,$$

a ***prolazno*** *ukoliko vrijedi:*

$$P_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \text{ je neomeđen}) = 0.$$

Već smo spomenuli kako se neka svojstva nasljeđuju od lanca skokova, a sljedećim teoremom ćemo pokazati vezu prolaznosti i povratnosti u dva lanca:

Teorem 2.15 ([2]). *Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ Markovljev lanac s generatorskom matricom Q i pripadnim lancem skokova $Y = (Y_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$. Vrijedi sljedeće:*

1. *ako je $i \in S$ povratno stanje za lanac skokova Y onda je i povratno stanje za lanac X;*
2. *ako je $i \in S$ prolazno stanje za lanac skokova Y onda je i prolazno stanje za lanac X;*
3. *svako stanje lanca je ili povratno ili prolazno;*
4. *povratnost i prolaznost su svojstva klase.*

Sljedećim teoremom ćemo povezati povratnost i prolaznost stanja s generatorskom matricom i vremenima povratka u stanje.

Teorem 2.16 ([2]). *Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ Markovljev lanac s generatorskom matricom Q. Vrijedi sljedeće:*

1. *stanje $i \in S$ je povratno, ako je $q(i) = 0$ ili $P_i(D_i^{(1)} < \infty) = 1$;*
2. *stanje $i \in S$ je prolazno, ako je $q(i) > 0$ i $P_i(D_i^{(1)} < \infty) < 1$.*

Dokaz prethodna dva teorema može se pronaći u [2]. U nastavku dajemo novi uvjet regularnosti procesa obzirom na povratnost stanja.

Teorem 2.17 ([2]). *Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ Markovljev lanac s početnom distribucijom κ i matricom Q. Lanac X je regularan ukoliko je $X_0 = i$ te je i povratno stanje lanca skokova.*

Dokaz. Slično kao u poglavlju 2.4 uzmimo $E_n = q(Y_{n-1})W_n,\ n \in \mathbb{N}$ gdje je W_n vrijeme čekanja Markovljevog lanca. Sada su $E_1, E_2, \ldots$ nezavisne eksponencijalne varijable s parametrom 1, nezavisne od W_n. Obzirom da je i povratno stanje lanca skokova, znamo da se lanac vraća u stanje beskonačno mnogo puta. Označimo te trenutke $T_1, T_2, \ldots$. Prema Teoremu 2.2 vrijedi sljedeće:

$$P\Big(\sum_{m=1}^{\infty} E_{T_m+1} = \infty\Big) = 1,$$

a kako je:

$$\sum_{m=1}^{\infty} E_{T_m+1} = \sum_{m=1}^{\infty} q(i)W_{T_m+1} = q(i)\sum_{m=1}^{\infty} W_{T_m+1} \leq q(i)\zeta$$

slijedi da je X regularan. □

Osim što se klasifikacija stanja nasljeđuje iz lanca skokova, možemo definirati i nove lance koji će također naslijediti povratnost odnosno prolaznost na sljedeći način.

Teorem 2.18 ([2]). *Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ Markovljev lanac u neprekidnom vremenu. Definiramo lanac $Z = (Z_n,\ n \geq 0)$ takav da za $h > 0$, $Z_n = X_{nh}$. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) Ako je $i \in S$ povratno stanje za lanac X onda je i povratno stanje za lanac Z.

b) Ako je $i \in S$ prolazno stanje za lanac X onda je i prolazno stanje za lanac Z.

Dokaz. Vidi [2, str. 116]. □

Na kraju ovog poglavlja definiramo pozitivno povratno stanje, a primjena slijedi u 2.7.

Definicija 13. *Za stanje $i \in S$ kažemo da je* ***pozitivno povratno*** *ukoliko vrijedi ili $q(i) = 0$ ili $m_i < \infty$. Za stanje koje je povratno, a nije pozitivno povratno kažemo da je* ***nul-povratno****.*

2.7 Invarijantna distribucija i granična distribucija

Kako bi pratili granična ponašanja lanca u neprekidnom vremenu (i redova čekanja u primjeni) uvest ćemo u ovom poglavlju definicije invarijantne mjere i granične distribucije te iskazati njihovu vezu.

Definicija 14. *Neka je $X = (X_t, t \geq 0)$ Markovljev lanac te neka je Q njegova generatorska matrica. Netrivijalna mjera $\eta = (\eta_i, i \in S)$ se naziva* ***invarijantna mjera*** *ukoliko vrijedi:*

$$\eta Q = 0.$$

Invarijantna mjera koja je ujedno i vjerojatnosna distribucija naziva se ***invarijantnom distribucijom****.*

Za mjeru η i generatorsku matricu Q kažemo da su u **detaljnoj ravnoteži** ukoliko za svaki $i, j \in S$ vrijedi:

$$\eta_i q_{ij} = \eta_j q_{ji}.$$

Detaljnu ravnotežu možemo koristiti za izračun stacionarne distribucije u nastavku rada, a opravdanje za to nam daje sljedeći teorem:

Teorem 2.19 ([5]). *Ako su mjera η i generatorska matrica Q u detaljnoj ravnoteži onda je η invarijantna za Q.*

Dokaz. Koristeći definiciju detaljne ravnoteže dobivamo:

$$(\eta Q)_i = \sum_{j \in S} \eta_j q_{ji} = \sum_{j \in S} \eta_i q_{ij} = 0.$$

□

Invarijantnu distribuciju za X možemo dobiti i preko lanca skokova o čemu govori sljedeći teorem:

Teorem 2.20 ([5]). *Neka je X Markovljev lanac u neprekidnom vremenu s generatorskom matricom Q i Y njegov pripadni lanac s matricom prijelaza Π. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *mjera η je invarijantna za X;*

2. *mjera θ je invarijantna za Y, tj. $\theta\Pi = \theta$, gdje je $\theta_i = \eta_i q_i$.*

Dokaz. Uočimo da za sve $i, j \in S$ vrijedi:

$$q_j(\pi_{ji} - \delta_{ji}) = q_{ij}$$

pa slijedi da je:

$$(\theta\Pi - \theta)_i = \sum_{j\in S} \theta_j(\pi_{ji} - \delta_{ji}) = \sum_{j\in S} \eta_j q_j(\pi_{ji} - \delta_{ji}) = \sum_{j\in S} \eta_j q_{ij} = (\eta Q)_i = 0.$$

□

Uvjet postojanja invarijantne mjere i njenu jedinstvenost donosimo sljedećim teoremom:

Teorem 2.21 ([5]). *Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ Markovljev lanac u neprekidnom vremenu s generatorskom matricom Q te neka je lanac ireducibilan i povratan. Tada lanac X ima invarijantnu mjeru η koja je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu.*

Dokaz. Kako je X ireducibilan i povratan lanac, koristeći Teoreme 2.12 i 2.15 možemo zaključiti kako će Y biti ireducibilan i povratan lanac. Koristeći teoriju Markovljevih lanaca u diskretnom vremenu znamo da Y ima invarijantnu distribuciju θ koja je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu. Sada prema Teoremu 2.20 znamo da postoji invarijantna mjera η za X, gdje je $\eta_i = \frac{\theta_i}{q_i}$ koja je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu. □

Osim toga, postojanje stacionarne distribucije možemo uvjetovati postojanjem pozitivno povratnog stanja o čemu nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.22 ([2]). *Neka je $X = (X_t,\ t \geq 0)$ ireducibilan Markovljev lanac. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) *sva stanja su pozitivno povratna;*

b) *postoji pozitivno povratno stanje;*

c) *lanac je regularan i ima stacionarnu distribuciju η.*

Ukoliko vrijede prethodna svojstva dodatno vrijedi $m_i = \frac{1}{\eta_i q_i}$ za sve $i \in S$.

Dokaz. Vidi [2, str. 118]. □

Tvrdnja pod c), osim što osigurava postojanje stacionarne distribucije, daje formulu kojom računamo očekivano vrijeme potrebno da se vratimo u neko stanje i. Često se koristi u primjenama kako bi izračunali očekivano vrijeme potrebo da se sustav isprazni. Sljedeći teorem daje opravdanje definiranja invarijantne mjere uvjetom $\eta Q = 0$.

Teorem 2.23 ([1]). *Neka je X ireducibilan i povratan Markovljev lanac s generatorskom matricom Q i stohastičkom polugrupom $P(t) = (P_{ij}(t),\ t \geq 0)$ te neka je η mjera na skupu stanja S. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) $\eta Q = 0$;

b) $\eta P(t) = \eta$.

Dokaz. Neka vrijedi *b*), tj. $\eta P(t) = \eta$. Ako tu jednakost deriviramo po t dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \eta_i P'_{ij}(t) = \sum_i \eta_i \Big(\sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - q_j P_{ij}(t) \Big) \\ &= \sum_i \eta_i \sum_k P_{ik}(t) q_{kj} = \sum_k \sum_i \eta_i P_{ik}(t) q_{kj} = \sum_k \eta_k q_{kj}, \end{aligned}$$

gdje druga jednakost vrijedi zbog Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed. U obratu možemo koristiti prethodne jednakosti gdje dolazimo do $\eta P'(t) = 0$. Kako je derivacija jednaka 0, slijedi da je $\eta P(t)$ konstanta, za svaki $t \geq 0$. Prema Teoremu 2.3 vrijedi $P(0) = I$ pa je $\eta P(t) = \eta$. □

Osvrnimo se na granično ponašanje Markovljevih lanaca.

Definicija 15. *Neka je* $(X_t, t \geq 0)$ *Markovljev lanac. Vjerojatnosna distribucija* $\eta = (\eta_j,\ j \in S)$ *se zove granična distribucija ako za sve* $i, j \in S$ *vrijedi:*

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \eta_j.$$

Dovoljan uvjet postojanja granične distribucije dan je sa sljedeća dva zahtjeva [4]:

a) sva stanja komuniciraju, tj. proces je ireducibilan,

b) svako stanje Markovljevog lanca je pozitivno povratno.

Osim toga, pokazat ćemo vezu granične i invarijantne distribucije sljedećim teoremom:

Teorem 2.24 ([1])**.** *Neka je* X *ireducibilan, regularan proces s generatorskom matricom* Q *i pridruženom polugrupom* $P(t)$ *te neka je* η *invarijantna distribucija. Tada granična distribucija postoji i jednaka je invarijantnoj distribuciji.*

Dokaz. Pogledati [1, str. 163]. □

Napomena 3. *Dakle, prema prethodnom teoremu, ukoliko granična distribucija postoji, ona je jednaka invarijantnoj. Upravo iz tog razloga ćemo graničnu distribuciju označavati s* η.

U nastavku ćemo izvesti sustav jednadžbi (izvor: [4]) koji nam omogućava jednostavan način računanja granične distribucije. Koristimo jednadžbu unaprijed:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - q_j P_{ij}(t),$$

te na ovu jednadžbu primjenjujemo limes:

$$\lim_{t \to \infty} P'_{ij}(t) = \lim_{t \to \infty} \big(\sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - q_j P_{ij}(t) \big) = \sum_{k \neq j} \eta_k q_{kj} - q_j \eta_j.$$

Kako je $\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t) = 0$ slijedi:

$$0 = \sum_{k\neq j} \eta_k q_{kj} - q_j \eta_j \tag{3}$$

iz čega je

$$q_j \eta_j = \sum_{k\neq j} \eta_k q_{kj}, \ \forall j \in S.$$

Pored toga, za graničnu distribuciju vrijedi

$$\sum_j \eta_j = 1.$$

Ovaj sustav jednadžbi se koristi za određivanje granične distribucije, a jednadžbe (3) se nazivaju **jednadžbe ravnoteže**. Ako imamo proces u kojem iz stanja i možemo prijeći samo u stanja $i+1$ odnosno $i-1$, jednadžbe ravnoteže se svode na detaljnu ravnotežu.

3 Primjeri Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu

3.1 Poissonov proces

3.1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Jedan od najčešće korištenih modela u primjeni za tok diskretnih događaja u neprekidnom vremenu je upravo Poissonov proces. Označavamo ga s $(N_t, t \geq 0)$, gdje N_t predstavlja broj realizacija nekog događaja zaključno s trenutkom t.

Definicija 16. *Slučajni proces $(N_t,\ t \geq 0)$ se naziva Poissonov proces ako vrijedi sljedeće:*

a) $N_0 = 0$ *g.s.,*

b) proces ima nezavisne priraste, odnosno

$$N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

su nezavisne slučajne varijable za sve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$,

c) broj realizacija događaja u bilo kojem intervalu duljine t ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt, $\lambda > 0$, odnosno za $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

$$P(N_{t+s} - N_s = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Odavde slijedi da je $E[N_t] = \lambda t$ pa se λ naziva intenzitet procesa. Uočimo da Poissonov proces ima i stacionarne priraste prema $c)$ iz definicije Poissonovog procesa, odnosno:

$$N_t - N_s \overset{d}{=} N_{t+h} - N_{s+h}, \ \forall s, t \geq 0, s < t, \ \forall h > 0.$$

Osim toga, možemo definirati i vrijeme međudolazaka Poissonovog procesa u oznaci $(T_n,\ n \in \mathbb{N})$ gdje je T_n slučajna varijabla koja modelira vrijeme između $(n-1)$-ve i n-te realizacije događaja.

Teorem 3.1 ([4]). *Vremena međudolazaka Poissonovog procesa* $(T_n,\ n \in \mathbb{N})$ *su nezavisne jednako distribuirane eksponencijalne slučajne varijable s parametrom* λ.

Dokaz. Sljedeća dva događaja su ekvivalentna:

$$\{T_1 > t\} = \{N_t = 0\},$$

odnosno, ako je vrijeme prve realizacije događaja veće od t, to znači da je broj realizacija do trenutka t jednak 0. Prema tome vrijedi sljedeće:

$$P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Nadalje vrijedi:

$$\{T_2 > t \mid T_1 = s\} = \{N_{t+s} - N_s = 0 \mid T_1 = s\},$$

pa je

$$\begin{aligned} P(T_2 > t \mid T_1 = s) &= P(N_{s+t} - N_s = 0 \mid T_1 = s) = P(N_{s+t} - N_s = 0 \mid N_s = 1) \\ &= P(N_{s+t} - N_s = 0) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Funkcija gustoće slučajnog vektora (T_1, T_2) dana je s:

$$f_{(T_1,T_2)}(s,t) = f_{T_2|T_1}(t|s) f_{T_1}(s) = \lambda^2 e^{-\lambda(s+t)}$$

pa je funkcija distribucije od T_2:

$$f_{T_2}(t) = \int_0^\infty f_{(T_1,T_2)}(s,t)ds = \lambda e^{-\lambda t},$$

odakle slijedi da T_2 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ. Uočimo da vrijedi i:

$$f_{(T_1,T_2)}(s,t) = f_{T_1}(s) \cdot f_{T_2}(t),\ \forall\, s,t > 0,$$

odnosno slučajne varijable T_1 i T_2 su nezavisne. Analogno možemo napraviti i za ostale T_n, $n \geq 3$. □

Također nas zanima vrijeme čekanja do n-te realizacije događaja pa uvodimo dolazna vremena Poissonovog procesa $(S_n, n \in \mathbb{N})$ kao:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k.$$

Teorem 3.2 ([4]). *Dolazna vremena Poissonovog procesa* $(S_n,\ n \in \mathbb{N})$ *imaju gama distribuciju s parametrima* n *i* λ.

Dokaz. Za dolazna vremena i Poissonov proces vrijedi sljedeće:

$$\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$$

odnosno ako je vrijeme čekanja do n-te realizacije manje od t, to znači da se događaj realizirao barem n puta do trenutka t. Prema tome je

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P(N_t \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(N_t = k) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

za $t > 0$, a za $t \leq 0$ je $F_{S_n}(t) = 0$. Stoga funkcija gustoće ima oblik:

$$f_{S_n}(t) = 0 \text{ za } t \leq 0,$$

a za $t > 0$ slijedi:

$$\begin{aligned}
f_{S_n}(t) &= \frac{d}{dt} F_{S_n}(t) = \frac{d}{dt} P(S_n \leq t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \\
&= -\sum_{k=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= -\sum_{k=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= e^{-\lambda t} t^{n-1} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}.
\end{aligned}$$

Prema tome dolazna vremena imaju gama distribuciju s parametrima n i λ. □

Teorem 3.3 ([1]). *Neka su* $(X_t,\ t \geq 0)$ *i* $(Y_t,\ t \geq 0)$ *Poissonovi procesi s parametrima* $\lambda,\ \mu$ *redom te neka su procesi nezavisni. Proces* $(X_t + Y_t, t \geq 0)$ *je Poissonov proces s parametrom* $\lambda + \mu$.

Dokaz. Dokažimo redom zahtjeve iz definicije Poissonovog procesa:

a) Očito je $X_t + Y_t = 0 + 0 = 0$ g.s.

b) Trebamo pokazati da su

$$X_{t_n} + Y_{t_n} - (X_{t_{n-1}} + Y_{t_{n-1}}), \ldots, X_{t_1} + Y_{t_1} - (X_{t_0} + Y_{t_0})$$

nezavisne slučajne varijable, a to očigledno vrijedi jer su prirasti procesa X i procesa Y nezavisni te su procesi nezavisni.

c) Trebamo dokazati da je $X_{t+s} + Y_{t+s} - X_s - Y_s$ Poissonova slučajna varijabla. Izračunajmo:

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t+s} + Y_{t+s} - X_s - Y_s = k) = P(X_{t+s} - X_s + Y_{t+s} - Y_s = k) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X_{t+s} - X_s = i, Y_{t+s} - Y_s = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X_{t+s} - X_s = i) P(Y_{t+s} - Y_s = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{i=0}^{k} t^k \frac{\lambda^i}{i!} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \frac{k!}{k!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{t^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} = e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{t^k}{k!} (\lambda + \mu)^k
\end{aligned}
$$

gdje zadnju jednakost dobijemo iz binomne formule. Dakle, suma dva Poissonova procesa je Poissonov proces čiji je parametar suma parametara definiranih procesa.

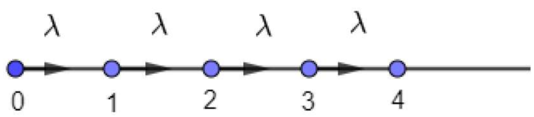
□

3.1.2 Poissonov proces u terminima Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu

Poissonov proces kao jedan od primjera Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu možemo definirati u terminima vremena skokova i vremena čekanja.

Definicija 17. *Poissonov proces* $(X_t,\ t \geq 0)$ *s parametrom* λ *je zdesna neprekidan proces s vrijednostima iz* $\mathbb{N}_0$*, gdje su vremena čekanja* $W_1, W_2, \ldots$ *nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom* λ*, a lanac skokova je dan izrazom* $Y_n = n$*.*

Njegov dijagram dan je sljedećom slikom:



Slika 4: Dijagram za Poissonov proces [2]

a Q-matrica je dana s:

$$
Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.
$$

Napomena 4 ([2]). *Uočimo da u Poissonovom procesu nikada neće doći do eksplozije jer vrijedi* $P(\lim_{n\to\infty} J_n = \infty) = 1$.

Konstruirajmo u nastavku Poissonov proces u analogiji s poglavljem 2.4. Neka je $(E_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jediničnih eksponencijalnih slučajnih varijabli. Obzirom da je u Poissonovom procesu $q(i) = \lambda$, za svaki i postavimo $W_n = \frac{E_n}{\lambda}$. Vrijedi sljedeće [5]:

$$P(W_n > t) = P\left(\frac{E_n}{\lambda} > t\right) = P(E_n > \lambda t) = e^{-\lambda t}$$

odnosno slučajne varijable W_n imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ. Osim toga, $J_0 = 0$ i $J_n = W_1 + \cdots + W_n$, $n \geq 1$. Slučajni proces X sada možemo zapisati kao:

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n I_{[J_n, J_{n+1}\rangle}(t).$$

Iskoristimo činjenicu da je $Y_n = n$ pa vrijedi:

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} n I_{[J_n, J_{n+1}\rangle}(t)$$

odnosno možemo pisati $X_t = n$ ako i samo ako $t \in [J_n, J_{n+1}\rangle$.

Napomena 5 ([5]). *Uočimo da za Poissonov proces vrijedi sljedeće:*

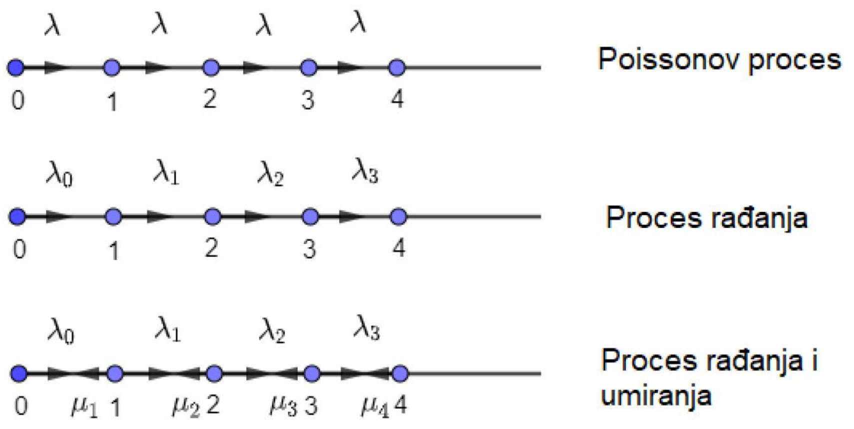
$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[0,t]}(J_n), t \geq 0,$$

gdje je $N_t = n$ *ako i samo ako je* $t \in [J_n, J_{n+1}\rangle$. *Ovako zadani procesi se nazivaju brojeći procesi (više u [4, poglavlje 5.3.1.]). Proces* $(N_t, t \geq 0)$ *definiran prethodnim izrazom broji koliko skokova* J_n *se dogodilo do trenutka* $t \geq 0$, *tj. kako je* $J_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$, *proces broji koliko se eksponencijalnih varijabli realiziralo na vremenskom intervalu* $[0, t]$.

Napomena 6. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *možemo primijetiti kako su dolazna i međudolazna vremena* T_n *i* S_n *iz definicije Poissonovog procesa redom* W_n *i* J_n *Markovljevog lanca u neprekidnom vremenu.*

3.2 Proces rađanja i umiranja

U Poissonovom procesu vrijeme čekanja bilo je eksponencijalno distribuirano s parametrom λ. Sada ćemo napraviti generalizaciju gdje će parametar λ ovisiti o stanju u kojemu se proces nalazi. Neka je X_t broj jedinki u sustavu u trenutku t. Ako u sustavu imamo n jedinki proces može preći samo u stanje $n+1$ ili $n-1$. Takav proces $(X_t,\ t \geq 0)$ se naziva **proces rađanja i umiranja**. Uzmimo n jedinki u nekom sustavu (npr. red čekanja u trgovini, broj ljudi u populaciji). Nove jedinke će dolaziti u sustav s eksponencijalnom stopom λ_n, a napuštaju sustav s eksponencijalnom stopom μ_n. Dakle, očekivano vrijeme čekanja do dolaska nove jedinke u sustav je $1/\lambda_n$, a očekivano vrijeme čekanja do odlaska je $1/\mu_n$. Ovako definiran proces $(X_t,\ t \geq 0)$ je Markovljev lanac u neprekidnom vremenu sa skupom stanja $S = \mathbb{N}_0$. Neka su dani nizovi $(B_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ i $(D_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli takvih da je $B_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$ i $D_n \sim \mathcal{E}(\mu_n)$. Parametri $\{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ i $\{\mu_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ se redom nazivaju stopa "rađanja" i stopa "umiranja". Ukoliko je $\mu_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, odnosno ukoliko u sustavu nema umiranja, proces nazivamo **proces rađanja**. Ako dodatno još stavimo da je $\lambda_n = \lambda$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, dobivamo Poissonov proces. Proces rađanja u kojemu je $\lambda_n = n\lambda$ naziva se **Yureov proces** ili proces s linearnom brzinom rađanja. Radi pojednostavljenja pogledajmo kako izgledaju dijagrami ovih procesa:



Slika 5: Dijagrami Poissonovog procesa, procesa rađanja te procesa rađanja i umiranja [2]

Definirajmo matricu jednokoračnih prijelaznih vjerojatnosti za proces rađanja i umiranja. Kako je proces definiran na $\mathbb{N}_0$, ukoliko se nalazi u stanju 0, proces može preći samo u stanje 1 pa je:

$$\pi_{01} = 1.$$

Za sve prijelazne vjerojatnosti gdje je korak veći od 1, odnosno, $|n - m| > 1$ vrijedi:

$$\pi_{nm} = 0.$$

Preostaje nam još odrediti vjerojatnosti π_{nn+1} i π_{nn-1}, tj. vjerojatnost da će u sustav doći nova jedinka ili da jedinka napusti sustav. Ako pogledamo prvo vjerojatnost $P(B_n > D_n)$, tj. vjerojatnost da će prije doći nova jedinka nego da jedinka napusti sustav dobivamo [5]:

$$\begin{aligned} P(B_n > D_n) &= \int_0^\infty \int_0^\infty I_{(x>y)} f_{(B_n,D_n)}(x,y)dxdy = \int_0^\infty \int_0^\infty I_{(x>y)} f_{B_n}(x) f_{D_n}(y)dxdy \\ &= \int_0^\infty \lambda_n e^{-\lambda_n x} \int_0^x \mu_n e^{-\mu_n y} dydx = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n}, \end{aligned}$$

gdje druga jednakost vrijedi zbog nezavisnosti slučajnih varijabli B_n i D_n. Iz vjerojatnosti suprotnog događaja dobivamo $P(B_n < D_n)$ pa imamo sljedeće vjerojatnosti:

$$\pi_{nn+1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n},\ \pi_{nn-1} = \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n}.$$

Na osnovu toga lanac skokova dan je s matricom jednokoračnih prijelaznih vjerojatnosti:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pored toga, možemo izračunati Q-matricu procesa rađanja i umiranja. Za to trebamo brzine napuštanja stanja n, tj. gledamo koliko je vremena potrebno da proces prijeđe ili u stanje $n+1$ ili u stanje $n-1$. To ćemo dobiti tako da izračunamo distribuciju minimuma od B_n i D_n. Obzirom da su ove varijable nezavisne vrijedi sljedeće, [3]:

$$\begin{aligned} P(min\{B_n, D_n\} > t) &= P(\{B_n > t\} \cap \{D_n > t\}) = P(B_n > t)P(D_n > t) = \\ &= e^{-\lambda_n t} e^{-\mu_n t} = e^{-(\lambda_n+\mu_n)t}. \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je vrijeme čekanja prvog skoka eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda_n + \mu_n$, tj. vrijedi:

$$P(min\{B_n, D_n\} \leq t) = 1 - e^{-(\lambda_n+\mu_n)t}. \tag{4}$$

Prema tome je $q : S \to \langle 0, \infty\rangle$ dan s:

$$q(n) = \begin{cases} \lambda_0, & \text{za } n = 0 \\ \lambda_n + \mu_n, & \text{za } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

a Q-matrica:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Distribucija vremena čekanja $(W_n, n \in \mathbb{N})$ procesa rađanja i umiranja gdje je $(Y_n, n \in \mathbb{N}_0)$ lanac skokova dana su s:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = i) = e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}$$

za $n \in \mathbb{N}$, $i \in S\backslash\{0\}$ i $t > 0$. Specijalno, kada je $Y_{n-1} = 0$ vrijedi:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = 0) = e^{-\lambda_0 t}$$

za $n \in \mathbb{N}$ i $t > 0$.
Ako je $Y_0 = i$ u procesu rađanja će vrijediti $Y_n = i + n$. Prema tome će distribucija vremena čekanja u procesu rađanja biti:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = i + n - 1) = e^{-\lambda_{i+n-1} t}$$

za $n \in \mathbb{N}$, $i \in S$ i $t > 0$.

Napomena 7 ([3]). *Ako bi uzeli proces rađanja u kojemu je $q_{ii+1} = 1$, onda imamo monoton Markovljev lanac u kojemu nema slučajnosti, odnosno tranzicija iz i u $i+1$ je sigurna. Prema tome, ne postoji razlika između vremena čekanja uvjetno na poznavanje posjećenih stanja i bezuvjetnih vremena čekanja. Prema Teoremu 2.6 vremena čekanja ovakvog procesa su međusobno nezavisne eksponencijalne slučajne varijable.*

Napomena 8 ([2]). *U (4) smo pokazali da je minimum dvije nezavisne eksponencijalne slučajne varijable ponovo eksponencijalna slučajna varijabla. Štoviše, to vrijedi i za niz $(E_n, n \in \mathbb{N})$ nezavisnih eksponencijalnih varijabli takvih da je $E_n \sim \mathcal{E}(q_n)$:*

$$P(\min_n E_n > t) = P(\cap_{n=1}^{\infty}\{E_n > t\}) = \prod_{n=1}^{\infty} P(E_n > t) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{-q_n t} = e^{-t\sum_{n=1}^{\infty} q_n}.$$

Obzirom da su vremena čekanja W_n uvjetno na poznavanje posjećenih stanja lanca eksponencijalne slučajne varijable, prethodna jednakost vrijedi na način da je najkraće vrijeme čekanja, od ukupno n skokova, eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom koji je jednak $\sum_{k=1}^{n} q_k$.

U sljedećem primjeru ćemo povezati proces rađanja i umiranja s Poissonovim procesom.

Primjer 5 ([2]). *Neka su dani $(B_n,\ n \in \mathbb{N})$ i $(D_n,\ n \in \mathbb{N})$ nizovi nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli takvih da je $B_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$ i $D_n \sim \mathcal{E}(\mu)$, tj. zadan je proces rađanja i umiranja. Neka je $R = (R_t,\ t \geq 0)$ proces koji broji koliko se osoba rodilo do trenutka t, a $S = (S_t,\ t \geq 0)$ proces koji broji koliko je ljudi umrlo do trenutka t. R i S su tada Poissonovi procesi s parametrima λ i μ. Osim toga, ako s X_t označimo ukupan broj osoba u sustavu i pretpostavimo da je $X_0 = 0$, $i \in \mathbb{N}_0$, vrijedi sljedeće:*

$$X_t = R_t - S_t$$

za $t \geq 0$. Također možemo računati da je od n promjena stanja lanca bilo ukupno k rađanja:

$$\begin{aligned} P(R_t = k \mid R_t + S_t = n) &= \frac{P(R_t = k, S_t = n-k)}{P(R_t + S_t = n)} = \frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right)\left(\frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!}\right)}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost vrijedi po Teoremu 3.3. Možemo uočiti da se radi o binomnoj distribuciji s parametrima n i $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Nadalje, za procese rađanja i umiranja možemo računati očekivano vrijeme čekanja do pogotka nekog stanja pomoću rekurzija pa imamo sljedeće teoreme:

Teorem 3.4 ([4]). *Neka je dan proces rađanja i umiranja sa stopama rađanja $(\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ i stopama umiranja $(\mu_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$, $\mu_0 = 0$, te neka je V_i vrijeme potrebno da proces prijeđe iz stanja i u stanje $i+1$, $i \geq 0$. Tada je*

$$E[V_i] = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}E[V_{i-1}].$$

Dokaz. Pretpostavimo da krećemo iz stanja $i = 0$. Kako je V_0 eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom λ_0 njeno očekivanje je:

$$E[V_0] = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Uvedimo identifikator izrazom:

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{ukoliko je tranzicija iz } i \text{ u } i+1, \\ 0, & \text{ukoliko je tranzicija iz } i \text{ u } i-1. \end{cases}$$

Uočimo da vrijedi:

$$E[V_i | I_i = 1] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}$$

jer je vrijeme do prve tranzicije (prvog skoka) eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda_i + \mu_i$. U slučaju da se prvo dogodio skok unazad vrijedi:

$$E[V_i | I_i = 0] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E[V_{i-1}] + E[V_i],$$

gdje su preostala dva člana očekivana vremena potrebna da se lanac iz stanja $i-1$ vrati u i te vrijeme potrebno da lanac iz stanja i prijeđe u $i+1$. Kako je

$$P(I_i = 0) = \pi_{ii-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

te

$$P(I_i = 1) = \pi_{ii+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

slijedi:

$$\begin{aligned} E[V_i] &= E[V_i | I_i = 0] \cdot P(I_i = 0) + E[V_i | I_i = 1] \cdot P(I_i = 1) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E[V_{i-1}] + E[V_i] \right) \cdot \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ &= \frac{\mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)^2} + \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + \mu_i)^2} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} (E[V_{i-1}] + E[V_i]) \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} (E[V_{i-1}] + E[V_i]) \end{aligned}$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo:

$$E[V_i] = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} E[V_{i-1}].$$

□

Ukoliko želimo dobiti očekivano vrijeme čekanja do prelaska iz stanja i u stanje j, $i < j$ u ovom slučaju trebamo sumirati $E[V_i] + E[V_{i+1}] + \cdots + E[V_{j-1}]$. U sljedećem teoremu ćemo izračunati očekivano vrijeme čekanja do prelaska iz stanja k u stanje j, ali za proces s konstantnim stopama umiranja i rađanja.

Teorem 3.5 ([4]). *Neka je dan proces rađanja i umiranja sa stopama rađanja $\lambda_n = \lambda$ i stopama umiranja $\mu_n = \mu$ te neka je V_{ij} vrijeme potrebno da proces dođe iz stanja i u stanje j, $i < j, i, j \in S$. Tada je*

$$E[V_{jk}] = \frac{1}{\lambda - \mu}\left(j - k - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k+1} \frac{1 - (\frac{\mu}{\lambda})^{j-k}}{1 - \frac{\mu}{\lambda}}\right).$$

Dokaz. Prema Teoremu 3.4 vrijedi sljedeće:

$$E[V_i] = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} E[V_{i-1}].$$

Izračunajmo rekurzivno $E[V_i]$:

$$\begin{aligned}
E[V_0] &= \frac{1}{\lambda} \\
E[V_1] &= \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) \\
E[V_2] &= \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right) \\
&\vdots \\
E[V_i] &= \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i\right) = \frac{1 - (\frac{\mu}{\lambda})^{i+1}}{\lambda - \mu}.
\end{aligned}$$

Sada možemo izračunati $E[V_{kj}]$:

$$E[V_{kj}] = \sum_{i=k}^{j-1} E[V_i] = \frac{j-k}{\lambda - \mu} - \sum_{i=k}^{j-1} \frac{(\frac{\mu}{\lambda})^{i+1}}{\lambda - \mu} = \frac{1}{\lambda - \mu}\left(j - k - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k+1} \frac{1 - (\frac{\mu}{\lambda})^{j-k}}{1 - \frac{\mu}{\lambda}}\right).$$

□

Za razliku od Poissonovog procesa, u procesu rađanja može doći do eksplozije, a kriterij za to dan je sljedećim teoremom:

Teorem 3.6 ([2]). *Neka je $(X_t,\ t \geq 0)$ proces rađanja, $X_0 = 0$ te neka su stope rađanja $(\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$. Vrijedi sljedeće:*

a) Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ onda je $P(\zeta < \infty) = 1$.

b) Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ onda je $P(\zeta = \infty) = 1$.

Dokaz slijedi iz Teorema 2.2.

U sljedećem primjeru izvest ćemo graničnu distribuciju za proces rađanja i umiranja, a osim toga ćemo dobiti dovoljan uvjet postojanja iste.

Primjer 6 ([4]). *Poznato nam je da u procesu rađanja i umiranja imamo sljedeće:*

$$\begin{aligned}
q_j &= \lambda_j + \mu_j, \ \ \textit{za } j > 0,\\
q_0 &= \lambda_0,\\
q_{kj} &= (\lambda_j + \mu_j)\pi_{kj},\\
\pi_{j,j+1} &= \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j},\\
\pi_{j,j-1} &= \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j}.
\end{aligned}$$

Sada koristeći jednadžbu ravnoteže dobivamo sustav:

$$\begin{aligned}
\lambda_0\eta_0 &= \mu_1\eta_0\\
(\lambda_1 + \mu_1)\eta_0 &= \mu_2\eta_0 + \lambda_0\eta_0\\
&\vdots\\
(\lambda_n + \mu_n)\eta_n &= \mu_{n+1}\eta_{n+1} + \lambda_{n-1}\eta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dodavajući svakoj sljedećoj jednadžbi prethodnu dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lambda_0\eta_0 &= \mu_1\eta_0\\
\lambda_1\eta_0 &= \mu_2\eta_0\\
&\vdots\\
\lambda_n\eta_n &= \mu_{n+1}\eta_{n+1},
\end{aligned}$$

što je ustvari detaljna ravnoteža te ako izrazimo sve preko η_0*:*

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1}\eta_0\\
\eta_0 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2}\eta_0 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\eta_0\\
&\vdots\\
\eta_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\eta_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_2\mu_1}\eta_0.
\end{aligned}$$

Koristeći svojstvo da je $\sum_n \eta_n = 1$ *dobivamo:*

$$\eta_0 + \eta_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_2\mu_1} = 1$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_2\mu_1}},\\
\eta_n &= \frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_2\mu_1(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\dots\mu_2\mu_1})}.
\end{aligned}$$

Iz ovih jednakosti možemo uočiti kako postoji uvjet za postojanje graničnih vjerojatnosti. Naime, suma mora biti konačna kako η_n ne bi bila 0. Odnosno imamo sljedeći uvjet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_2 \mu_1} < \infty,$$

a on će biti zadovoljen kada je $\lambda_n < \mu_n$ za svaki n jer u suprotnom je brzina rađanja veća i proces raste neograničeno pa granična distribucija ne postoji.

3.3 Redovi čekanja

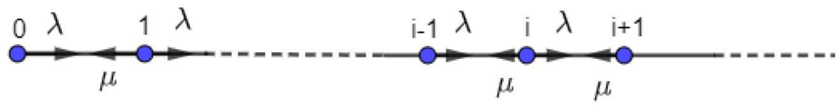
Redovi čekanja ili teorija redova je dio teorije slučajnih procesa koji izučava primjenu teorije na primjerima redova u trgovinama, telefonskim linijama i slično. Naime, imat ćemo sustav u kojemu se nalaze stranke (kupci) i poslužitelji. Vremena međudolazaka kupaca su nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable. Vremena posluživanja kupaca su također nezavisne i jednako distribuirane varijable nezavisne od vremena međudolazaka. Broj kupaca u sustavu u trenutku t označavamo s X_t, a cilj će nam biti konstruirati taj slučajni proces $(X_t,\ t \geq 0)$ i izračunati razna svojstva i numeričke vrijednosti u konkretnim modelima redova čekanja. Kada su vremena međudolazaka kupaca i vremena posluživanja eksponencijalne slučajne varijable, slučajni proces X će biti Markovljev lanac u neprekidnom vremenu. Redove označavamo $a/b/n$, gdje a predstavlja distribuciju međuvremena dolazaka, b označava distribuciju vremena čekanja u redu te n broj poslužitelja u sustavu, $n \in \mathbb{N}$. Oznaka M za a i b govori da zadovoljavaju Markovljevo svojstvo.

3.3.1 M/M/1 redovi čekanja

M/M/1 red čekanja jedan je od primjera procesa rađanja i umiranja gdje je $\lambda_n = \lambda$ i $\mu_n = \mu$. U ovom su redu međuvremena dolazaka eksponencijalne slučajne varijable s parametrom λ, a vremena čekanja do posluživanja također eksponencijalne slučajne varijable s parametrom μ. S druge strane, proces možemo definirati tako da je broj osoba koje dolaze u red Poissonov proces s parametrom λ, a broj posluženih klijenata također Poissonov proces s parametrom μ. Pretpostavit ćemo da je u trenutku $t \geq 0$ u sustavu i kupaca, odnosno $X_t = i,\ i \geq 1$. U skladu s oznakama iz poglavlja 3.2 označimo s D_n vrijeme čekanja do prvog posluživanja kupca, a s B_n vrijeme čekanja do dolaska novog kupca.
Pogledajmo prvo kako ćemo opisati vrijeme čekanja do prve promjene stanja lanca. Vrijeme čekanja do prvog skoka, odnosno prve promjene stanja lanca je upravo $\min\{B_n, D_n\}$, a minimum eksponencijalnih slučajnih varijabli je opet eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda + \mu$.
Zatim pogledajmo stope prelaska. Iz stanja i možemo prijeći samo u stanje $i+1$ (u slučaju $B_n > D_n$) ili $i-1$ (u slučaju $B_n < D_n$). Stope prelaska stanja su dane s:

$$q_{ii+1} = \lambda,\ i \geq 0$$
$$q_{ii-1} = \mu,\ i > 0.$$

Dijagram opisanog procesa i Q matrica su dani su s:



Slika 6: Dijagram za redove čekanja M/M/1 [2]

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Zatim pogledajmo jednokoračne prijelazne vjerojatnosti pripadnog lanca skokova:

$$\pi_{01} = 1,\ \pi_{ii+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \text{ i } \pi_{ii-1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \text{ za } i > 0.$$

Kako su stope prelaska q_{ij} konstantne i ne ovise o stanju u kojemu se nalaze, za distribucije vremena čekanja $(W_n, n \in \mathbb{N})$ vrijedi:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = i) = P(W_n > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}$$

za $n \in \mathbb{N}$, $i \in S\backslash\{0\}$ i $t > 0$. Specijalno, kada je $Y_{n-1} = 0$ vrijedi:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = 0) = e^{-\lambda t},\ n \in \mathbb{N},\ t > 0.$$

Nadalje, znamo da je broj dolazaka Poissonov proces s parametrom λ, pa možemo reći da će u intervalu duljine t očekivani broj klijenata koji su došli u red biti λt, a očekivani broj posluženih klijenata je μt. Prema tome, očekivani broj klijenata koji čekaju u redu u trenutku t je $\lambda t - \mu t = (\lambda - \mu)t$, [4].
Također moramo razmotriti odnos između λ i μ.
U slučaju kada je $\lambda > \mu$, $X_t \to \infty$, za $t \to \infty$ jer kupci brže dolaze nego što su posluženi pa je proces X prolazan, [2]. Obzirom da je prolazan ne postoji granična distribucija η, a to možemo vidjeti i u primjeru 6. Invarijantnu mjeru u ovom slučaju tražimo tako što želimo pronaći mjeru η koja je u detaljnoj ravnoteži s Q pa imamo sustav jednadžbi sljedećeg oblika:

$$\eta_i q_{ij} = \eta_j q_{ji}, \forall i, j \in S.$$

Prema Primjeru 6 za $\lambda_n = \lambda$ i $\mu_n = \mu$ dobivamo invarijantnu mjeru:

$$\eta_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \eta_0.$$

U slučaju kada je $\lambda < \mu$ postojat će granična distribucija, a kako zadovoljavamo pretpostavke Teorema 2.24 invarijantna distribucija je jednaka graničnoj pa možemo pisati:

$$\eta_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i,$$

a to je upravo pomaknuta geometrijska distribucija s parametrom $1 - \frac{\lambda}{\mu}$. Prema Teoremu 2.22 očekivano vrijeme čekanja da se proces vrati u 0, odnosno da se sustav isprazni, dano je s:

$$m_0 = \frac{1}{q_0 \eta_0} = \frac{\mu}{\lambda(\mu - \lambda)}.$$

Očekivano vrijeme boravka u stanju 0 je dano s [2]:

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{\lambda}.$$

Osim toga, pomoću prethodne dvije izračunate vrijednosti možemo računati očekivano vrijeme tokom kojeg je poslužitelj neprekidno zauzet (vrijeme da se sustav vrati u 0 - vrijeme koje je proveo u stanju 0), tj. očekivano vrijeme da sustav nije prazan kao:

$$m_0 - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Osim toga, uobičajeno je računati asimptotski srednji broj kupaca pa obzirom da je η_n granična vjerojatnost sustava koji sadrži n klijenata slijedi da je [4]:

$$E_\eta[X_t] = \sum_{n=0}^{\infty} n\eta_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},\ t \to \infty,$$

gdje zadnja jednakost vrijedi iz algebarskog izraza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Asimptotski srednje vrijeme koje kupac provede u redu možemo računati preko **Littleove** formule koja je dana s [1]:

očekivani broj osoba u sustavu =

stopa dolaska kupaca × očekivano vrijeme koje kupac provede u sustavu

pa je prema tome asimptotski srednje vrijeme koje kupac provede u redu dano s:

$$\frac{E_\eta[X_t]}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda},\ t \to \infty.$$

Više o Littleovoj formuli može se pronaći u [1, poglavlje 3.2.2.].

Kako je $\lambda_n = \lambda$ i $\mu_n = \mu$ možemo koristiti i rezultate Teorema 3.5, tj. ako s V_i označimo vrijeme čekanja do prelaska iz stanja i u stanje $i+1$, a V_{kj} vrijeme čekanja do prelaska iz stanja k u stanje j vrijedi:

$$E[V_i] = \frac{1-(\frac{\mu}{\lambda})^{i+1}}{\lambda-\mu}$$
$$E[V_{kj}] = \frac{1}{\lambda-\mu}\Bigg(j-k-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{k+1}\frac{1-(\frac{\mu}{\lambda})^{j-k}}{1-\frac{\mu}{\lambda}}\Bigg).$$

Prema primjeru 5 možemo gledati koliko je dolazaka kupaca bilo u ukupnom broju promjena stanja:

$$P(R_t = k | R_t + S_t = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

Primjer 7. *Pretpostavimo da se nalazimo u trgovačkom centru i promatramo red na blagajni. Blagajnik poslužuje kupce brzinom 1 kupac po minuti, a kupci dolaze svakih 1 minutu i 15 sekundi. Pretpostavimo da se red čekanja dolazaka i posluživanja kupaca može modelirati procesom rađanja i umiranja gdje je $\lambda = \frac{4}{5}$, a $\mu = 1$. Koristeći prethodni primjer izračunajmo numeričke karakteristike modela opisane u poglavlju. Možemo odmah uočiti da je $\lambda < \mu$. Q matrica je dana s:*

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

a jednokoračne prijelazne vjerojatnosti:

$$\pi_{ii+1} = \frac{4}{9},$$
$$\pi_{ii-1} = \frac{5}{9},$$
$$\pi_{01} = 1.$$

Distribucije vremena čekanja $(W_n, n \in \mathbb{N})$ dane su kao:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = i) = P(W_n > t) = e^{-\frac{9}{5}t}$$

za $n \in \mathbb{N}$, $i \in S\backslash\{0\}$ i $t > 0$. Specijalno za $Y_{n-1} = 0$ vrijedi:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = 0) = e^{-\frac{4}{5}t}$$

za $n \in \mathbb{N}$ i $t > 0$.
Očekivan broj osoba koje su došle na blagajnu do trenutka t je $\frac{4}{5}t$, a očekivan broj osoba koje su poslužene je t. Očekivano vrijeme da je blagajna prazna je:

$$\frac{1}{q_0} = \frac{5}{4}, \text{ tj. 1 minuta i 15 sekundi,}$$

a očekivano vrijeme potrebno da se blagajna isprazni:

$$m_0 = \frac{25}{4}, \text{ tj. 6 minuta i 15 sekundi.}$$

Očekivano vrijeme tokom kojeg je poslužitelj neprekidno zauzet je:

$$m_0 - \frac{1}{q_0} = 5, \text{ tj. } 5 \text{ minuta.}$$

Granična distribucija dana je s:

$$\eta_i = \left(1 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^i.$$

Asimptotski srednji broj kupaca je:

$$E_\eta[X_t] = 4, \ t \to \infty$$

te asimptotski srednje vrijeme koje kupac provede u redu:

$$\frac{E_\eta[X_t]}{\lambda} = 5, \ t \to \infty.$$

Jednadžbe za računanje V_i i V_{kj} su dane s

$$E[V_i] = \frac{1 - (\frac{5}{4})^{i+1}}{-\frac{1}{5}}$$
$$E[V_{kj}] = \frac{1}{-\frac{1}{5}}\left(j - k - \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1} \frac{1 - (\frac{5}{4})^{j-k}}{1 - \frac{5}{4}}\right)$$

pa izračunajmo očekivano vrijeme čekanja da proces dođe iz stanja 0 u stanje 10:

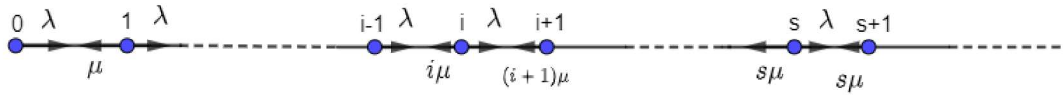
$$E[V_{0,10}] = 157.8306, \text{ tj. } 2 \text{ sata i } 37 \text{ minuta.}$$

Možemo izračunati vjerojatnost da je od ukupno 20 promjena stanja u redu, 10 bilo dolazak kupca

$$P(R_t = k | R_t + S_t = n) = \binom{20}{10}\left(\frac{\frac{4}{5}}{\frac{9}{5}}\right)^{10}\left(\frac{1}{\frac{9}{5}}\right)^{10} = 0.1556$$

3.3.2 M/M/s redovi čekanja

Slično kao u prethodnom poglavlju imamo red klijenata i poslužitelja pri čemu je sada broj poslužitelja veći od 1. Pretpostavljamo da je vrijeme čekanja do dolazaka klijenata eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom λ, a vremena čekanja do posluživanja eksponencijalne slučajne varijable s parametrom μ. Vrijeme čekanja do oslobađanja prvog poslužitelja je onda minimum (od broja zauzetih poslužitelja, a pretpostavimo da je ono $i < s$) eksponencijalnih slučajnih varijabli pa je to ponovno eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $i\mu$. Maksimalna stopa posluživanja je kada su svi poslužitelji zauzeti i iznosi $s\mu$. Ponovno imamo proces rađanja i umiranja sa sljedećim dijagramom:



Slika 7: Dijagram za redove čekanja M/M/s [2]

Elementi Q-matrice dani su izrazom:

$$q_{ii+1} = \lambda, \forall i \geq 0$$
$$q_{ii-1} = \begin{cases} i\mu, & \text{za } 1 \leq i \leq s \\ s\mu, & \text{za } i > s, \end{cases}$$

a Q matrica:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Osim toga prijelazne vjerojatnosti možemo izraziti kao:

$$\pi_{01} = 1,\ \pi_{ii+1} = \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \text{ i } \pi_{ii-1} = \frac{i\mu}{\lambda + i\mu},\ \text{za } i > 0.$$

Ovdje stope prelaska q_{ij} nisu konstantne te su distribucije vremena čekanja $(W_n, n \in \mathbb{N})$ dane s:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = i) = \begin{cases} e^{-(\lambda+i\mu)t}, & \text{za } 1 \leq i \leq s \\ e^{-(\lambda+s\mu)t}, & \text{za } i > s. \end{cases}$$

za $n \in \mathbb{N}$ i $t > 0$. U slučaju kada je $Y_{n-1} = 0$ vrijedi:

$$P(W_n > t \,|\, Y_{n-1} = 0) = e^{-\lambda t}$$

za $n \in \mathbb{N}$ i $t > 0$.
Postojanje invarijantne distribucije ponovno ovisi o odnosu parametara.
U slučaju kada je $\lambda > s\mu$, brže klijenti dolaze nego što bivaju posluženi pa je proces prolazan, [5]. U slučaju $\lambda < s\mu$ vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_2 \mu_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\dots(s\mu)(s\mu)^{n-s}} < \infty$$

pa postoji granična distribucija a prema Teoremu 2.24 granična distribucija i invarijantna su jednake. Invarijantnu distribuciju dobivamo iz detaljne ravnoteže:

$$\eta_i q_{ii+1} = \eta_{i+1} q_{i+1,i}.$$

U slučaju $\lambda > s\mu$ invarijantna mjera lanca dana je s [5]

$$\eta_i = \begin{cases} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i}\eta_0, & \text{za } 0 \le i \le s \\ \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i}\eta_0, & \text{za } i > s. \end{cases}$$

Kada je $\lambda < s\mu$ postoji granična distribucija, jednaka je invarijantnoj te imamo izraz:

$$\frac{\eta_i}{\eta_0} = \begin{cases} \frac{1}{i!}(\frac{\lambda}{\mu})^i, & \text{za } 0 \le i \le s \\ \frac{1}{s!s^{i-s}}(\frac{\lambda}{\mu})^i, & \text{za } i > s, \end{cases}$$

gdje se η_0 dobije iz jednadžbe $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i = 1$ kao:

$$\eta_0 = \left(\sum_{i=0}^{s} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} \right)^{-1}$$

Pogledajmo kako izgleda granična distribucija u slučaju kada je $s = \infty$, [2]. Obzirom da je:

$$\eta_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} \right)^{-1} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

granična distribucija ima oblik:

$$\eta_i = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!},$$

što je Poissonova distribucija s parametrom $\frac{\lambda}{\mu}$. Osim toga, možemo primijeniti Teorem 3.4 gdje je:

$$E[V_i] = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}E[V_{i-1}] = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} + \frac{i\mu}{\lambda}E[V_{i-1}], & \text{za } 0 \le i \le s \\ \frac{1}{\lambda} + \frac{s\mu}{\lambda}E[V_{i-1}], & \text{za } i > s \end{cases}$$

što rješavamo rekurzivno.

Primjer 8. *Nalazimo se u trgovačkom centru i promatramo red na blagajni, ali ovaj put s 3 blagajnika. Svaki blagajnik poslužuje 1 kupca u minuti, a kupci dolaze svakih pola minute. Sada je $\lambda = 2$, a $\mu = 1$ pa imamo $\lambda < 3\mu$ te je stoga lanac povratan. Lancu pripada sljedeća Q matrica:*

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -4 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

i jednokoračne prijelazne vjerojatnosti:

$$\pi_{ii+1} = \frac{2}{2+i},$$
$$\pi_{ii-1} = \frac{i}{2+i}.$$

Distribucija vremena čekanja $(W_n, n \in \mathbb{N})$ *je ovdje:*

$$P(W_n > t \mid Y_{n-1} = i) = \begin{cases} e^{-(2+i)t}, & za\ 1 \leq i \leq 3 \\ e^{-5t}, & za\ i > 3. \end{cases}$$

za $n \in \mathbb{N}$ *i* $t > 0$. *U slučaju kada je* $Y_{n-1} = 0$ *vrijedi:*

$$P(W_n > t \mid Y_{n-1} = 0) = e^{-2t}$$

za $n \in \mathbb{N}$ *i* $t > 0$.
η_0 *je dobivena:*

$$\eta_0 = \left(\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} 2^i + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{6 \cdot 3^{i-3}} 2^i \right)^{-1} = \frac{1}{9}$$

Invarijantna distribucija dana je s:

$$\eta_i = \begin{cases} \frac{1}{9i!} 2^i, & za\ 0 \leq i \leq 3 \\ \frac{1}{54 \cdot 3^{i-3}} 2^i, & za\ i > 3. \end{cases}$$

Izračunajmo nekoliko vremena V_i *za ovaj primjer:*

$$\begin{aligned} E[V_0] &= \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \\ E[V_1] &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[T_0] = \frac{3}{4} \\ E[V_2] &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} E[T_1] = \frac{5}{4} \\ E[V_3] &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} E[T_2] = \frac{19}{8} \\ E[V_4] &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} E[T_3] = \frac{65}{16} \end{aligned}$$

odnosno $E[V_4]$ *možemo interpretirati tako da je očekivano vrijeme čekanja da se red poveća s 4 kupca na 5 kupaca približno jednaka 4 minute.*

3.4 Linearni model rasta s imigracijom

Linearni model rasta s imigracijom (izvor: [4]) je još jedan od primjera procesa rađanja i umiranja. Označimo s X_t broj jedinki u sustavu u trenutku t. U ovom procesu svaka jedinka se rađa eksponencijalno brzo s brzinom λ, a za populaciju od n jedinki imamo brzinu rađanja $n\lambda$ ukoliko je $X_t = n$. Osim toga, postoji mogućnost imigracije (dolaska novih jedinki u sustav seobom), a imigracija će biti eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom θ. Prema tome je stopa rađanja procesa $\lambda_n = n\lambda + \theta$. Svaka jedinka umire eksponencijalno brzo sa stopom μ pa je ukupna stopa umiranja u procesu od n jedinki $n\mu$. Dakle, u ovom procesu su elementi Q-matrice dani s:

$$\begin{aligned} q_{nn+1} &= n\lambda + \theta \\ q_{nn-1} &= n\mu. \end{aligned}$$

Pogledajmo kako izgledaju distribucije vremena čekanja $(W_n, n \in \mathbb{N})$. Za $n \in \mathbb{N}$, $i \in S\backslash\{0\}$ i $t > 0$ vrijedi:

$$P(W_n > t \mid Y_{n-1} = i) = e^{-(\theta + i(\lambda+\mu))t},$$

a specijalno za $Y_{n-1} = 0$ je:

$$P(W_n > t \mid Y_{n-1} = 0) = e^{-\theta t}$$

za $n \in \mathbb{N}$ i $t > 0$.

Odredimo jednadžbu za očekivani broj osoba u sustavu odnosno $M(t) = E[X_t]$. Za $h > 0$, može se dogoditi jedno od sljedećeg:

- $X_{t+h} = X_t + 1$, odnosno populacija je dobila novu jedinku u h vremena;
- $X_{t+h} = X_t - 1$, odnosno populacija je izgubila jedinku u h vremena;
- $X_{t+h} = X_t$, tj. nema promjena.

Vjerojatnosti realizacija ovih događaja izveli smo u dokazu Teorema 2.9, odnosno dobili smo da je

$$P_{ij}(h) = hq(i)\pi_{ij} + o(h) = hq_{ij} + o(h).$$

U linearnom modelu rasta je $j \in \{i+1, i, i-1\}$ pa dobivamo sljedeće:

- $X_{t+h} = X_t + 1$ s vjerojatnošću $(\theta + \lambda X_t)h + o(h)$;
- $X_{t+h} = X_t - 1$ s vjerojatnošću $\mu X_t h + o(h)$;
- $X_{t+h} = X_t$ s vjerojatnošću $1 - (\mu X_t + \theta + \lambda X_t)h + o(h)$.

Izračunajmo:

$$\begin{aligned}
E[X_{t+h}|X_t = i] &= (i+1)P(X_{t+h} = i+1|X_t = i) + iP(X_{t+h} = i|X_t = i) \\
&+ (i-1)P(X_{t+h} = i-1|X_t = i) \\
&= (i+1)\big((\theta + \lambda i)h + o(h)\big) + i\big(1 - (\mu i + \theta + \lambda i)h + o(h)\big) \\
&+ (i-1)\big(\mu i h + o(h)\big) \\
&= i + [\theta + i\lambda - i\mu]h + o(h)
\end{aligned}$$

Prema tome je

$$E[X_{t+h}|X_t] = X_t + [\theta + X_t\lambda - X_t\mu]h + o(h).$$

Sada koristeći Teorem o dvostrukom očekivanju:

$$M(t+h) = E[X_{t+h}] = E[E[X_{t+h}|X_t]],$$

pa je

$$M(t+h) = M(t) + (\lambda - \mu)M(t)h + \theta h + o(h).$$

Ako jednadžbu podijelimo s h, a zatim h pustimo u 0 dobivamo:

$$M'(t) = (\lambda - \mu)M(t) + \theta$$

što je linearna diferencijalna jednadžba. Uz pretpostavku $X_0 = i$, odnosno $M(0) = i$ rješenje linearne diferencijalne jednadžbe je:

$$M(t) = \frac{\theta}{\lambda - \mu}[e^{(\lambda-\mu)t} - 1] + ie^{(\lambda-\mu)t}.$$

3.5 Model infekcije

Promotrimo kako se infekcija širi u populaciji od N jedinki pri čemu osoba kada postane zaražena, ostaje do kraja u tom stanju. Neka je kontakt dviju jedinki u populaciji dan Poissonovim procesom s parametrom λ, a kada dođe do kontakta uključuje dvije nasumične odabrane osobe odnosno imamo $\binom{N}{2}$ parova u cijeloj populaciji. Ukoliko u kontaktu budu zaražena i nezaražena osoba, vjerojatnost da dođe do infekcije nezaražene osobe je p. S X_t označavamo broj zaraženih osoba u trenutku t i to je upravo Markovljev lanac u neprekidnom vremenu. To možemo lako zaključiti jer zadovoljava Markovljevo svojstvo (broj osoba koji će se zaraziti u neposrednoj budućnosti ovisi samo o sadašnjosti). Obzirom da u ovom modelu osoba ostaje zaražena, imamo model rađanja. Sada ćemo probati izračunati koliko je vremena potrebno da se cijela populacija zarazi ako pretpostavimo da je $X_t = n$. Obzirom da je broj zaraženih osoba n, broj nezaraženih osoba je $N-n$. Kada dođe do kontakta postoji nekoliko opcija:

- odabrali smo dvije nezaražene osobe s vjerojatnošću $\frac{N-n}{N}\frac{N-n-1}{N-1}$,
- odabrali smo dvije zaražene osobe s vjerojatnošću $\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}$,
- odabrali smo jednu zaraženu i jednu nezaraženu osobu s vjerojatnošću $2\frac{n}{N}\frac{N-n}{N-1}$.

Izračunajmo prijelazne vjerojatnosti. X_t će se povećati u slučaju kada smo odabrali jednu zaraženu osobu i jednu nezaraženu osobu s time da je vjerojatnost zaraze p pa je prema tome:

$$\pi_{nn+1} = 2\frac{n}{N}\frac{N-n}{N-1}p.$$

U svim preostalim slučajevima broj zaraženih osoba ostaje isti (pri čemu se mogao dogoditi kontakt zaražene i nezaražene ali da nije došlo infekcije) pa je:

$$\pi_{nn} = \frac{(N-n)(N-n-1) + n(n-1)}{N(N-1)} + 2\frac{n}{N}\frac{N-n}{N-1}(1-p).$$

Stopa rađanja je onda jednaka umnošku stope kontakta λ i vjerojatnosti da je došlo do kontakta zaražene i nezaražene osobe te da ona postane zaražena:

$$\lambda_n = 2\lambda\frac{n(N-n)}{N(N-1)}p, n = 0, \ldots N-1.$$

Prema tome je distribucija vremena skokova (vremena do sljedeće zaraze) ovako zadanog procesa dana s:

$$P(W_n > t \mid Y_{n-1} = i) = e^{-2\lambda \frac{i(N-i)}{N(N-1)} pt}$$

za $n \in \mathbb{N}$, $i \in S$ i $t > 0$. Kako je očekivano vrijeme čekanja da lanac napusti stanje i jednako $1/\lambda_i$, očekivano vrijeme čekanja da lanac koji kreće iz stanja 1 dođe u stanje N je:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{N(N-1)}{2p\lambda} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(N-n)}.$$

Literatura

[1] R. Durret, *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, 3rd edition, 2016.

[2] J. R. Norris, *Markov chains*, Cambridge University Press, 1998.

[3] S. Resnick, *Adventures in Stohastic Processes*, Birkhäuser, 1992.

[4] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Elsevier, 10th edition, 2010.

[5] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2010.

Sažetak

U ovom radu upoznajemo se s Markovljevim lancima u neprekidnom vremenu, pripadnim vremenima skokova i vremenima čekanja. Osim toga, radimo konstrukciju Markovljevog lanca, definiramo pripadne prijelazne vjerojatnosti i generatorsku matricu. Zatim iskazujemo jednadžbe unatrag i unaprijed. Na kraju drugog poglavlja radimo klasifikaciju stanja lanca, definiramo invarijantnu i graničnu distribuciju te ih povezujemo teoremom. Nakon toga, prezentiramo primjere Markovljevih lanaca u neprekidnom vremenu. Detaljnije se bavimo procesom rađanja i umiranja te Poissonovim procesom. Naposljetku ilustriramo teoriju na nekoliko modela redova čekanja, model infekcije te model rasta s imigracijom.

Ključne riječi

Markovljev lanac u neprekidnom vremenu, vremena skokova, vremena čekanja, prijelazne vjerojatnosti, generatorska matrica, jednadžba unaprijed i unatrag, invarijantna distribucija, granična distribucija, proces rađanja i umiranja, Poissonov proces, redovi čekanja

Continuous-time Markov chains and waiting times

Abstract

In this paper we introduce continuous-time Markov chains, the corresponding jumping and waiting times. Moreover, we construct the Markov chain, introduce transient probabilities and the generator matrix. Next, we state the backward and forward equation. At the end of section two, we go through the classification of states of the chain, define the invariant and stationary distribution, and connect them by a theorem. Finally, we present some examples of continuous-time Markov chains. We thoroughly go into birth and death process and Poisson process. Lastly, we illustrate the theory in modeling queues, infection model and immigration growth model.

Key words

continuous-time Markov chain, jumping times, waiting times, transition probabilities, generator matrix, forward and backward equation, stationary distribution, limiting distribution, birth and death process, Poisson process, queues

Životopis

Rođena sam 13. veljače 1997. godine u Vinkovcima. Pohađala sam osnovnu školu "Antun Gustav Matoš" te nakon toga upisala prirodoslovno-matematičku gimnaziju "Matije Antuna Reljkovića" u Vinkovcima. Integrirani nastavnički studij matematike i informatike upisujem 2015. godine, ali se 2018. godine prebacujem na preddiplomski studij Matematike. 2019. godine završavam preddiplomski studij s temom završnog rada "Normalna slučajna varijabla" pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Dragane Jankov Maširević. Diplomski studij Financijska matematika i Statistika upisujem 2019. godine, a stručnu praksu sam radila 2020. u Žito d.o.o.