

# Krivulje konstantnog nagiba

---

**Marković, Barbara**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:737934>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-24**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Barbara Marković

## **Krivulje konstantnog nagiba**

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Barbara Marković

## **Krivulje konstantnog nagiba**

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2022.

## Sažetak

U radu je razmatran pojam krivulje konstantnog nagiba, tj. krivulje čiji tangencijalni vektor zatvara konstantan kut s jediničnim fiksnim vektorom. Takve krivulje leže na cilindričnoj plohi i s izvodnicama plohe zatvaraju konstantan kut, te kažemo da su one izogonalne trajektorije izvodnica cilindrične plohe. Dana je karakterizacija takvih krivulja te su promatrana njihova geometrijska svojstva. Navedeni su i osnovni pojmovi iz lokalne teorije krivulja poput Frenetovog trobrida i zakrivljenosti, odnosno torzije krivulje, potrebni za razumijevanje ovog rada.

### **Ključne riječi:**

krivulja, zakrivljenost, torzija, konstantan nagib, opća cilindrična spirala

## Abstract

In this work, we consider curves of constant slope, i.e. curves whose tangent vector makes a constant angle with a fixed unit vector. Such curves lay on a cylindrical surface and make constant angle with rulings of the surface, so we called them the isogonal trajectories of a cylindrical surface. Their characterization and some geometric properties are introduced in the work. The basic concepts in local theory of curves, such as Frenet frame, curvature and torsion of a curve, needed for comprehension of this work are also presented.

**Key words:** curve, curvature, torsion, constant slope, generalized helix

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja</b>	<b>2</b>
2.1	Pojam krivulje . . . . .	2
2.2	Tangencijalni vektor i parametar duljine luka krivulje . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Fundamentalni teorem za krivulje</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Krivulje konstantnog nagiba</b>	<b>9</b>
	<b>Literatura</b>	<b>16</b>

# 1 Uvod

Počeci diferencijalne geometrije potječu još iz 18. stoljeća. Diferencijalna geometrija se bavi proučavanjem geometrijskih svojstava elemenata prostora u kojemu se primjenjuju metode iz diferencijalnog računa. U uskoj je vezi s matematičkom analizom, koja se značajno razvila upravo iz problema u geometriji.

Članak *Une application d'analyse à la géométrie*, objavljen 1795. godine, čiji je autor francuski matematičar Gaspard Monge (1746.-1818.), smatra se prvim djelom objavljenim u ovoj grani matematike, te stoga Gasparda Mongea smatramo začetnikom diferencijalne geometrije. Osim njega razvoju diferencijalne geometrije u značajnoj mjeri su doprinijeli švicarski matematičar i fizičar Leonhard Euler (1707.-1783.) te njemački matematičar i astronom Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.). U svom radu iz 1827. godine, *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, Gauss je koristio parametarsko zadavanje ploha, predstavio dvije osnovne kvadratne forme pomoću kojih vršimo mjerenja na plohi, sferno preslikavanje te definirao zakrivljenosti u točki plohe. Također, u istom tom djelu dokazao je da je zakrivljenost plohe invarijantna pri lokalnoj izometriji, a ta ga je tvrdnja toliko oduševila da ju je nazvao *Veličanstveni teorem*, lat. *Theorema Egregium*. Taj rad se smatra temeljem moderne teorije ploha. Danas diferencijalna geometrija ima vrlo široku primjenu, izrazito u fizici, s naglaskom na kinematiku, odnosno na teoriju relativnosti.

U ovom završnom radu pobliže ćemo se upoznati sa samom teorijom krivulja i osnovnim pojmovima vezanim uz krivulje. U drugom poglavlju dan je pregled osnovnih definicija i teorema iz lokalne teorije krivulja. Fundamentalni teorem krivulja obrađen je u trećem poglavlju, dok je tema četvrtog poglavlja upravo tema završnog rada, tj. krivulje konstantnog nagiba.

## 2 Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja

U ovom poglavlju bavit ćemo se osnovnim definicijama i teoremima iz lokalne teorije krivulja. Najprije ćemo definirati krivulju na način kako se ona definira u diferencijalnoj geometriji, definirati parametar duljine luka i pokazati da se svaka krivulja može zadati takvim parametrom.

### 2.1 Pojam krivulje

Za početak, krenimo od samog pojma krivulje i nekih osnovnih primjera koje smo do sada puno puta susreli u dosadašnjem obrazovanju. Nastavno na pojam krivulje, definirat ćemo i pojam nivo-krivulje i navesti nekoliko primjera. Definicije i primjeri su preuzeti iz [3].

**Definicija 2.1.** *Neka je  $I = \langle a, b \rangle$  interval realnih brojeva. Glatko preslikavanje  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazivamo parametriziranom krivuljom u  $\mathbb{R}^n$ . Ako za parametriziranu krivulju vrijedi da je  $\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) \neq 0$ , za sve  $t \in I$ , onda za nju kažemo da je regularna.*

**Napomena 2.2.** *Iako se većina definicija odnosi na prostor  $\mathbb{R}^n$ , mi ćemo se u radu baviti isključivo krivuljama u  $\mathbb{R}^3$  i takve ćemo krivulje zapisati kao  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , a njihove derivacije  $\frac{d\alpha}{dt}(t) = \dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ ,  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$ , itd.*

Navest ćemo nekoliko primjera parametriziranih krivulja s kojima smo se do sada već susretali.

**Primjer 2.1.** *Primjeri krivulja:*

1. *pravac u  $\mathbb{R}^n$ :  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , možemo zadati standardnom parametrizacijom  $\alpha(t) = a + tb$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , gdje je  $a$  točka kojom pravac prolazi, a  $b$  vektor smjera,  $I \subset \mathbb{R}$ ,*
2. *kružnica:  $\alpha : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  sa središtem u točki  $(p, q)$  i polumjerom  $r$ ,  $\alpha(t) = (p+r \cos t, q+r \sin t)$ , (uočimo da kružnici nedostaje točka  $(p+r, q)$ , jer prema definiciji krivulje domena funkcije  $\alpha$  mora biti otvoren skup),*
3. *elipsa:  $\alpha : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$*
4. *hiperbola:  $\alpha : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$*
5. *parabola:  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (t, t^2)$*

Vidimo da je u diferencijalnoj geometriji zastupljen malo drugačiji pristup definiranju krivulja od onog s kojim smo se do sad susretali, tj. definiranju krivulja kao skupa točaka koje zadovoljavaju određeni uvjet. Na takav način definirane krivulje nazivamo nivo-krivuljama.

**Definicija 2.3.** *Nivo-krivulja u  $\mathbb{R}^2$  je skup točaka  $\mathcal{S}$  definiran kao  $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = a, a \in \mathbb{R}\}$ .*

**Primjer 2.2.** *Najpoznatiji primjeri nivo-krivulja u  $\mathbb{R}^2$  su kvadrike:*

1. *jedinična kružnica:  $x^2 + y^2 = 1$ ,*
2. *elipsa:  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ ,*

3. hiperbola:  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ ,

4. parabola:  $y^2 = 2px$ .

Poznato je da se svaka nivo krivulja može (po dijelovima) parametrizirati što slijedi prema sljedećem teoremu,[3].

**Teorem 2.4.** *Neka je funkcija  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  glatka i  $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = a, a \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$ . Neka  $\frac{\partial h}{\partial x}$  i  $\frac{\partial h}{\partial y}$  nisu istovremeno 0 u točkama skupa  $\mathcal{S}$  i neka je  $P \in \mathcal{S}$ . Tada postoji otvoreni interval  $I \subset \mathbb{R}$  oko 0 i regularna krivulja  $\alpha$  definirana na  $I$  takva da je  $\alpha(0) = P$  i  $\alpha(I) \subset \mathcal{S}$ .*

Dokaz teorema se može pogledati u [3]. Nadalje, prikaz skupa točaka preko parametrizacije, odnosno kao parametrizirane krivulje nije jedinstven, odnosno isti skup točaka možemo prikazati različitim parametrizacijama.

**Definicija 2.5.** *Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizirana krivulja, te neka je  $J \subset \mathbb{R}, J \neq I$  i  $\varphi : J \rightarrow I$  glatki difeomorfizam. Parametriziranu krivulju  $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazivamo reparametrizacijom od  $\alpha$ .*

## 2.2 Tangencijalni vektor i parametar duljine luka krivulje

U nastavku ćemo dati definiciju tangencijalnog vektora krivulje, te definiciju specijalnog parametra, tzv. parametra duljine luka krivulje. Pokazat ćemo da se svaka regularna krivulja može zadati s takvim parametrom. Definicije i teoremi su preuzeti iz [3].

**Definicija 2.6.** *Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna krivulja. Vektor  $\dot{\alpha}(t)$  se naziva tangencijalnim vektorom krivulje  $\alpha$  u točki  $\alpha(t)$ . Pravac kojemu je  $\dot{\alpha}(t)$  vektor smjera i koji prolazi točkom  $\alpha(t)$  nazivamo tangentom krivulje  $\alpha$  u točki  $\alpha(t)$ .*

*Za krivulju  $\alpha$  kažemo da je parametrizirana duljinom luka ako je  $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1, t \in I$ .*

**Definicija 2.7.** *Funkcija duljine luka krivulje  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  od točke  $\alpha(t_0)$  definirana je kao*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(u)\| du, t_0 \in I.$$

*Specijalno, duljina luka (cijele) krivulje  $\alpha : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  je realan broj*

$$s = \int_a^b \|\dot{\alpha}(u)\| du.$$

*Ako je  $\alpha : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  krivulja parametrizirana parametrom duljine luka, tj.  $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$ , tada je očito duljina luka krivulje  $\alpha$  jednaka duljini intervala  $I$ .*

Kako smo ranije naveli, parametrizacija krivulje nije jedinstvena. Specijalno vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.8.** *Svaka regularna krivulja dozvoljava reparametrizaciju parametrom duljine luka.*



*Dokaz.* Neka je dana krivulja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , i  $s$  funkcija duljine luka od  $\alpha$ . Kako je  $\frac{ds(t)}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\| > 0$ , slijedi da je  $s$  strogo rastuća funkcija. Može se pokazati da je funkcija  $s$  glatka. Njezina druga derivacija jednaka je  $\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{\dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}\|}$ . Kako je funkcija  $s$  glatka i strogo rastuća, ona je bijekcija. Neka je  $t = t(s)$  njezina inverzna funkcija. Definiramo li  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$  vrijedi

$$\|\tilde{\alpha}'(s)\| = \|\dot{\alpha}(t(s)) \cdot t'(s)\| = \|\dot{\alpha}(t)\| \cdot \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} = 1.$$

□

Kako bismo razlikovali je li krivulja zadana parametrom duljine luka ili općim parametrom, za derivaciju krivulje po općem parametru koristit ćemo oznaku  $\dot{c}$ , a po parametru duljine luka oznaku  $c'$ .

U nastavku ćemo navesti primjere reparametrizacije krivulja duljinom luka.

**Primjer 2.3.** *Odredite reparametrizaciju duljinom luka krivulje  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadane s  $\alpha(t) = (cht, sh t, t)$ .*

*Rješenje:* Najprije je potrebno odrediti funkciju duljine luka krivulje  $\alpha$ , te nakon što ju odredimo, odredit ćemo njezin inverz.

$$\dot{\alpha}(t) = (sh t, ch t, 1)$$

$$\|\dot{\alpha}\| = \sqrt{sh^2 t + ch^2 t + 1} = \sqrt{sh^2 t + ch^2 t + ch^2 t - sh^2 t} = \sqrt{2} ch t$$

$$s(t) = \int \sqrt{2} ch t dt = \sqrt{2} sh t \implies t(s) = \operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{2} s}{2}$$

$$\tilde{\alpha}(s) = \left( ch \left( \operatorname{arch} \frac{\sqrt{2} s}{2} \right), \frac{\sqrt{2} s}{2}, \operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{2} s}{2} \right)$$

**Primjer 2.4.** *Odredite reparametrizaciju duljinom luka krivulje  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , zadane s  $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ .*

*Rješenje:* Ponavljamo postupak kao u prethodnom primjeru.

$$\dot{\alpha}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$$

$$\|\dot{\alpha}\| = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t}}$$

$$= \sqrt{e^{2t} \cos^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \sin^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} \cos^2 t + e^{2t}}$$

$$= \sqrt{2e^{2t} + e^{4t}} = e^t \sqrt{2 + e^{2t}} = \sqrt{2} e^t + e^{2t}$$

$$s(t) = \int (\sqrt{2} e^t + e^{2t}) dt = \sqrt{2} e^t + \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$e^t = x \implies s = \sqrt{2} x + \frac{1}{2} x^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \frac{1}{2} s}}{1} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 2s}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\sqrt{2} + \sqrt{2-2s} \\
x_2 &= -\sqrt{2} - \sqrt{2-2s} \rightarrow x_2 \text{ nije rješenje} \\
e^t &= -\sqrt{2} + \sqrt{2-2s} \implies t(s) = \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}) \\
\tilde{\alpha}(s) &= e^{\ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s})} \left( \cos \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}), \sin \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}), 1 \right).
\end{aligned}$$

Uočimo da reparametrizaciju krivulje parametrom duljine luka nije lako odrediti. Ovisno o parametrizaciju polazne krivulje, može se dogoditi da nije moguće riješiti integral i eksplicitno odrediti funkciju duljine luka, a može se dogoditi da ne možemo eksplicitno odrediti inverznu funkciju dobivene funkcije duljine luka.

### 3 Fundamentalni teorem za krivulje

U ovom poglavlju definirat ćemo trobrid vektorskih polja pridružen krivulji te osnovne veličine kojima zadajemo krivulje. Definicije i teoremi su preuzeti iz [3].

**Definicija 3.1.** Regularna krivulja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  je dopustiva krivulja ako su vektorska polja  $\dot{\alpha}(t)$  i  $\ddot{\alpha}(t)$  duž krivulje  $\alpha$  linearno nezavisna.

Kod krivulja parametriziranih duljinom luka, uvjet linearne nezavisnosti vektorskih polja  $\alpha'$  i  $\alpha''$  ekvivalentan je uvjetu  $\|\alpha''(s)\| \neq 0$ .

**Definicija 3.2.** Za dopustivu krivulju  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametriziranu parametrom duljine luka, definiramo sljedeća vektorska polja:

- jedinično tangencijalno polje

$$T(s) = \alpha'(s),$$

- polje vektora glavnih normala

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$

- polje binormala

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Vektorska polja  $(T(s), N(s), B(s))$  čine desnu ortonormiranu bazu za  $\mathbb{R}_{\alpha(s)}^3$  i nazivamo ju Frenetovim (Frenet-Serretovim) trobridom (reperom, okvirom) krivulje  $\alpha$ .

**Definicija 3.3.** Neka je krivulja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizirana parametrom duljine luka  $s$ . Funkcija  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definirana s

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

se naziva zakrivljenošću (fleksijom) krivulje  $\alpha$  u točki  $\alpha(s)$ .

Za krivulje zadane općim parametrom zakrivljenost računamo po sljedećoj formuli

**Propozicija 3.4.** Neka je  $\alpha$  regularna krivulja u  $\mathbb{R}^3$  parametrizirana općim parametrom  $t$ . Tada je njezina zakrivljenost u točki  $\alpha(t)$  dana s

$$\kappa(t) = \frac{\|(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t))\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}.$$

**Definicija 3.5.** Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  dopustiva krivulja parametrizirana parametrom duljine luka  $s$ . Funkcija  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definirana s

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

naziva se torzijom (sukanjem) krivulje  $\alpha$  u točki  $\alpha(s)$ .

Za krivulje zadane općim parametrom torziju računamo po sljedećoj formuli

**Propozicija 3.6.** *Neka je  $\alpha$  dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom  $t$ . Tada je*

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^2} = \frac{\det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^2}.$$

Osim ovih definicija navest ćemo i pokazati prikaz vektorskih polja  $\{T', N', B'\}$  pomoću vektorskih polja Frenetovog trobrida.

**Teorem 3.7. (Frenetove formule).** *Neka je  $\alpha$  dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$ . Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= \tau N. \end{aligned}$$

Sljedeći primjer riješit ćemo primjenom prethodnih definicija i propozicija.

**Primjer 3.1.** *Izračunajte zakrivljenost i torziju krivulje zadane s*

$$\alpha(t) = \left( \frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$$

*Rješenje:*

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \left( -\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t \right) \\ \|\dot{\alpha}(t)\| &= \sqrt{\frac{16}{25} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25} \sin^2 t} = 1 \\ \ddot{\alpha}(t) &= \left( -\frac{4}{5} \cos t, \sin t, \frac{3}{5} \cos t \right) \\ \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{4}{5} \sin t & -\cos t & \frac{3}{5} \sin t \\ -\frac{4}{5} \cos t & \sin t & \frac{3}{5} \cos t \end{vmatrix} \\ &= \left( -\frac{3}{5} \cos^2 t - \frac{3}{5} \sin^2 t \right) \vec{i} - \left( -\frac{12}{25} \sin t \cos t + \frac{12}{25} \sin t \cos t \right) \vec{j} + \left( -\frac{4}{5} \sin^2 t - \frac{4}{5} \cos^2 t \right) \vec{k} \\ &= -\frac{3}{5} \vec{i} - \frac{4}{5} \vec{k} = \left( -\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right) \\ \|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\| &= \sqrt{\frac{9}{5} + \frac{16}{5}} = 1 \\ \kappa(t) &= \frac{\det(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t))}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} = 1 \\ \ddot{\alpha}(t) &= \left( \frac{4}{5} \sin t, \cos t, -\frac{3}{5} \sin t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)) \cdot \ddot{\alpha}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \sin t & \cos t & -\frac{3}{5} \sin t \end{vmatrix} \\
&= \frac{4}{5} \cos t \vec{i} - \left( \frac{9}{25} \sin t + \frac{16}{25} \sin t \right) \vec{j} - \frac{3}{5} \cos t \vec{k} = \left( \frac{4}{5} \cos t, -\sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right) \\
\tau(t) &= \frac{(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^2} = \left( \frac{4}{5} \cos t - \sin t - \frac{3}{5} \cos t \right) = \frac{1}{5} \cos t - \sin t
\end{aligned}$$

U nastavku slijedi iskaz fundamentalnog teorema za krivulje kojim izričemo kojim veličinama možemo zadati plohu do na položaj u prostoru..

**Teorem 3.8.** *Neka su  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatke funkcije, i neka vrijedi  $\kappa(s) > 0, s \in I$ . Tada postoji krivulja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  s parametrom duljine luka  $s$ , kojoj su funkcije  $\kappa(s)$  i  $\tau(s)$  zakrivljenost i torzija.*

*Ako je  $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  neka druga krivulja s istim svojstvima, tada postoji pozitivna izometrija prostora  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tako da je  $\bar{\alpha} = f(\alpha)$ .*

**Napomena 3.9.** *Dakle postoji jedinstvena, do na položaj u prostoru, krivulja kojoj su funkcije  $\kappa(s)$  i  $\tau(s)$  zakrivljenost, odnosno torzija a s parametar duljine luka. Za krivulje  $\alpha$  i  $\bar{\alpha}$  kažemo da su kongruentne.*

Dokaz teorema se može pogledati u [3].

## 4 Krivulje konstantnog nagiba

U ovom poglavlju bavit ćemo se običnom cilindričnom spiralom i dati njezinu karakterizaciju, te ćemo definirati njezino poopćenje, tj. krivulje konstantnog nagiba i navesti njihovu karakterizaciju i geometrijska svojstva. Definicije, leme i teoremi su preuzeti iz [3], odnosno [4].

**Definicija 4.1.** *Krivulja  $\alpha : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  naziva se krivuljom konstantnog nagiba (ili općom cilindričnom spiralom) ako duž krivulje  $\alpha$  postoji jedinično konstantno vektorsko polje  $V$  koje s krivuljom  $\alpha$  zatvara konstantan kut, tj. ako vrijedi*

$$T(s) \cdot V = \cos \varphi = \text{konst.}$$

gdje je  $T(s)$  jedinično tangencijalno polje krivulje  $\alpha$ .

Takve krivulje skupa s pravcima koje u svakoj točki krivulje određuje vektorsko polje  $V$  čine jednu cilindričnu plohu i kako s izvodnicama plohe po definiciji zatvaraju konstantan kut, kažemo da su one izogonalne trajektorije izvodnica cilindrične plohe.

U narednim definicijama i lemana uočiti ćemo primjenu fleksije, torzije i Frenetovog trobrida.

**Lema 4.2.** *Krivulja  $\alpha : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  s zakrivljenošću  $\kappa \neq 0$  je krivulja konstantnog nagiba ako i samo ako je omjer  $\frac{\tau}{\kappa}$  konstantan.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je krivulja  $\alpha$  parametrizirana parametrom duljine luka. Istaknimo da za kut  $\varphi$  koji tangencijalno polje krivulje  $\alpha$  zatvara se poljem  $E$  vrijedi  $\varphi \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (stoga je i  $\sin \varphi \neq 0$ ). U suprotnom bi vrijedilo

$$T(s) = \pm V(s) = \text{konst.},$$

te bi bilo

$$T'(s) = 0, \text{ tj. } \kappa(s) = 0,$$

što je kontradikcija s dopustivošću krivulje  $\alpha$ . Pretpostavimo sada da je  $\alpha$  krivulja konstantnog nagiba, tj. neka duž krivulje  $\alpha$  postoji jedinično konstantno vektorsko polje  $V$  za koje vrijedi

$$T(s) \cdot V = \cos \varphi.$$

Deriviranjem prethodnog izraza dobivamo

$$T'(s) \cdot V = 0,$$

odakle zbog  $\kappa(s) \neq 0$  slijedi

$$N(s) \cdot V = 0.$$

Slijedi da u svakoj točki krivulje  $\alpha$  vektorsko polje  $V$  možemo prikazati kao  $V = a(s)T(s) + b(s)B(s)$ , gdje su  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatke funkcije za koje vrijedi

$$a(s) = V \cdot T(s) = \cos \varphi, \quad b(s) = V \cdot B(s).$$

Kako je  $V$  jedinično vektorsko polje slijedi  $a^2(s) + b^2(s) = 1$ , što povlači  $b^2(s) = \sin^2 \varphi$ . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo  $b(s) = \sin \varphi$ . Slijedi

$$V = \cos \varphi T(s) + \sin \varphi B(s).$$

Sada je

$$0 = V' = (\cos \varphi \kappa(s) - \sin \varphi \tau(s))N(s).$$

Vektor  $N(s)$  je jedinični vektor, stoga nužno vrijedi  $\cos \varphi \kappa(s) - \sin \varphi \tau(s) = 0$  tj.

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \textit{konst.}$$

što je trebalo pokazati. Obratno, neka je  $\frac{\tau}{\kappa} = \textit{konst.}$  Definirajmo  $\varphi$  kao

$$\frac{\tau}{\kappa} = \textit{ctg} \varphi.$$

Neka je  $V(s) = \cos \varphi T(s) + \sin \varphi B(s)$ . Pokazat ćemo da je  $V$  jedinično i konstantno polje, koje s krivuljom  $\alpha$  zatvara konstantni kut.  $V$  je očito jedinično polje. Pokažimo da je konstanto,

$$V'(s) = \cos \varphi \kappa N + \sin \varphi (-\tau)N = 0.$$

Pokažimo da  $\alpha$  s njim zatvara konstantan kut,

$$c'(s) \cdot V = T(s) \cdot V = \cos \varphi = \textit{konst.}$$

Time smo dokazali Lemu 4.2. □

Dokaz je preuzet iz [3].

**Primjer 4.1.** Pokažimo da je krivulja  $\alpha(t) = (2t, \ln t, t^2)$  konstantnog nagiba.

*Rješenje:* Pokazat ćemo da je omjer zakrivljenosti  $\kappa$  i torzije  $\tau$  konstantan u svakoj točki krivulje  $\alpha$ .

$$\alpha(t) = (2t, \ln t, t^2),$$

$$\dot{\alpha}(t) = \left(2, \frac{1}{t}, 2t\right),$$

Kako krivulja  $\alpha$  nije parametrizirana parametrom duljine luka, koristit ćemo formule za zakrivljenost i torziju krivulje parametrizirane općim parametrom.

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(0, -\frac{1}{t^2}, 2\right),$$

$$\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & -\frac{1}{t^2} & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2}\right),$$

$$\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + 16 + \frac{4}{t^4}} = \sqrt{\frac{16t^2 + 16t^4 + 4}{t^4}} = \sqrt{\left(\frac{4t^2 + 2}{t^2}\right)^2} = \frac{4t^2 + 2}{t^2} = 4 + \frac{2}{t^2},$$

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2} = \sqrt{\frac{4t^2 + 1 + 4t^4}{t^2}} = \sqrt{\left(\frac{2t^2 + 1}{t}\right)^2} = \frac{2t^2 + 1}{t} = 2t + \frac{1}{t},$$

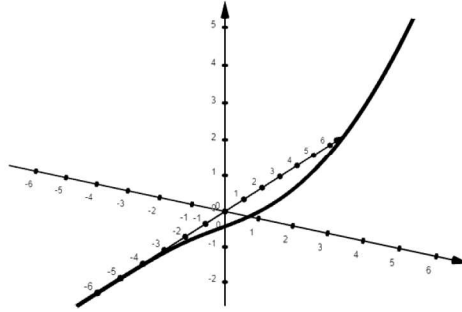
$$\kappa(t) = \frac{4 + \frac{2}{t^2}}{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^3},$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, 0\right),$$

$$(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)) \cdot \ddot{\alpha}(t) = \left(\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2}\right) \cdot \left(0, \frac{2}{t^3}, 0\right) = -\frac{8}{t^3},$$

$$\tau(t) = \frac{-\frac{8}{t^3}}{\left(4 + \frac{2}{t^2}\right)^2},$$

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{\frac{-\frac{8}{t^3}}{\left(4 + \frac{2}{t^2}\right)^2}}{\frac{4 + \frac{2}{t^2}}{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^3}} = -\frac{\frac{8}{t^3} \left(2t + \frac{1}{t}\right)^3}{\left(4 + \frac{2}{t^2}\right)^2} = -\frac{\frac{8}{t^3} \left(8t^3 + 12t + \frac{6}{t} + \frac{1}{t^3}\right)}{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}} = -\frac{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}}{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}} = -1.$$



**Slika 2.** Krivulja konstantnog nagiba iz Primjera 4.1.

U sljedećoj lemi koristit ćemo pojam obična cilindrična spirala, koja je također krivulja konstantnog nagiba. Da bismo mogli iskazati i dokazati lemu, naprije definirajmo takvu krivulju.

**Definicija 4.3.** *Krivulja koja nastaje istovremenom rotacijom i translacijom točke konstantnom brzinom duž  $z$ -osi naziva se obična cilindrična spirala. Parametrizacija takve krivulje je oblika  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ , gdje je  $a > 0$  i  $b \neq 0$ .*

**Lema 4.4.** *Neka je krivulja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizirana duljinom luka. Krivulja  $\alpha$  je obična cilindrična spirala ako i samo ako vrijedi  $\kappa = \text{konst.} > 0$  i  $\tau = \text{konst.}$*

*Dokaz.* Za svaki  $a > 0$  i  $b \neq 0$  jednadžba

$$\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{p}\right), a \sin\left(\frac{s}{p}\right), \frac{bs}{p}\right)$$



je parametrizacija duljinom luka, obične cilindrične spirale. Pri tome je  $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Jedinično tangencijalo polje  $T$ , za krivulju parametriziranu duljinom luka, dano je kao

$$T(s) = \alpha'(s) = \left( -\frac{a}{p} \sin\left(\frac{s}{p}\right), \frac{a}{p} \cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{b}{p} \right).$$

Deriviramo li gornji izraz dobivamo

$$T'(s) = \alpha''(s) = \left( -\frac{a}{p^2} \cos\left(\frac{s}{p}\right), -\frac{a}{p^2} \sin\left(\frac{s}{p}\right), 0 \right),$$

a kako je zakrivljenost krivulje parametrizirane duljinom luka dana s  $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ , slijedi

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{p^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0.$$

Nadalje vrijedi,  $T' = \kappa N$  iz čega slijedi

$$N(s) = \left( -\cos\left(\frac{s}{p}\right), -\sin\left(\frac{s}{p}\right), 0 \right).$$

Vektor  $B$  je definiran kao vektorski produkt  $T \times N$ ,

$$B(s) = \left( \frac{b}{p} \sin\left(\frac{s}{p}\right), -\frac{b}{p} \cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{a}{p} \right).$$

Derivacijom dobivamo:

$$B'(s) = \left( \frac{b}{p^2} \cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{b}{p^2} \sin\left(\frac{s}{p}\right), 0 \right).$$

Kako vrijedi  $B' = -\tau N$ , očito je

$$\tau(s) = \frac{b}{p^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Kako su  $\kappa$  i  $\tau$  obične cilindrične spirale konstante, očito je i  $\frac{\tau}{\kappa}$  konstanta. □

Pomoću proizvoljne ravninske krivulje možemo generirati krivulju konstantnog nagiba na način koji je opisan sljedećom lemom.

**Lema 4.5.** *Neka je  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  zadana kao  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  parametrizirana parametrom duljine luka. Definiramo li prostornu krivulju  $\gamma$  kao  $\gamma(s) = (x(s), y(s), s \cdot \cos \psi)$  pri čemu je  $\psi$  konstantan, tada krivulja  $\gamma$  zatvara konstantan kut  $\psi$  s vektorom  $(0, 0, 1)$ .*

*Dokaz.* Krivulju  $\gamma$  smo definirali  $\gamma(s) = (x(s), y(s), s \cdot \cos \psi)$ , pa je njezina prva derivacija  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \cos \psi)$ . Kako je  $\phi$  kut između  $\dot{\gamma}(t)$  i vektora  $(0, 0, 1)$  te vrijedi  $T \cdot u = \cos \phi$  dobivamo:

$$\cos \phi = \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot (0, 0, 1)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{(\dot{x}(s), \dot{y}(s), \cos \psi) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{(1 + \cos^2 \psi)}} = \frac{\cos \psi}{\sqrt{(1 + \cos^2 \psi)}}$$

Iz dobivenog izraza, kvadriranjem i sređivanjem jednakosti dobijemo sljedeće:

$$\cos^2 \phi = \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos^2 \psi} \implies \frac{1}{\cos^2 \phi} = \frac{1 + \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi} \implies \frac{1}{\cos^2 \phi} = 1 + \frac{1}{\cos^2 \psi}$$

Analogno se pokaže da vrijedi  $\cos^2 \psi = \operatorname{ctg} \phi$ . □

U nastavku ćemo naučiti više o projekciji krivulja i svojstva koja vrijede za krivulje konstantnog nagiba koje leže na sferi.

**Lema 4.6.** Neka je krivulja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizirana parametrom duljine luka koja s jediničnim vektorom  $u \in \mathbb{R}^3$  zatvara kut  $\phi$ , pri čemu je  $0 < \phi < \pi$ . Tada je projekcija  $\beta$  krivulje  $\gamma$  na ravninu okomitu na vektor  $u$ , krivulja dana s:

$$\beta(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot u)u, \text{ za } a < s < b.$$

Za zakrivljenosti krivulja  $\beta$  i  $\gamma$  vrijedi:

$$\kappa_\beta = \pm \kappa_\gamma \frac{1}{\sin^2 \phi}.$$

**Lema 4.7.** Neka je krivulja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizirana parametrom duljine luka koja s jediničnim vektorom  $u \in \mathbb{R}^3$  zatvara kut  $\phi$ , pri čemu je  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ . Ako krivulja  $\gamma$  leži na sferi radijusa  $r > 0$  tada vrijedi:

1. Zakrivljenost i torzija krivulje  $\gamma$  dani su kao:

$$\kappa_\gamma(s)^2 = \frac{1}{r^2 - s^2 \operatorname{ctg}^2 \phi}$$

$$\tau_\gamma(s)^2 = \frac{1}{r^2 \operatorname{tg}^2 \phi - s^2}$$

2. Zakrivljenost projekcije  $\beta$  krivulje  $\gamma$  na ravninu okomitu na vektor  $u$ , je dana kao:

$$\kappa_\beta(s_1)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^4 \phi - s_1^2 \cos^2 \phi}$$

pri čemu je  $s_1 = s \sin \phi$  duljina luka krivulje  $\beta$ .

3. Neka je  $r = a + 2b$  i  $\cos \phi = \frac{a}{a + 2b}$ . Tada je jednadžba krivulje  $\beta$  upravo jednadžba epicikloide.

Za dokaz Leme 4.7. koristit ćemo sljedeći teorem

**Teorem 4.8.** Neka je krivulja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizirana parametrom duljine luka sa zakrivljenošću  $\kappa$  i torzijom  $\tau$ . Ako krivulja  $\alpha$  leži na sferi radijusa  $r > 0$  sa središtem u  $q \in \mathbb{R}^3$ . Tada vrijedi:

1.  $\kappa \geq \frac{1}{r}$ ,
2.  $\tau^2 \left( r^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2$ ,
3.  $\frac{\tau}{\kappa} = \left( \frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)'$ .

Dokažimo sada Lemu 4.7.

*Dokaz.* 1. Budući da krivulja  $\gamma$  zatvara kut  $\psi$  s jediničnim konstantnim vektorom, tada znamo da vrijedi  $\frac{\tau}{\kappa} = \pm ctg\psi$ . Iz Teorema 4.8. iskoristit ćemo relaciju 2)., uz činjenicu da je  $\tau = \pm\kappa ctg\phi$  i dobivamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2 &= \tau^2 \left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = \kappa^2 ctg^2\phi \left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = ctg^2\phi(\kappa^2 r^2 - 1). \\ \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4} &= ctg^2\phi(\kappa^2 r^2 - 1) \quad / : (\kappa^2 r^2 - 1) \\ \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4(\kappa^2 r^2 - 1)} &= ctg^2\phi \quad / \sqrt{\quad} \\ \frac{\kappa'}{\kappa^2 \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1}} &= \pm ctg\phi \end{aligned} \quad (1)$$

Integriramo li jednadžbu (3) i dobijemo:

$$\frac{1}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1} = \pm s ctg\phi \quad (2)$$

Izrazimo li iz jednadžbe (4)  $\kappa$  dobijemo:

$$\begin{aligned} \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1} &= \pm s \kappa ctg\phi \quad / ^2 \\ \kappa^2 r^2 - 1 &= s^2 r^2 ctg^2\phi \\ \kappa^2 r^2 - s^2 \kappa^2 ctg^2\phi &= 1 \\ \kappa^2 &= \frac{1}{r^2 - s^2 ctg^2\phi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ovim izrazom je dana zakrivljenost  $\kappa_\gamma(s)$  krivulje  $\gamma$ . Trebamo još dobiti izraz za torziju  $\tau$ . Iskoristit ćemo činjenicu da je  $\kappa = \pm \frac{\tau}{ctg\phi}$  i uvrstimo to u jednadžbu (5), iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{ctg^2\phi} &= \frac{1}{r^2 - s^2 ctg^2\phi} \quad / \cdot ctg^2\phi \\ \tau^2 &= \frac{ctg^2\phi}{r^2 - s^2 ctg^2\phi} \\ \tau^2 &= \frac{\frac{1}{tg^2\phi}}{r^2 - s^2 ctg^2\phi} \\ \tau^2 &= \frac{1}{r^2 tg^2\phi - s^2} \end{aligned}$$

Izraz iz Leme 4.6. uvrstimo u (5) i sređivanjem dobijemo  $\kappa_\beta(s_1)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^4\phi - s_1^2 \cos^2\phi}$ , pri čemu je  $s_1 = s \sin\phi$  duljina luka krivulje  $\beta$ .

Kako je  $\cos \phi = \frac{a}{a+2b}$  tada slijedi da je

$$\sin^4 \phi = (\sin^2 \phi)^2 = (1 - \cos^2 \phi)^2 = \left(1 - \frac{a^2}{(a+2b)^2}\right)^2 = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^4}. \quad (4)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza za  $\sin^4 \phi$  u jednadžbu pod 2) i sređivanjem dobivamo

$$\frac{1}{\kappa_\beta(s_1)} = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2} - \frac{a^2 s_1^2}{(a+2b)^2}.$$

Zamijenimo li  $s$  sa  $s_1$  dobit ćemo prirodnu jednadžbu epicikloide. □

## Literatura

- [1] E. Abbena, S. Salamon i A. Gray, Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [2] W. Kühnel, Differential Geometry-Curves-Surfaces-Manifolds, AMS, 2002.
- [3] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, Uvod u diferencijalnu geometriju, PMF- Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, skripta.
- [4] V. Pekić, Cikloidne krivulje, PMF- Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, završni rad, 2019.