# Osnovna znanja o realnim brojevima u nastavi matematike

**Klarić, Matea**

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Matea Klarić**

# Osnovna znanja o realnim brojevima u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Matea Klarić**

# Osnovna znanja o realnim brojevima u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016.

# Sadržaj

# Uvod

Odakle potječe sustav brojeva koji koristimo danas i kako je do njega došlo? Većina učenika osnovne škole nije razmišljala o ovome pitanju, niti su pomišljali da su sustav stvarali ljudi tijekom više tisuća godina. Čini se da razumijevanje prirodnih brojeva dolazi poprilično prirodno. Zapravo, oni su toliko osnovni da je matematičar Kronecker jednom rekao: "Bog je stvorio prirodne brojeve, sve ostalo je bilo djelo čovjeka." Dakle, broj nula, negativni brojevi, racionalni te iracionalni i kompleksni brojevi su ljudska stvaralaštva, kao i pravila za rad s njima. Najzanimljiviji je razvoj današnjeg sustava brojeva, pa ćemo započeti s osnovnim svojstvima i nastaviti do složenijih značajki i ključnih teorema o realnim brojevima i njihovim prikazima.

U prvom poglavlju razmatrat ćemo opažanja koja su dovela do otkrića svojstava komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti cijelih brojeva. Odgovorit ćemo na sljedeća pitanja: "Zašto množenjem dva negativna broja dobijemo pozitivan broj?", "Zašto dijelimo razlomke tako da prvi razlomak pomnožimo s recipročnom vrijednosti drugog razlomka?". Opisat ćemo razloge korištenja različitih metoda za izvršavanje operacija nad skupom prirodnih brojeva, cijelih brojeva te razlomaka.

U sljedećem poglavlju proširujemo svojstva na sve realne brojeve, što će zahtijevati upotrebu limesa. Nakon toga, raspravit ćemo o drugim aspektima skupa realnih brojeva. Konkretnije, ispitat ćemo decimalni prikaz brojeva koji predstavlja veliki korak naprijed za čovječanstvo i dokazati neke osnovne teoreme o decimalnom prikazu realnih brojeva. Također ćemo raspraviti o svojstvu prebrojivosti skupa realnih brojeva.

U posljednjem poglavlju dokazat ćemo neke od osnovnih teorema s kojima se često susrećemo u algebri, a daju odgovore na pitanja koja u većini slučajeva zbunjuju učenike.

Ovom prilikom se želim zahvaliti mentorici diplomskog rada, doc. dr. sc. Ljerki Jukić Matić na korisnim savjetima i idejama tijekom procesa stvaranja rada.
Također se zahvaljujem obitelji, Ivanu i prijateljima na podršci i razumijevanju koje su mi pružali tijekom studiranja.

# 1 Intuitivan pristup

## 1.1 Osnovna pravila

**Primjer 1.** *Prijatelj zahtjeva od Vas da mu pokažete kako svojstvo distributivnosti može biti primjenjivo u stvarnom životu, na što mu Vi uzvraćate da ga koristite svaki put za brzo množenje napamet. Na koji to način koristimo svojstvo distributivnosti pri računanju umnoška* $7 \cdot 28$ *u glavi, bez upotrebe standardnog postupka množenja?*

Nakon rješavanja motivacijskog problema, možemo se zapitati nismo li tijekom života koristili temeljna svojstva brojeva, a da o tome nismo ni razmišljali. Uostalom, kada ste zadnji put preispitali činjenicu da je $4 + 5 = 5 + 4$? Ta svojstva su nam tako prirodna da o njima ni ne razmišljamo. Zapravo, sigurno smo puno ranije koristili ta pravila nego što smo naučili da su to pravila.

Tijekom svojeg studija, nastavnici matematike često su bili izloženi svojstvima komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti. To je zato što oni imaju važnu ulogu u osnivanju matematike. Budući su ta svojstva duboko ukorijenjena u našim promatranjima, mi ih spremno prihvaćamo. Na primjer, razmislimo o tvrdnji da je $2+3$ isto što i $3+2$. Povijesno, zbrajanje znači kombiniranje. Stoga, ako imamo dva štapića i kombiniramo ih s tri štapića (recimo, stavljanjem svih u vreću), bilo da prvo stavimo dva štapića, a potom tri štapića, potpuno je isto kao kad bismo ih stavili obrnutim redoslijedom. I dalje ćemo imati istih pet štapića u vreći. Na jednostavan način možemo prikazati to što smo uradili, pri čemu simbol $'I'$ predstavlja štapić. Kombiniranje jednostavno znači premještanje objekata da budu zajedno, jedan uz drugog.

$$\begin{aligned} \text{kombiniramo 2 i 3} \rightarrow \quad II + III &= IIIII \\ \text{kombiniramo 3 i 2} \rightarrow \quad III + II &= IIIII \end{aligned}$$

Ova ideja vrijedi za sve primjere koje konstruiramo na takav način i čini se ukazuje na činjenicu da za bilo koje prirodne brojeve $a$ i $b$ vrijedi

$$a + b = b + a.$$

Pošto nitko nikada nije našao izuzetak i naša je intuicija o tome jaka, prihvaćamo to kao pravilo za prirodne brojeve i poznajemo kao **svojstvo komutativnosti zbrajanja**.

Sličnim primjerima možemo dokazati svojstvo asocijativnosti. U ovom slučaju zagrade imaju svrhu razmatranja izraza unutar zagrade kao cjeline. Za ilustraciju svojstva asocijativnosti, razmotrit ćemo dva različita načina kombiniranja štapića koja ćemo prikazati s

$(2+3)+4$ i $2+(3+4)$. Prvo, provjerimo značenje izraza $(2+3)+4$:

$$(II + III) + IIII = (IIIII) + IIII = IIIIIIIII.$$

Najprije smo kombinirali 2 i 3 te dobili 5, a zatim smo kombinirali 5 i 4, pa dobili konačno rješenje 9. Sada ćemo provjeriti izraz $2+(3+4)$:

$$II + (III + IIII) = II + (IIIIIII) = IIIIIIIII.$$

U ovom slučaju smo prvo kombinirali 3 i 4, pa dobili 7, a zatim smo kombinirali 2 i 7, što također iznosi 9. Dobijemo isti rezultat u oba slučaja, a ponavljanjem različitih primjera možemo opaziti slične rezultate. Prema tome, prihvaćamo da za bilo koja tri prirodna broja $a, b$ i $c$ vrijedi

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

i to svojstvo nazivamo **svojstvom asocijativnosti zbrajanja**.

Svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju za prirodne brojeve se također može ilustrirati. Na primjer, sljedećim prikazom uvjerit ćemo se da je $2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$, pri čemu koristimo činjenicu da je množenje ponavljano zbrajanje. Odnosno, $2 \cdot (3+4)$ znači da $(3+4)$ zbrojimo sa samim sobom dva puta, što je jednako $(3+4)+(3+4)$.

$$\begin{aligned} (III + IIII) + (III + IIII) &= (III + III) + (IIII + IIII) \\ 2 \cdot (3+4) &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Koristeći slične prikaze, u različitim primjerima potvrđujemo taj odnos i na osnovi toga prihvaćamo pravilo da, za tri prirodna broja $a, b$ i $c$ vrijedi

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

inače poznato kao **svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju**. Na sličan način mogu biti ilustrirana svojstva komutativnosti i asocijativnosti za množenje u skupu prirodnih brojeva, koji označavamo s $\mathbb{N}$.

Ako promatramo skup prirodnih brojeva zajedno s nulom, koji označavamo s $\mathbb{N}_0$, pravila i dalje vrijede. Naime, ako kombiniramo bilo koji broj objekata s ničim, gdje *ništa* predstavlja znak nula, dobijemo isti broj objekata. To jest, $a+0=0+a=a$. Ponovno, svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti i dalje vrijede s nulom dodanom prirodnim brojevima. Stoga, za takav prošireni skup, $\mathbb{N}_0$, vrijede sljedeća svojstva:

1. $a + b = b + a$ Komutativnost zbrajanja,

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ Asocijativnost zbrajanja,

3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributivnost množenja prema zbrajanju,

4. $ab = ba$ Komutativnost množenja,

5. $(ab)c = a(bc)$ Asocijativnost množenja,

6. $a + 0 = 0 + a = a$ Svojstvo nule.

Promotrimo upotrebu zagrade, posebno u *pravilima* 2 *i* 5. Prisjetimo se da $(a + b)$ znači da izraz $a + b$ shvaćamo kao jedan broj. Zašto u *pravilu* 2 stavljamo zagrade na prvo mjesto? To je zapravo ono što u stvarnosti radimo i kad provodimo mentalnu aritmetiku, što znači da se može provesti jedino između dva broja. Primjerice, kako bismo zbrojili sljedeći niz brojeva: $13 + 26 + 22$? Vjerojatno bismo prvo 6 dodali broju 3 i dobili rezultat 9, a zatim bi dodali 2 pa dobili 11. Nakon toga bismo prenijeli jedinicu i zbrajali desetice. U svakom koraku postupka dodali bismo samo dva broja u trenutku. To je jedini način na koji naš mozak može obraditi zbrajanje. Prema tome, kada dodamo zagrade na lijevoj strani *pravila* 2, mi ustvari zbrajamo samo dva broja, prvi broj $a + b$ (izražen stavljanjem zagrada oko $a + b$), drugom broju, broju $c$. Na desnoj strani je slična situacija: broj $a$ dodajemo broju $b + c$. Slijedi da izraz $a + b + c$ može biti protumačen na dva različita načina. Možemo to shvatiti kao $(a + b) + c$ ili $a + (b + c)$. *Pravilo* 2 kaže da se, bez obzira na koji od ta dva načina izraz protumačimo, dobije isto rješenje. Stoga, prema svojstvu asocijativnosti, ako zbrajamo tri broja, nije nužno pisanje zagrada te je pisanje zbroja u obliku $a + b + c$ sasvim u redu. Pravilo također vrijedi i u slučaju zbrajanja više od dva broja.

Iste napomene vrijede i za *pravilo* 5. Množenje je također binarna operacija, pa se pomnožiti mogu jedino dva broja istovremeno. Bez obzira na koji način se interpretira izraz $abc$, $(a \cdot b) \cdot c$ ili $a \cdot (b \cdot c)$, *pravilo* 5 kaže da se dobije isti rezultat. Dakle, ponovno se zagrade mogu izostaviti.

*Pravilo* 3, svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju, vrlo je važno budući da je osnova mnogim algebarskim postupcima koje provodimo. Na koncu, pokazat ćemo da vrijedi za sve realne brojeve. Koristimo ga kada pomnožimo izraz $x(x + 3)$ i dobijemo $x^2 + 3x$. Također vrijedi u metodi množenja *svaki sa svakim* koja se uči u osnovnoj školi kod množenja binoma. Čak i kad rješavamo kompliciranije jednadžbe, na primjer $x(x+3)+2(x-4) = -2$, trebamo svojstvo distributivnosti kako bismo se riješili zagrada, nakon čega možemo nastaviti rješavati jednadžbu. Vjerojatno nećemo pogriješiti ako kažemo da je svojstvo distributivnosti jedno od najvažnijih svojstava u elementarnoj algebri.

U nastavku ćemo pokazati da svojstva asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti vrijede ne samo za prirodne, nego i za cijele brojeve. Ta svojstva su dokazana, a i njihovo neprihvaćanje protivi se našoj intuiciji. Također, ako netko nekada pronađe protuprimjer za bilo koji od ovih svojstava, čitava je matematika kao znanost u problemima. Srećom, mala je vjerojatnost da će se tako nešto dogoditi. Naime, dokazao ih je matematičar Guisseppe Peano $(1858-1932)$ pretpostavljajući više osnovnih činjenica o brojevima skupa s principom matematičke indukcije. On i drugi matematičari razvili su cjelokupan skup realnih brojeva od samoga početka i dokazali sva svojstva koja su prihvaćena čime su ovom području matematike postavili čvrste temelje.

## 1.2 Negativni brojevi i njihova svojstva

Tijekom školovanja, često se u aritmetičkim i algebarskim manipulacijama koristi pravilo da je umnožak dva negativna broja pozitivan broj. Ali, učenici često ne razmišljaju zašto to pravilo vrijedi. Ustvari, ne samo učenici, nego i učitelji matematike. Postoji mnogo objašnjenja za to pravilo, a neka od njih ćemo promotriti u ovom odjeljku.

Negativni brojevi osmišljeni su kako bi izrazili suprotne situacije. Na primjer, ako broj 3 predstavlja dobitak od tri, onda broj $-3$ predstavlja gubitak od tri. Stoga, ako kombiniramo dobitak od tri i gubitak od tri, ukupan rezultat nije ni dobitak ni gubitak. Matematički zapisano, $3+(-3)=0$. Tvrdnja $(-4)+3=-1$ se može interpretirati kao *gubitak od četiri kombiniran s dobitkom od tri rezultira gubitkom od jedan*, što ima smisla. Izraz $(-4)+(-3)=-7$ jednostavno kaže da gubitak od četiri kombiniran s dodatnim gubitkom od tri rezultira gubitkom od sedam. Ako želimo skratiti posljednji primjer, možemo izostaviti znak zbrajanja i zagrade te jednostavno napisati $-4-3=-7$ (i čitati kao *gubitak od četiri praćen gubitkom od tri rezultira gubitkom od sedam*) što je ono što inače radimo u algebri. Možemo reći da su matematičari kreirali koncept negativnih brojeva kako bi nam omogućili izražavanje suprotnih situacija i pri tome vrijedi sljedeće pravilo:

7. Za svaki cijeli broj $a$ postoji broj takav da je $a+(-a)=0$ i obilježava se s $-a$.

Prethodno spomenuti broj $-a$ nazivamo suprotnim brojem ili aditivnim inverzom broja $a$ i imamo sedmo svojstvo poznato i kao **svojstvo aditivnog inverza**. Ako nas zanima aditivni inverz od nule, to će biti broj koji kada se doda nuli, daje nula. Kako je $0+0=0$, za aditivni inverz od nule uzima se da je nula. Preformulirano, $-0=0$. Primijetimo da smo u *pravilu* 7 rekli kako postoji broj koji nazivamo aditivnim inverzom. Znači li to da ih može biti više od jednog? Odgovor je niječan, aditivan inverz je jedinstven i u to ćemo se uvjeriti kasnije.

Nakon što smo kreirali negativne brojeve, možemo proširiti naš skup brojeva. Ako prirodnim brojevima i nuli pripojimo negative prirodnih brojeva, dobijemo skup cijelih brojeva i označavamo ga sa $\mathbb{Z}$. Prema tome, skup cijelih brojeva uključuje brojeve $0, \pm 1, \pm 2$, i tako dalje.

Kako bismo primijenili negativne brojeve na stvarne probleme, moramo definirati pravila za računanje s njima, tako da bi u konačnici imali smisla. Svakako, ako zbrajamo dva negativna broja trebali bi dobiti negativan broj (jer je, primjerice, suma dva gubitka gubitak). Zbroj dva negativna broja možemo definirati na sljedeći način: ako su $x$ i $y$ prirodni brojevi, uključujući i nulu, tada je $-x + -y$ definirano kao

$$-(x+y). \tag{1}$$

Tako je, primjerice, suma od $-3$ i $-4$ po definiciji jednaka $-(3+4)$, što je jednako $-7$. I, ako zbrajamo pozitivan i negativan broj, tada dobitak predstavljen pozitivnim brojem i gubitak predstavljen negativnim brojem moraju rezultirati ili dobitkom ili gubitkom, ovisno o tome što je od tog dvoje veće.

Nastavimo dalje s množenjem brojeva s predznakom. U osnovnoj školi učimo da, kada množimo dva broja, provodimo ponavljano zbrajanje. Stoga, $2 \cdot 3$ znači da broj 3 dva puta zbrojimo sa samim sobom. Slično, tu ideju možemo proširiti na množenje pozitivnog broja negativnim. Prema tome, zbog dosljednosti, $3 \cdot (-4)$ bi trebalo značiti zbrajanje $-4$ sa samim sobom tri puta. U nešto praktičnijim terminima to znači da trostruki gubitak od četiri rezultira konačnim gubitkom od dvanaest. Zapisano matematički, $3 \cdot (-4) = -12$. Stoga, barem u smislu dobitaka i gubitaka, definirat ćemo da množenje pozitivnog broja negativnim daje negativan broj. Nakon što sastavimo sva pravila za računanje s brojevima s predznakom, dobit ćemo da vrijedi svojstvo komutativnosti, pa će slijediti da je $(-4) \cdot 3$ također $-12$. Odnosno, množenje negativnog broja pozitivnim također bi trebalo dati negativan broj.

Za skup realnih brojeva koji imamo u ovom trenutku nismo potvrdili da svojstvo komutativnosti vrijedi za brojeve s predznakom. Zato, ovo su naše formalne definicije množenja pozitivnog broja negativnim i negativnog broja pozitivnim, na osnovu onoga što smo vidjeli u primjeni: ako su $x$ i $y$ iz skupa prirodnih brojeva s nulom, tada je

$$x \cdot (-y) \quad \text{definirano da je} - (xy), \tag{2}$$

$$(-y) \cdot x \quad \text{definirano da je} - (xy). \tag{3}$$

Primijetimo da smo definirali produkt koji je u oba slučaja isti. Prema tome, ugradili smo komutativnost u našu definiciju množenja. Sada se pitamo kako bismo trebali definirati množenje negativnog broja negativnim brojem, tako da odražava ono čemu svjedočimo u stvarnom životu. Taj umnožak je po definiciji pozitivan, ali kako to možemo shvatiti? Zamislimo sljedeću situaciju: ako svaki tjedan gubimo tri kilograma, taj gubitak možemo prikazati kao $(-3)$. Ako se ovo nastavi kroz nekoliko tjedana, onda će nakon četiri tjedna naš gubitak narasti na gubitak od 12 kilograma. Taj gubitak kilograma možemo izračunati na sljedeći način: $4 \cdot (-3) = -12$. Kod ovog računanja, 4 znači četiri tjedna u budućnosti. Dakle, četiri tjedna u prošlosti, suprotna situacija, bit će prikazana s $(-4)$, i prije četiri tjedna naša je težina bila četiri puta veća od sadašnje težine. Pa, ako $4 \cdot (-3)$ znači kolika će promjena težine biti za četiri tjedna, tada $(-4) \cdot (-3)$ predstavlja promjenu težine od *prije* četiri tjedna. I pošto je promjena težine pozitivan broj 12, možemo definirati da je $(-4) \cdot (-3) = 12$. Ovo nije dokaz, nego jednostavno način kojim kažemo kako smo, ako ćemo negativnim brojevima prikazivati suprotne životne situacije, prisiljeni prihvatiti pravilo da množenje dva negativna broja daje pozitivan broj, zbog dosljednosti u primjeni. Formalna definicija množenja dva negativna broja dana je s

$$(-x) \cdot (-y) = xy, \tag{4}$$

gdje su $x$ i $y$ elementi skupa prirodnih brojeva s nulom. Zato je $(-3) \cdot (-4) = 3 \cdot 4 = 12$, prema definiciji. Primijetimo da je, prema definiciji, $(-y) \cdot (-x)$ jednako $y \cdot x$ što znamo da je $x \cdot y$, ako su $x$ i $y$ cijeli brojevi. Prema tome, vrijedi

$$(-x) \cdot (-y) = xy \quad \text{i} \quad (-y) \cdot (-x) = xy,$$

zbog čega naša definicija automatski osigurava komutativnost množenja negativnih brojeva.

Sada kad imamo definicije (1),(2),(3) i (4) za zbrajanje i množenje, moramo dokazati da svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti vrijede. Oni zaista vrijede, ali mi ćemo demonstrirati poseban slučaj jednog od njega, svojstva distributivnosti, kako bismo dali glavno svojstvo onoga što je uključeno i u preostale dokaze.

**Primjer 2.** *Dokažite svojstvo distributivnosti za umnožak negativnog broja i sume dva pozitivna broja.*

*Rješenje:* Pretpostavimo da su $a, b, c$ prirodni brojevi, tada je izraz $(-a)\cdot(b+c)$ umnožak negativnog broja i sume dva pozitivna cijela broja. Prema (3), ovaj je izraz jednak $-[a(b+c)]$, gdje smo $y$ zamijenili s $a$, a $x$ smo zamijenili s $b + c$. To je jednako $-(ab + ac)$, budući da svojstvo distributivnosti vrijedi za prirodne brojeve, a $a, b, c$ to jesu. I sada, prema (1) kada $x$ zamijenimo s $ab$ i $y$ zamijenimo s $ac$, imamo $-(ab + ac) = -(ab) + -(ac)$. Konačno, prema (3), ovo možemo zapisati kao $(-a)(b) + (-a)(c)$. Dakle, pokazali smo da je $(-a) \cdot (b + c) = (-a) \cdot (b) + (-a) \cdot (c)$ gdje su $a, b, c$ prirodni brojevi. Prema tome, svojstvo distributivnosti vrijedi.

Ali, ovo je bio samo jedan slučaj. Trebali bismo se baviti i slučajevima $(-a) \cdot (-b + -c)$, $(-a) \cdot (b + -c)$, $a \cdot (-b + c)$, i tako dalje. Mi to nećemo raditi ovdje nego ćemo prihvatiti ta pravila i biti zahvalni što su si matematičari uzeli vremena za njihovo dokazivanje.

**Teorem 1.** *Pravila* $1 - 7$ *vrijede za cijele brojeve.*

Učenici osnovne škole nemaju problema s prihvaćanjem *pravila* $1 - 7$ za cijele brojeve. Da je umnožak pozitivnog i negativnog broja negativan broj također je lako prihvaćeno upotrebom koncepta ponavljanog zbrajanja koji smo ranije opisali. Međutim, probleme im stvara tvrdnja da je umnožak dva negativna broja pozitivan broj. Drugi način uvjeravanja učenika ili sebe u navedenu tvrdnju je stvaranje argumenta u kojem ispitujemo poseban slučaj. Promatrat ćemo umnožak $(-4) \cdot (-3)$. Pretpostavljajući kako smo prihvatili da množenje s nulom daje nulu, imamo $-3 \cdot 0 = 0$. Napisat ćemo to kao

$$-3 \cdot (4 + (-4)) = 0. \tag{5}$$

Sada, ako vjerujemo da svojstvo distributivnosti vrijedi, možemo ga primijeniti u (5) kako bismo dobili

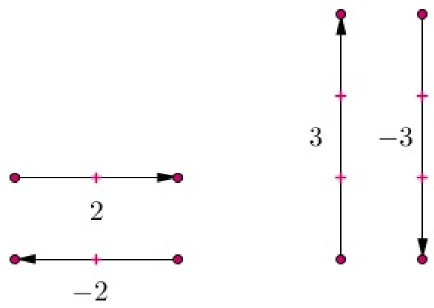
$$(-3) \cdot (4) + (-3) \cdot (-4) = 0. \tag{6}$$

Ali, već smo prihvatili da je $(-3) \cdot 4 = 4 \cdot (-3) = -12$ pa izraz (6) postaje

$$-12 + (-3) \cdot (-4) = 0.$$

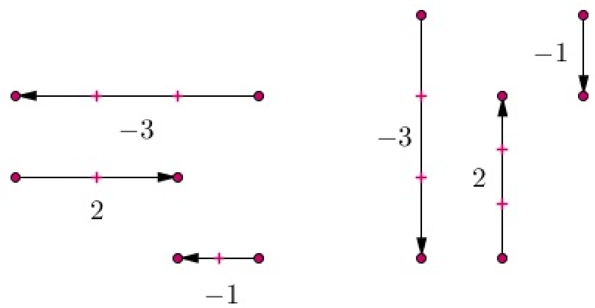
Iz ovoga slijedi da je $(-3) \cdot (-4) = 12$. Jer, dodajemo nešto negativnom broju 12 i dobijemo nulu, pa tako to nešto, $(-3) \cdot (-4)$, mora biti jednako $+12$.

Postoji još jedan način prikazivanja operacija sa cijelim brojevima. Prema [8], pozitivne brojeve možemo zamisliti kao pomake slijeva nadesno ili odozdo prema gore. Slično tome, negativne brojeve zamišljamo kao pomake zdesna nalijevo ili odozgo prema dolje. Navedeni prikazi vidljivi su na *Slici 1.*



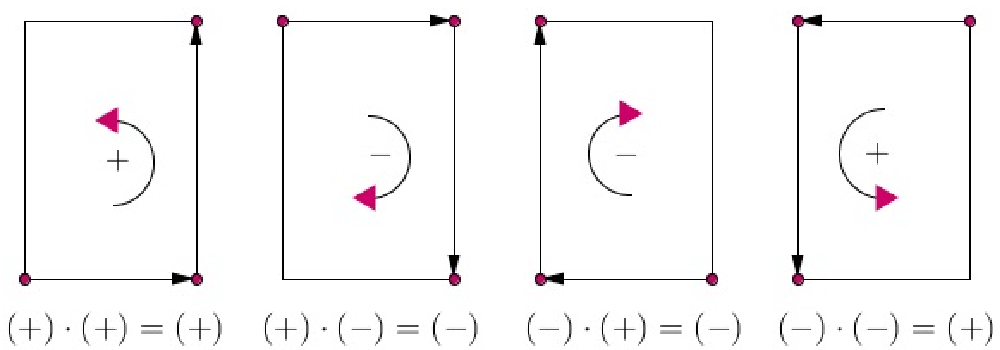

Slika 1.

Zatim, zbrajanje cijelih brojeva $x$ i $y$ shvaćamo kao dodavanje pomaka $y$ pomaku $x$, bilo na horizontalnoj osi ili vertikalnoj, ovisno s kojim načinom prikazivanja brojeva smo krenuli. Primjerice, tada bismo izraz $(-3) + 2 = -1$ mogli predočiti na dva različita načina:




Slika 2.

Operaciju množenja cijelih brojeva $x$ i $y$ objasnit ćemo preko površine pravokutnika sa stranicama duljine $x$ i $y$ koje ujedno predstavljaju i odgovarajuće pomake. Ako smjer kazaljke na satu smatramo negativnim, a smjer koji je obrnut od smjera kazaljke na satu pozitivnim, onda imamo sljedeće situacije:




Slika 3.

Pokazali smo načine kako učenicima predočiti da je umnožak dva negativna broja jednak pozitivnom broju. Ali, spomenimo da se nekoliko matematičara ogorčeno borilo s postojanjem negativnih brojeva, nisu vjerovali u njihovu egzistenciju i mnogo njih zapravo nije razumjelo negativne brojeve. Tek u 19. stoljeću, autor F. Busset u svom matematičkom priručniku opisuje negativne brojeve kao *krov odstupanja ljudskog razuma*. Matematičar 18. stoljeća, Francis Maseres, opisuje negativne brojeve kao one koji *zamračuju stvari koje su u svojoj prirodi previše očite*. S obzirom na to kako su negativni brojevi danas prihvaćeni, ovakva vrsta poimanja teška je za shvatiti.

Spomenuli smo da su negativni brojevi stvoreni za izražavanje suprotnih situacija, i $-3$ predstavlja suprotnost značenja broja 3. Što bi onda značilo $-(-3)$? To bi trebalo značiti suprotno od $-3$. Budući da su $-3$ i 3 suprotni, suprotno od $-3$ je 3, što znači da je $-(-3) = 3$.

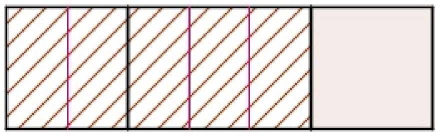
Definirali smo pravila za zbrajanje i množenje brojeva s predznakom, ali nismo definirali što oduzimanje brojeva s predznakom znači. Također smo definirali da je $a - b$ jednako $a + (-b)$. Definicija koju smo dali ima smisla s gledišta praktičnosti jer kada gubimo novac, dodajemo gubitak svojim financijama. Prema tome, bilo koji teorem o oduzimanju može biti dokazan okretanjem u problem zbrajanja. Za ilustraciju definicije oduzimanja, $2 - 3$ je definirano kao $2 + (-3) = -1$ i $3 - (-4) = 3 + -(-4) = 3 + 4$. Posljednji primjer pokazuje zašto, kada oduzimamo negativan broj, dodajemo pozitivan. Intuitivniji način objašnjenja je pristupanjem s praktičnog gledišta. Ako se na negativan broj gleda kao na dug, onda oduzimanje negativnog broja znači *uklanjanje* duga. A, kada je dug uklonjen, nešto je stečeno. Prema tome, oduzimanje negativnog broja ekvivalentno je zbrajanju pozitivnog broja.

## 1.3 Osnovna pravila za razlomke

Dobro je poznata činjenica da su razlomci jedna od tema koja najviše zbunjuje osnovnoškolce. Zapravo, nastavnici matematike u srednjim školama tvrde da njihovi učenici imaju iznimno slabo predznanje o gradivu vezanom za razlomke i taj nedostatak stvara glavni kamen spoticanja prilikom učenja algebre. Jedan od razloga zašto imaju toliko poteškoća je što njima pravila nemaju nikakvog smisla. Kako bi objasnili učenicima koji imaju problema s učenjem i prihvaćanjem pravila za operacije s razlomcima, zašto kada dijelimo razlomke uzimamo recipročnu vrijednost, a zatim množimo? Posebno, kako bi objasnili zašto je $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$ ? U nastavku ćemo razmotriti razlomke, počevši s onima čiji brojnik i nazivnik su pozitivni brojevi.

Razlomci su brojevi s kojima se susrećemo tijekom cijelog svog života. Na primjer, često dijelimo stvari na dijelove i trebamo biti u mogućnosti opisati što vidimo. Točnije, prvo smo naučeni da $\frac{1}{3}$ neke količine dobijemo tako da ju podijelimo na tri jednaka dijela i onda uzmemo jedan od ta tri dijela. Prema tome, $\frac{1}{3}$ od 6 je 2.

Iz takvih prikaza nastala su prva pravila za rad s razlomcima. Tako na primjer, ako želimo zbrojiti $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ kolača, jasno je iz *Slike 4* da je rješenje $\frac{5}{7}$. Samo smo dodali dva



Slika 4.

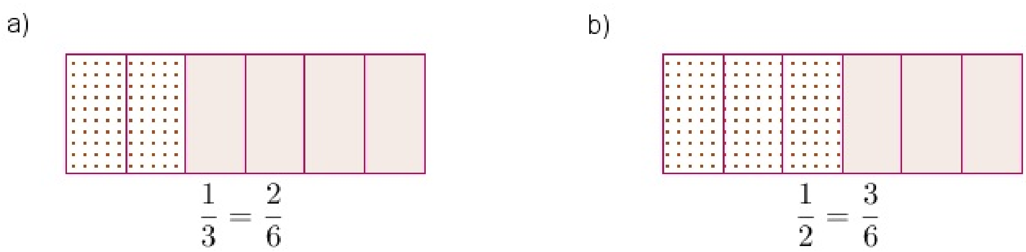
komada kolača iste veličine, $\frac{1}{7}$ , i zatim druga tri također veličine $\frac{1}{7}$. Pa, sve skupa imamo pet komada kolača te veličine ili $\frac{5}{7}$ kolača. Prema tome, pravilo je: kod zbrajanja razlomaka istog nazivnika, samo zbrojimo brojnike, a nazivnik ostaje isti. To slijedi iz onoga što je na slici prikazano. Matematički zapisano, pravilo glasi

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}. \tag{7}$$

Kako je $\frac{6}{6}$ kolača jedan cijeli kolač, isto tako je $\frac{3}{3}$ kolača cijeli kolač, pa nas naša opažanja vode do drugog pravila: za bilo koji broj $k$ različit od nule, vrijedi

$$\frac{k}{k} = 1.$$

Kada dođemo do zbrajanja razlomaka s različitim nazivnicima, morat ćemo biti pažljiviji. Recimo da želimo dodati jednu trećinu kolača jednoj polovini kolača jednake veličine. Kako u ovom trenutku znamo zbrojiti jedino razlomke s istim nazivnicima, moramo oba dijela podijeliti u dijelove jednake veličine. Ustvari, imamo ideju zajedničkog nazivnika. Pronalazak zajedničkog nazivnika ima efekt rezanja na dijelove jednake veličine. Navedeno ćemo ilustrirati *Slikom 5*.




Slika 5.

Prvo promatramo $\frac{1}{3}$ (istočkani dio dijela a)) i zatim $\frac{1}{2}$ (istočkani dio dijela b)). U dijelu pod a) podijelimo svaku trećinu na dva jednaka dijela i u dijelu pod b) svaku polovinu na tri jednaka dijela. Sada imamo podijeljen svaki kolač (jednake veličine) na šest jednakih dijelova. Slika nam također govori da je $\frac{1}{3}$ isto što i $\frac{2}{6}$ te da je $\frac{1}{2}$ jednako kao i $\frac{3}{6}$.

Sada kad su naši kolači podijeljeni na dijelove jednakih veličina, možemo nastaviti:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}.$$

Prema tome, ideja pronalaska zajedničkog nazivnika temeljena je na dijeljenju objekata na dijelove jednake veličine tako da je jednostavno reći koliko ih imamo. Ranija analiza vodi nas do zaključka da je $\frac{1}{3}$ ekvivalentna $\frac{2}{6}$ i da je $\frac{1}{2}$ ekvivalentna $\frac{3}{6}$. Skraćeno, naša analiza ilustrirala je činjenicu da možemo pomnožiti brojnik i nazivnik razlomka jednakim brojem i dobiti ekvivalentan razlomak (ili komad kolača jednake veličine). Ovo pravilo je poznato kao **pravilo proširivanja razlomaka**: brojnik i nazivnik razlomka mogu oba biti pomožena jednakim iznosom koji nije nula i dobit ćemo ekvivalentan razlomak. Matematički zapisano, pravilo proširivanja kaže da, ako su $a, b, k$ pozitivni brojevi, i $b \neq 0$, onda je

$$\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}, \quad k \neq 0. \tag{8}$$

Na danom primjeru zbrajanja razlomaka $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ možemo objasniti pravilo za zbrajanje razlomaka koje smo naučili u osnovnoj školi, a to je pronalazak zajedničkog nazivnika. Prema tome, za zbrajanje $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, gdje su $a, b, c, d$ pozitivni brojevi i $b, d \neq 0$, možemo kao zajednički nazivnik koristiti $bd$. Koristimo pravilo za proširivanje razlomaka gdje ćemo brojnik i nazivnik prvog razlomka pomnožiti s $d$ te brojnik i nazivnik drugog razlomka s $b$, pa zbroj postaje

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Prema tome, možemo definirati zbroj racionalnih brojeva općenito, na sljedeći način:

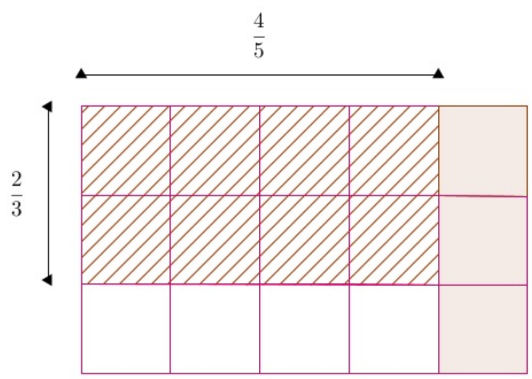
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Vratimo se nakratko pravilu proširivanja razlomaka. Ako pročitamo njegov prikaz (8) unatrag, odnosno zdesna nalijevo, on nam govori da ako brojnik i nazivnik razlomka imaju zajednički faktor $k$, tada taj zajednički faktor može biti *skraćen* kako bi dobili ekvivalentan razlomak. Koristimo riječ *skratiti* za dijeljenje zajedničkim faktorom brojnika i nazivnika. Stoga, opravdanje za skraćivanje je pravilo proširivanja razlomka (ali čitano zdesna nalijevo). Zbog toga u algebri ne možemo pojednostaviti razlomak $\frac{a+b}{a}$ samo skraćivanjem $a$ u brojniku i nazivniku da dobijemo $\frac{1+b}{1}$, budući da $a$ nije faktor brojnika. To je također razlog zašto, kada pojednostavljujemo izraz $\frac{x^2-9}{x-3}$, moramo faktorizirati prije dijeljenja. Prema tome,

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\cdot 1} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\cdot 1} = \frac{x+3}{1}.$$

Bez sumnje, učenik bi dobio isti odgovor dijeljenjem $x^2$ u brojniku s $x$ u nazivniku i dobio $x$ pa zatim dijeljenjem $-9$ u brojniku s $-3$ u nazivniku da dobije $+3$. Naravno, ovakav postupak u matematici nema smisla i puka je sreća što smo dobili isti rezultat u ovom primjeru.

Nadalje, idemo vidjeti što imamo kod množenja razlomaka. Pretpostavimo da želimo uzeti $\frac{2}{3}$ od $\frac{4}{5}$. Kada uzimamo $\frac{2}{3}$ nečeg, podijelimo to na tri jednaka dijela i uzmemo takva dva dijela. Prema tome, za računanje $\frac{2}{3}$ od $\frac{4}{5}$, podijelimo $\frac{4}{5}$ na tri jednaka dijela i uzmemo dva takva. Opisana situacija predočena je *Slikom 6.*




Slika 6.

Četiri vertikalne pruge koje se pružaju od vrha do dna velikog pravokutnika predstavljaju $\frac{4}{5}$ velikog pravokutnika. Mi želimo $\frac{2}{3}$ od toga, pa podijelimo dio od $\frac{4}{5}$ na tri jednaka dijela horizontalnim crtama i zatim uzmemo dva takva dijela. To je prikazano koso iscrtanim područjem. Preklapanje bijelog i koso iscrtanog područja predstavlja $\frac{2}{3}$ od $\frac{4}{5}$. Iz slike se jasno vidi da je to $\frac{8}{15}$ kolača, pošto je kolač horizontalnim i vertikalnim crtama podijeljen na 15 dijelova, a u ovom našem dijelu ima takvih 8 dijelova. Čini se da je, kako bi dobili rezultat $\frac{8}{15}$, bilo potrebno pomnožiti brojnike i nazivnike razlomaka. Dobijemo isti smisao s drugim sličnim primjerima. Svaki put kad računamo razlomak *od* razlomka, sve što treba napraviti je pomnožiti brojnike i nazivnike zadanih razlomaka kako bi dobili točan odgovor. Dakle, definiramo operaciju s razlomcima koja to ostvaruje i nazivamo ju množenje razlomaka. Definicija množenja razlomaka je

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d},$$

pri čemu su $b$ i $d$ različiti od nule. Ponavljamo, ovo je pravilo zasnovano na slikama i promatranjima i to je točno ono što smo učili u osnovnoj školi, da riječ *od* u ovom slučaju znači *puta*, tj. množenje. Razlog tome je taj što se računanje razlomka *od* razlomka izvršava na način da se pomnože brojnici i nazivnici razlomaka, što slijedi našu definiciju riječi *puta*.

Princip dijeljenja razlomaka koji smo naučili u osnovnoj školi, poznat kao množenje recipročnom vrijednosti, može biti objašnjen na nekoliko načina. Evo jedan: pretpostavimo da želimo podijeliti $\frac{1}{3}$ s $\frac{2}{5}$. To jest:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}.$$

Ako pravilo proširivanja vrijedi za sve razlomke, onda možemo pomnožiti brojnik i nazivnik ovog složenog razlomka istim brojem, $\frac{5}{2}$. Iz toga slijedi

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}.$$

Stoga, zbog dosljednosti s našim drugim pravilima, posebice s pravilom proširivanja razlomaka, moramo definirati dijeljenje razlomaka kao množenje recipročnom vrijednosti. Drugi je način objašnjenja da su dijeljenje i množenje suprotni u tom smislu da, kada provodimo dijeljenje $\frac{15}{3}$ i dobijemo 5, to provjeravamo tako da pomnožimo 3 s 5 i dobijemo 15. Zbog dosljednosti, ako je

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = x,$$

onda $\frac{2}{5}x$ mora dati $\frac{1}{3}$ unakrsnim množenjem. Koliko onda $x$ mora biti? Odgovor je $\frac{5}{6}$ jer je $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$. Ali, $\frac{5}{6}$ je rezultat množenja recipročnim razlomkom.

Rezimirat ćemo naše definicije za računanje s razlomcima, gdje su $a, b, c, d$ pozitivni cijeli brojevi.

F1: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$,

F2: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,

F3: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$,

F4: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$.

Sada kada imamo pravila za računanje s razlomcima, možemo se pitati vrijede li za skup razlomaka svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti. Vrijede, i to nije teško pokazati.

**Teorem 2.** *Svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti vrijede za razlomke.*

*Dokaz:* Nećemo dati dokaz za sve, nego samo pokazati u nekoliko slučajeva kako slijede iz definicija F1-F4, netom navedenih. Idemo provjeriti svojstvo komutativnosti za zbrajanje. Po definiciji vrijedi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Nadalje, prema definiciji je $\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{cb+da}{db}$. Ali, kako se brojnik i nazivnik sastoje od pozitivnih cijelih brojeva (već nam je poznato da za te brojeve vrijede svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti), imamo

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{(definicija zbrajanja razlomaka, F1)}, \\
&= \frac{bc+ad}{bd} \quad \text{(svojstvo komutativnosti zbrajanja u skupu } \mathbb{N}_0\text{)}, \\
&= \frac{cb+da}{db} \quad \text{(svojstvo komutativnosti množenja u skupu } \mathbb{N}_0\text{)}, \\
&= \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \quad \text{(definicija zbrajanja razlomaka, F1)}.
\end{aligned}$$

Dat ćemo još jedan dokaz, a to će biti dokaz tvrdnje da je množenje pozitivnih racionalnih brojeva asocijativno. Počet ćemo s tri razlomka, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, i želimo pokazati da je

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right).$$

Evo kako to ide:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} &= \left(\frac{ac}{bd}\right) \cdot \frac{e}{f} \quad \text{(definicija množenja razlomaka, F2)}, \\
&= \frac{(ac)e}{(bd)f} \quad \text{(definicija množenja razlomaka, F2)}, \\
&= \frac{a(ce)}{b(df)} \quad \text{(svojstvo asocijativnosti u skupu } \mathbb{N}_0\text{)}, \\
&= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{ce}{df}\right) \quad \text{(definicija množenja razlomaka, F2)}, \\
&= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) \quad \text{(definicija množenja razlomaka, F2)}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Na jako sličan način mogu se dokazati preostala svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti za pozitivne racionalne brojeve. Do sada smo u ovom radu pod razlomkom podrazumijevali kvocijent prirodnih brojeva. Kao što smo istaknuli, to nije standardna terminologija. Kada se riječ razlomak koristi u matematici, brojnik i nazivnik mogu biti bilo kakvi brojevi, uključujuči i iracionalne brojeve. Za razliku od toga, racionalan broj je kvocijent cijelog i prirodnog broja. Vrijede li onda *pravila F1-F4* za racionalne brojeve? Kako sada dopuštamo da brojnik bude negativan cijeli broj, u ovoj definiciji mi zapravo stvaramo novi entitet. Zato moramo definirati što mislimo pod zbrajanjem, množenjem i dijeljenjem racionalnih brojeva. Definirat ćemo ih pomoću *pravila F1-F4* , kao što smo radili ranije. Zatim, ako želimo dokazati *Teorem 2* za racionalne brojeve dokaz će biti identičan, budući da su identične i definicije te već imamo istaknuto da svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti vrijede za sve cijele brojeve. Također je $\frac{k}{k} = 1$ za sve cijele brojeve. Prema tome, imamo sljedeći teorem:

**Teorem 3.** *Pravila* $1-7$*, svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, vrijede za sve racionalne brojeve.*

Naglasili smo da sada dopuštamo negativne brojeve u brojniku. Trebamo još objasniti i zašto, kada su u pitanju razlomci, ne dopuštamo da je nazivnik nula. Postoji mnogo razloga za to, a glavni od njih je taj što vodi do proturječnosti koje nisu prihvatljive matematičarima. Evo i elementarnog objašnjenja: množenje je izvorno definirano kao ponavljano zbrajanje. Dijeljenje na sličan način može biti gledano kao ponavljano oduzimanje. Prema tome, $15 \div 3$ može biti shvaćeno kao broj tročlanih grupa koje možemo formirati iz grupe od 15 prije nego što nam ništa ne ostane. Naravno, odgovor je 5. Sada, što bi značilo $15 \div 0$? Odgovor: koliko grupa ničega možemo izdvojiti od 15 da nam ne ostane ništa? Naravno da za ovo nema odgovora, budući da, ma koliko puta oduzmemo nula, nikad nam neće ostati 'ništa'. Zato ne dijelimo s nulom. Sljedeći primjer nam pokazuje kako nas dijeljenje s nulom može dovesti do pogrešnog zaključka: *Pronađimo grešku u sljedećem dokazu da je* $1 = 2$*: Krenimo s tvrdnjom da je* $a = b$*. Pomnožimo obje strane s* $b$ *da dobijemo* $ab = b^2$*. Oduzmimo* $a^2$ *i s jedne i s druge strane da dobijemo* $ab - a^2 = b^2 - a^2$*. Faktorizirajmo lijevu i desnu stranu jednadžbe da dobijemo* $a \cdot (b - a) = (b - a) \cdot (b + a)$*. Sada obje strane podijelimo s* $b - a$ *pa ćemo dobiti* $a = b + a$*. Sada, ako uvrstimo* $a = b = 1$ *imamo tvrdnju da je* $1 = 2$*.* Greška je ovdje bila što smo podijelili obje strane s $a - b$ jer je taj izraz jednak nuli. To nas je dovelo do pogrešne tvrdnje da je $1 = 2$. Može se naći puno sličnih primjera u kojima su krivi zaključci nastali zbog pokušaja dijeljenja s nulom. Ipak, glavni razlog zbog kojeg ne možemo dijeliti s nulom su proturječnosti koje bi time nastale, uzrokujući prekide u razvoju novih rezultata. Prema tome, dijeljenje s nulom nije dopušteno.

# 2 Skup realnih brojeva

## 2.1 Racionalni i iracionalni brojevi

U osnovnoj školi učenike upoznajemo s brojevnim pravcem, slikom pravca na kojem su cijeli brojevi prikazani kao posebno označene točke ravnomjerno raspoređene na pravcu.Uz ideju brojevnog pravca veže se engleski matematičar John Wallis. On je shvatio da je, budući da postoji beskonačno mnogo realnih brojeva i beskonačno mnogo točaka na pravcu, podudaranje točaka s realnim brojevima savršeno. Ali, pojavljuje se zanimljivo pitanje kada se krene razmišljati o tome gdje će svi brojevi biti smješteni na pravcu. U ovom odjeljku opisat ćemo svojstva racionalnih i iracionalnih brojeva koja će dati bolju sliku gustoće brojevnog pravca te količinu i podjelu realnih brojeva.

Grci su vjerovali da postoje samo sumjerljivi brojevi. To jest, sve što se može izmjeriti, nužno ima duljinu $\frac{p}{q}$, gdje su $p$ i $q$ cijeli brojevi i $q \neq 0$. S druge strane, Pitagorejci, grupa kojoj se pripisuju zasluge za otkrivanje iracionalnih brojeva, bili su tajno društvo koje je osnovao matematičar Pitagora. Živjeli su u špiljama, imali mnogo rituala i proučavali su matematiku kao dio svog pokušaja razumijevanja svemira. Zakleli su se na šutnju, pa je puno njihovih otkrića ostalo neispričano. Iako je Pitagorin poučak pripisan njihovom učitelju Pitagori, bio je poznat puno prije Pitagorina rođenja. Možda je razlog što je teorem pripisan ovoj grupi bio taj što su oni prvi dali deduktivan dokaz. Ali, kao što je uobičajeno za povijest, teško je znati što se točno dogodilo prije nekoliko tisuća godina, pogotovo kada je uništena većina knjiga koje su možda sadržavale točnu povijest.

Naime, otkriće iracionalnih brojeva usko je povezano s Pitagorinim poučkom. Zamislimo pravokutan trokut čiji su kraci duljine 1. Upotrebom Pitagorinog poučka vidimo da je duljina hipotenuze jednaka $\sqrt{2}$, što je bilo iznenađenje, jer je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. Pitagorejci su iracionalne brojeve imenovali nazivom *alogon* što znači *neiskaziv.* Napisano je da su bili šokirani ovim otkrićem i svatko tko se usudio spomenuti ga u javnosti, osuđen je na smrt. Prema [1] postoji priča kako je Hippasus iz Metaponta, zbog odavanja informacija koje se nisu trebale znati, poginuo u moru. Ne zna se je li to bio nesretan slučaj, no većina tumačenja izvješća ukazuje na to da je njegova smrt bila posljedica otkrića iracionalnih brojeva. Ipak, jedna je stvar jasna, otkriće je bilo glavni prijepor u svijetu matematike. Stoga, trebalo je ispraviti puno dokaza u geometriji koji su temeljeni na ideji da su svi brojevi racionalni. Zato, sada kad znamo da postoje iracionalni brojevi, možemo skupu racionalnih brojeva pridružiti skup iracionalnih brojeva, kako bismo formirali skup (njihovu uniju) koji nazivamo **skupom realnih brojeva**. Dakle, prema definiciji, svaki realni broj će biti ili racionalan, ili iracionalan.

Sljedeća dva rezultata pokazuju da su racionalni i iracionalni brojevi raspoređeni posvuda na brojevnom pravcu. Iskoristit ćemo neke činjenice o realnim brojevima:

a) Uzimajući $n$ velikim, razlomak $\frac{1}{n}$ može biti malen koliko god mi želimo (ako je $n$ jednak milijun, taj razlomak je $\frac{1}{1000000}$, što je malo).

b) Između bilo koja dva broja koja se razlikuju za jednu jediničnu dužinu leži cijeli broj. To jest, za bilo koji broj $a$, uvijek postoji cijeli broj $k$ koji zadovoljava $a < k \leq a + 1$. Na primjer, ako je $a = 3.5$, ova tvrdnja kaže da između 3.5 i 4.5 postoji cijeli broj $k$, konkretno u ovom slučaju je to broj 4. Ako je $a = 2$, tvrdnja kaže da postoji cijeli broj $k$ koji zadovoljava $2 < k \leq 3$. Očito je da je $k$ broj 3.

**Teorem 4.** *1. Između svaka dva realna broja postoji racionalan broj.*

*2. Između svaka dva racionalna broja postoji iracionalan broj.*

*Dokaz:*

1. Pretpostavimo da su $x$ i $y$ bilo koja dva realna broja te da je $x < y$. To implicira $y - x > 0$. Pošto $\frac{1}{n}$ proizvoljno može biti mali broj, postoji neki pozitivan broj $n$ za koji vrijedi $\frac{1}{n} < y - x$. Uzmimo takav najmanji $n$. Pošto se brojevi $nx$ i $nx+1$ razlikuju za 1, znamo da postoji neki broj $k$ koji zadovoljava $nx < k \leq nx + 1$. Podijelimo te nejednakosti s $n$ i dobijemo
$$x < \frac{k}{n} \leq \frac{x+1}{n}.$$
Ali, budući da znamo da je $\frac{1}{n} < y - x$ (primijetimo strogu nejednakost), prethodna nejednakost može biti zapisana kao
$$x < \frac{k}{n} < x + (y - x),$$
ili samo kao $x < \frac{k}{n} < y$. Pronašli smo da između bilo koja dva realna broja $x$ i $y$ postoji racionalan broj $\frac{k}{n}$, i time smo dokazali prvi dio teorema.

2. Uzmimo da su $x$ i $y$ racionalni i pretpostavimo da je $x < y$. Pomnožimo obje strane nejednakosti s $\sqrt{2}$ i dobit ćemo $\sqrt{2}x < \sqrt{2}y$. Sada, prema prvom dijelu teorema, postoji racionalan broj $k$ između realnih brojeva $\sqrt{2}x$ i $\sqrt{2}y$. Odnosno, postoji racionalan broj $k$ takav da je $\sqrt{2}x < k < \sqrt{2}y$. Podijelimo te nejednakosti s $\sqrt{2}$ i dobit ćemo $x < \frac{k}{\sqrt{2}} < y$. Budući je racionalan broj podijeljen s iracionalnim jednak iracionalnom broju, pronašli smo iracionalan broj $\frac{k}{\sqrt{2}}$, između $x$ i $y$.

■

Otiđimo sada korak dalje. Pretpostavimo da je $r$ bilo koji realan broj. Tada, između realnih brojeva $r$ i $r + 1$ postoji racionalan broj, $r_1$, prema prvom dijelu *Teorema 4*. Slično

tome, postoji racionalan broj, $r_2$, između $r$ i $r+\frac{1}{2}$, i racionalan broj $r_3$ između brojeva $r$ i $r+\frac{1}{3}$, i tako dalje. Pošto su brojevi $r+1, r+\frac{1}{2}, r+\frac{1}{3}$, brojevi koji se približavaju broju $r$, onda se i brojevi $r_1, r_2, r_3$ i tako dalje, približavaju broju $r$.
Time smo ustanovili sljedeći ključni teorem.

**Teorem 5.** *Za bilo koji realan broj $r$, može se naći niz racionalnih brojeva $r_1, r_2, r_3, \ldots$ koji konvergiraju ka $r$. (Kažemo da je $r = \lim_{n\to\infty} r_n$.)*

Sada, iz matematičke analize znamo da je limes sume jednak sumi limesa. Postoji i slična tvrdnja za limes razlike, umnoška i kvocijenta (s pretpostavkom da kod kvocijenta limes nazivnika nije nula). Prva tvrdnja da je limes sume jednak sumi limesa može biti iskazana formalnije u ovom slučaju kao $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$, sa sličnim izrazima za $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, s pretpostavkom da je $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ u zadnjoj tvrdnji. Pretpostavlja se da svaki limes postoji i da je konačan. Na početku ovog rada rekli smo da ćemo prihvatiti svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti za prirodne brojeve te smo zatim iznijeli da ćemo ih, kada utvrdimo pravila za množenje negativnih brojeva, moći proširiti na negativne brojeve i eventualno racionalne brojeve, što smo i učinili. Upotrebom teorema iz ovoga odjeljka sada možemo proširiti pravila na sve realne brojeve. Ilustrirat ćemo na jednom primjeru kako se to radi.

**Primjer 3.** *Pokažite da za bilo koje realne brojeve $a$ i $b$ vrijedi $a+b=b+a$, uz pretpostavku da svojstvo komutativnosti vrijedi samo za racionalne brojeve.*

*Rješenje:* Izaberemo niz racionalnih brojeva $a_n$ koji konvergira ka $a$, i niz racionalnih brojeva $b_n$ koji konvergira ka $b$. Tada je

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \tag{9}$$

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{10}$$

Sada,

$$\begin{aligned} a+b &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{(prema (9) i (10))}, \\ &= \lim_{n\to\infty} a_n + b_n \quad \text{(limes zbroja jednak je zbroju limesa)}, \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} b_n + a_n \quad \text{(svojstvo komutativnosti zbrajanja racionalnih brojeva)},$$

$$= \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{(limes zbroja jednak je zbroju limesa)},$$

$$= b + a \quad \text{(prema (9) i (10))}.$$

Dokazi svih ostalih pravila su slični. Prema tome, s pojmom limesa možemo popuniti sve praznine i prijeći s racionalnih ka svim realnim brojevima. Tako konačno imamo:

**Teorem 6.** *Pravila* $1 - 7$ *vrijede za sve realne brojeve.*

## 2.2 Pregled geometrijskih redova

**Primjer 4.** *Ako napravimo sljedeće: koristeći olovku, ravnalo, i papir s linijama dimenzije* $22 \times 28cm$*, krenuvši od ruba papira, duž jedne horizontalne linije, nacrtamo dužinu duljine* $10cm$*. Zatim, na tu dužinu dodamo dužinu čija je duljina jednaka polovini duljine prve dužine. Onda dodamo dužinu čija duljina je jednaka polovini duljine prethodne dužine i nastavimo na taj način. Hoćemo li ikada doći do drugog ruba papira?*

Motivacijski primjer vodi nas do pojma geometrijskog reda. Kako bi mogli raspravljati o decimalnim brojevima u bilo kojem smislu, trebamo geometrijske redove, zato ćemo ih malo bolje razmotriti.

Prisjetimo se da je geometrijski red zapravo beskonačna suma oblika

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots.$$

Taj apstraktni izraz jednostavno kaže da je $a$ prvi član i svaki član niza jednak je umnošku prethodnog člana i nekog fiksnog broja $r$. Prema tome, drugi član, $ar$, je prvi član, $a$, pomožen s $r$. Treći član, $ar^2$, je drugi član, $ar$, pomnožen s $r$, i tako dalje. Na primjer,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

je geometrijski red gdje je $a = 1$ i svaki član je jednak produktu prethodnog člana i $r = \frac{1}{2}$.

Primijetimo da taj red može biti zapisan kao

$$1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

što je oblika $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$.

Suma reda je definirana u smislu limesa. Odnosno, zbrajamo prvi član, prva dva člana, prva tri člana, prva četiri člana, i tako dalje, svaki put dodajući još jedan član. Ono što dobijemo je niz brojeva koji nazivamo **nizom parcijalnih suma**. Ako limes niza parcijalnih suma ima konačnu vrijednost, tu vrijednost nazivamo **sumom reda**.

Pogledajmo što se događa s redom

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

Ako označimo sa $s_1, s_2, s_3, \ldots$ sumu prvog člana, sumu prva dva člana, sumu prva tri člana, i tako dalje, redom, dobit ćemo sljedeći niz parcijalnih suma:

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$

$\ldots$

i može se pokazati da se prethodni obrazac nastavlja. Prema tome, $s_5 = 1\frac{15}{16}, s_6 = 1\frac{31}{32}$, i tako dalje. Očito je da se parcijalne sume približavaju broju 2. Zbog toga kažemo da je suma reda $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ jednaka 2 ili da red $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ konvergira broju 2. Konačno, suma beskonačnog reda se definira kao $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, gdje se $s_n$ dobije zbrajanjem prvih $n$ članova reda.

Prisjetimo se da neki redovi imaju konačne sume, a neki nemaju. Za redove koji imaju konačne sume kažemo da konvergiraju, a za preostale da divergiraju.

Red $a_1+a_2+a_3+\ldots$ se skraćeno označava kao $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ili kada je indeks očit, $\sum\limits_{1}^{\infty} a_i$. Nadalje, slovo koje koristimo za indeks nije strogo određeno. Prema tome, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ znači potpuno isto što i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Slijedi glavni teorem o geometrijskom redu.

**Teorem 7.** *a) Suma prvih $n$ članova geometrijskog reda je dana sa $s_n = \frac{a-ar^n}{1-r}$.*

*b) Geometrijski red $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ konvergira kada je $|r| < 1$ i njegova suma jednaka je $\frac{a}{1-r}$.*

*c) Geometrijski red divergira ako je $|r| > 1$.*

*Dokaz:*

a) Suma prvih $n$ članova reda označava se sa $s_n$ i prema definiciji vrijedi da je

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}. \tag{11}$$

Pomnožimo li obje strane prethodne jednakosti s $r$, dobijemo

$$s_n r = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n. \tag{12}$$

Kada oduzmemo jednakost (12) od jednakosti (11) i skratimo što se može skratiti, dobit ćemo

$$s_n - s_n r = a - ar^n. \tag{13}$$

Ako zapišemo izraz (13) u obliku $s_n(1-r) = a - ar^n$ i podijelimo s $1-r$ kao rezultat ćemo dobiti

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1-r}. \tag{14}$$

b) Ako je $|r| < 1$, odnosno $-1 < r < 1$, to znači da se $r^n$ pibližava nuli kako $n$ postaje veći. Slijedi da onda $ar^n \to 0$ kako $n$ raste, pa zato razlomak s desne strane izraza (14) teži ka $\frac{a}{1-r}$. Kažemo da je $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-r}$. Budući je $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-r}$ definicija sume reda, slijedi da je suma reda jednaka $\frac{a}{1-r}$.

c) Ako je $|r| > 1$, onda $ar^n$ ne teži konačnom broju kada $n \to \infty$. Zbog toga, $\lim_{n\to\infty} s_n$ u izrazu (14) ne postoji. To znači da geometrijski red divergira.

■

Kako bi razjasnili navedeno, dat ćemo dva konkretna primjera.

**Primjer 5.** *Odredite sumu prvih $n$ članova reda $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$.*

*Rješenje:* U skladu s dijelom a) *Teorema 7*, suma prvih $n$ članova jednaka je

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{1 - 1(\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - 1(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Prema tome, ako zbrajamo 50 članova, naša suma će biti jednaka $s_{50} = 2 - 2(\frac{1}{2})^{50}$ ili ako zbrajamo 100 članova, suma će biti jednaka $s_{100} = 2 - 2(\frac{1}{2})^{100}$. Vidimo da su obje sume jako blizu broju 2. Zapravo, toliko su blizu da kada upišemo te vrijednosti u kalkulator, ispisat će nam da obje sume iznose 2. Naravno, mi znamo da to nije istina. Međutim, što više članova uzimamo, suma će se sve više približavati broju 2. To je upravo ono o čemu govori *Teorem 7*, točnije, da red konvergira prema $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

**Primjer 6.** *a) Odredite sumu reda* $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{27} + \ldots$.

*b) Odredite sumu reda* $1 - \frac{4}{3} + \frac{16}{9} - \ldots$.

*Rješenje:*

a) Zadan je geometrijski red s vrijednostima $a = 4$ i $r = -\frac{1}{3}$. Budući je $|r| < 1$, suma reda je jednaka $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = 3$.

b) Također je zadan geometrijski red, ali s $r = -\frac{4}{3}$. Budući je $|r| > 1$, red divergira.

Sljedeći teorem je jako koristan rezultat.

**Teorem 8** (**Poredbeni kriterij**). *Pretpostavimo da su* $\sum_1^\infty a_i$ *i* $\sum_1^\infty b_i$ *dva reda s nenegativnim članovima i pretpostavimo da znamo da red* $\sum_1^\infty b_i$ *konvergira. Tada, ako je* $a_i \leq b_i$, *za svaki* $i$, *red* $\sum_1^\infty a_i$ *konvergira.*

Teorem govori da, ako veći od dva nenegativna reda ima konačnu sumu, odnosno konvergira, tada konvergira i manji red. Ilustrirat ćemo to kroz primjer reda

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2^i + 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots.$$

Navedeni red konvergira, jer vrijedi da je

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2^i + 1} \leq \sum_1^\infty \frac{1}{2^i},$$

pošto je $\frac{1}{2^i+1} \leq \frac{1}{2^i}$, za svaki $i$. Budući da je $\sum_1^\infty \frac{1}{2^i}$ geometrijski red s $|r| < 1$, on konvergira, pa prema poredbenom kriteriju konvergira i red $\sum_1^\infty \frac{1}{2^i + 1}$.

## 2.3 Decimalni zapis realnog broja

Pojava decimalnog zapisa bila je od velikog značaja za povijest matematike jer nakon toga komplicirano računanje postaje vrlo jednostavno. No, postoje i problemi koji su nastali tijekom razvoja decimalnog prikaza broja.

Kada vidimo broj kao što je 325, znamo da je to skraćenica za 3 stotice + 2 desetice + 5 jedinica. Primijetimo da ga možemo zapisati i kao

$$3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Pošto je to zapis preko potencija broja 10, težnja je bila nastaviti taj uzorak te uključiti i negativne potencije broja 10. Decimalna točka bi bila granica pri kojoj eksponenti prelaze iz nenegativnih u negativne. U skladu s time, broj 325.46 bi predstavljao izraz

$$3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}.$$

Prvi problem koji se pojavio bio je značenje beskonačnog zapisa kao što je, primjerice,

$$0.123412341234\ldots.$$

Taj prikaz je zapravo skraćenica za beskonačni red

$$1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + \ldots$$

ili drugačije zapisano,

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \ldots.$$

Prema tome, decimalni brojevi su beskonačni redovi. Na prvi pogled, to se ne čini kao problem. Međutim, pošto nemaju svi beskonačni redovi konačne sume, možemo se zapitati je li decimalni brojevi koje konstruiramo ili koristimo u stvarnom životu imaju smisla. Sljedeći teorem nam govori o spomenutom problemu.

**Teorem 9.** *Svaki decimalan broj predstavlja red koji ima konačnu sumu.*

*Dokaz:* Vrlo važna stvar koju treba shvatiti jest da je svaka znamenka decimalnog prikaza, $d_i$, manja ili jednaka broju 9. Prema tome, ako označimo s $N = .d_1 d_2 d_3 \ldots$, onda je

$$N = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \ldots \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots.$$

S desne strane je geometrijski red za kojeg je $|r| < 1, (r = \frac{1}{10})$, iz čega slijedi da on konvergira, pa prema poredbenom kriteriju (*Teorem 8*) konvergira i red s lijeve strane. Dakle, redovi koje predstavljaju decimalni brojevi imaju konačnu sumu.

■

Problem koji se pojavljuje u osnovnoj školi je određivanje ekvivalentnog razlomka danom decimalnom broju. Sljedeći primjer ilustrira navedeni postupak.

**Primjer 7.** *a) Odredite ekvivalentan razlomak decimalnom broju* $0.323232\ldots$.

*b) Odredite ekvivalentan razlomak decimalnom broju* $0.034212121\ldots$.

*Rješenje:*

a) Neka je

$$N = 0.323232\ldots \tag{15}$$

Kada pomnožimo sa 100 dobijemo

$$100N = 32.3232\ldots \tag{16}$$

Izraz (15) oduzmemo izrazu (16) pa dobijemo $99N = 32$. Prema tome, $N = \frac{32}{99}$.

b) Ovaj primjer je nešto teži. Zapišimo $0.034212121\ldots$ kao

$$0.034 + 0.000212121\ldots.$$

Sada, prvi dio je razlomak $\frac{34}{1000}$, a kako bi odredili drugi dio označit ćemo s

$$N = 0.000212121\ldots. \tag{17}$$

Pomnožimo sa 100 i dobijemo

$$100N = 0.0212121\ldots. \tag{18}$$

Zatim, oduzmemo izraz (17) jednakosti (18) i dobijemo $99N = 0.021$ ili $\frac{21}{1000}$. Kada podijelimo s 99, dobijemo da je $N = \frac{21}{99000}$. Zbrajanjem dobivenog s brojem $\frac{34}{1000}$ dobijemo da je $0.034212121 = \frac{3387}{99000}$, što se može provjeriti kalkulatorom.

Sada kad znamo da svaki decimalan broj konvergira, odnosno predstavlja red čija suma je konačna vrijednost, pitamo se kako ćemo znati da svaki broj ima decimalan prikaz. Još iz osnovne škole znamo kako, pomoću dijeljenja, odrediti decimalni zapis racionalnog broja. Ali, kako možemo biti sigurni da taj postupak daje točan decimalni zapis za sve racionalne bojeve? Nadalje, što ako želimo odrediti decimalni prikaz iracionalnog broja kao što je, primjerice, $\sqrt{2}$? U tom slučaju zasigurno ne možemo koristiti dijeljenje.

Pri objašnjavanju tih važnih problema upotrebljavat ćemo koncept najvećeg cijelog broja koji je manji od ili jednak $x$, poznat kao funkcija *pod* ili *najveće cijelo*. Pretpostavimo da je $x$ proizvoljan broj. Tada je najveće cijelo broja $x$ zapravo najveći cijeli broj koji je manji od ili jednak $x$, s oznakom $\lfloor x \rfloor$. Budući da svaki broj $x$ leži između dva uzastopna cijela broja, vrijedi

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1. \tag{19}$$

Konkretno, na primjeru: $\lfloor 3.2 \rfloor = 3$. Jasno je da je $3 \leq 3.2 < 3 + 1$. Još jedan primjer: $\lfloor -3.1 \rfloor = 4$. Očito je da $-4 \leq -3.1 < -4 + 1$.
Sljedeći teorem je temeljni rezultat u razvoju decimalnog prikaza brojeva.

**Teorem 10.** *Svaki realan broj $N$, pri čemu je $0 \leq N < 1$, može se zapisati u obliku decimalnog broja.*

*Dokaz:* Vrijedi $0 \leq N < 1$, pa je i $0 \leq 10N < 10$. Neka je $a_1 = \lfloor 10N \rfloor$. Budući da je $a_1$ najveći broj manji od $10N$, a $10N$ je nenegativan i manji od 10, onda je $0 \leq a_1 < 10$. Uvrštavanjem izraza $x = 10N$ u izraz (19) i upotrebom činjenice da je $a_1 = \lfloor 10N \rfloor$ dobijemo da je

$$a_1 \leq 10N < a_1 + 1. \tag{20}$$

Oduzmemo li $a_1$ izrazu (20) dobijemo

$$0 \leq 10N - a_1 < 1. \tag{21}$$

Pošto se $10N - a_1$ nalazi između 0 i 1, slijedi da je

$$10(10N - a_1) = 100N - 10a_1$$

između 0 i 10 (isključujući 10). Ako označimo s $a_2 = \lfloor 100N - 10a_1 \rfloor$, onda je

$$0 \leq a_2 < 10,$$

i prema (19) s izrazom $100N - 10a_1$ umjesto $x$, dobijemo

$$a_2 \leq 100N - 10a_1 < a_2 + 1. \tag{22}$$

Oduzimanjem $a_2$ u izrazu (22) dobijemo da je

$$0 \leq 100N - 10a_1 - a_2 < 1. \tag{23}$$

Kako se $100N - 10a_1 - a_2$ nalazi između 0 i 1, slijedi da je

$$10(100N - 10a_1 - a_2) = 1000N - 100a_1 - 10a_2$$

između 0 i 10. Zatim, označimo s $a_3 = \lfloor 1000N - 100a_1 - 10a_2 \rfloor$, i tako dalje. Nakon $n$ koraka, imamo sljedeću generalizaciju izraza (23):

$$0 \leq 10^n N - 10^{n-1}a_1 - 10^{n-2}a_2 - \ldots - a_n < 1. \tag{24}$$

Ako izraz (24) podijelimo s $10^n$, dobijemo

$$0 \leq N - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{100} - \frac{a_3}{1000} - \ldots - \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}. \tag{25}$$

Ili, u decimalnom zapisu,

$$0 \leq N - .a_1a_2 \ldots a_n < \frac{1}{10^n}. \tag{26}$$

Sada, budući da $\frac{1}{10^n}$ teži u nulu kada $n \to \infty$, izraz (26) nam govori da razlika između $N$ i decimalnih brojeva koje generiramo postaje sve manja kako $n$ raste. Na taj način, decimalni brojevi $0.a_1a_2 \ldots a_n$ koje generiramo približavaju se broju $N$ kako se $n$ povećava. Ali, takvi konačni decimalni brojevi $0.a_1a_2 \ldots a_n$ parcijalne su sume reda, koji predstavlja beskonačan decimalan broj $0.a_1a_2 \ldots a_n \ldots$. Budući da se parcijalne sume $0.a_1a_2 \ldots a_n$ približavaju broju $N$, suma reda prikazanog beskonačnim decimalnim brojem $0.a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ mora biti jednaka $N$. Stoga, svaki broj $N$ može se prikazati u obliku decimalnog broja.

■

Iz dokaza je očito da zaista trebamo koncept limesa kako bi mogli ući u dublju raspravu o decimalnim brojevima.

Kada smo se uvjerili da svaki broj $N$ koji se nalazi između 0 i 1 može biti prikazan u obliku decimalnog broja, možemo se vratiti na postupak određivanja znamenki u decimalnom prikazu broja $N$. To će biti jednostavno nakon što utvrdimo da, ako nam je zadan broj, recimo $N = 32.425$, najveći cijeli broj koji je manji ili jednak $N$ je 32, broj koji se nalazi prije decimalne točke. Uskoro će nam koristiti ta činjenica u dokazu. Znamo još i da se svaki broj $N$ koji se nalazi između 0 i 1 može zapisati kao $N = 0.d_1d_2d_3\ldots$. Iz toga slijedi da je

$$10N = d_1.d_2d_3\ldots \tag{27}$$

i vidimo da je $d_1$ najveći cijeli broj manji ili jednak broju $10N$. Stoga je, $d_1$, prva znamenka decimalnog prikaza broja $N$ jednaka $\lfloor 10N_1 \rfloor$. Oduzimanjem $d_1$ s obje strane jednakosti (27) dobijemo

$$10N_1 - d_1 = 0.d_2d_3d_4\ldots. \tag{28}$$

Kako bi odredili drugu znamenku, $d_2$, u decimalnom prikazu broja $N$, pomožimo izraz (28) s 10 i dobijemo

$$100N_1 - 10d_1 = d_2.d_3d_4\ldots. \tag{29}$$

Sada imamo da je $d_2 = \lfloor 100N_1 - 10d_1 \rfloor$. Oduzimanjem $d_2$ jednakosti (29) dobijemo

$$100N_1 - 10d_1 - d_2 = 0.d_3d_4\ldots \tag{30}$$

i množenjem obje strane jednakosti (30) s 10 dobijemo

$$1000N_1 - 100d_1 - 10d_2 = d_3.d_4\ldots, \tag{31}$$

pa vidimo kako smo dobili $d_3$, odnosno $d_3 = \lfloor 1000N_1 - 100d_1 - 10d_2 \rfloor$. Oduzmemo $d_3$ jednakosti (31) i pomnožimo rezultat s 10 pa dobijemo

$$10000N_1 - 1000d_1 - 100d_2 - 10d_3 = d_4.d_5d_6\ldots$$

nakon čega imamo da je $d_4 = \lfloor 10000N_1 - 1000d_1 - 100d_2 - 10d_3 \rfloor$, i tako dalje. Ovaj postupak izgleda komplicirano, a zapravo može biti opisan na sljedeći način. Kako bi generirali znamenke decimalnog zapisa broja $N$, pomnožimo $N$ s 10, dobijemo broj $n$, uzmemo najveći cijeli broj $g$ koji je manji ili jednak $n$. Broj $g$ je sljedeća znamenka decimalnog zapisa broja $N$. Sljedeće, izračunamo $n - g$, i ponovimo postupak s $n - g$ umjesto $N$. Za nastavak će nam od koristi biti sljedeći primjer.

**Primjer 8.** *Odredite decimalni prikaz broja $\frac{1}{7}$.*

*Rješenje:* Najprije pomnožimo $N = \frac{1}{7}$ s 10, što je jednako $\frac{10}{7}$. Budući je $g = \lfloor \frac{10}{7} \rfloor = 1$, 1 je prva znamenka decimalnog prikaza broja $\frac{1}{7}$. Zatim, oduzmemo $g = 1$ od $\frac{10}{7}$ i dobijemo $\frac{3}{7}$. Završili smo prvi korak. Sada ponovno ponavljamo postupak, ali za $N$ uzimamo da je jednak $\frac{3}{7}$. Radimo isto što i ranije. Pomnožimo $\frac{3}{7}$ s 10 i dobijemo $\frac{30}{7}$. Sada računamo

$g = \lfloor \frac{30}{7} \rfloor = 4$. Prema tome, 4 je druga znamenka decimalnog prikaza od $\frac{1}{7}$. Oduzmemo 4 od $\frac{30}{7}$ i kao rezultat dobijemo $\frac{2}{7}$. Drugi korak je gotov. Ponavljamo postupak s $N = \frac{2}{7}$, i tako dalje.

Opisani postupak izgleda puno kompliciraniji za razliku od jednostavne metode koju smo naučili u osnovnoj školi. Tada smo koristili metodu dijeljenja kako bi odredili decimalan zapis broja, u ovom slučaju $\frac{1}{7}$. Prisjetimo se:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \div & 7 & & & & & & =0.142857 \\
-\,0 & & & & & & & & \\
\hline
1 & 0 & & & & & & & \\
- & 7 & & & & & & & \\
\hline
 & 3 & 0 & & & & & & \\
- & 2 & 8 & & & & & & \\
\hline
 & & 2 & 0 & & & & & \\
 & - & 1 & 4 & & & & & \\
\hline
 & & & 6 & 0 & & & & \\
 & & - & 5 & 6 & & & & \\
\hline
 & & & & 4 & 0 & & & \\
 & & & - & 3 & 5 & & & \\
\hline
 & & & & & 5 & 0 & & \\
 & & & & - & 4 & 9 & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & 0 & \\
\end{array}
$$

Provodeći dijeljenje koje smo ranije naučili, zapravo činimo korake prethodno opisanog postupka. To ćemo dokazati komentirajući svaki korak dijeljenja. Naime, pri određivanju decimalnog zapisa razlomka $\frac{1}{7}$, najprije podijelimo 1 sa 7, što iznosi 0, pa stavljamo decimalnu točku. Zatim, $0 \cdot 7 = 0$, i imamo ostatak 1, koji zapisujemo.

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \div & 7 = 0. \\
-\,0 & & \\
\hline
1 & & \\
\end{array}
$$

Nakon toga tom ostatku dodajemo nulu i sljedeće što radimo je dijeljenje $10 \div 7$. Kako je $10 \div 7 = 1$ s ostatkom 3, 1 je prva znamenka decimalnog zapisa. Poslije toga računamo $1 \cdot 7 = 7$, to zapisujemo, a zatim od 10 oduzmemo 7 i dobijemo 3.

$$
\begin{array}{rcl}
1 & \div & 7 = 0.1 \\
-\ 0 & & \\
\hline
1 & 0 & \\
- & 7 & \\
\hline
 & 3 &
\end{array}
$$

Dosad opisani koraci ekvivalentni su prvom koraku novog postupka, pri čemu je dodavanje nule ekvivalentno množenju broja $N$ s 10, a pri dijeljenju $10 \div 7$ mi zapravo tražimo vrijednost izraza $\lfloor \frac{10}{7} \rfloor$ i ostatak dobijemo kao razliku prethodnog ostatka (s dodanom nulom) i novog produkta. Zatim ponavljamo postupak, ostatku 3 dodajemo nulu, pa dijelimo $30 \div 7$ što je jednako $\lfloor \frac{30}{7} \rfloor = 4$, pa je sljedeća znamenka decimalnog zapisa 4, a ostatak koji je jednak 2 dobijemo kao razliku brojeva 30 i $4 \cdot 7 = 28$. Na isti način nastavljamo, dodajemo nulu ostatku i dobijemo 20, što zatim dijelimo sa 7, pa je količnik koji je jednak 2 sljedeća znamenka zapisa, a bilježimo ostatak 6. I postupak se cijelo vrijeme ponavlja.

Iz priloženog vidimo da je dijeljenje ekvivalentno postupku koji je opisan u *Primjeru 8*, i na taj način smo zapravo opravdali postupak dijeljenja koji se koristi pri određivanju decimalnog zapisa zadanog razlomka. Nadalje, postupak dijeljenja vrijedi samo za racionalne brojeve, dok nam dokaz *Teorema 10* pokazuje kako odrediti, barem teoretski, decimalni prikaz bilo kojeg realnog broja.

Sada kad znamo da su koraci pronalaska decimalnog zapisa broja dijeljenjem ekvivalentni postupku opisanom u dokazu *Teorema 10*, možemo uvijek koristiti dijeljenje koje je dosta jednostavnije. Jedna ključna stvar na koju treba obratiti pozornost je prilikom oduzimanja produkta broja 7 i zadnje znamenke decimalnog zapisa od prethodnog ostatka. Tu zapravo postoji konačan broj ostataka koji se mogu pojaviti, konkretno pri dijeljenju s brojem 7 ostaci su $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. U slučaju da se dijeljenje ne zaustavi nakon konačnog broja koraka (tada imamo konačan decimalni zapis), jedan ostatak koji nam se pojavio ranije će se opet ponoviti i poslije se koraci ponavljaju kao nakon prvog pojavljivanja. Iz toga slijedi da kad dijelimo brojeve iz skupa $\mathbb{N}_0$ kao rezultat ćemo dobiti decimale koje se ponavljaju. Skupinu znamenaka koje se ponavljaju nazivamo **period**, a znamenke koje se nalaze prije perioda i ne ponavljaju se nazivamo **pretperiod**. Sljedeći teorem govori o prethodno opisanoj situaciji.

**Teorem 11.** *Svaki racionalan broj ima konačan ili beskonačan periodičan decimalan zapis. Nadalje, broj znamenki koje se ponavljaju nije veći od djelitelja.*

Teorem kaže da je maksimalan broj ponavljanja znamenki jednak djelitelju. Ne trebamo čak ni dostići taj maksimum. Na primjer,

$$\frac{23}{666} = 0.0345345345\ldots,$$

pri čemu je period jednak 345 i vidimo da se sastoji od tri znamenke, a mogao se sastojati od 666 znamenki, jer postoji 666 ostataka pri dijeljenju s brojem 666. *Teorem 11* također vrijedi i u drugom smjeru: svaki decimalan broj s beskonačnim periodičnim zapisom može se prikazati kao racionalan broj. To nam može potvrditi *Primjer 7* koji smo riješili.

### 2.3.1 Periodičnost

Nastavimo s proučavanjem decimalnog prikaza realnog broja. Kažemo da broj ima konačan decimalni zapis, ako njegov zapis završava nulom. Primjerice, $N = 0.3750000\ldots = 0.375$ je konačan decimalni broj. Možemo se pitati koje racionalne brojeve možemo zapisati u obliku konačnog decimalnog zapisa. Pa, krenimo s već spomenutim konačnim decimalnim brojem $N = 0.3750000\ldots = 0.375$. Iz ovog zadnjeg oblika očito je da broj $N$ možemo zapisati u obliku $\frac{375}{1000}$. Odnosno, razlomak ima nazivnik koji je potencija broja 10. Obratno, ako razlomak ima nazivnik koji se može zapisati u obliku potencije broja 10, tada se razlomak može zapisati kao konačan decimalan broj. Na primjer, $\frac{7}{8}$ se može proširiti do razlomka čiji nazivnik je potencija broja 10, množenjem brojnika i nazivnika s 125. Iz toga dobijemo $\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = 0.875$. Da zaključimo, decimalni zapis racionalnog broja završava nulama, ako i samo ako nazivnik možemo proširiti do potencije broja 10. Što nam to uopće omogućuje? Naime, ako nazivnik možemo zapisati kao potenciju broja 10, onda znači da su njegovi faktori samo brojevi 2 i 5. Prema tome, čini se da ako nazivnik razlomka ima faktore 2 i/ili 5, tada se može proširiti do broja koji je potencija broja 10. Uzmimo za primjer razlomak $\frac{7}{2\cdot 5^3}$. Ako proširimo razlomak s $2^2$, imamo ekvivalentan razlomak $\frac{28}{1000}$ i on je očito jednak 0.028. Isto tako, ako imamo razlomak $\frac{3}{2^3}$, možemo ga proširiti s brojem $5^3$ i dobit ćemo $\frac{3}{2^3} = \frac{3\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^3} = \frac{375}{1000}$, što je jednako 0.375. Ovakvi primjeri opisani su sljedećim teoremom.

**Teorem 12.** *Racionalan broj se može zapisati kao konačan decimalan broj ako i samo ako se nazivnik može napisati kao potencija broja* 10. *To je moguće onda i samo onda kada su jedini faktori nazivnika brojevi* 2 *i/ili* 5.

Kao što je prikazano, racionalni brojevi mogu se prikazati u obliku beskonačno periodičnog decimalnog zapisa. Period može biti odmah poslije decimalne točke ili nakon određenog broja znamenki koje se ne ponavljaju. S obzirom na to, razlikujemo dvije vrste decimalnog zapisa. Kažemo da brojevi kod kojih se period nalazi odmah nakon decimalne točke, imaju **čisto periodični**, a drugi **mješovito periodični decimalni zapis**.

U *Primjeru 7* vidjeli smo da periodičan decimalan broj $0.3434\ldots$ možemo zapisati kao $\frac{34}{99}$. Pokazali smo to tako da smo zadani broj označili s $N$, pomnožili sa 100, i nakon toga oduzeli prethodni od većeg te dobili $99N = 34$, pa je $N = \frac{34}{99}$. Na sasvim sličan način, ako nam je zadan periodičan decimalan broj $N = 0.321321\ldots$, možemo ga pomnožiti s 1000 i zatim oduzimanjem dobiti $999N = 321$, pa je $N = \frac{321}{999}$. Očito je da se u oba primjera nazivnik sastoji od znamenki 9, dok je brojnik jednak periodu.

Možemo promatrati suprotan postupak. Ako znamo da je $N = \frac{43}{99}$, možemo odmah odrediti decimalni zapis broja $N$, a to je $0.4343\ldots$. Zatim, ako je $N = \frac{32}{999}$, zaključimo da je decimalan zapis jednak $0.032032\ldots$. Jednostavno napišemo brojnik s onoliko znamenki koliko u nazivniku ima znamenki 9. Tako 32 postaje 032. Na sličan način vrijedi i za

$$\frac{7}{9999} = \frac{0007}{9999} = 0.00070007\ldots,$$

što nas vodi do sljedećeg teorema.

**Teorem 13.** *Svaki periodičan decimalan broj može se zapisati u obliku razlomka čiji nazivnik sadrži samo znamenke* 9*. Nadalje, ako imamo razlomak koji je manji od* 1*, čiji nazivnik ima samo znamenke* 9*, onda je decimalan prikaz tog razlomka čisto periodičan.*

Iz teorema slijedi da je broj $\frac{1}{3}$ čisto periodičan jer se može zapisati kao $\frac{3}{9}$. Broj $\frac{1}{13}$ je također čisto periodičan pošto se može zapisati kao $\frac{76923}{999999}$. Suvišno je govoriti da ovo nije baš najbolji način za određivanje čisto periodičnog zapisa broja, a i postoji jednostavniji kriterij za utvrđivanje čisto periodičnog decimalnog zapisa broja.

**Teorem 14.** *a) Ako maksimalno skraćen racionalan broj $\frac{m}{n}$ ima čisto periodični decimalni zapis, onda nazivnik $n$ nema faktore* 2 *ni* 5*.*

*b) Ako kod maksimalno skraćenog racionalnog broja $\frac{m}{n}$ nazivnik $n$ nema faktore* 2 *i* 5*, onda broj $\frac{m}{n}$ ima čisto periodični decimalni zapis.*

*Dokaz:*

a) Znamo da ako broj $\frac{m}{n}$ ima čisto periodični decimalni zapis, onda ga možemo zapisati u obliku $\frac{a}{99\ldots9}$. Unakrsnim množenjem dobijemo

$$(999\ldots9)\cdot m = an. \tag{32}$$

Jednakost (32) govori da je $(999\ldots9)\cdot m$ višekratnik od $n$. Zatim, ako $n$ ima faktore 2 ili 5, onda će i broj $(999\ldots9)\cdot m$ imati faktore 2 ili 5. Pošto broj $999\ldots9$ ne može imati faktore 2 ni 5, onda ih mora sadržavati broj $m$. To vodi do zaključka da $m$ i $n$ imaju zajedničke faktore 2 ili 5, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je razlomak $\frac{m}{n}$ maksimalno skraćen. Prema tome, $n$ ne može imati faktore 2 ili 5.

■

Iz *Teorema 14* slijedi da maksimalno skraćen racionalan broj ima čisto periodični decimalni zapis onda i samo onda kada nazivnik nema faktore 2 ni 5. Najjednostavniji primjer je broj $\frac{1}{13}$ koji ima čisto periodični decimalni zapis, maksimalno je skraćen te njegov nazivnik nema faktore 2 ni 5. Zapravo, svaki broj $\frac{1}{p}$ kod kojeg je $p$ bilo koji prost broj veći od broja 2, ima čisto periodični decimalni zapis. Na temelju toga, možemo očekivati da broj $\frac{3}{37}$ ima čisto periodični decimalni zapis, što i jeste istina:

$$\frac{3}{37} = 0.081081081\ldots = 0.\overline{081}.$$

Korolar koji slijedi iz prethodnog teorema glasi:

**Korolar 15.** *Maksimalno skraćen racionalan broj ima mješovito periodični decimalni zapis ako i samo ako njegov nazivnik ima faktore* 2 *ili* 5, *i još barem jedan prosti faktor.*

Dodatno, možemo otkriti koliki će biti pretperiod decimalnog zapisa. Prođimo kroz konkretan primjer. Neka nam je zadan razlomak $\frac{73}{75}$. Taj broj možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\frac{73}{75} &= \frac{73}{5^2\cdot 3} = \frac{73\cdot 2^2}{5^2\cdot 3\cdot 2^2} = \frac{73\cdot 4}{100\cdot 3} = \frac{292}{100\cdot 3}\\ &= \frac{1}{100}\cdot\frac{292}{3} = \frac{1}{100}\cdot 97\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{100}\cdot 97.3333\ldots = 0.973333\ldots\end{aligned}$$

i vidimo da imamo pretperiod koji čine dvije znamenke. Zašto je ovo valjan zaključak? Nakon što proširimo razlomak tako da nazivnik sadrži najmanju potenciju broja 10, faktoriziramo nazivnik pri čemu jedan faktor sadrži dobivenu potenciju broja 10, a drugi faktor onda neće imati faktore 2 ni 5. Tada će se početni razlomak sastojati od dva razlomka, prvi razlomak čiji nazivnik je potencija broja 10 i drugi razlomak čiji nazivnik nema faktore 2 ni 5 (ima čisto periodični decimalni zapis). U našem primjeru, množenje brojem $\frac{1}{100}$ samo miče decimalnu točku u lijevu stranu za dva mjesta, što znači da postoje dvije znamenke koje čine pretperiod decimalnog zapisa. Po čemu možemo konkretnije zaključiti o broju znamenki pretperioda, govori nam sljedeći teorem.

**Teorem 16.** *Ako je nazivnik maksimalno skraćenog racionalnog broja potpuno faktoriziran, i ako se faktor* 2 *pojavljuje na potenciju* $r$*, a faktor* 5 *na potenciju* $s$*, onda pretperiod sadrži onoliko znamenki koliki je maksimum od* $r$ *i* $s$*. (Može se dogoditi da su* $r$ *ili* $s$ *jednaki nuli, odnosno da nema faktora* 2 *ili* 5*, ali nikako ne može biti da su oba jednaka nuli.)*

Prema teoremu, za razlomak $\frac{73}{75} = \frac{73}{5^2 \cdot 3}$ vrijedi $r = 0$ i $s = 2$, pa pretperiod čine dvije znamenke, što smo i dobili rješavanjem primjera prije iskaza posljednjeg teorema.

Važno je istaknuti slučaj kada decimalni zapis realnog broja nije niti konačan niti beskonačan periodičan. Naime, ako je decimalan zapis realnog broja beskonačan neperiodičan, onda slijedi da je taj broj iracionalan.

### 2.3.2 Jedinstvenost

Većina učenika je upoznata s time da svaki realan broj ima svoj decimalni prikaz i vjeruje da je taj prikaz jednoznačno određen. Nije čudno, jer ako u kalkulator, primjerice, utipkamo broj $\frac{3}{4}$, ispisat će nam se broj $0.750000\ldots$. Ali, sljedeći primjer pokazat će nam da je to još jedna pogrešna predodžba.

**Primjer 9.** *Dokažite da je* $0.7499999\ldots = 0.75$.

*Rješenje:* Označimo s

$$N = 0.7499999\ldots. \tag{33}$$

Ako pomnožimo s 10 obje strane izraza (33) dobit ćemo

$$10N = 7.499999\ldots. \tag{34}$$

Nakon što izraz (33) oduzmemo izrazu (34) i dobiveno podijelimo s brojem 9, dobit ćemo da je $N = 0.75$. Dakle, postoji još jedan način za prikazivanje broja 0.75, a to je $0.7499999\ldots$.

Ispostavlja se da jedino decimalni brojevi koji završavaju sa znamenkama 0 ili 9 nemaju jednoznačno određen decimalni zapis, svi drugi realni brojevi imaju.

## 2.4 Prebrojivost

**Primjer 10.** *1. Koliko postoji racionalnih brojeva, a koliko iracionalnih brojeva? Kojih ima više?*

*2. Koliko postoji realnih brojeva? Ima li više realnih ili prirodnih brojeva?*

Pitanja slična ovima ne predstavljaju veliki problem danas kao što su, primjerice, matematičarima u 19. stoljeću. Zaključak da jedan beskonačan skup ima više elemenata od drugog beskonačnog skupa tada nije imao smisla. Beskonačnost je bila beskonačnost i kraj. Mnogi su odbijali razmišljati puno o beskonačnim skupovima jer oni imaju svoje poteškoće koje nisu bile prihvatljive. Sljedeći primjeri ilustriraju spomenuti problem.

**Primjer 11.** *Hotel Beskonačnost poznat je po tome da ima najviše soba na svijetu, beskonačno soba numeriranih brojevima* $1, 2, 3, \ldots$. *Jednog dana došao je gost i zatražio sobu, ali na recepciji su mu rekli da je hotel popunjen. No, gost se zamislio na trenutak i predložio sljedeće: ako premjeste gosta iz sobe* 1 *u sobu* 2*, zatim gosta iz sobe* 2 *u sobu* 3*, i tako dalje, soba* 1 *će ostati prazna pa će i on moći prenoćiti.*

**Primjer 12.** *Hotel Beskonačnost je popunjen, ali pristiglo je još beskonačno mnogo gostiju. Svaki gost je nosio majicu numeriranu brojem* $1, 3, 5,$ *i tako dalje redom, i svi su tražili sobu. Na recepciji su, poučeni iskustvom iz prošlog primjera, riješili situaciju na sljedeći način: gosta iz sobe* 1 *premjestili su u sobu* 2*, zatim gosta iz sobe* 2 *u sobu* 4*, pa gosta iz sobe* 3 *u sobu* 6*, i tako dalje. Na ovaj način oslobodile su se sobe numerirane neparnim brojevima* $1, 3, 5, \ldots$ *i gosti su se mogli smjestiti u sobe numerirane brojem koji se nalazio na majici.*

Ova dva šaljiva primjera prikazuju neke od problema u proučavanju beskonačnih skupova. Georg Cantor je bio matematičar koji nije baš bio spreman prihvatiti činjenicu da su svi beskonačni skupovi jednaki, zato se upustio u pronalazak načina za usporedbu veličina beskonačnih skupova. Dao je smislenu definiciju značenja *jednake veličine* dva beskonačna skupa. Pri tome je bio vođen onime što se događa s konačnim skupovima.

Prisjetimo se, dva konačna skupa jednake su veličine ako se svaki element jednog skupa može pridružiti svakom, različitom, elementu drugog skupa. Primjerice, skupovi $a, b, c, d, e$ i $1, 2, 3, 4, 5$ jednake su veličine jer njihove elemente možemo spariti na sljedeći način:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5. \end{array}$$

Na isti način je povezao dva beskonačna skupa jednake veličine, odnosno, zaključio je da su dva beskonačna skupa jednake veličine (jednake **kardinalnosti**) ako elemente prvog skupa možemo pridružiti elementima drugog skupa. U skladu s time, skup prirodnih brojeva ($\mathbb{N}$) i skup parnih brojeva ($2\mathbb{N}$) imaju jednaku kardinalnost, koju označavamo s $\aleph_0$ (čitamo: alef nula), jer njihove elemente možemo spariti, primjerice, na ovaj način:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & \dots . \end{array} \tag{45}$$

Iz priloženog vidimo da je svakom prirodnom broju pridružen njegov dvokratnik.

Cantorov cilj bio je odrediti može li se naći pridruživanje između svaka dva beskonačna skupa. U slučaju da se može naći, tada svi beskonačni skupovi imaju jednaku kardinalnost, a u suprotnom postoje različite beskonačnosti. Cantor je uspio dokazati da nisu svi beskonačni skupovi iste kardinalnosti, što je poprilično uzdrmalo tadašnje matematičare, jednako kao što je otkriće iracionalnih brojeva unijelo pomutnju među Grcima. Iako su mnogi matematičari odbijali povjerovati u takvu ideju, obrazloženje je bilo ispravno te na koncu prihvaćeno.

U biti, Cantor je krenuo od definicije prebrojivosti. Prisjetimo se, za beskonačan skup kažemo da je prebrojiv ako postoji bijekcija između tog skupa i skupa $\mathbb{N}$. To znači da se svakom elementu skupa može pridružiti točno jedan element skupa prirodnih brojeva, a isto tako svakom elementu skupa prirodnih brojeva može se pridružiti točno jedan element zadanog skupa. Pa, prema definiciji, skup prirodnih brojeva je prebrojiv, a također i skup parnih brojeva je prebrojiv što smo pokazali izrazom (45).

Postoji još jedan način definiranja prebrojivog skupa: za svaki skup čiji elementi se mogu poredati u beskonačan slijed kažemo da je prebrojiv. Prethodno spomenuta dva skupa su i prema ovome kriteriju prebrojiva. Zašto vrijedi to svojstvo? Naime, ako prvi element niza pridružimo broju 1, zatim drugi element niza broju 2, i tako redom, dobili smo pridruživanje sa skupom prirodnih brojeva. Prema tome, skup je prebrojiv.

**Teorem 17.** *Skup racionalnih brojeva, $\mathbb{Q}$, je prebrojiv.*

*Dokaz:* Dovoljno je pokazati da postoji bijekcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$, odnosno da je skup $\mathbb{Q}_+$ prebrojiv. Nakon toga je lako konstruirati bijekciju $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+ \to -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. Dakle, trebamo pokazati da možemo elemente skupa $\mathbb{Q}_+$ poredati u niz. Krenimo s ispisivanjem brojeva s nazivnikom jednakim 1 u prvom redu, zatim u drugom redu neka su brojevi s nazivnikom jednakim 2, i tako redom. Dobit ćemo sljedeće:

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots,
\end{array}
$$

što znači da smo uspjeli poredati sve racionalne brojeve u beskonačno mnogo redova. Sada je problem kako ih svrstati u jedan red. Taj problem je riješio Cantor spretnim načinom koji danas nazivamo **Cantorovim dijagonalnim postupkom**. Dakle, poredao je elemente krećući se po dijagonali, odnosno prateći strelice na sljedeći način:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} \\
 & \swarrow & & \nearrow & \cdots & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & \cdots & \frac{3}{2} & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & \cdots & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \\
 & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & \rightarrow & & & & &
\end{array}
$$

Dobiveni niz izgleda ovako: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Broj $\frac{m}{n}$ pozicioniran je u $m.-$tom stupcu i $n.-$tom retku, a brojeve koji se ponavljaju izbacimo. Na taj način dobili smo niz koji sadrži sve različite racionalne brojeve, iz čega slijedi da je skup racionalnih brojeva prebrojiv.

$\blacksquare$

Sljedeći teorem nam govori da, iako je skup beskonačan, njegove elemente ne možemo poredati u niz, pa zato ta beskonačnost predstavlja drugačiju beskonačnost od one s kojom smo se dosad susreli.

**Teorem 18.** *Skup realnih brojeva između* 0 *i* 1 *nije prebrojiv.*

*Dokaz:* Pretpostavit ćemo da realne brojeve možemo poredati u beskonačan slijed i pokazat ćemo da nas ta ideja vodi do kontradikcije. Dakle, možemo realne brojeve $r_1, r_2, r_3, \ldots$ poredati u niz. Ako ih možemo poredati u redu, onda ih možemo smjestiti i u stupac, i obrnuto. U ovom slučaju više će nam odgovarati ako ih poredamo u stupac. Budući da svaki realan broj ima svoj decimalan zapis, označit ćemo ih kao $r_1 = 0.d_1d_2d_3\ldots$, pri čemu $d_1$ predstavlja prvu znamenku decimalnog zapisa broja $r_1$, i tako redom. Međutim, postoji beskonačno mnogo realnih brojeva $r$ i beskonačno mnogo znamenki u njihovim decimalnim zapisima, pa ćemo te zapise prilagoditi. Tako ćemo realan broj $r_1$ označit s $r_1 = 0.d_1^1d_2^1d_3^1\ldots$, gdje broj u indeksu govori na koju znamenku zapisa se odnosi, a broj u eksponentu koji realan broj promatramo.
Idemo sada poredati naše realne brojeve.

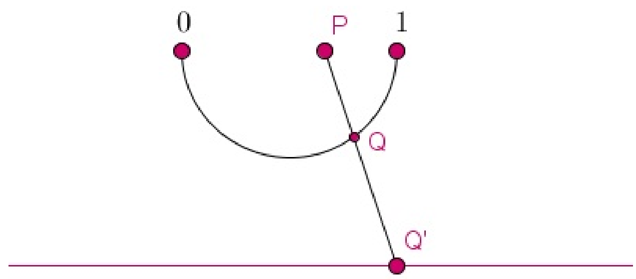
$$\begin{aligned} r_1 &= 0.d_1^1d_2^1d_3^1\ldots \\ r_2 &= 0.d_1^2d_2^2d_3^2\ldots \\ r_3 &= 0.d_1^3d_2^3d_3^3\ldots \\ \ldots \end{aligned} \tag{46}$$

Vidjet ćemo da se na ovaj način ne mogu ispisati svi realni brojevi.
Uzmimo u obzir broj $r$, gdje je $r = 0.e_1e_2e_3\ldots$, pri čemu je svaki $e_i$ jednak ili 1 ili 2. Specijalno, promatramo znamenku $d_1^1$, ako je ona jednaka 1, onda za $e_1$ uzimamo da je jednaka 2. Ako je $d_1^1$ neka druga znamenka, onda za $e_1$ uzimamo da je jednaka 1. Prema tome, prva znamenka broja $r$ razlikuje se od prve znamenke broja $r_1$. Nakon toga, promatramo znamenku $d_2^1$, i ponovno, ako je ona jednaka 1, onda je $e_2$ jednaka 2, u suprotnom je $e_2$ jednaka 1. Na taj način se i druga znamenka broja $r$ razlikuje od druge znamenke broja $r_1$. Isti postupak se dalje nastavlja, čime onda konstruiramo broj $r$ koji se razlikuje od svakog elementa zapisa (46). Iz toga slijedi da se takvim načinom zapisivanja ne mogu obuhvatiti svi realni brojevi, pa se elementi skupa realnih brojeva ne mogu poredati u niz, što onda znači da skup realnih brojeva između 0 i 1 nije prebrojiv.

$\blacksquare$

Ovo je vrlo zanimljiv rezultat koji nam pokazuje da je skup realnih brojeva između 0 i 1 različite beskonačnosti od skupa racionalnih brojeva između 0 i 1. Budući da je skup racionalnih brojeva između 0 i 1 podskup skupa realnih brojeva tog intervala, jedini zaključak do kojeg možemo doći je da postoji više realnih brojeva nego racionalnih. Odnosno, skup realnih brojeva tvori veći beskonačan skup, koji nije prebrojiv.

Nadalje, ako postoji više realnih brojeva na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nego racionalnih brojeva na istom intervalu, možemo zaključiti da je kardinalnost skupa svih realnih brojeva veća od kardinalnosti skupa realnih brojeva na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. No, to je netočno. Naime, kardinalnost skupa svih realnih brojeva i skupa realnih brojeva intervala $\langle 0, 1\rangle$ je ista i označavamo ju sa $\mathfrak{c}$, a čitamo *kontinuum*, prema [11]. Pomalo je nelogično, ali pošto možemo pronaći pridruživanje između elemenata ta dva skupa, slijedi takav rezultat. Ilustrirat ćemo to slikovitim primjerom. Zamislimo realni brojevni pravac i iznad njega interval $\langle 0, 1\rangle$ koji ćemo prikazati u obliku polukružnice, kao što je vidljivo na *Slici 7.*




Slika 7.

Iznad polukružnice označimo točku $P$ te povučemo polupravac od točke $P$ kroz točku $Q$ koja se nalazi bilo gdje na polukružnici. Ako polupravac produžimo do brojevnog pravca, siječi će se u točki $Q'$. Spojimo točke $Q$ i $Q'$, i dobili smo pridruživanje između realnih brojeva iz intervala $\langle 0, 1\rangle$ i svih realnih brojeva. Prema tome, ta dva skupa su jednake veličine. Možemo primijetiti da, što se više približavamo krajevima intervala $\langle 0, 1\rangle$, idemo sve dalje na realnom brojevnom pravcu. O svemu ovome govori nam sljedeći teorem.

**Teorem 19.** *Skup realnih brojeva jednake je kardinalnosti kao i skup realnih brojeva na intervalu* $\langle 0, 1\rangle$.

Nadalje, unija dva prebrojiva skupa je također prebrojiv skup. Neka su $S$ i $T$ dva prebrojiva skupa, elementi skupa $S$ su $s_1, s_2, s_3 \ldots$, a elementi skupa $T$ su $t_1, t_2, t_3 \ldots$. Zatim, ako elemente ova dva skupa možemo poredati u beskonačan slijed, njihova unija će biti prebrojiv skup. Možemo to napraviti na sljedeći način: $s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3 \ldots$ . Prema tome, imamo sljedeći teorem i korolar.

**Teorem 20.** *Unija dva prebrojiva skupa je prebrojiv skup.*

**Korolar 21.** *Unija konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Rezultat koji ćemo navesti kao posljednji u ovom poglavlju zasigurno je iznenađujuć.

**Teorem 22.** *Skup iracionalnih brojeva nije prebrojiv.*

*Dokaz:* Znamo da je skup racionalnih brojeva prebrojiv. Kada bi skup iracionalnih brojeva bio prebrojiv, onda bi njihova unija, odnosno skup realnih brojeva, također bio prebrojiv. Ali, iz *Teorema 18* slijedi da skup realnih brojeva nije prebrojiv, pa onda ne može ni skup iracionalnih brojeva biti prebrojiv.

■

Prebrojivi skupovi predstavljaju najmanju beskonačnost. Skup prirodnih brojeva, skup cijelih brojeva, kao i skup racionalnih brojeva, prebrojivi su i njihova veličina predstavlja najmanju veličinu koju može imati beskonačan skup. Sljedeći po veličini je skup realnih brojeva, pa tako imamo već dvije različite beskonačnosti. Zanimljivo je da tu nije kraj, uvijek se može naći veći beskonačan skup od zadanog. Dakle, postoji beskonačno mnogo različitih beskonačnosti.

# 3 Nastavnička razina

Iskusni će nastavnici matematike potvrditi činjenicu da učenici osnovne škole često žele znati smisao pravila za množenje brojeva s predznakom. U ovom poglavlju navest ćemo dokaze valjanosti ključnih teorema podcrtavajući ona pitanja koja se redovito koriste u algebri. Razumijevanje tih dokaza pomoći će u objašnjavanju područja koja zbunjuju učenike.

Prethodno smo dali intuitivne i stroge matematičke argumente kako bismo potkrijepili osnovne teoreme o pravilima za operacije s brojevima s predznakom i za računanje s razlomcima. Ovdje ćemo zapravo dokazati sve te teoreme, međutim, moramo pretpostaviti nešto, a to je valjanost svojstava komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti. Prema tome, ako pretpostavimo da operacije zbrajanja i množenja zadovoljavaju *pravila* $1-7$ koja se nalaze na stranici 4. i 5., onda mora slijediti da je umnožak dva negativna broja pozitivan broj, da je umnožak pozitivnog i negativnog broja jednak negativnom broju, da množenje s nulom daje nulu, i tako dalje.

Započet ćemo apstraktno proučavanje ključnih teorema koji se redovito koriste u algebri, a jedine pretpostavke koje imamo su: za sve realne brojeve $a, b$ i $c$,

| | |
|---|---|
| $a + b = b + a$ | Komutativnost zbrajanja |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | Asocijativnost zbrajanja |
| $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ | Distributivnost množenja prema zbrajanju |
| $a \cdot b = b \cdot a$ | Komutativnost množenja |
| $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | Asocijativnost množenja |
| Postoji broj 0 sa svojstvom da je $a + 0 = 0 + a = a$. | Svojstvo nule |
| Za svaki broj $a$ postoji (jedinstveni) broj $-a$, tako da vrijedi $a + (-a) = 0$. | Svojstvo aditivnog inverza |

Ne pretpostavljamo ništa drugo, osim još da su suma i produkt dva realna broja također realni brojevi, ali nismo to eksplicitno iskazali jer se to čini očitim. Navest ćemo i dokazati jedan od osnovnih teorema, vezan uz posljednju pretpostavku.

**Teorem 23.** *Postoji samo jedan aditivni inverz broja $x$.*

*Dokaz:* Naša strategija za ovaj dokaz je započeti s pretpostavkom da postoje dva aditivna inverza zadanog broja i nakon toga dokazati da oni moraju biti jednaki.
Pretpostavimo da imamo dva aditivna inverza broja $x$, i da su to $a$ i $b$. Tada, prema definiciji aditivnog inverza, vrijedi

$$x + a = 0 \tag{35}$$

i

$$x + b = 0. \tag{36}$$

Sada,

$$\begin{aligned} a &= a + 0 \quad \text{(svojstvo nule)}, \\ &= a + (x + b) \quad \text{(prema (36))}, \\ &= (a + x) + b \quad \text{(svojstvo asocijativnosti)}, \\ &= (x + a) + b \quad \text{(svojstvo komutativnosti)}, \\ &= 0 + b \quad \text{(prema (35))}, \\ &= b \quad \text{(svojstvo nule)}. \end{aligned}$$

■

Pokazali smo da su bilo koja dva aditivna inverza $a$ i $b$ broja $x$ jednaka. Prema tome, aditivni inverz je jedinstven.

Sada ćemo pokazati kako, s prihvaćanjem *pravila* 1−7, možemo izvesti nekoliko uobičajenih pravila algebre. Ovi dokazi pokazuju korak po korak što se zaista događa u nekoliko tipičnih algebarskih postupaka koje učenici provode prilikom rješavanja zadataka.

**Teorem 24.** *a) Jednadžba $x + x = x$ ima samo jedno rješenje i to je $x = 0$.*

*b) Ako s $a$ označimo bilo koji broj, onda je $a \cdot 0 = 0$.*

*c) $(-a) \cdot b = -(ab)$. Posebno, umnožak negativnog i pozitivnog broja daje negativan broj.*

*d) $(-a) \cdot (-b) = ab$. Posebno, umnožak dva negativna broja je pozitivan broj.*

*Dokaz:*

a) Krenut ćemo s $x + x = x$, i zapisat ćemo kao $(x + x) = x$. Dodamo $-x$ na obje strane i dobit ćemo

$$(x + x) + (-x) = x + (-x).$$

Ako iskoristimo svojstvo asocijativnosti imamo

$$x + (x + (-x)) = x + (-x).$$

Prema *pravilu* 7 dobijemo $x + 0 = 0$. Konačno, iskoristimo *pravilo* 6 i dobijemo $x = 0$. Dakle, ako je $x + x = 0$, imamo da je $x = 0$.

b) Kako je, prema *pravilu* 6, $0 + 0 = 0$, s $a = 0$ dobijemo

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0).$$

Iz distributivnosti imamo $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$.
Sada, ako označimo $a \cdot 0 = x$, to postaje $x + x = x$. Zatim, iz dijela a), imamo da je

$$x = 0. \tag{37}$$

Ali, $x = a \cdot 0$, pa (37) ustvari kaže da je $a \cdot 0 = 0$.

c) Sada znamo da je $a \cdot 0 = 0$. Zapisat ćemo to kao $a((-b) + b) = 0$. Zbog distributivnosti imamo

$$a \cdot (-b) + a \cdot b = 0. \tag{38}$$

Iz (38) imamo da je $a \cdot (-b)$ aditivni inverz od $ab$, pošto njihov zbroj daje nulu. Ali postoji samo jedan aditivni inverz od $ab$ i to je $-(ab)$. Prema tome,

$$a \cdot (-b) = -(ab). \tag{39}$$

d) Već znamo da bilo koji broj pomnožen nulom daje nulu. Prema tome, $(-a) \cdot 0 = 0$. To ćemo zapisati kao $(-a)(-b + b) = 0$. Zbog distributivnosti imamo

$$(-a)(-b) + (-a)b = 0. \tag{40}$$

Prema (39), izraz (40) se svodi na

$$(-a)(-b) + (-(ab)) = 0. \tag{41}$$

Sada, jednakost (41) kaže da je $(-a)(-b)$ aditivan inverz od $-(ab)$. Ali je i $ab$. Budući da je aditivan inverz jedinstven, onda je $(-a)(-b) = ab$. Alternativan način pokazivanja ovoga bi bio kad bismo krenuli s izrazom (41), dodali $ab$ na obje strane i dalje isto kao u dokazu pod a) ili c) da dobijemo $(-a)(-b) = ab$.

■

Upravo smo dokazali teoreme o zbrajanju i aditivnim inverzima. No, nismo rekli ništa o oduzimanju. Definiramo oduzimanje na način kako je definirano u osnovnim školama, to jest $a - b$ je definirano kao $a + (-b)$.

Slijedi još jedan skup pravila koji se koristi u osnovnoj školi.

**Teorem 25.** *1.* $-(-a) = a$,

*2.* $-(a - b) = b - a$.

*Dokaz:*

1. Prvi dio je lakši nego što to izgleda. Znamo da je

$$-a + -(-a) = 0, \tag{42}$$

jer smo dodali $-a$ njegovom aditivnom inverzu. Sada izraz (42) kaže da je $-(-a)$ aditivan inverz od $-a$. Također je i $a$. Pošto postoji samo jedan aditivan inverz nekog broja, vrijedi da je $-(-a) = a$.

2. Dokaz drugog dijela je sličan, ali zahtijeva više detalja. Imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} (a-b)+(b-a) &= (a+-b)+(b+-a) \\ &= ((a+-b)+b)+-a \\ &= (a+(-b+b))+-a \\ &= (a+(0))+-a \\ &= a+-a \\ &= 0. \end{aligned}$$

Kako je $(a-b)+(b-a) = 0$, $(b-a)$ je aditivni inverz od $(a-b)$. Ali, postoji samo jedan aditivni inverz od $(a-b)$ i to je $-(a-b)$, pa iz toga vrijedi da je $-(a-b) = (b-a)$.

■

U algebri je od velike pomoći, ili ponekad čak i nužno, biti sposoban preurediti članove. Učenici često imaju poteškoća pri opravdanju zahtjeva da je izraz $a-b+c$ isto što i $-b+c+a$. Sada ćemo pokazati zašto to može biti učinjeno. Slični argumenti će pokazati da se, kada imate grupu članova odvojenih plusevima ili minusima, oni mogu preurediti sve dok predznaci ostaju nepromijenjeni.

Znamo da je $a - b + c$ isto što i $a + -b + c$. I ranije smo iznijeli da, prema svojstvu asocijativnosti, nema razlike ako $a + -b + c$ interpretiramo kao $(a + -b) + c$ ili $a + (-b + c)$, značenje ostaje isto. Zato možemo izostaviti zagrade i jednostavno napisati $a - b + c$. Sada, prema svojstvu komutativnosti, vrijedi $a + -b + c = -b + a + c$.

Na sličan način, $abcdef$ ima istu vrijednost kao $decbfa$. Ponovno, koristimo *pravila* $1-7$ kako bi to dokazali i naveli kao teorem na koji ćemo se pozivati, budući da je to koristan rezultat.

**Teorem 26.** *a) U algebarskim izrazima koje čine sume ili razlike članova, možemo preurediti članove, sve dok predznaci ostaju nepromijenjeni.*

*b) Ako promijenimo poredak faktora, produkt ostaje nepromijenjen.*

*Dokaz:*

a) Prije teorema pokazali smo kako se radi u slučaju kad imamo tri člana. Dokaz ovog rezultata općenito, kada ima više članova, je pomalo zapetljan i koristi indukciju. Nismo ga naveli ovdje, ali dat ćemo naslutiti kako se dokaz provodi demonstrirajući ga za četiri člana.
Koristimo izraz $(a + b) + (c + d)$. Sada, pretpostavimo da želimo pokazati da je to isto što i $(d + b) + (c + a)$. Evo koji su koraci:

$$\begin{aligned}
(a+b)+(c+d) &= (c+d)+(a+b) && \text{(svojstvo komutativnosti)},\\
&= c+(d+(a+b)) && \text{(svojstvo asocijativnosti)},\\
&= c+(d+(b+a)) && \text{(svojstvo komutativnosti)},\\
&= c+((d+b)+a) && \text{(svojstvo asocijativnosti)},\\
&= c+(a+(d+b)) && \text{(svojstvo komutativnosti)},\\
&= (c+a)+(d+b) && \text{(svojstvo asocijativnosti)},\\
&= (d+b)+(c+a) && \text{(svojstvo komutativnosti)}.
\end{aligned}$$

To je ta vrsta dokaza koja pokazuje da kombinacijom svojstava komutativnosti i asocijativnosti možemo preuređivati bilo koji zbroj i uvijek ćemo dobiti ekvivalentan izraz.

Zato možemo i izostaviti zagrade u bilo kojem zbroju i izraz kao što je $(a+b)+(c+d)$ pisati kao $a+b+c+d$. Nije važan način na koji se taj zbroj interpretira, rezultat je uvijek isti.

■

Dio *Teorema 26* pod b) daje opravdanje zašto je izraz kao što je $(-3x^2y^3)(4x^4y)$ jednak izrazu $-12x^6y^4$. Iako se od osnovnoškolaca zahtijeva da izvedu ta preuređenja prilikom učenja algebre, često se ne osjećaju sigurnima u to što rade i ne razumiju razloge zašto je to dopušteno. Zapravo, standardna procedura prikazivanja produkta je staviti broj na prvo mjesto, zatim sve nepoznanice $x$, a nakon toga sve nepoznanice $y$. U našem prethodnom primjeru imamo $(-3)(4)x^2x^4y^3y$ iz čega se lako dobije $-12x^6y^4$, nakon što se svladaju pravila za eksponente.

Ovdje su još dva važna svojstva realnih brojeva:

8. Postoji broj 1 sa svojstvom da je $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, za bilo koji realan broj $a$. Ovo svojstvo je poznato kao **svojstvo multiplikativnog identiteta** (množenjem broja brojem 1 dobije se identičan broj).

9. Za svaki broj $a$ različit od nule postoji (jedinstveni) broj, koji zapisujemo kao $a^{-1}$, sa svojstvom da je $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Broj $a^{-1}$ nazivamo **multiplikativnim inverzom** broja $a$.

Do sada nismo trebali koristiti *pravila* 8 *i* 9, ali sada ćemo ih trebati kako bismo nastavili s proširivanjem svojstava realnih brojeva. *Pravilo* 8 može se koristiti kako bi se objasnili mnogi algebarski postupci. Primjerice, kada rješavamo kvadratnu jednadžbu, ponekad faktoriziramo i onda izjednačavamo svaki faktor s nulom. Sljedeći teorem nam daje odgovor zašto to radimo.

**Teorem 27.** *Ako su $a$ i $b$ realni brojevi i $ab = 0$, onda je ili $a = 0$ ili $b = 0$.*

*Dokaz:* Ili je $a = 0$ ili je različit od nule. Ako je $a = 0$, onda je dokaz gotov. Ako $a$ nije jednak nuli, onda prema *pravilu* 8, postoji $a^{-1}$. Sada, pomnožimo obje strane jednadžbe $ab = 0$ s $a^{-1}$ i dobijemo

$$a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0.$$

Pošto smo dokazali da je $a^{-1} \cdot 0 = 0$, pojednostavit ćemo gornji izraz na

$$a^{-1} \cdot (ab) = 0. \tag{43}$$

Upotrebom svojstva asocijativnosti dobijemo

$$(a^{-1}a) \cdot b = 0$$

ili samo

$$1 \cdot b = 0. \tag{44}$$

Ali, prema *pravilu* 9, vrijedi $1 \cdot b = b$. Prema tome, jednakost (44) postaje $b = 0$. Slični dokaz pokazuje da, ako je $b \neq 0$, tada $a$ mora biti 0.

■

Idemo sada ispitati kakvu ulogu taj teorem ima u rješavanju kvadratnih jednadžbi. Ako želimo riješiti jednadžbu $x^2 - 5x + 6 = 0$, faktoriziramo lijevu stranu i dobijemo

$$(x-2)(x-3) = 0.$$

Ako izraz $(x-2)$ promatramo kao $a$, i izraz $(x-3)$ kao $b$, imamo $ab = 0$. Prema tome, ili $a$ ili $b$ mora biti jednak nuli. To jest, ili $x-2$ ili $x-3$ mora biti jednako nuli.

Ovo se pravilo može proširiti. Ako imamo umnožak čitavog niza izraza koji je jednak nuli, tada je jedan od faktora jednak nuli. To se često koristi u rješavanju jednadžbi višeg stupnja. Na primjer, ako želimo riješiti $x^3 = x$, tada prebacimo sve na jednu stranu jednadžbe da dobijemo $x^3 - x = 0$, što faktoriziramo u

$$x(x-1)(x+1) = 0.$$

To znači da, ili je $x = 0$, ili $x + 1 = 0$, ili $x - 1 = 0$.

Učenici često prave sljedeću grešku kada pokušavaju riješiti kvadratne jednadžbe. Recimo da žele riješiti jednadžbu $x^2 - 2x = 4$. Oni faktoriziraju obje strane i dobiju

$$x(x-2) = 1 \cdot 4$$

i onda zaključe da je $x = 1$ i $x - 2 = 4$, i dobiju rješenja $x = 1$ i $x = 6$. Naravno, ako provjere svoje odgovore, vidjet će da nisu točni. Naime, kada imamo umnožak kao što je $x(x-2) = 4$, ne možemo zaključiti ništa o faktorima pošto broj 4 kao produkt može biti napisan na mnogo načina. Može biti prikazan kao $1 \cdot 4, 2 \cdot 2, 6 \cdot \frac{2}{3}$, i tako dalje. Zato je ova metoda skroz pogrešna. Međutim, ako je umnožak dva faktora jednak nuli, onda možemo nešto zaključiti, a taj zaključak je dan prethodnim teoremom: jedan od faktora jednak je nuli.

# Zaključak

U ovom radu opisana su bitna svojstva algebre koja se učestalo koriste u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi, a o kojima ni ne razmišljamo previše. Intuitivno ih prihvaćamo, a zapravo postoje vrlo jednostavni dokazi njihove valjanosti i načini kojima se mogu zorno prikazati učenicima. Zanimljiva je činjenica da postoji veliki broj nastavnika matematike koji ne razmišljaju na način koji je prikazan u ovom radu i koji prilikom pripreme za nastavu prihvaćaju definicije iz udžbenika, bez saznanja o njihovoj matematičkoj pozadini. Zato smatram da učenje ne bi trebalo prestati sa završetkom fakulteta, nego bismo trebali proširivati svoje znanje stvarima koje nismo imali priliku ranije naučiti, a dio su školske matematike. Također, stalnim napredovanjem naš pristup matematici prilagođavamo zahtjevima podučavanja, pa s lakoćom pronalazimo načine kako se nositi s eventualnim poteškoćama u nastavi.

# Literatura


[1] D. Berlinski, *Beskonačni uspon*, Alfa, Zagreb, 2011.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1: Udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred prirodoslovno - matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2013.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4: Udžbenik i zbirka zadataka za četvrti razred prirodoslovno - matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2013.

[4] B. Goleš, L. Krnić, Z. Lobor, Z. Šikić, *Matematika 5: Udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za peti razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, .

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.

[6] T. Nemeth, G. Stajčić, Z. Šikić *Matematika 8: Udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za osmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, .

[7] A. Sultan, A.F. Artzt, *The Mathematics that Every Secondary School Teacher Needs to Know*, Routledge, New York, 2011.

[8] Z. Šikić, *Stendhalovi problemi s negativnim brojevima*, Matka, 2(1993./94.), 62 - 64.

[9] Z. Šikić, V. Draženović - Žitko, M. Marić, L. Krnić, *Matematika 6: Udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za šesti razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, .

[10] Z. Šikić, I. Golac - Jakopović, M. Vuković, L. Krnić, *Matematika 7: Udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za sedmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, .

[11] D. Žubrinić, *Matematika 3: Uvod u diskretnu matematiku*, Element, Zagreb, 2006.

# Sažetak

U ovom radu opisana su svojstva skupa realnih brojeva, počevši od prirodnih brojeva. Na samom početku razmatraju se osnovna svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti množenja prema zbrajanju te potreba za njihovim definiranjem. Dani su odgovori na učestala pitanja koja učenici postavljaju tijekom školovanja. Prvo poglavlje završava temeljnim pravilima vezanim uz razlomke, na koje se onda nastavlja pregled koncepata ključnih za daljnji razvoj skupa realnih brojeva. Također su opisane osnovne karakteristike decimalnog zapisa realnih brojeva kao što su periodičnost i jedinstvenost. U radu je dotaknuta i tema kardinalnosti, prilikom opisivanja važnog svojstva skupa realnih brojeva – prebrojivosti. I kao posljednje, navedeni su neki od bitnih teorema, koji su sveprisutni u podučavanju algebre, kao i njihovi dokazi.



**Ključne riječi:** svojstva asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti, prirodni brojevi, cijeli brojevi, razlomci, racionalni i iracionalni brojevi, geometrijski red, decimalni zapis realnih brojeva, prebrojivost.



# Summary

This paper describes the rules for the real number system, starting from the natural numbers. At the beginning, the basic commutative, associative and distributive laws are considered; along with the need for their definition. Answers to the common questions that students ask during education are offered. The first chapter ends with fundamental rules related to fractions, continuing with the review of the key concepts for the further development of the real number system. Also, the main characteristics of decimal notation of real numbers such as periodicity and uniqueness are described. The paper addresses the topic cardinality when describing important property of the real number system – countability. Finally, some of the most important theorems, which are ubiquitous in the teaching of algebra end their evidence are mentioned.



**Keywords:** commutative, associative and distributive laws, natural numbers, integers, fractions, rational and irrational numbers, geometric series, decimal notation of real numbers, countability.

## Životopis

Rođena sam u Brčkom, BiH, 25. rujna 1991. godine. Upisala sam Osnovnu školu Ivana Kozarca u Županji, tijekom čijeg sam pohađanja sudjelovala na natjecanju iz matematike te se tu postepeno razvijala moja privrženost matematici.
Nakon završene osnovne škole upisala sam opći smjer Gimnazije Županja, u Županji. Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku upisala sam 2010. godine.