Nilpotentni operatori i matrice

Romić, Nikolina

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:667906

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-11**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

zir.nsk.hr

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Nikolina Romić

Nilpotentni operatori i matrice

Završni rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Nikolina Romić

Nilpotentni operatori i matrice

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Darija Marković

Osijek, 2016.

Sadržaj

1 Nilpotentni operatori i matrice **1**

1.1 Sažetak 1

1.2 Ključne riječi 1

2 Nilpotent operators and matrices **1**

2.1 Abstract 1

2.2 Key words 1

3 Uvod **2**

4 Linearni operatori **3**

5 Nilpotentni operatori **9**

5.1 Nilpotentnost 9

5.2 Pronalazak nilpotentnih matrica 14

1 Nilpotentni operatori i matrice

1.1 Sažetak

U radu ćemo se baviti nilpotentnim operatorima i njihovim matričnim zapisom, njihovim svojstvima te bitnim tvdnjama. Definirat ćemo pojmove koje ćemo koristiti u daljnjem radu, a to su na primjer vektorski prostor, baza i dimenzija vektorskog prostora, linearan operator, svojstvena vrijednost operatora, determinanta matrice i drugi. Zanimat će nas što je to indeks nilpotentnosti vektora, indeks nilpotentnosti operatora i koja je povezanost između njih; elementarna Jordanova klijetka te drugi pojmovi koje ćemo definirati i koristiti. Pogledat ćemo i što su Jordanovi lanci te koja je njihova veza s nilpotentnim operatorima i elementarnim Jordanovim klijetkama. Pokazat ćemo koja posebna svojstva vrijede za nilpotentne matrice i tražit ćemo primjere.

1.2 Ključne riječi

Linearna mnogostrukost, invarijantan potprostor, kvocijentni operator, nilpotentan operator, indeks nilpotentnosti vektora, indeks nilpotentnosti operatora, elementarna Jordanova klijetka, Jordanov lanac.

2 Nilpotent operators and matrices

2.1 Abstract

In this work our topic will be nilpotent operators and their matrices, their characteristics and important theorems. We will define terms that will help us in later work. Those are, for example, vector space, base and dimension of vector space, linear operator, eigenvalue, determinant and others. Our interest will be in the height of a vector, the height of a nilpotent operator and what is a connection between them; Jordan block of a nilpotent operator and other terms wich will be defined and used. Also, we shall observe the chains and their relation with nilpotent operators and Jordan blocks. We will show what special characteristics are valid for nilpotent matrices and search for some examples.

2.2 Key words

Coset, invariant subspace, factoroperator, nilpotent operator, the height of a vector, the height of a operator, Jordan block, the chain.

3 Uvod

Veliki dio linearne algebre bavi se proučavanjem linearnih operatora i svojstava koja ih karakteriziraju. Tema ovog rada su nilpotentni operatori, jedna klasa linearnih operatora koja ima specifična svojstva koje ćemo iskazati te dokazati. Definirat ćemo najbitnije pojmove i pronaći vezu između operatora i matrica. Nilpotentnim ćemo operatorima pridružiti nilpotentne matrice te potražiti netipične primjere nilpotentnih matrica.

Pokazat ćemo kada je zbroj nilpotentnih matrica opet nilpotentna matrica te isto za produkt i kada su restrikcije nilpotentnih operatora i kvocijentni operatori također nilpotentni operatori. Posebno svojstvo nilpotentnih operatora je njihova jedina svojstvena vrijednost. Opisat ćemo i što je to elementarna Jordanova klijetka reda n i vidjeti može li se svaki operator prikazati na taj način. Bavit ćemo se Jordanovim lancima i iskazati te dokazati teorem o njihovoj linearnoj nezavisnosti. Pomoću lanaca opet ćemo doći do elementarne Jordanove klijetke. Na poslijetku ćemo se zapitati možemo li pronaći nilpotentne matrice koje nemaju nula u svom zapisu i čije potencije manje od indeksa nilpotentnosti također nemaju nule.

4 Linearni operatori

Za početak, definirat ćemo najbitnije pojmove te istaknuti važne propozicije i teoreme koji će nam pomoći pri dokazivanju temeljnih tvrdnji. Pojmovi koji su bitni za ovo poglavlje su na primjer **vektorski prostor, baza vektorskog prostora, linearni operator** i drugi.

Definicija 1: [1] *Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F} \cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijede sljedeća svojstva:*

- *asocijativnost zbrajanja:* $\forall a, b, c \in V, \;\; a + (b + c) = (a + b) + c$
- *postojanje neutralnog elementa za zbrajanje:*
  $\exists 0 \in V \;\; td \;\; \forall a \in V, \;\; a + 0 = 0 + a = a$
- *postojanje suprotnog elementa:* $\forall a \in V \;\; \exists \text{-}a \in V \; td \; a + (\text{-}a) = \text{-}a + a = 0$
- *komutativnost zbrajanja:* $\forall a, b \in V, \;\; a + b = b + a$
- *kvaziasocijativnost:* $\forall a \in V, \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \;\; \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
- *distributivnost obzirom na zbrajanje u* $\mathbb{F}$:
  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V, \;\; (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
- *distibutivnost obzirom na zbrajanje u* V :
  $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall a, b \in V, \;\; \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
- *netrivijalnost množenja:* $\forall a \in V, \;\; 1 \cdot a = a$

Definicija 2: *Neka je V vektorski prostor i $\emptyset \neq U \subseteq V$. Ako je U vektorski prostor s obzirom na iste operacije kao u V, kažemo da je U potprostor od V i pišemo $U \leqslant V$.*

Za skup vektora $\{a_1, ..., a_n\}$ iz V, njihovom linearnom kombinacijom nazivamo svaki izraz oblika $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ pri čemu su $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$. Ako ta linearna kombinacija iščezava, zanima nas što možemo reći o skupu vektora u ovisnosti o koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$.

Definicija 3: *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S = \{a_1, ..., a_n\}$ skup vektora iz V, $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je skup S linearno nezavisan ukoliko iz $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$ slijedi $\alpha_i = 0, \forall i = 1, ..., n$.*

Definicija 4: *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $B = \{b_1, ..., b_n\}$ skup vektora iz V, $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je B baza za V ukoliko je B linearno nezavisan skup i ukoliko vrijedi $V = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i; \; \alpha_i \in \mathbb{F}, b_i \in B\}$.*
Dimenziju vektorskog prostora V definiramo kao broj elemenata bilo koje baze (ukoliko je taj broj konačan) za V i označavamo $\dim V$.

Dakle, B je baza za V ukoliko se svaki vektor iz V može zapisati kao linearna kombinacija elemenata iz B. Još kažemo da B razapinje V ili da je B **sustav izvodnica** za V.
Definirat ćemo posebna preslikavanja vektorskih prostora koja se nazivaju linearnim operatorima i nadalje ćemo se baviti uglavnom njima.

Definicija 5: *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ naziva se linearan operator ako vrijedi:*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in V, \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$$

[1] definicije preuzete iz *Linearna algebra*, D.Bakić

Svojstvo $A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay$ naziva se linearnost preslikavanja A, a iz linearnosti direktno slijede sljedeća svojstva:
- aditivnost $A(x + y) = Ax + Ay$ (za $\alpha = \beta = 1$), $\forall x, y \in V$
- homogenost $A(\alpha x) = \alpha Ax$ (za $\beta = 0$), $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

Također, lako se provjeri da iz homogenosti i aditivnosti slijedi linearnost, krećući od lijeve strane i direktnom primjenom ova dva navedena svojstva. Indukcijom se pokaže i da vrijedi $A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot Ax_i$, $\alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in V$, $\forall i = 1, ..., n$.

Linearan operator $A : V \to W$ naziva se **monomorfizam**, ako je A injekcija (preslikavanje 1-1), **epimorfizam**, ako je A surjekcija (slika funkcije jednaka kodomeni) i **izomorfizam** ako je A bijekcija (surjektivna injekcija).

Budući da svaki vektor $x \in V$ možemo zapisati pomoću elemenata baze za V $e = \{e_1, ..., e_n\}$ kao $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, zbog linearnosti operatora A slijedi da je $Ax = A(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot Ae_i$. Dakle, dovoljno je poznavati djelovanje operatora na bazi vektorskog prostora kako bismo znali djelovanje operatora na svakom elementu iz V.

Definicija 6: *Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Definiramo sliku operatora A,* $\operatorname{Im} A = \{Av; v \in V\}$ *i jezgru operatora A,* $\operatorname{Ker} A = \{v \in V; Av = 0\}$. *Također, ukoliko su ti prostori konačnodimenzionalni, definiramo* $r(A) = \dim \operatorname{Im} A$ *(rang operatora A) i* $d(A) = \dim \operatorname{Ker} A$ *(defekt operatora A).*

Vrijedi: $\operatorname{Im} A \leqslant W$ i $\operatorname{Ker} A \leqslant V$, te $\dim V = d(A) + r(A)$ (teorem o rangu i defektu[2]).

Propozicija 1: *Linearan operator $A : V \to W$ je injekcija ako i samo ako* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Dokaz: $\Longrightarrow$ *Pretpostavimo da je operator A injekcija. Vrijedi sljedeće:*

$$A0 = A(0 + 0) = A0 + A0 / + (\text{-}A0)$$

$$0 = A0 \Rightarrow 0 \in \operatorname{Ker} A$$

Jer je A injekcija, niti jedan drugi $x \in V$ se ne može preslikati u 0 $\Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$. $\triangle$

$\Longleftarrow$ *Pretpostavimo* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ *i neka je $Ax = Ay$ za neke $x, y \in V$* $\Rightarrow Ax - Ay = 0$
$\Rightarrow A(x - y) = 0$, *odnosno* $x - y \in \operatorname{Ker} A$
Jer $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, *slijedi* $x - y = 0$, *tj.* $x = y$ *pa je A injekcija.* $\square$

Uzmimo vektor $x \in V$, gdje je V vektorski prostor dimenzije $\dim V = n$ i neka je $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ neka baza za V. Neka je $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Jednostupčanu matricu

$$[x]^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

zovemo matričnim prikazom vektora x u bazi e.

[2] *Linearna Algebra*, D.Bakić, 144.str., teorem 5.1.11

Svakom operatoru možemo pridružiti matricu tog operatora u ovisnosti o vektorskim prostorima V i W (tip matrice ovisi o dimenzijama vektorskih prostora), te bazama za te vektorske prostore. Odnose između linearnog operatora i pridružene mu matrice te na koji način to možemo napraviti osigurat će nam sljedeće propozicije.

Propozicija 2: *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $e = \{e_1, ..., e_n\}$ neka baza za V. Preslikavanje, $\phi : V \to \mathbb{F}^n$, $\phi(x) = [x]^e$ je izomorfizam.*

Uzmimo sada linearan operator $A : V \to W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$ i baze $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ za V i $f = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ za W. Svaki vektor $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n$ možemo zapisati kao

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, ..., n.$$

Tada matricu

$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

zovemo matričnim zapisom operatora A u paru baza (e, f).

Ako s $L(V, W)$ označimo skup svih linearnih operatora $A : V \to W$, a s $M_{mn}(\mathbb{F})$ skup svih matrica tipa $m \times n$ čiji su koeficijenti iz polja $\mathbb{F}$, vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 3: *Neka su V i W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$ i neka su $e = \{e_1, ..., e_n\}$, $f = \{f_1, ..., f_m\}$ baze za V, odnosno W. Preslikavanje $\Phi : L(V, W) \to M_{mn}(\mathbb{F})$, definirano s $\Phi(A) = [A]_e^f$ je izomorfizam.* [3]

Kad bismo imali operator iz $L(V)$ (tj. operator $A : V \to V$), prethodna propozicija bi nam davala preslikavanje čije su vrijednosti iz skupa $M_n(\mathbb{F})$ definirano s $\Phi(A) = [A]_e^e$ i tada je ono izomorfizam algebri (bijektivni homomorfizam). Matrični zapisi linearnog operatora su slične matrice, tj. ako su A i B dva matrična zapisa istog linearnog operatora, onda možemo naći matricu C takva da postoji C^{-1} i takva da je $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$.

Definicija 7: *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A : V \to V$ linearan operator. Kažemo da je $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V, x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Vektor x tada nazivamo svojstvenim vektorom operatora A za svojstvenu vrijednost λ.*

Također se koristi i izraz *karakteristična vrijednost (vektor)*. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar operatora A i označava $\sigma(A)$.

Definicija 8: *Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ je bilo koja bijekcija $p : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$. Kaže se još i da je p permutacija od n elemenata. Skup svih permutacija od n elemenata označavamo s S_n.*

[3] dokazi Propozicije 2 i 3 mogu se naći u *Linearna algebra*, D. Bakić, 159. i 160.str, Prop 5.4.1, te 5.4.2

Tablični prikaz permutacije je sljedeći:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}$$

Definicija 9: *Neka je*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

Svaki par (i, j) takav da je $i < j$ i $p(i) > p(j)$ naziva se inverzija u permutaciji p. Broj svih inverzija u permutaciji p označava se s $I(p)$.

Sada smo definirali sve pojmove koji su nam potrebni za uvođenje jednog novog koji nam je potreban za nastavak, a to je determinanta matrice.

Definicija 10: *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $A = [\alpha_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Determinanta matrice A označava se* $\det A$ *i definira*

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} \alpha_{1p(1)} \alpha_{2p(2)} \cdots \alpha_{np(n)}$$

Definicija 11: *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se svojstveni (karakteristični) polinom matrice A.*

Propozicija 4: *Slične matrice imaju jednake svojstvene polinome.*

Zbog prethodne propozicije možemo definirati svojstveni polinom za linearne operatore. Za operator $A \in L(V)$ svojstveni polinom definiramo kao svojstveni polinom matrice $[A]_e^e$ pri čemu je e neka baza za vektorski prostor V.

Neka je λ_0 svojstvena vrijednost operatora A. Dakle, $\exists x \in V,\ x \neq 0,$ *takav da*
$Ax = \lambda_0 x. \quad \Leftrightarrow \quad Ax - \lambda_0 I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda_0 I)x = 0$

Stoga vrijedi: x je svojstveni vektor linearnog operatora A ako i samo ako je $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$. Odnosno, svojstvena vrijednost operatora A je takav skalar iz $\mathbb{F}$ za kojeg operator $A - \lambda_0 I$ nije regularan (jer mu je jezgra različita od $\{0\}$ pa nije monomorfizam).

Teorem 1: *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi $k_A(\lambda_0) = 0$.*

DOKAZ: *Neka je e neka baza za V.*
λ_0 je svojstvena vrijednost za A
$\Leftrightarrow A - \lambda_0 I$ nije izomorfizam (prema prethodnom razmatranju).
$\Leftrightarrow [A - \lambda_0 I]_e^e$ nije regularna matrica, dakle ni $[A]_e^e - \lambda_0 I$ nije regularna matrica.
$\Leftrightarrow \det([A]_e^e - \lambda_0 I) = 0 \Leftrightarrow k_{[A]_e^e}(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow k_A(\lambda_0) = 0 \quad \square$

Ako je $\dim V = n$, $A \in L(V)$, (možemo za $[A]_e^e$ pisati samo A ako se iz konteksta vidi je li riječ o operatoru ili matrici), $A \in M_n(\mathbb{F})$, tada je k_A polinom n-tog stupnja pa A ima najviše n svojstvenih vrijednosti jer k_A ima najviše n nultočaka.

Skup $V_A(\lambda_0) = \{x \in V; Ax = \lambda_0 x\}$ nazivamo **svojstvenim** (karakterističnim) **potprostorom** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. $V_A(\lambda_0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\lambda_0 I)$ pa je $V_A(\lambda)$ zaista potprostor.

Definicija 12: *Neka je V vektorski prostor i U potprostor od V. Linearnu mnogostrukost potprostora U određenu vektorom $v \in V$ definiramo kao skup $\mathrm{Cl}_U(v)$, $\mathrm{Cl}_U(v) = \{w \in V : w - v \in U\}$.*

Skup svih linearnih mnogostrukosti potprostora $U \leqslant V$ nazivamo **kvocijentnim skupom** vektorskog prostora V po potprostoru U uz oznaku V/U.

Neka su $Q_1, Q_2 \in V/U, Q_1 \neq Q_2$ takvi da je $Q_1 \bigcap Q_2 = \emptyset$, te $\bigcup_{Q \in V/U} Q = V$. Vrijedi:

$$\mathrm{Cl}_U(v) = \{w \in V : w - v \in U\} = \{u + v : u \in U\} =: v + U$$

$$V/U = \{\mathrm{Cl}_u(v) : v \in V\} = \{v + U : v \in V\}$$

Teorem 2: *Kvocijentni skup V/U vektorskog prostora V po potprostoru U je vektorski prostor obzirom na operacije*

$$\mathrm{Cl}_U(v_1) + \mathrm{Cl}_U(v_2) = \mathrm{Cl}_U(v_1 + v_2),\ v_1, v_2 \in V \quad ((v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U)$$

$$\alpha\, \mathrm{Cl}_U(v) = \mathrm{Cl}_U(\alpha v),\ \alpha \in \mathbb{F},\ v \in V \quad (\alpha(v + U) = \alpha v + U)$$

Teorem 3: *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Tada je za svaki potprostor U od V kvocijentni prostor V/U također konačnodimenzionalan i vrijedi* $\dim U + \dim V/U = \dim V$. [4]

Definicija 13: *Neka je V vektorski prostor i $A \in L(V)$. Kažemo da je potprostor $M \leqslant V$ invarijantan za A ako vrijedi $AM \subseteq M$, tj $Ax \in M,\ \forall x \in M$.*

$\{0\}$ i V su trivijalni invarijantni potprostori za svaki operator te je svaki svojstveni potprostor operatora A invarijantan za A.

Teorem 4: *Jezgra i slika linearnog operatora $A : V \to V$ su invarijantni potprostori od A.*

DOKAZ: *Neka je $u \in \mathrm{Ker}\, A$. $\Rightarrow$ $A(u) = 0 \in \mathrm{Ker}\, A$ jer $A0 = 0$.* $\triangle$
Neka je $v \in \mathrm{Im}\, A$ i neka je $w = Av$. Tada je $w \in \mathrm{Im}\, A$, tj $Av \in \mathrm{Im}\, A$. $\square$

Neka je U invarijantan potprostor vektorskog prostora V za linearan operator $A : V \to V$. Linearan operator $A_{V/U} : V/U \to V/U$ definiran na sljedeći način:

$$A_{V/U}(Cl_U(v)) = Cl_U(A(v)),\ odnosno\ \ A_{V/U}(v + U) = A(v) + U,\ \ v \in V.$$

nazivamo **kvocijentni operator operatora** A **po potprostoru** U .

Provjerimo je li $A_{V/U}$ dobro definiran:
Neka su $v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2$ takvi da je $Cl_U(v_1) = Cl_U(v_2)$, odnosno $v_1 + U = v_2 + U$. Odavdje nam slijedi $v_1 - v_2 + U = U$ prema definiciji zbrajanja u V/U. Dakle, $v_1 - v_2 \in U$. Želimo pokazati da iz $v_1 + U = v_2 + U$ slijedi $A_{V/U}(v_1 + U) = A_{V/U}(v_2 + U)$, tj. $A(v_1) + U = A(v_2) + U$.

[4] dokazi Teorema 2 i 3 mogu se naći u *Linear Algebra and Multidimensional Geometry*, R. Sharipov, 34. i 35. str. tm 7.5 i 7.6

Jer $v_1 - v_2 \in U \Rightarrow A_{V/U}(v_1 - v_2 + U) = A_{V/U}(U) = U$, odnosno $A_{V/U}(v_1 - v_2 + +U) = A(v_1 - v_2) + U = A(v_1) - A(v_2) + U = U$, zbog linearnosti od A. Tj. $A(v_1) - A(v_2) \in U \Rightarrow A(v_1) + U = A(v_2) + U \quad \triangle$

Provjerimo je li $A_{V/U}$ linearan operator: $v_1, v_2, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$ proizvoljni

$$A_{V/U}((v_1 + U) + (v_2 + U)) = A_{V/U}(v_1 + v_2 + U) = A(v_1 + v_2) + U = A(v_1) + A(v_2) + U =$$

$$= (A(v_1) + U) + (A(v_2) + U) = A_{V/U}(v_1 + U) + A_{V/U}(v_2 + U)$$

pa vrijedi aditivnost. Provjerimo još homogenost.

$$A_{V/U}(\alpha(v + U)) = A_{V/U}(\alpha v + U) = A(\alpha v) + U = \alpha A(v) + U = \alpha(A(v) + U) =$$

$$= \alpha A_{V/U}(v + U) \quad \square$$

Teorem 5: [5] *Neka je $A : V \to V$ linearan operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru i U A-invarijantan potprostor od V. Tada za determinantu od A vrijedi:*

$$\det A = \det A\,|_U \cdot \det A_{V/U}$$

gdje je $A\,|_U$ restrikcija operatora A, $A\,|_U : U \to A(U) = U$ i $A_{V/U}$ kvocijentni operator operatora A po potprostoru U, $A_{V/U} : V/U \to V/U$.

[5] teorem i dokaz se mogu naći u *Linear Algebra and Multidimensional Geometry*, R. Sharipov, str. 65., tm 3.6.

5 Nilpotentni operatori

5.1 Nilpotentnost

Definicija 14: *Za linearni operator $F : V \to V$ kažemo da je nilpotentan ako za svaki $v \in V$ postoji pozitivan cijeli broj k takav da je $F^k(v) = 0$.*

Ako za svaki vektor $v \in V$ postoji k takav da je $F^k(v) = 0$, onda je za svaki $m \geq k$ također $F^m(v) = 0$. Označimo za vektor v s k najmanji takav da je $F^k(v) = 0$. Taj k nazivamo **indeksom nilpotentnosti vektora v s obzirom na nilpotentni operator F**. Uzimamo za indeks nilpotentnosti nulvektora 0. Ako indeks nilpotentosti vektora $v \in V$, koji je konačan, označimo s $\nu(v)$, onda možemo definirati broj

$$\nu(F) = \max_{v \in V} \nu(v)$$

takav da je $F^{\nu(F)}(v) = 0, \forall v \in V$, koji ne mora biti konačan, i nazivamo ga **indeksom nilpotentnosti operatora F**. Ukoliko jest konačan, onda nilpotentni operator F nazivamo operatorom konačnog indeksa, u suprotnom operatorom beskonačnog indeksa.

Propozicija 5: *U konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V je svaki nilpotentan operator $F \in L(V)$ konačnog indeksa nilpotentnosti.*

Dokaz: *U konačnodimenzionalnom V, neka je $\dim V = n$ i uzmimo neku bazu e za V, $e = \{e_1, ..., e_n\}$. Tada svaki vektor $v \in V$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora baze e kao*

$$v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Ako označimo s

$$m = \max\{\nu(e_1), ..., \nu(e_n)\}$$

koji je konačan, onda je

$$F^m v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F^m(e_i) = 0$$

prema definiciji od m. Prema tome, indeks nilpotentnosti bilo kojeg vektora iz V s obzirom na operator F, ograničen je odozgo s m. Stoga je i indeks nilpotentnosti operatora F ograničen odozgo s m, tj. konačan je. □

Propozicija 6: *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te neka je $F \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti $\nu(F)$ i neka je $v \in V$ takav da je $F^{\nu(F)-1}(v) \neq 0$. Tada je skup $\{v, Fv, F^2 v, ..., F^{\nu(F)-1} v\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz: *Neka je $v \in V$ kao u pretpostavkama propozicije, dakle $F^{\nu(F)} v = 0$, ali $F^{\nu(F)-1} v \neq 0$. Uzmimo proizvoljnu linearnu kombinaciju vektora iz zadanog skupa i izjednačimo ju s 0, s koeficijentima $\lambda_1, ..., \lambda_{\nu(F)}$ iz polja nad kojim je V vektorski prostor.*

$$\lambda_1 v + \lambda_2 F v + \cdots + \lambda_{\nu(F)} F^{\nu(F)-1} = 0$$

Želimo pokazati da su sada svi $\lambda_i = 0, \forall i = \{1, ..., \nu(F)\}$ *Djelujući na gornju jednakost s* $F^{\nu(F)-1}$ *i zato jer vrijedi* $F^m v = 0$ *za svaki* $m \geq \nu(F)$ *imamo da je* $\lambda_1 F^{\nu(F)-1} v = 0$.
Jer je $F^{\nu(F)-1} v \neq 0$ *prema pretpostavci indukcije, slijedi da je* $\lambda_1 = 0$. *Sada imamo jednakost*

$$\lambda_2 F v + \cdots + \lambda_{\nu(F)} F^{\nu(F)-1} = 0$$

Na tu jednakost djelujemo s $F^{\nu(F)-2}$ *i, iz istog razloga kao ranije, slijedi da je* $\lambda_2 = 0$. *Analogno nastavljajući dalje, smanjujući potencije od F, dobijamo tražen ishod;* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{\nu(F)} = 0$. □

Teorem 6: *Neka je* $F \in L(V)$ *nilpotentan operator i* $U \leqslant V$ *F-invarijantan potprostor od V. Tada su restrikcija* $F|_U$ *i kvocijentni operator* $F_{V/U}$ *također nilpotentni operatori.*

DOKAZ: *Svaki vektor v iz U je i vektor iz V pa za njega postoji prirodan broj k takav da ga je* $v \in \operatorname{Ker} F^k$ *te je djelovanje operatora* $F|_U$ *na vektore iz U isto kao djelovanje operatora F na te vektore. Zato je* $F|_U$ *nilpotentan operator.*
Neka je Q proizvoljna linearna mnogostrukost potprostora U, tj. $Q = v + U$ *za neki* $v \in V$ *i neka je* $\nu(v)$ *indeks nilpotentnosti vektora v s obzirom na operator F. Tada je*

$$F^{\nu(v)}(Q) = F^{\nu(v)}(v + U) = F^{\nu(v)}(v) + U = 0 + U = U$$

pa je i $F_{V/U}$ *nilpotentan operator jer je U neutralni element u skupu* V/U. □

Ako imamo dva nilpotentna operatora A, B na vektorskom prostoru V koji komutiraju, $AB = BA$, onda je njihov produkt (kompozicija) i zbroj također nilpotentan operator. Pokažimo:
neka je k_1 indeks nilpotentnosti operatora A $(A^{k_1}(v) = 0, \forall v \in V)$ i neka je k_2 indeks nilpotentnosti operatora B $(B^{k_2}(v) = 0, \forall v \in V)$. Tada za $k = \max\{k_1, k_2\}$ i $v \in V$ vrijedi:
$(AB)^k(v) = A^k(v)B^k(v) = 0$ i $(A + B)^{2k}(v) = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} A^{2k-i}(v)B^i(v)$ gdje je za $i = 1, ..., k \Rightarrow$

$A^{2k-i}(v) = 0$, a za $i = k, ..., 2k \Rightarrow B^i(v) = 0$. □

Slično možemo reći za matrice; dakle, ako dvije nilpotentne matrice komutiraju, onda je njihovi produkt i zbroj nilpotentna matrica. Uvjet komutativnosti matrica je nužan. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 1: *Promotrimo matrice* $M = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix}$, $m, n \in \mathbb{R}$. *Matrice su nilpotentne s indeksom nilpotentnosti 2, no njihov zbroj,* $M + N = \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix}$, *nije nilpotentna matrica upravo zbog toga što matrice M i N ne komutiraju. Isti slučaj je za matrice* $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *čiji je zbroj matrica kojoj je kvadrat jedinična matrica I s jedinicama na dijagonali i nulama drugdje i ona je idempotentna, tj. potencirana na bilo koju potenciju daje samu sebe, dakle nikad nulmatricu. Iz toga slijedi da je zbroj danih matrica takva matrica koja potencirana na parnu potenciju daje jediničnu matricu, a u suprotnom daje samu sebe.*

Neka je λ svojstvena vrijednost operatora $F \in L(V)$. To znači da postoji vektor $v \in V$ takav da je $Fv = \lambda v$. Tada za F^2 imamo:

$$F^2 v = F(Fv) = F(\lambda v) = \lambda F v = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$$

induktivno dalje, imamo da je $F^n v = \lambda^n v$.
Ako je operator F nilpotentan, tada postoji k takav da je $F^k v = 0$. Ako je v svojstveni vektor, onda je on različit od nulvektora i prema prethodnom razmatranju je $F^n v = \lambda^n v$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo da je $\lambda^k = 0$ pa je $\lambda = 0$. Odnosno, sve svojstvene vrijednosti nilpotentnog operatora su jednake 0. Dokažimo sada jedan bitan teorem vezan za svojstvenu vrijednost nilpotentnog operatora.

Teorem 7: *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzine n i neka je $F \in L(V)$ nilpotentan operator. Tada operator F ima točno jednu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$ kratnosti n.*

DOKAZ: *Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po dimenziji vektorskog prostora V, $\dim V = n$.*

Neka je $n = 1$ i neka je $v \in V, v \neq 0$ te $\nu(v)$ njegov indeks nilpotentnosti za F. To znači da je $F^{\nu(v)} v = 0, F^{\nu(v)-1} v \neq 0$. Ako s w označimo $w = F^{\nu(v)-1} v$, imamo da je $Fw = 0 = 0 \cdot w$ pa je w svojstveni vektor operatora F za svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$ i time smo dokazali bazu indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za svaki konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije manje ili jednake $n-1$. Pokažimo da vrijedi i za $\dim V = n$.

Fiksirajmo vektor $v \in V, v \neq 0$ u vektorskom prostoru V čija je dimenzija jednaka n. Neka je $\nu(v)$ indeks nilpotentnosti vektora V s obzirom na operator F i označimo taj broj s k radi lakšeg zapisivanja. Dakle, $F^k v = 0$ i $F^{k-1} v \neq 0$ pa opet neka je $w = F^{k-1} v$. Stoga je $Fw = 0 \cdot w$ kao ranije što znači da je w svojstveni vektor operatora F za svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$. Pogledajmo sada svojstveni potprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 0$, $V_F(0)$, i označimo ga s V_0.

Označimo $\dim V_0 = m \neq 0$. Jer je svaki vektor iz V_0 svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$, znači da je $Fz = 0, \forall z \in V_0$, odnosno $F|_{V_0}$ je nilpotentan operator pa za karakteristični polinom operatora $F|_{V_0}$ vrijedi:

$$\det(F|_{V_0} - \lambda \cdot I) = (-\lambda)^m$$

Primjenom Teorema 5 vrijedi da je

$$\det(F - \lambda \cdot I) = \det(F|_{V_0} - \lambda \cdot I) \cdot \det(F_{V/V_0} - \lambda \cdot I)$$

$$\det(F - \lambda \cdot I) = (-\lambda)^m \cdot \det(F_{V/V_0} - \lambda \cdot I)$$

Prema Teoremu 3 je $\dim V_0 + \dim V/V_0 = \dim V$ pa je $\dim V/V_0 = n - m < n$. Uz to, prema Teoremu 6 je operator F_{V/V_0} nilpotentan jer je F nilpotentan i jer je svaki svojstveni potprostor vezan za operator F, invarijantan potprostor za operator F. Zato možemo na V/V_0 primijeniti pretpostavku indukcije koja kaže da za karakteristični polinom operatora F_{V/V_0} vrijedi sljedeće: $\det(F_{V/V_0} - \lambda \cdot I) = (-\lambda)^{n-m}$.
Sada imamo da je

$$\det(F - \lambda \cdot I) = (-\lambda)^m \cdot \det(F_{V/V_0} - \lambda \cdot I) = (-\lambda)^m \cdot (-\lambda)^{n-m} = (-\lambda)^n$$

odakle vidimo da je svojstvena vrijednost kratnosti $n = \dim V$, a prije toga smo pokazali da je jedina svojstvena vrijednost nilpotentnog operatora $\lambda = 0$. Time je teorem dokazan. □

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $F \in L(V)$ nilpotentan operator čiji je indeks nilpotentnosti n jednak dimenziji vektorskog prostora V, $n = \dim V$, i neka je F takav operator da na bazu $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ za V djeluje na sljedeći način:

$$Fe_1 = 0, \quad Fe_i = e_{i-1}, \quad \forall i \in \{2, ..., n\}$$

Dakle,

$$Fe_1 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n$$
$$Fe_2 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n$$
$$Fe_3 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n$$
$$\vdots$$
$$Fe_n = 0 \cdot e_1 + \cdots + 1 \cdot e_{n-1} + 0 \cdot e_n$$

što matrično izgleda kao matrica J_n:

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Matricu J_n nazivamo **elementarnom Jordanovom klijetkom reda n**.

Teorem 8: *Neka je V vektorski prostor dimenzije $\dim V = n$ i $F \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti n. Postoji baza e od V takva da je operator F prikazan u toj bazi elementarna Jordanova klijetka reda n.*

DOKAZ: *Uzmimo bilo koji nilpotentan operator $F \in L(V)$ indeksa nilpotentnosti n i vektor $v \in V$ čiji je indeks nilpotentnosti s obzirom na operator F jednak n; znamo da je tada skup $\{v, Fv, ..., F^{n-1}v\}$ linearno nezavisan (Propozicija 5), a jer vektora u tom skupu ima n, onda je to jedna baza za V. Označimo s $e_i = F^{n-i}v, \forall i \in \{1, ..., n\}$. Tada je $Fe_1 = 0$, a $Fe_j = Fe_{j-1}, \forall j \in \{2, ...n\}$.* □

Promatrajmo sada uvođenje elementarne Jordanove klijetke na drugačiji način.

Neka je $F \in L(V)$. **Jordanov lanac** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ operatora F definiramo kao skup vektora $v_1, ..., v_n$ koji su svi nenulvektori za koje vrijedi da je $Fv_i = \lambda v_i + v_{i-1}, \ \forall i \in \{1, ..., n\}$ (uzimamo $v_0 = 0$).

Neka je $v \in V$ vektor čiji je indeks nilpotentnosti s obzirom na, sada nilpotentan, operator F jednak k, $k = \nu(v)$. Taj nam vektor tvori lanac od k vektora koji su definirani na sljedeći način:

$$v_1 = F^{k-1}v, \ \ v_2 = F^{k-2}v, ..., \ \ v_k = F^0 v = v \quad \Rightarrow \quad v_i = Fv_{i+1}, \ \forall i \in \{1, ..., k{-}1\}$$

Budući da znamo kako je jedina svojstvena vrijednost nilpotentnog operatora $\lambda = 0$, za Jordanov lanac pridružen toj svojstvenoj vrijednosti nilpotentnog operatora F imamo da je $Fv_i = v_{i-1}, \ \forall i \in \{2, ..., k\}$, dakle naš lanac je Jordanov lanac pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 0$ operatora F. Ako na sve vektore lanca djelujemo linearnim operatorom F, prvi vektor u lancu, v_1, nestaje, a preostalih $k - 1$ vektora su:

$$u_1 = F^{k-1}v, \ \ u_2 = F^{k-2}v, ..., \ \ u_{k-1} = Fv$$

Usporedimo li nastala dva lanca, možemo primijetiti da je drugi kraći za jedan vektor, $v_k = v$, a podudaraju se u preostalima. Za vektor v_1 vrijedi da je $Fv_1 = 0$, odnosno v_1 se nalazi u jezgri operatora F, $v_1 \in \operatorname{Ker} F = V_0$, a jezgra operatora F odgovara svojstvenom potprostoru svojstvene vrijednosti $\lambda = 0$, tj. vektor v_1 je svojstveni vektor operatora F. Takve vektore u lancu, koje operator poništava, nazivamo **svojstveni vektori lanca**. Ostale vektore lanca nazivamo **pridruženi vektori lanca**.

Teorem 9 ***(Teorem o linearnoj nezavisnosti lanaca):*** *Ako su svojstveni vektori lanca nekoliko lanaca linearno nezavisni, onda je skup svih vektora tih lanaca linearno nezavisan.*

DOKAZ: *Pretpostavimo da imamo s lanaca čiji su vektori $v_{i,j}$ pri čemu indeks i označava broj lanca kojem vektor pripada, a indeks j označava koji je po redu vektor u i-tom lancu te neka su brojevi $k_1, k_2, ..., k_s$ duljine tih lanaca za koje vrijedi $k_1 \geqslant k_2 \geqslant ... \geqslant k_s \geqslant 1$ i proglasimo za $k = \max\{k_1, k_2, ..., k_s\}$.*

Teorem ćemo dokazati indukcijom po k. U bazi indukcije, za $k = 1$, duljine lanaca su nam 1 pa jedino što imamo su upravo svojstveni vektori te su oni nezavisni iz pretpostavke teorema. Za pretpostavku indukcije pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za duljine lanaca koji nisu veći od od $k - 1$. Sada želimo pokazati da tvrdnja vrijedi i za duljinu lanaca ograničenu s k.

U tu svrhu uzmimo linearnu kombinaciju vektora is skupa svih vektora lanaca i izjednačimo ju s 0:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_s} \alpha_{i,j} \cdot v_{i,j} = 0$$

Želimo pokazati da su svi $\alpha_{i,j}$ jednaki 0. Ako primjenimo operator F na obje strane jednakosti, zbog linearnosti imamo sljedeću jednakost:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_s} \alpha_{i,j} \cdot F(v_{i,j}) = 0$$

Od ranije znamo da je $Fv_{i,1} = 0$, a $Fv_{i,j} = v_{i,j-1}$ za $j > 1$. Zato imamo:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_s} \alpha_{i,j} \cdot F(v_{i,j}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=2}^{k_r} \alpha_{i,j} \cdot v_{i,j-1} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_r-1} \alpha_{i,j+1} \cdot v_{i,j} = 0$$

gdje uvodimo broj $r \leqslant s$ zbog toga što je moguće postojanje lanaca koji su duljine 1 i tada djelovanjem operatora na njih nemamo više vektora koji bi pridonosili gornjem zbroju.

Jer je gornja granica druge sume $k_r - 1$, što je strogo manje od k_s, možemo primijeniti pretpostavku indukcije pa dobijemo da su $\alpha_{i,j+1} = 0$ za $j \geqslant 1, \forall i \in \{1, ..., s\}$. Njezinom primjenom nam ostaje:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_s} \alpha_{i,j} \cdot v_{i,j} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{i,1} \cdot v_{i,1} = 0$$

Ostala nam je linearna kombinacija svojstvenih vektora lanca koji su prema pretpostavci teorema linearno nezavisni. Odatle nam je $\alpha_{i,1} = 0, \forall i \in \{1, ..., s\}$. *Time smo dokazali korak indukcije i cijeli teorem.* $\square$

Uzmimo $F : V \to V$ nilpotentan operator na vektorskom prostoru V i vektor $v \in V$ čiji je indeks nilpotentnosti s obzirom na operator F označen s k, $k = \nu(v)$. Taj vektor v tvori lanac od k vektora definiranih jednako kao na prethodnim stranicama. Označimo s $U(v)$ linearnu ljusku vektora lanca. Prema prethodnom teoremu, ta je ljuska konačnodimenzionalan vektorski prostor čija je dimenzija jednaka k, $\dim U(v) = k$. Zbog nezavisnosti vektora lanaca, skup vektora u lancu čini bazu za vektorski prostor $U(v)$. Prema definiciji lanca znamo da je:

$$F(v_1) = 0, \quad F(v_2) = v_1, \quad ... \quad F(v_k) = v_{k-1}$$

Potprostor $U(v)$ je invarijantan potprostor za F pa je restrikcija $F|_{U(v)}$ prikazan u bazi $\{v_1, ..., v_k\}$ upravo elementarna Jordanova klijetka reda k:

$$J_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

5.2 Pronalazak nilpotentnih matrica

Za nilpotentnu matricu N vrijedi da je njezina determinanta jednaka nuli, $\det N = 0$, jer $\det N^{\nu(N)} = (\det N)^{\nu(N)} = 0$. Pri pronalasku nilpotentnih matrica, uglavnom tražimo takve kojima je cijeli stupac ili redak nula. No postoji još nilpotentnih matrica od kojih ćemo navesti primjere:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdots$$

Zanima nas postoji li za svaki prirodan broj n, matrica N reda n takva da je njezin indeks nilpotentnosti jednak broju n, a niti jedna od matrica N^k, $0 \leqslant k < n$ nema elemente koji su nula. Dokazat ćemo da postoji.

U tu svrhu označit ćemo s I_n jediničnu matricu reda n (na dijagonali ima jedinice, ostali elementi su nule), i s T_n matricu reda n čiji su svi elementi jedinice.

Njihov zbroj označimo s A_n:

$$A_n = I_n + T_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

Također, označimo stupce matrice A_n s $v_1, v_2, ..., v_n$. Oni su međusobno linearno nezavisni i ima ih n i zato čine bazu za vektorski prostor $\mathbb{R}^n$. Primjetimo da za matricu T_n vrijedi da je njezin kvadrat jednak $n \cdot T_n$ te da je matrica I_n potencirana na bilo koju potenciji jednaka samoj sebi i ona je neutralni element za množenje u skupu kvadratnih matrica reda n.

Promotrimo:

$$
\begin{aligned}
I_n &= A_n - T_n \quad / \cdot (n+1) \\
(n+1)I_n &= (n+1)A_n - n \cdot T_n - T_n = \\
&= (n+1)(I_n + T_n) - T_n^2 - T_n = \\
&= (n+1)I_n + (n+1)T_n - T_n^2 - T_n
\end{aligned}
$$

Budući da znamo kako je $I_n^2 = I_n$ i $T_n = I_n \cdot T_n = T_n \cdot I_n$, možemo to uvrstiti u gornju jednakost pa imamo:

$$
\begin{aligned}
(n+1)I_n &= (n+1)I_n^2 + (n+1)T_n \cdot I_n - T_n^2 - I_n \cdot T_n = \\
&= (n+1)I_n^2 - I_n \cdot T_n + (n+1)T_n \cdot I_n - T_n^2 = \\
&= I_n \cdot ((n+1)I_n - T_n) + T_n \cdot ((n+1)I_n - T_n) \\
&= (I_n + T_n) \cdot ((n+1)I_n - T_n) \\
&= A_n \cdot ((n+1)I_n - T_n) \quad / : (n+1)
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$I_n = A_n \cdot (I_n - \frac{1}{n+1} T_n)$$

odakle nam slijedi da je $A_n{}^{-1} = I_n - \frac{1}{n+1} T_n$. Sada definiramo matricu B_n na sljedeći način:

$$B_n v_1 = (n+1)v_2, \quad B_n v_2 = (n+1)v_3, \quad \cdots \quad B_n v_{n-1} = (n+1)v_n, \quad B_n v_n = 0$$

U matričnom obliku, taj zapis izgleda:

$$B_n A_n = (n+1)\,[v_2 \; v_3 \; \cdots \; v_n \; 0]$$

Bilo koji vektor $x \in \mathbb{R}^n$ može se zapisati kao linearna kombinacija vektora baze $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Neka je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ta linearna kombinacija. Ako množimo vektor x matricom B_n i njezinim potencijama, dobijamo:

$$B_n x = (n+1) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_{i+1}, \quad B_n^2 x = (n+1)^2 \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i v_{i+2}, \quad \cdots B_n^n x = 0$$

Odavdje vidimo da je matrica B_n nilpotentna indeksa nilpotentnosti n i za nju želimo pokazati da nema nulelemente kao i za matrice B_n^i, za $0 < i < n$. Kako bismo to pokazali, dovoljno je pokazati da to vrijedi djelovanjem proizvoljne potencije od B_n na x kada je x vektor kanonske baze, odnosno jedan od stupaca matrice I_n. Neka je $0 \leqslant r < n$. Promatrat ćemo $B_n^r x$.

Jer je x vektor kanonske baze, jedan od stupaca matrice I_n i linearna kombinacija vektora baze $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ i jer je $I_n = A_n \cdot A_n^{-1}$, onda jedan stupac matrice A_n^{-1} čine koeficijenti $\alpha_i, i = 1, ..., n$. Zato su α_i jednaki $\frac{n}{n+1}$ za ono mjesto gdje je u kanonskom vektoru jedinica, a drugdje su jednaki $\frac{-1}{n+1}$.

Općeniti zapis množenja vektora x matricama $B_n, ..., B_n^{n-1}$ iz gornjeg zapisa je:

$$B_n^r x = (n+1)^r \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i v_{i+r}$$

pa nam je zato dovoljno pokazati da suma s desne strane nema niti jedan član koji je jednak nuli. U slučaju kad je u pitanju mjesto gdje je u kanonskom vektoru jedinica, suma s lijeve strane izgleda:

$$\sum_{i=1}^{n-r} \frac{-1}{n+1} \cdot v_{i+r} = \frac{-1}{n+1} \sum_{i=1}^{n-r} v_{i+r}$$

Znamo da su vektori $v_1, ...v_n$ stupci matrica A_n te zato nemaju nulelemente i u ovom slučaju dokaz je gotov. U drugom, slučaju koeficijenti α_i su oni koji odgovaraju mjestima kanonskog vektora gdje su nule. Tada suma izgleda:

$$\sum_{i=1}^{n-r} \frac{n}{n+1} \cdot v_{i+r} = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n-r} v_{i+r}$$

Slijedi isto objašnjenje kao za prvi slučaj i time je dokaz u potpunosti gotov.

Za $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, mogućnosti za B_n su sljedeće:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \; B_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \; B_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -4 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Literatura

[1] T. Andreescu, *Essential Linear Algebra with Application*, Birkhäuser, Richardson, 2014.

[2] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] D. Butković, *Predavanja iz linearne algebre*, II. izdanje, Osijek, 2010.

[4] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, skripta, Osijek, 2008.

[5] D. Mercer, *Finding "nonobvious" nilpotent matrices*, članak, 2005.
`http://people.math.sfu.ca/~idmercer/nilpotent.pdf`

[6] R. Sharipov, *Linear Algebra and Multidimensional Geometry*, Samizdat Press, Bashkir, 1996.