# Krivulje konstantnog nagiba

**Marković, Barbara**

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Barbara Marković

# Krivulje konstantnog nagiba

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Barbara Marković

# **Krivulje konstantnog nagiba**

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2022.

## Sažetak

U radu je razmatran pojam krivulje konstantnog nagiba, tj. krivulje čiji tangencijalni vektor zatvara konstantan kut s jediničnim fiksnim vektorom. Takve krivulje leže na cilindričnoj plohi i s izvodnicama plohe zatvaraju konstantan kut, te kažemo da su one izogonalne trajektorije izvodnica cilindrične plohe. Dana je karakterizacija takvih krivulja te su promatrana njihova geometrijska svojstva. Navedeni su i osnovni pojmovi iz lokalne teorije krivulja poput Frenetovog trobrida i zakrivljenosti, odnosno torzije krivulje, potrebni za razumijevanje ovog rada.



**Ključne riječi:**
krivulja, zakrivljenost, torzija, konstantan nagib, opća cilindrična spirala



## Abstract

In this work, we consider curves of constant slope, i.e. curves whose tangent vector makes a constant angle with a fixed unit vector. Such curves lay on a cilindrical surface and make constant angle with rulings of the surface, so we called them the isogonal trajectories of a cylindrical surface. Their characterization and some geometric properties are introduced in the work. The basic concepts in local theory of curves, such as Frenet frame, curvature and torsion of a curve, needed for comprehension of this work are also presented.



**Key words**: curve, curvature, torsion, constant slope, generalized helix

# Sadržaj

# 1 Uvod

Početci diferencijalne geometrije potječu još iz 18. stoljeća. Diferencijalna geometrija se bavi proučavanjem geometrijskih svojstava elemenata prostora u kojemu se primjenjuju metode iz diferencijalnog računa.U uskoj je vezi s matematičkom analizom, koja se značajno razvila upravo iz problema u geometriji.

Članak *Une application d'analyse à la gèomètrie*, objavljen 1795. godine, čiji je autor francuski matematičar Gaspard Monge (1746.-1818.), smatra se prvim djelom objavljenim u ovoj grani matematike, te stoga Gasparda Mongea smatramo začetnikom diferencijalne geometrije. Osim njega razvoju diferencijalne geometrije u značajnoj mjeri su doprinijeli švicarski matematičar i fizičar Leonhard Euler (1707.-1783.) te njemački matematičar i astronom Carl Friedrick Gauss (1777.-1855.). U svom radu iz 1827. godine, *Disquisitioes Generales Circa Superficies Curvas*, Gauss je koristio parametarsko zadavanje ploha, predstavio dvije osnovne kvadratne forme pomoću kojih vršimo mjerenja na plohi, sferno preslikavanje te definirao zakrivljenosti u točki plohe. Također, u istom tom djelu dokazao je da je zakrivljenost plohe invarijantna pri lokalnoj izometriji, a ta ga je tvrdnja toliko oduševila da ju je nazvao *Veličanstveni teorem, lat. Theorema Egregium.* Taj rad se smatra temeljem moderne teorije ploha.Danas diferencijalna geometrija ima vrlo široku primjenu, izrazito u fizici, s naglaskom na kinematiku, odnosno na teoriju relativnosti.

U ovom završnom radu pobliže ćemo se upoznati sa samom teorijom krivulja i osnovnim pojmovima vezanim uz krivulje. U drugom poglavlju dan je pregled osnovnih definicija i teorema iz lokalne teorije krivulja. Fundamentalni teorem krivulja obrađen je u trećem poglavlju, dok je tema četvrtog poglavlja upravo tema završnog rada, tj. krivulje konstantnog nagiba.

# 2 Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja

U ovom poglavlju bavit ćemo se osnovnim definicijama i teoremima iz lokalne teorije krivulja. Najprije ćemo definirati krivulju na način kako se ona definira u diferencijalnoj geometriji, definirati parametar duljine luka i pokazati da se svaka krivulja može zadati takvim parametrom.

## 2.1 Pojam krivulje

Za početak, krenimo od samog pojma krivulje i nekih osnovnih primjera koje smo do sada puno puta susreli u dosadašnjem obrazovanju. Nastavno na pojam krivulje, definirat ćemo i pojam nivo-krivulje i navesti nekoliko primjera. Definicije i primjeri su preuzeti iz [3].

**Definicija 2.1.** *Neka je $I = \langle a, b\rangle$ interval realnih brojeva. Glatko preslikavanje $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ nazivamo parametriziranom krivuljom u $\mathbb{R}^n$. Ako za parametriziranu krivulju vrijedi da je $\dot{\alpha}(t) = \dfrac{d\alpha}{dt}(t) \neq 0$, za sve $t \in I$, onda za nju kažemo da je regularna.*

**Napomena 2.2.** *Iako se većina definicija odnosi na prostor $\mathbb{R}^n$, mi ćemo se u radu baviti isključivo krivuljama u $\mathbb{R}^3$ i takve ćemo krivulje zapisati kao $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, a njihove derivacije $\dfrac{d\alpha}{dt}(t) = \dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, $\frac{d^2\alpha}{dt}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$, itd.*

Navest ćemo nekoliko primjera parametriziranih krivulja s kojima smo se do sada već susretali.

**Primjer 2.1.** *Primjeri krivulja:*

1. *pravac u $\mathbb{R}^n$: $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, možemo zadati standardnom parametrizacijom $\alpha(t) = a + tb$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, gdje je a točka kojom pravac prolazi, a b vektor smjera, $I \subset \mathbb{R}$,*
2. *kružnica: $\alpha : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$ sa središtem u točki $(p, q)$ i polumjerom $r$, $\alpha(t) = (p+r\cos t, q+r\sin t)$, (uočimo da kružnici nedostaje točka $(p+r, q)$, jer prema definiciji krivulje domena funkcije $\alpha$ mora biti otvoren skup),*
3. *elipsa: $\alpha : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$*
4. *hiperbola: $\alpha : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$*
5. *parabola: $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, t^2)$*

Vidimo da je u diferencijalnoj geometriji zastupljen malo drugačiji pristup definiranju krivulja od onog s kojim smo se do sad susretali, tj. definiranju krivulja kao skupa točaka koje zadovoljavaju određeni uvjet. Na takav način definirane krivulje nazivamo nivo-krivuljama.

**Definicija 2.3.** *Nivo-krivulja u $\mathbb{R}^2$ je skup točaka $\mathcal{S}$ definiran kao $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = a, a \in \mathbb{R}\}$.*

**Primjer 2.2.** *Najpoznatiji primjeri nivo-krivulja u $\mathbb{R}^2$ su kvadrike:*

1. *jedinična kružnica: $x^2 + y^2 = 1$,*
2. *elipsa: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$,*

*3. hiperbola:* $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$,

*4. parabola:* $y^2 = 2px$.

Poznato je da se svaka nivo krivulja može (po dijelovima) parametrizirati što slijedi prema sljedećem teoremu,[3].

**Teorem 2.4.** *Neka je funkcija* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *glatka i* $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = a, a \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$. *Neka* $\frac{\partial h}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial h}{\partial y}$ *nisu istovremeno* 0 *u točkama skupa* $\mathcal{S}$ *i neka je* $P \in \mathcal{S}$. *Tada postoji otvoreni interval* $I \subset \mathbb{R}$ *oko* 0 *i regularna krivulja* $\alpha$ *definirana na* $I$ *takva da je* $\alpha(0) = P$ *i* $\alpha(I) \subset \mathcal{S}$.

Dokaz teorema se može pogledati u [3]. Nadalje, prikaz skupa točaka preko parametrizacije, odnosno kao parametrizirane krivulje nije jedinstven, odnosno isti skup točaka možemo prikazati različitim parametrizacijama.

**Definicija 2.5.** *Neka je* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *parametrizirana krivulja, te neka je* $J \subset \mathbb{R}, J \neq I$ *i* $\varphi : J \to I$ *glatki difeomorfizam. Parametriziranu krivulju* $\widetilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ *nazivamo reparametrizacijom od* $\alpha$.

## 2.2 Tangencijalni vektor i parametar duljine luka krivulje

U nastavku ćemo dati definiciju tangencijalnog vektora krivulje, te definiciju specijalnog parametra, tzv. parametra duljine luka krivulje. Pokazat ćemo da se svaka regularna krivulja može zadati s takvim parametrom. Definicije i teoremi su preuzeti iz [3].

**Definicija 2.6.** *Neka je* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *regularna krivulja. Vektor* $\dot{\alpha}(t)$ *se naziva tangencijalnim vektorom krivulje* $\alpha$ *u točki* $\alpha(t)$. *Pravac kojemu je* $\dot{\alpha}(t)$ *vektor smjera i koji prolazi točkom* $\alpha(t)$ *nazivamo tangentom krivulje* $\alpha$ *u točki* $\alpha(t)$.
*Za krivulju* $\alpha$ *kažemo da je parametrizirana duljinom luka ako je* $||\dot{\alpha}(t)|| = 1$, $t \in I$.

**Definicija 2.7.** *Funkcija duljine luka krivulje* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *od točke* $\alpha(t_0)$ *definirana je kao*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\dot{\alpha}(u)||du, t_0 \in I.$$

*Specijalno, duljina luka (cijele) krivulje* $\alpha : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ *je realan broj*

$$s = \int_{a}^{b} ||\dot{\alpha}(u)||du.$$

*Ako je* $\alpha : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ *krivulja parametrizirana parametrom duljine luka, tj.*$||\dot{\alpha}(t)|| = 1$ , *tada je očito duljina luka krivulje* $\alpha$ *jednaka duljini intervala* $I$.

Kako smo ranije naveli, parametrizacija krivulje nije jedinstvena. Specijalno vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.8.** *Svaka regularna krivulja dozvoljava reparametrizaciju parametrom duljine luka.*

*Dokaz.* Neka je dana krivulja $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, i $s$ funkcija duljine luka od $\alpha$. Kako je $\dfrac{ds(t)}{dt} = ||\dot{\alpha}(t)|| > 0$, slijedi da je $s$ strogo rastuća funkcija. Može se pokazati da je funkcija $s$ glatka. Njezina druga derivacija jednaka je $\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} = \dfrac{\dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha}(t)}{||\dot{\alpha}||}$. Kako je funkcija $s$ glatka i strogo rastuća, ona je bijekcija. Neka je $t = t(s)$ njezina inverzna funkcija. Definiramo li $\widetilde{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$ vrijedi

$$||\widetilde{\alpha}'(s)|| = ||\dot{\alpha}(t(s)) \cdot t'(s)|| = ||\dot{\alpha}(t)|| \cdot \frac{1}{||\dot{\alpha}(t)||} = 1.$$

□

Kako bismo razlikovali je li krivulja zadana parametrom duljine luka ili općim parametrom, za derivaciju krivulje po općem parametru koristit ćemo oznaku $\dot{c}$, a po parametru duljine luka oznaku $c'$.
U nastavku ćemo navesti primjere reparametrizacije krivulja duljinom luka.

**Primjer 2.3.** *Odredite reparametrizaciju duljinom luka krivulje $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadane s $\alpha(t) = (ch\, t, sh\, t, t)$.*
*Rješenje: Najprije je potrebno odrediti funkciju duljine luka krivulje $\alpha$, te nakon što ju odredimo, odredit ćemo njezin inverz.*

$$\dot{\alpha}(t) = (sh\, t, ch\, t, 1)$$

$$||\dot{\alpha}|| = \sqrt{sh^2\, t + ch^2\, t + 1} = \sqrt{sh^2\, t + ch^2\, t + ch^2\, t - sh^2\, t} = \sqrt{2}\, ch\, t$$

$$s(t) = \int \sqrt{2}\, ch\, tdt = \sqrt{2}\, sh\, t \Longrightarrow t(s) = arcsh\frac{\sqrt{2}\, s}{2}$$

$$\widetilde{\alpha}(s) = \left(ch\left(arch\frac{\sqrt{2}\, s}{2}\right), \frac{\sqrt{2}\, s}{2}, arcsh\frac{\sqrt{2}\, s}{2}\right)$$

**Primjer 2.4.** *Odredite reparametrizaciju duljinom luka krivulje $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, zadane s $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.*
*Rješenje: Ponavljamo postupak kao u prethodnom primjeru.*

$$\dot{\alpha}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$$

$$||\dot{\alpha}|| = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t}}$$

$$= \sqrt{e^{2t} \cos^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \sin^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} \cos^2 t + e^{4t}}$$

$$= \sqrt{2e^{2t} + e^{4t}} = e^t\sqrt{2 + e^{2t}} = \sqrt{2}e^t + e^{2t}$$

$$s(t) = \int(\sqrt{2}e^t + e^{2t})dt = \sqrt{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$e^t = x \Longrightarrow s = \sqrt{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4\frac{1}{2}s}}{1} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 2s}$$

$$
\begin{gathered}
x_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2-2s} \\
x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2-2s} \longrightarrow x_2 \; nije \; rje\check{s}enje \\
e^t = -\sqrt{2} + \sqrt{2-2s} \Longrightarrow t(s) = \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}) \\
\widetilde{\alpha}(s) = e^{\ln(-\sqrt{2}+\sqrt{2-2s})} \Big( \cos \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}), \sin \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}), 1 \Big) .
\end{gathered}
$$

Uočimo da reparametrizaciju krivulje parametrom duljine luka nije lako odrediti. Ovisno o parametrizaciju polazne krivulje, može se dogoditi da nije moguće riješiti integral i eksplicitno odrediti funkciju duljine luka, a može se dogoditi da ne možemo eksplicitno odrediti inverznu funkciju dobivene funkcije duljine luka.

# 3 Fundamentalni teorem za krivulje

U ovom poglavlju definirat ćemo trobrid vektorskih polja pridružen krivulji te osnovne veličine kojima zadajemo krivulje. Definicije i teoremi su preuzeti iz [3].

**Definicija 3.1.** *Regularna krivulja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ je dopustiva krivulja ako su vektorska polja $\dot{\alpha}(t)$ i $\ddot{\alpha}(t)$ duž krivulje $\alpha$ linearno nezavisna.*

Kod krivulja parametriziranih duljinom luka, uvjet linearne nezavisnosti vektorskih polja $\alpha'$ i $\alpha''$ ekvivalentan je uvjetu $\|\alpha''(s)\| \neq 0$.

**Definicija 3.2.** *Za dopustivu krivulju $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametriziranu parametrom duljine luka, definiramo sljedeća vektorska polja:*

- *jedinično tangencijalno polje*
$$T(s) = \alpha'(s),$$
- *polje vektora glavnih normala*
$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{||\alpha''(s)||},$$
- *polje binormala*
$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

*Vektorska polja $(T(s), N(s), B(s))$ čine desnu ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^3_{c(s)}$ i nazivamo ju Frenetovim (Frenet-Serretovim) trobridom (reperom, okvirom) krivulje $\alpha$.*

**Definicija 3.3.** *Neka je krivulja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom duljine luka $s$. Funkcija $\kappa : I \to \mathbb{R}$, definirana s*
$$\kappa(s) = ||\alpha''(s)||$$
*se naziva zakrivljenošću (fleksijom) krivulje $\alpha$ u točki $\alpha(s)$.*

Za krivulje zadane općim parametrom zakrivljenost računamo po sljedećoj formuli

**Propozicija 3.4.** *Neka je $\alpha$ regularna krivulja u $\mathbb{R}^3$ parametrizirana općim parametrom $t$. Tada je njezina zakrivljenost u točki $\alpha(t)$ dana s*

$$\kappa(t) = \frac{||(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t))||}{||\dot{\alpha}(t)||^3}.$$

**Definicija 3.5.** *Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ dopustiva krivulja parametrizirana parametrom duljine luka $s$. Funkcija $\tau : I \to \mathbb{R}$, definirana s*

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

*naziva se torzijom (sukanjem) krivulje $\alpha$ u točki $\alpha(s)$.*

Za krivulje zadane općim parametrom torziju računamo po sljedećoj formuli

**Propozicija 3.6.** *Neka je $\alpha$ dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom $t$. Tada je*

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{||\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}||^2} = \frac{det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha})}{||\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}||^2}.$$

Osim ovih definicija navest ćemo i pokazati prikaz vektorskih polja $\{T', N', B'\}$ pomoću vektorskih polja Frenetovog trobrida.

**Teorem 3.7.** ***(Frenetove formule).*** *Neka je $\alpha$ dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka $s$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= \tau N. \end{aligned}$$

Sljedeći primjer riješit ćemo primjenom prethodnih definicija i propozicija.

**Primjer 3.1.** *Izračunajte zakrivljenost i torziju krivulje zadane s*

$$\alpha(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t)$$

*Rješenje:*

$$\dot{\alpha} = \left(-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t\right)$$

$$||\dot{\alpha}(t)|| = \sqrt{\frac{16}{25}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25}\sin^2 t} = 1$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right)$$

$$\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{4}{5}\sin t & -\cos t & \frac{3}{5}\sin t \\ -\frac{4}{5}\cos t & \sin t & \frac{3}{5}\cos t \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{3}{5}\cos^2 t - \frac{3}{5}\sin^2 t\right)\vec{i} - \left(-\frac{12}{25}\sin t\cos t + \frac{12}{25}\sin t \cos t\right)\vec{j} + \left(-\frac{4}{5}\sin^2 t - \frac{4}{5}\cos^2 t\right)\vec{k}$$

$$= -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{k} = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$$

$$||\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|| = \sqrt{\frac{9}{5} + \frac{16}{5}} = 1$$

$$\kappa(t) = \frac{det(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t))}{||\dot{\alpha}(t)||^3} = 1$$

$$\dddot{\alpha}(t) = \left(\frac{4}{5}\sin t, \cos t, -\frac{3}{5}\sin t\right)$$

$$(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)) \cdot \dddot{\alpha}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}\sin t & \cos t & -\frac{3}{5}\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4}{5}\cos t\,\vec{i} - \left(\frac{9}{25}\sin t + \frac{16}{25}\sin t\right)\vec{j} - \frac{3}{5}\cos t\,\vec{k} = \left(\frac{4}{5}\cos t, -\sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$$

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{||\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}||^2} = \left(\frac{4}{5}\cos t - \sin t - \frac{3}{5}\cos t\right) = \frac{1}{5}\cos t - \sin t$$

U nastavku slijedi iskaz fundamentalnog teorema za krivulje kojim izričemo kojim veličinama možemo zadati plohu do na položaj u prostoru..

**Teorem 3.8.** *Neka su $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ glatke funkcije, i neka vrijedi $\kappa(s) > 0$, $s \in I$. Tada postoji krivulja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ s parametrom duljine luka $s$, kojoj su funkcije $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ zakrivljenost i torzija.*
*Ako je $\bar{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ neka druga krivulja s istim svojstvima, tada postoji pozitivna izometrija prostora $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tako da je $\bar{\alpha} = f(\alpha)$.*

**Napomena 3.9.** *Dakle postoji jedinstvena, do na položaj u prostoru, krivulja kojoj su funkcije $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ zakrivljenost, odnosno torzija a $s$ parametar duljine luka. Za krivulje $\alpha$ i $\bar{\alpha}$ kažemo da su kongruentne.*

Dokaz teorema se može pogledati u [3].

# 4 Krivulje konstantnog nagiba

U ovom poglavlju bavit ćemo se običnom cilindričnom spiralom i dati njezinu karakterizaciju, te ćemo definirati njezino poopćenje, tj. krivulje konstantnog nagiba i navesti njihovu karakterizaciju i geometrijska svojstva. Definicije, leme i teoremi su preuzeti iz [3], odnosno [4].

**Definicija 4.1.** *Krivulja $\alpha : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ naziva se krivuljom konstantnog nagiba (ili općom cilindričnom spiralom) ako duž krivulje $\alpha$ postoji jedinično konstantno vektorsko polje $V$ koje s krivuljom $\alpha$ zatvara konstantan kut, tj. ako vrijedi*

$$T(s) \cdot V = \cos\varphi = konst.$$

*gdje je $T(s)$ jedinično tangencijalno polje krivulje $\alpha$.*

Takve krivulje skupa s pravcima koje u svakoj točki krivulje određuje vektorsko polje $V$ čine jednu cilindričnu plohu i kako s izvodnicama plohe po definiciji zatvaraju konstantan kut, kažemo da su one izogonalne trajektorije izvodnica cilindrične plohe.
U narednim definicijama i lemama uočit ćemo primjenu fleksije, torzije i Frenetovog trobrida.

**Lema 4.2.** *Krivulja $\alpha : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ s zakrivljenošću $\kappa \neq 0$ je krivulja konstantnog nagiba ako i samo ako je omjer $\dfrac{\tau}{\kappa}$ konstantan.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je krivulja $\alpha$ parametrizirana parametrom duljine luka. Istaknimo da za kut $\varphi$ koji tangencijalno polje krivulje $\alpha$ zatvara se poljem $E$ vrijedi $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (stoga je i $\sin\varphi \neq 0$). U suprotnom bi vrijedilo

$$T(s) = \pm V(s) = konst,$$

te bi bilo

$$T'(s) = 0, \ tj. \ \kappa(s) = 0,$$

što je kontradikcija s dopustivošću krivulje $\alpha$. Pretpostavimo sada da je $\alpha$ krivulja konstantnog nagiba, tj. neka duž krivulje $\alpha$ postoji jednično konstantno vektorsko polje $V$ za koje vrijedi

$$T(s) \cdot V = \cos\varphi.$$

Deriviranjem prethodnog izraza dobivamo

$$T'(s) \cdot V = 0,$$

odakle zbog $\kappa(s) \neq 0$ slijedi

$$N(s) \cdot V = 0.$$

Slijedi da u svakoj točki krivulje $\alpha$ vektorsko polje $V$ možemo prikazati kao $V = a(s)T(s) + b(s)B(s)$, gdje su $a, b : I \to \mathbb{R}$ glatke funkcije za koje vrijedi

$$a(s) = V \cdot T(s) = \cos\varphi, \ b(s) = V \cdot B(s).$$

Kako je $V$ jedinično vektorsko polje slijedi $a^2(s) + b^2(s) = 1$, što povlači $b^2(s) = \sin^2\varphi$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $b(s) = \sin\varphi$. Slijedi

$$V = \cos\varphi T(s) + \sin\varphi B(s).$$

Sada je

$$0 = V' = (\cos\varphi\kappa(s) - \sin\varphi\tau(s))N(s).$$

Vektor $N(s)$ je jedinični vektor, stoga nužno vrijedi $\cos\varphi\kappa(s) - \sin\varphi\tau(s) = 0$ tj.

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = konst.$$

što je trebalo pokazati. Obratno, neka je $\frac{\tau}{\kappa} = konst.$ Definirajmo $\varphi$ kao

$$\frac{\tau}{\kappa} = ctg\,\varphi.$$

Neka je $V(s) = \cos\varphi T(s) + \sin\varphi B(s)$. Pokazat ćemo da je $V$ jedinično i konstantno polje, koje s krivuljom $\alpha$ zatvara konstantni kut. $V$ je očito jedinično polje. Pokažimo da je konstanto,

$$V'(s) = \cos\varphi\kappa N + \sin\varphi(-\tau)N = 0.$$

Pokažimo da $\alpha$ s njim zatvara konstantan kut,

$$c'(s)\cdot V = T(s)\cdot V = \cos\varphi = konst.$$

Time smo dokazali Lemu 4.2. □

Dokaz je preuzet iz [3].

**Primjer 4.1.** *Pokažimo da je krivulja $\alpha(t) = (2t, \ln t, t^2)$ konstantnog nagiba.*
*Rješenje: Pokazat ćemo da je omjer zakrivljenosti $\kappa$ i torzije $\tau$ konstantan u svakoj točki krivulje $\alpha$.*

$$\alpha(t) = (2t, \ln t, t^2),$$
$$\dot\alpha(t) = (2, \frac{1}{t}, 2t),$$

*Kako krivulja $\alpha$ nije parametrizirana parametrom duljine luka, koristit ćemo formule za zakrivljenost i torziju krivulje parametrizirane općim parametrom.*

$$\ddot\alpha(t) = (0, -\frac{1}{t^2}, 2),$$

$$\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & -\frac{1}{t^2} & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2}\right),$$

$$\|\dot\alpha(t)\times\ddot\alpha(t)\| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + 16 + \frac{4}{t^4}} = \sqrt{\frac{16t^2 + 16t^4 + 4}{t^4}} = \sqrt{\left(\frac{4t^2+2}{t^2}\right)^2} = \frac{4t^2+2}{t^2} = 4 + \frac{2}{t^2},$$

$$\|\dot\alpha(t)\| = \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2} = \sqrt{\frac{4t^2 + 1 + 4t^4}{t^2}} = \sqrt{\left(\frac{2t^2+1}{t}\right)^2} = \frac{2t^2+1}{t} = 2t + \frac{1}{t},$$

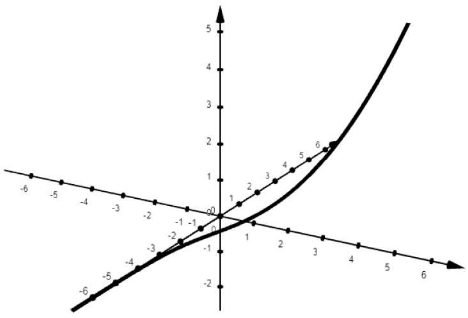
$$\kappa(t) = \frac{4 + \frac{2}{t^2}}{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^3},$$

$$\dddot{\alpha}(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, 0\right),$$

$$(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)) \cdot \dddot{\alpha}(t) = \left(\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2}\right) \cdot \left(0, \frac{2}{t^3}, 0\right) = -\frac{8}{t^3},$$

$$\tau(t) = \frac{-\frac{8}{t^3}}{\left(4 + \frac{2}{t^2}\right)^2},$$

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{\frac{-\frac{8}{t^3}}{\left(4+\frac{2}{t^2}\right)^2}}{\frac{4+\frac{2}{t^2}}{\left(2t+\frac{1}{t}\right)^3}} = -\frac{\frac{8}{t^3}\left(2t + \frac{1}{t}\right)^3}{\left(4 + \frac{2}{t^2}\right)^3} = -\frac{\frac{8}{t^3}\left(8t^3 + 12t + \frac{6}{t} + \frac{1}{t^3}\right)}{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}} = -\frac{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}}{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}} = -1.$$



**Slika 2.** Krivulja konstantnog nagiba iz Primjera 4.1.

U sljedećoj lemi koristit ćemo pojam obična cilindrična spirala, koja je također krivulja konstantnog nagiba. Da bismo mogli iskazati i dokazati lemu, naprije definirajmo takvu krivulju.

**Definicija 4.3.** *Krivulja koja nastaje istovremenom rotacijom i translacijom točke konstantnom brzinom duž $z-$osi naziva se obična cilindrična sirala. Parametrizacija takve krivulje je oblika $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, gdje je $a > 0$ i $b \neq 0$.*

**Lema 4.4.** *Neka je krivulja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana duljinom luka. Krivulja $\alpha$ je obična cilindrična spirala ako i samo ako vrijedi $\kappa = konst. > 0$ i $\tau = konst.$*

*Dokaz.* Za svaki $a > 0$ i $b \neq 0$ jednadžba

$$\alpha(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{p}\right), a\sin\left(\frac{s}{p}\right), \frac{bs}{p}\right)$$

je parametrizacija duljinom luka, obične cilindrične spirale. Pri tome je $p = \sqrt{a^2+b^2}$. Jedinično tangencijalo polje $T$, za krivulju parametriziranu duljinom luka, dano je kao

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{a}{p}\sin\left(\frac{s}{p}\right), \frac{a}{p}\cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{b}{p}\right).$$

Deriviramo li gornji izraz dobivamo

$$T'(s) = \alpha''(s) = \left(-\frac{a}{p^2}\cos\left(\frac{s}{p}\right), -\frac{a}{p^2}\sin\left(\frac{s}{p}\right), 0\right),$$

a kako je zakrivljenost krivulje parametrizirane duljinom luka dana s $\kappa(s) = ||\alpha''(s)||$, slijedi

$$\kappa(s) = ||T'(s)|| = \frac{a}{p^2} = \frac{a}{a^2+b^2} > 0.$$

Nadalje vrijedi, $T' = \kappa N$ iz čega slijedi

$$N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{p}\right), -\sin\left(\frac{s}{p}\right), 0\right).$$

Vektor $B$ je definiran kao vektorski produkt $T \times N$,

$$B(s) = \left(\frac{b}{p}\sin\left(\frac{s}{p}\right), -\frac{b}{p}\cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{a}{p}\right).$$

Derivacijom dobivamo:

$$B'(s) = \left(\frac{b}{p^2}\cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{b}{p^2}\sin\left(\frac{s}{p}\right), 0\right).$$

Kako vrijedi $B' = -\tau N$, očito je

$$\tau(s) = \frac{b}{p^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Kako su $\kappa$ i $\tau$ obične cilindrične spirale konstante, očito je i $\frac{\tau}{\kappa}$ konstanta. □

Pomoću proizvoljne ravninske krivulje možemo generirati krivulju konstantnog nagiba na način koji je opisan sljedećom lemom.

**Lema 4.5.** *Neka je $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ zadana kao $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ parametrizirana parametrom duljine luka. Definiramo li prostornu krivulju $\gamma$ kao $\gamma(s) = (x(s), y(s), s \cdot \cos\psi)$ pri čemu je $\psi$ konstantan, tada krivulja $\gamma$ zatvara konstantan kut $\psi$ s vektorom $(0,0,1)$.*

*Dokaz.* Krivulju $\gamma$ smo definirali $\gamma(s) = (x(s), y(s), s \cdot \cos\psi)$, pa je njezina prva derivacija $\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t), \cos\psi)$. Kako je $\phi$ kut između $\gamma'(t)$ i vektora $(0,0,1)$ te vrijedi $T \cdot u = \cos\phi$ dobivamo:

$$\cos\phi = \frac{\dot\gamma(t)\cdot(0,0,1)}{||\dot\gamma(t)||} = \frac{(\dot x(s), \dot y(s), \cos\psi)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{(1+\cos^2\psi)}} = \frac{\cos\psi}{\sqrt{(1+\cos^2\psi)}}$$

Iz dobivenog izraza, kvadriranjem i sređivanjem jednakosti dobijemo sljedeće:

$$\cos^2\phi = \frac{\cos^2\psi}{1+\cos^2\psi} \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2\phi} = \frac{1+\cos^2\psi}{\cos^2\psi} \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2\phi} = 1 + \frac{1}{\cos^2\psi}$$

Analogno se pokaže da vrijedi $\cos^2\psi = \mathrm{ctg}\phi$. □

U nastavku ćemo naučiti više o projekciji krivulja i svojstva koja vrijede za krivulje konstantnog nagiba koje leže na sferi.

**Lema 4.6.** *Neka je krivulja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom duljine luka koja s jediničnim vektorom $u \in \mathbb{R}^3$ zatvara kut $\phi$, pri čemu je $0 < \phi < \pi$. Tada je projekcija $\beta$ krivulje $\gamma$ na ravninu okomitu na vektor $u$, krivulja dana s:*

$$\beta(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot u)u, \ \text{za } a < s < b.$$

*Za zakrivljenosti krivulja $\beta$ i $\gamma$ vrijedi:*

$$\kappa_\beta = \pm\kappa_\gamma \frac{1}{\sin^2 \phi}.$$

**Lema 4.7.** *Neka je krivulja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom duljine luka koja s jediničnim vektorom $u \in \mathbb{R}^3$ zatvara kut $\phi$, pri čemu je $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Ako krivulja $\gamma$ leži na sferi radijusa $r > 0$ tada vrijedi:*

1. *Zakrivljenost i torzija krivulje $\gamma$ dani su kao:*

$$\kappa_\gamma(s)^2 = \frac{1}{r^2 - s^2 ctg^2\phi}$$

$$\tau_\gamma(s)^2 = \frac{1}{r^2 tg^2\phi - s^2}$$

2. *Zakrivljenost projekcije $\beta$ krivulje $\gamma$ na ravninu okomitu na vektor $u$, je dana kao:*

$$\kappa_\beta(s_1)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^4 \phi - s_1^2 \cos^2 \phi}$$

   *pri čemu je $s_1 = s \sin \phi$ duljina luka krivulje $\beta$.*

3. *Neka je $r = a + 2b$ i $\cos\phi = \frac{a}{a+2b}$. Tada je jednadžba krivulje $\beta$ upravo jednadžba epicikloide.*

Za dokaz Leme 4.7. koristit ćemo sljedeći teorem

**Teorem 4.8.** *Neka je krivulja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom duljine luka sa zakrivljenošću $\kappa$ i torzijom $\tau$. Ako krivulja $\alpha$ leži na sferi radijusa $r > 0$ sa središtem u $q \in \mathbb{R}^3$. Tada vrijedi:*

1. $\kappa \geq \frac{1}{r}$,

2. $\tau^2 \left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2$,

3. $\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'$.

Dokažimo sada Lemu 4.7.

*Dokaz.* 1. Budući da krivulja $\gamma$ zatvara kut $\psi$ s jediničnim konstantnim vektorom, tada znamo da vrijedi $\frac{\tau}{\kappa} = \pm ctg\psi$. Iz Teorema 4.8. iskoristit ćemo relaciju 2)., uz činjenicu da je $\tau = \pm\kappa ctg\phi$ i dobivamo:

$$\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2 = \tau^2\left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = \kappa^2 ctg^2\phi\left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = ctg^2\phi(\kappa^2 r^2 - 1).$$

$$\frac{(\kappa')^2}{\kappa^4} = ctg^2\phi(\kappa^2r^2 - 1) \;\; / : (\kappa^2 r^2 - 1)$$

$$\frac{(\kappa')^2}{\kappa^4(\kappa^2r^2 - 1)} = ctg^2\phi \;\; /\sqrt{}$$

$$\frac{\kappa'}{\kappa^2\sqrt{\kappa^2r^2 - 1}} = \pm ctg\phi \tag{1}$$

Integriramo li jednadžbu (3) i dobijemo:

$$\frac{1}{\kappa}\sqrt{\kappa^2r^2 - 1} = \pm s ctg\phi \tag{2}$$

Izrazimo li iz jednadžbe (4) $\kappa$ dobijemo:

$$\sqrt{\kappa^2r^2 - 1} = \pm s\kappa ctg\phi \;\; /^2$$

$$\kappa^2r^2 - 1 = s^2r^2ctg^2\phi$$

$$\kappa^2r^2 - s^2\kappa^2ctg^2\phi = 1$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{r^2 - s^2ctg^2\phi}. \tag{3}$$

Ovim izrazom je dana zakrivljenost $\kappa_\gamma(s)$ krivulje $\gamma$. Trebamo još dobiti izraz za torziju $\tau$. Iskoristit ćemo činjenicu da je $\kappa = \pm\frac{\tau}{ctg\phi}$ i uvrstimo to u jednadžbu (5), iz čega slijedi:

$$\frac{\tau^2}{ctg^2\phi} = \frac{1}{r^2 - s^2ctg^2\phi} \;\; / \cdot ctg^2\phi$$

$$\tau^2 = \frac{ctg^2\phi}{r^2 - s^2ctg^2\phi}$$

$$\tau^2 = \frac{\frac{1}{tg^2\phi}}{r^2 - s^2ctg^2\phi}$$

$$\tau^2 = \frac{1}{r^2tg^2\phi - s^2}$$

Izraz iz Leme 4.6. uvrstimo u (5) i sređivanjem dobijemo $\kappa_\beta(s_1)^2 = \frac{1}{r^2\sin^4\phi - s_1^2\cos^2\phi}$, pri čemu je $s_1 = s\sin\phi$ duljina luka krivulje $\beta$.

Kako je $\cos\phi = \frac{a}{a+2b}$ tada slijedi da je

$$\sin^4\phi = (\sin^2\phi)^2 = (1-\cos^2\phi)^2 = \left(1 - \frac{a^2}{(a+2b)^2}\right)^2 = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^4}. \tag{4}$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza za $\sin^4\phi$ u jednadžbu pod 2) i sređivanjem dobivamo

$$\frac{1}{\kappa_\beta(s_1)} = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2} - \frac{a^2 s_1^2}{(a+2b)^2}.$$

Zamijenimo li $s$ sa $s_1$ dobit ćemo prirodnu jednanžbu epicikloide. $\square$

# Literatura


[1] E. Abbena, S. Salamon i A. Gray, Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/CRC, 2017.

[2] W. Kühnel, Differential Geometry-Curves-Surfaces-Manifolds, AMS, 2002.

[3] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, Uvod u diferencijalnu geometriju, PMF- Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, skripta.

[4] V. Pekić, Cikloidne krivulje, PMF- Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, završni rad, 2019.