Banachov teorem o fiksnoj točki

Bučanac, Gabi

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:844850

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Gabi Bučanac

Banachov teorem o fiksnoj točki

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Gabi Bučanac

Banachov teorem o fiksnoj točki

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Dragan Jukić

Osijek, 2022.

Sažetak

U ovom završnom radu prvo ćemo obraditi potpune metričke prostore i popratiti nekim primjerima, a zatim ćemo iskazati i dokazati čuveni Banachov teorem o fiksnoj točki. Na kraju rada spomenut ćemo samo neke od brojnih primjena Banachovog teorema.

Ključne riječi

potpuni metrički prostori, konvergencija, Banachov teorem o fiksnoj točki, fiksna točka

Banach fixed point theorem

Abstract

In this paper work we will define complete metric spaces and provide it with some examples, we will also state and proof famous Banach fixed point theorem. At the end we will mention only some of many Banach theorem applications.

Key words:

complete metric space, convergence, Banach fixed point theorem, fixed point

Sadržaj

Uvod

Banachov[1] teorem o fiksnoj točki, upravo zbog svoje jednostavnosti, ima brojne primjene u matematičkoj analizi. U literaturi ga često pronalazimo pod nazivom "teorem o kontrakcijskom preslikavanju". Osim što je važan alat u teoriji metričkih prostora, njegova velika primjena je u teoriji diferencijalnih i integralnih jednadžbi. Banachov teorem osigurava jedinstvenost i postojanje fiksnih točaka kod pojedinih preslikavanja iz metričkog prostora u samoga sebe te pruža smislenu metodu za pronalazak tih točaka. Teorem je dobio ime po Stefanu Banachu koji je prvi puta iznio svoju ideju 1920. godine.

Na samom početku ovoga rada definirat ćemo potpune metričke prostore, pokazati da je upotpunjenje jedinstveno i da svaki metrički prostor ima upotpunjenje. Nadalje, definirat ćemo kontrakciju i iskazati Banachov teorem o fiksnoj točki. Na kraju ćemo navesti samo neke od brojnih primjena Banachovog teorema.

[1]Stefan Banach(1892.-1945.), poljski matematičar

1. Potpuni metrički prostori

Prije same definicije potpunih metričkih prostora, reći ćemo nešto o konvergenciji Cauchyjevih[2] nizova.

Definicija 1. Neka je (X, d) metrički prostor. Niz (x_n) iz X je konvergentan ukoliko postoji točka $x_0 \in X$ takva da

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < \epsilon.$$

Pri tome točku x_0 nazivamo limes niza (x_n).

Potpuni metrički prostori definiraju se pomoću Cauchyjevih nizova koji su definirani na sljedeći način:

Definicija 2. Kažemo da je niz (x_n) u metričkom prostoru (X, d) Cauchyjev (fundamentalan) niz ukoliko vrijedi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})\ \forall m, n \geq K \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Teorem 1 (vidi [5]). *U metričkom prostoru (X, d) svaki konvergentan niz je Cauchyjev.*

Dokaz. Neka niz (x_n) konvergira prema x_0. Tada, prema definiciji limesa za svaki $\epsilon > 0$ postoji $K \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_n, x_0) < \epsilon$ za svaki $n \geq K$. Zato, pomoću nejednakosti trokuta, za sve $m, n \geq K$ imamo:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

što nam govori da je (x_n) Cauchyjev niz. $\square$

Metriku na $\mathbb{R}^n = \{(\alpha_1, ..., \alpha_n) : \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ definiranu formulom

$$d(a, b) = d((\alpha_i), (\beta_i)) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

gdje su $a = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $b = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ nazivamo standardna ili euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. U slučaju kada je $\mathbb{R}^n$ snabdjeven tom metrikom, nazivat ćemo ga n-dimenzionalnim euklidskim prostorom, a svaki podskup od $\mathbb{R}^n$ je također metrički prostor.

Primjer 1. *Za metrički prostor uzmimo $X = (0, 1)$ s euklidskom metrikom. Nadalje, neka je $x_n = \frac{1}{1+n}, n \in \mathbb{N}$ opći član niza u skupu X. Pokažimo da je taj niz Cauchyjev, ali da ne konvergira u prostoru X.*

U tu svrhu neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je bez smanjenja općenitosti $m > n$. Tada imamo:

$$|x_m - x_n| = \Big|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\Big| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Za $\epsilon > 0$ odaberimo $K \in \mathbb{N}$ takav da je $K > \frac{1}{\epsilon} - 1$. Lako je provjeriti da za sve $m, n \geq K$ vrijedi $|x_m - x_n| < \epsilon$, odakle vidimo da je niz $(\frac{1}{1+n})$ Cauchyjev.

Niz (x_n) konvergentan je u $\mathbb{R}$ s euklidskom metrikom, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0$, ali taj niz nije konvergentan u prostoru $X = (0, 1)$ s naslijeđenom euklidskom metrikom.

[2]Augustin Louis Cauchy(1789.-1857.), francuski matematičar

Kao što nam ilustrira prethodni primjer, Cauchyjev niz u metričkom prostoru X ne mora biti konvergentan u X. Međutim, u specijalnom slučaju, ako je $X = \mathbb{R}^n$, a metrika euklidska, Cauchyjev niz će konvergirati u X. Preciznije, kao što nam govori sljedeći teorem, niz je Cauchyjev onda i samo onda ako je konvergentan.

Teorem 2 (vidi [3]). *U n-dimenzionalnom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$ niz je Cauchyjev onda i samo onda ako je konvergentan u $\mathbb{R}^n$.* □

Definicija 3. Za metrički prostor (X, d) kažemo da je potpun ukoliko svaki Cauchyjev niz iz X konvergira prema nekoj točki iz X.

Primjer 2. *Teorem 2 govori nam da je $\mathbb{R}^n$ sa euklidskom metrikom potpun metrički prostor.*

Navedimo nekoliko primjera metričkih prostora koji nisu potpuni.

Primjer 3. *Pokažimo da skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ s euklidskom metrikom nije potpun metrički prostor. U tu svrhu promotrimo sljedeća dva primjera:*

a) Niz s općim članom

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}$$

je niz u $\mathbb{Q}$. Primjetimo da je taj niz konvergentan u $\mathbb{R}$ i konvergira prema broju $e \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Kako je taj niz konvergentan u $\mathbb{R}$, prema teoremu 2 on je Cauchyjev. Nadalje, kako $e \notin \mathbb{Q}$, taj niz ne konvergira u $\mathbb{Q}$ i zato $\mathbb{Q}$ nije potpun metrički prostor.

b) Može se pokazati da je niz definiran rekurzivnom formulom:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big), \; n \geq 1, \; a_1 = 2$$

omeđen i monotono rastući niz racionalnih brojeva (vidi npr. [1]). Zbog toga je on konvergentan u $\mathbb{R}$. Neka je $a = lim_{n \to \infty} a_n$. Prijelazom na limes iz gornje rekurzivne formule dobivamo:

$$a = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{2}{a}\Big),$$

odakle slijedi da je $a = \sqrt{2}$. Kako $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, taj niz ne konvergira u $\mathbb{Q}$ i zato $\mathbb{Q}$ nije potpun metrički prostor.

Definicija 4. Vektorski prostor koji je potpun normiran prostor nazivamo Banachovim prostorom.

Primjer 4. *$\mathbb{R}^n$ s euklidskom metrikom je Banachov prostor (vidi primjer 2).*

Primjer 5. *Diskretan metrički prostor (X, d) jest potpun metrički prostor.*

Prisjetimo se, diskretna metrika d definirana je formulom:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \tag{1}$$

Kako bi pokazali da je diskretan metrički prostor potpun, trebamo dokazati da u njemu svaki Cauchyjev niz konvergira. Neka je (x_n) Cauchyjev niz u diskretnom metričkom prostoru (X, d). To po definiciji Cauchyjevog niza znači:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})\forall\ m, n \geq K \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Specijalno, za $\epsilon = \frac{1}{2}$ slijedi da postoji $K \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}, \quad \forall m, n \geq K$$

Zbog toga, iz definicije diskretne metrike (1) lako se vidi da je

$$d(x_m, x_n) = 0, \quad \forall m, n \geq K.$$

To znači da je niz (x_n) stacionaran i zato je konvergentan.

Sljedeći teorem poopćenje je teorema 2.

Teorem 3 (vidi [2]). *Svaki konačno dimenzionalan metrički prostor koji je normiran jest potpun metrički prostor.* □

Neprekidno preslikavanje f čije se traže fiksne točke najčešće nije definirano na cijelom metričkom prostoru X, već na nekom njegovom podskupu S. Za primjenu Banachova teorema o fiksnoj točki potrebno je da domena S s naslijeđenom metrikom bude potpun metrički prostor. Zbog toga nam je važan sljedeći teorem.

Teorem 4 (vidi [3]). *Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Skup $S \subseteq X$ zatvoren je ako i samo ako je (S, d) potpun metrički prostor.*

Za dokaz gornjeg teorema treba nam sljedeća tvrdnja:

Teorem 5 (vidi npr. [3]). *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $S \subseteq X$ zatvoren je onda i samo onda ako sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova.*

Dokaz teorema 4. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $S \subseteq X$ zatvoren skup, te neka je (x_n) Cauchyjev niz u S. Tada će (x_n) biti Cauchyjev niz i u X, pa zbog potpunosti prostora (X, d) postoji točka $x_0 \in X$ prema kojoj konvergira niz (x_n). Kako je S zatvoren skup (teorem 5), slijedi da je $x_0 \in S$, što pokazuje konvergenciju niza (x_n) u prostoru (S, d).

$\Leftarrow$ Obratno, pretpostavimo sada da je (S, d) potpun metrički prostor. Prema teoremu 5 bit će dovoljno pokazati da svaki niz (x_n) iz S koji konvergira u X ima limes u S. Neka je niz (x_n) niz u S koji konvergira prema $x_0 \in X$. Tada je niz (x_n) niz i u X te konvergira prema x_0. Prema teoremu 1, niz (x_n) je Cauchyjev niz pa zbog potpunosti prostora (S, d) postoji $s_0 \in S$ točka prema kojoj (x_n) konvergira. Kako je limes jedinstven, $x_0 = s_0$. □

Primjer 6. *Prema teoremu 4 segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ jest potpun metrički prostor.*

Definicija 5. Upotpunjenje metričkog prostora (X, d) je najmanji metrički prostor koji je potpun i sadrži dani metrički prostor (X, d) kao svoj potprostor.

Definicija 6. Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je gust na prostoru X ukoliko je $\mathrm{Cl}\ A = X$.

Definicija 7. Za metrički prostor (X, d_1) kažemo da je izometričan s metričkim prostorom (Y, d_2) ukoliko postoji bijektivno preslikavanje $f : X \to Y$ takvo da je

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y),\ \forall x, y \in X.$$

U tom se slučaju preslikavanje $f : X \to Y$ zove izometrija.

Definicija 8. Neka je (X, d_1) metrički prostor. Par $((Y, d_2), g)$ koji se sastoji od potpunog metričkog prostora (Y, d_2) i izometrije $g : X \to Y$ zovemo upotpunjenje prostora X ukoliko je $g(X)$ gust skup u prostoru Y.

Sljedeći teorem govori nam da je upotpunjenje jedinstveno do na izometričnost.

Teorem 6 (vidi [6]). *Neka su (X_1, d_1) i (X_2, d_2) metrički prostori. Ako su (X_1, d_1) i (X_1, d_2) upotpunjenja istog metričkog prostora (Y, d), onda su oni izometrični.*

Teorem 7 (vidi [6]). *Svaki metrički prostor ima upotpunjenje.*

2. Banachov teorem o fiksnoj točki

Prije iskaza Banachovog teorema navest ćemo neke definicije i tvrdnje koje će nam koristiti u daljnjem tekstu.

Teorem 8 (vidi [5]). *Neka je $\phi : [x, y] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $\phi(x) \cdot \phi(y) < 0$. Tada postoji točka $t \in [x, y]$ takva da vrijedi $\phi(t) = 0$.*

Definicija 9. Neka je (X, d) metrički prostor. Za funkciju $f : X \to X$ kažemo da je kontrakcija ukoliko postoji $q \in [0, 1)$ takav da je

$$d(f(x), f(x')) \leq qd(x, x'), \quad \forall x, x' \in X.$$

Pri tome q nazivamo konstantom kontrakcije.

Definicija 10. Za točku $x' \in X$ kažemo da je fiksna za preslikavanje $f : X \to X$ ukoliko je $f(x') = x'$.

Lema 1 (vidi [5]). *(Lema o kontrakciji) Neka je $\phi : [x, y] \to [x, y]$ kontrakcija. Tada postoji jedinstvena točka $t^* \in [x, y]$ takva da je $\phi(t^*) = t^*$.*

Dokaz. *Jedinstvenost:* Pretpostavimo da je i $t_0^* \in [x, y]$ točka za koju je $\phi(t_0^*) = t_0^*$. Ukoliko je i t^* fiksna točka, onda je

$$|t_0^* - t^*| = |\phi(t_0^*) - \phi(t^*)| \leq q|t_0^* - t^*| < |t_0^* - t^*|,$$

što je kontradikcija, pa zato mora biti $t_0^* = t^*$.

Egzistencija: Ukoliko je $\phi(x) = x$, odnosno $\phi(y) = y$ tada je dokaz gotov. Pretpostavimo, dakle, da je $\phi(x) \neq x$ i $\phi(y) \neq y$. Kako je $\phi([x, y]) \subseteq [x, y]$, mora vrijediti da je $\phi(x) > x$ i $\phi(y) < y$. Kako je svaka kontrakcija neprekidno preslikavanje, neprekidna je i funkcija $\Phi : [x, y] \to \mathbb{R}$ definirana kao formulom $\Phi(t) := t - \phi(t)$. Kako znamo da je $\Phi(x) < 0$ i $\Phi(y) > 0$, prema teoremu 8 postoji točka $t^* \in [x, y]$ takva da je $\Phi(t^*) = 0$, odnosno $\phi(t^*) = t^*$. □

Banachov teorem predstavlja poopćenje leme o kontrakciji.

2.1. Banachov teorem

Teorem 9 (vidi [3]). *(Banachov teorem o fiksnoj točki) Neka je (X, d) metrički prostor, a $f : X \to X$ kontrakcija sa konstantom kontrakcije λ. Tada vrijedi sljedeće:*

(i) Preslikavanje f ima samo jednu jedinu fiksnu točku $x' \in X$.

(ii) Za svaku točku $x_1 \in X$ niz (x_l) definiran kao:

$$x_l := f(x_{l-1}),\ l \geq 2 \tag{2}$$

konvergira prema jedinstvenoj fiksnoj točki x'.

(iii) Vrijedi i sljedeće:

$$d(x_l, x') \leq \frac{\lambda^{l-1}}{1-\lambda} d(x_1, f(x_1)). \tag{3}$$

Dokaz. Odaberimo $x_1 \in X$ za proizvoljnu točku, a zatim induktivno definirajmo niz (x_l) točaka iz X :

$$x_l := f(x_{l-1}), \quad za \quad l \geq 2.$$

Pokažimo sada da je (x_l) Cauchyjev niz. Teleskopiranjem[3] dobivamo:

$$d(x_l, x_{l+1}) = d(f(x_{l-1}), f(x_l)) \leq \lambda d(x_{l-1}, x_l) \leq \cdots \leq \lambda^{l-1} d(x_1, x_2).$$

Sada, za svaki $j \in \mathbb{N}$ koristeći nejednakost trokuta, dobivamo:

$$\begin{aligned}
d(x_l, x_{l+j}) &\leq d(x_l, x_{l+1}) + d(x_{l+1}, x_{l+2}) + \cdots + d(x_{l+j-1}, x_{l+j}) \\
&\leq \lambda^{l-1} d(x_1, x_2) + \lambda^l d(x_1, x_2) + \cdots + \lambda^{l+j+2} d(x_1, x_2) \\
&= \lambda^{l-1}(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{j-1}) d(x_1, x_2) \\
&= \lambda^{l-1} \frac{1-\lambda^j}{1-\lambda} d(x_1, x_2) \\
&\leq \frac{\lambda^{l-1}}{1-\lambda} d(x_1, x_2). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Zbog $0 \leq \lambda < 1$ je $\lim_{l\to\infty} \lambda^{l-1} = 0$. Zato za svaki $\epsilon > 0$ postoji $l_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{\lambda^{l-1}}{1-\lambda} d(x_1, x_2) < \epsilon$ za svaki $l \geq l_0$. Pa zbog (4) vrijedi da je $d(x_l, x_{l+j}) < \epsilon$, za svaki $l \geq l_0$, što nam govori da je (x_l) Cauchyjev niz.

Kako je (X, d) potpun prostor, Cauchyjev niz (x_l) konvergira prema nekoj točki $x' \in X$. Stoga, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
d(x', f(x')) &\leq d(x', x_l) + d(x_l, f(x')) = d(x', x_l) + d(f(x_{l-1}), f(x')) \\
&\leq d(x', x_l) + \lambda d(x_{l-1}, x').
\end{aligned}$$

Kako $x_l \to x'$, stoga $d(x', x_l) \to 0$ i $d(x_{l-1}, x') \to 0$, te iz gornje nejednakosti dobivamo:

$$d(x', f(x')) = 0,$$

tj. x' jest fiksna točka preslikavanja f.
Pokažimo sada jedinstvenost fiksne točke. Pretpostavimo da je $y \in X$ fiksna točka, tj. da za nju vrijedi da je $f(y) = y$. Tada bi vrijedilo:

$$d(x', y) = d(f(x'), f(y)) \leq \lambda d(x', y).$$

Nadalje, kako je $0 \leq \lambda < 1$ iz posljednje nejednakosti slijedi da mora biti $d(x', y) = 0$, tj. $x' = y$. Time je jedinstvenost fiksne točke pokazana.
Kada $j \to \infty$ iz (4) imamo:

$$d(x_l, x') \leq \frac{\lambda^{l-1}}{1-\lambda} d(x_1, x_2).$$

Time je pokazana zadnja tvrdnja teorema. □

[3]Postupak sažimanja članova do oblika iz kojeg je odmah vidljiv konačni izraz.

Napomena 1. *Neka je (X, d) metrički prostor, a $f : X \to X$ preslikavanje sa svojstvom:*

$$d(f(a), f(b)) < d(a, b), \quad \forall a, b \in X, a \neq b.$$

Tada se općenito za preslikavanje f ne mora zaključiti da postoji fiksna točka, to možemo vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 7. *Primjetimo da je skup $X = [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ zatvoren, pa prema teoremu 4, on je i potpun metrički prostor. Pokažimo sada da funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ zadana sa:*

$$f(x) : x + \frac{1}{1 + x}$$

ima svojstvo iz prethodne napomene.

Zaista, neka su $a, b \in [0, \infty)$ i $a \neq b$. Neka je, bez smanjenja općenitosti $a < b$. Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $k \in (a, b)$ tako da vrijedi:

$$f(b) - f(a) = f'(k)(b - a).$$

Za svaki $k \in (0, \infty)$ vrijedi da je $|f'(k)| = |1 - \frac{1}{(1+k)^2}| < 1$, pa iz $f(b) - f(a) = f'(k)(b - a)$ imamo $|f(b) - f(a)| < |b - a|$. Primjetimo sada da f ima svojstvo iz prethodne napomene, a budući da je $f(x) > x$ za svaki $x \in [0, \infty)$, fiksna točka ne postoji.

Napomena 2 (vidi [3]). *Postojanje fiksne točke preslikavanja $f : X \to X$ ne ovisi o zadanoj metrici d na X. Dakle, može se dogoditi da preslikavanje f nije kontrakcija u zadanoj metrici d, ali je kontrakcija u nekoj drugoj metrici δ. Ako je (X, δ) potpun metrički prostor, tada će preslikavanje f imati fiksnu točku. Ovu tvrdnju potkrijepit ćemo sljedećim primjerom.*

Primjer 8 (vidi [3]). Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana kao:

$$f(a, b) = \Big(\frac{4x}{5} + \frac{4y}{5}, \frac{x}{10} + \frac{y}{10}\Big),$$

te pogledajmo metrike d_1 i d_2 na $\mathbb{R}^2$ zadane sa formulama:

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$
$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

inducirane normama $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$. Iz teorema 3 znamo da su vektorski prostori $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ i $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ potpuni. Funkcija f neće biti kontrakcija u metrici d_2 jer vrijedi:

$$d_2(f(0, 0), f(-6, -2)) = \frac{4}{5}\sqrt{65} > \frac{4}{5}\sqrt{\frac{125}{2}} = d_2((0, 0), (-6, -2)).$$

Ali, funkcija f bit će kontrakcija sa koeficijentom kontrakcije $\frac{9}{10}$ u metrici d_1 jer vrijedi:

$$d_1(f(x_1, x_2), f(x_2, y_2)) \leq \frac{9}{10} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Možemo zaključiti da funkcija f ima fiksnu točku.

U sljedećem teoremu pokazat ćemo vezu između postojanja jedinstvene fiksne točke i funkcije koja je kontrakcija.

2.2. Neka proširenja Banachovog teorema

Teorem 10 (vidi [4]). *Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Ako pretpostavimo da je preslikavanje $f : X \to X$ preslikavanje za koje je f^K kontrakcija za neki prirodan broj K, tada f ima jedinstvenu fiksnu točku.*

Dokaz. f^K ima jedinstvenu fiksnu točku x^* (po teoremu 9), pa znamo:

$$f^K(x^*) = f(f^K(x^*)) = f(x^*).$$

Dakle, $f(x^*)$ također je fiksna točka od f^K. Fiksna točka je jedinstvena, pa vrijedi da je $f(x^*) = x^*$. Pa, ako je $f(y^*) = y^*$, onda je $f^N(y^*) = y^*$, a zbog jedinstvenosti imamo: $x^* = y^*$. □

Teorem 11 (vidi [4]). *Neka je (X, d) metrički prostor na kojem su definirane metrike d i δ takve da za sve $x_1, x_2 \in X$ vrijedi da je $\delta(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_2)$. Neka je (X, δ) potpun metrički prostor, preslikavanje $f : X \to X$ neprekidno u metrici δ i kontrakcija u metrici d.*
Tada f ima jedinstvenu fiksnu točku u X.

Prethodni teorem govori nam koji uvjeti trebaju biti zadovoljeni da bi postojala jedinstvena fiksna točka nekog preslikavanja ukoliko su na metričkom prostoru definirane dvije metrike.

Teorem 12 (vidi [4]). *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor, te neka je preslikavanje $f : X \to X$ kontrakcija. Tada f ima fiksnu točku x^* koja je jedinstvena i za svaki $x' \in X$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} f^k(x') = x^*$.*

Dokaz. Definirajmo preslikavanje $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ takvo da je

$$\phi(x') = d(x', f(x')), \quad za \quad x' \in X.$$

Primjetimo da je ϕ neprekidna i stoga omeđena zbog kompaktnosti skupa X, pa prema Weierstrassovom teoremu znamo da postiže svoje ekstreme (vidi npr. [3]). Pretpostavimo da je njezin minimum u točki $x^* \in X$. Kako je $x^* \neq f(x^*)$, sljedeći izraz vrijedit će samo kada je $x^* = f(x^*)$:

$$\phi(f(x^*)) = d(f(x^*), f^2(x^*)) < d(x^*, f(x^*)) = \phi(x^*).$$

Neka je sada $x' \in X$ i promotrimo niz $(d(f^n(x'), x^*))$. Ako je $f^n(x') \neq x^*$ vrijedit će:

$$d(f^{n+1}(x'), x^*) = d(f^{n+1}(x'), f(x^*)) \leq d(f^n(x'), x^*),$$

dakle, niz $d(f^n(x'), x^*)$ je strogo padajući, pa limes postoji

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x'), x^*) =: L$$

i očito je $L \geq 0$. Kako je X kompaktan prostor, niz $(f^n(x'))$ ima konvergentan podniz $(f^{k_n}(x'))$ i njegov limes je:

$$L = \lim_{n\to\infty} f^{k_n}(x').$$

Primjenom Heineove karakterizacije neprekidnosti dobivamo:

$$L = \lim_{n\to\infty} d(f^{k_n}(x'), x^*) = d(f(L), x^*).$$

Ako je $L \neq x^*$ tada je $d(f(L), x^*) = d(f(L), f(x^*)) < d(L, x^*)$. To upravo dokazuje da bilo koji konvergentan podniz $(f^n(x'))$ konvergira prema x^* i zato je $\lim_{n\to\infty} f^n(x') = x^*$. □

2.3. Neke primjene Banachovog teorema o fiksnoj točki

Prvo ćemo dokazati vrlo važan terem u teoriji diferencijalnih jednadžbi, Picardov teorem koji govori o postojanju, ograničenosti i vremenu postojanja Cauchyjeve zadaće.

Teorem 13 (vidi [6]). *(PICARD)*
Ako je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *neprekidna i vrijedi:*

$$|f(u, v_1) - f(u, v_2)| \leq K|v_1 - v_2|,$$

za konstantu K*, tada za početni uvjet*

$$y(t_0) = y_0 \tag{5}$$

postoji okolina $U(t_0)$ *točke* $t_0 \in \mathbb{R}$ *i funkcija* $y = y(t)$ *definirana na okolini* $U(t_0)$ *koja je jedinstvena, zadovoljava jednadžbu*

$$y' = f(t, y) \tag{6}$$

i počeni uvjet $y(t_0) = y_0$.

Dokaz. Primjetimo da (5) i (6) možemo zapisati na sljedeći način:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{7}$$

Označimo sada desnu stranu sa $X(y)$. Tada je $X : C(V(t_0), \mathbb{R}) \to C(V(t_0), \mathbb{R})$ preslikavanje skupa $C(V(t_0), \mathbb{R})$ u samog sebe, gdje je $C(V(t_0), \mathbb{R})$ skup svih neprekinih funkcija koje su definirane na okolini $V(t_0)$ od t_0. Kako je $C(V(t_0), \mathbb{R})$ metrički prostor sa uniformnom metrikom, vrijedi:

$$\begin{aligned}
d(X(y_1), X(y_2)) &= \max_{t \in V(t_0)} \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s))ds \right| \\
&\leq \max_{t_0 \in V(t_0)} \left| \int_{t_0}^{t} K|y_1(s) - y_2(s)|ds \right| \\
&\leq K|t - t_0| \; d(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $|t - t_0| \leq \frac{1}{2K}$. Tada imamo:

$$d(X(y_1), X(y_2)) \leq \frac{1}{2} d(y_1, y_2),$$

ta nejednakost vrijedi na cijelom intervalu I koji je zatvoren i gdje je

$$d(y_1, y_2) = \max_{t \in I} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

Primjetimo sada da je

$$X : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$$

kontrakcija potpunog metričkog prostora $(C(I, \mathbb{R}), d)$ u samu sebe, pa prema teoremu 9 ima jedinstvenu fiksnu točku $y = Xy$. $\square$

Primjer 9. *Riješimo Cauchyjevu zadaću:*

$$y' = y + 1, \quad y_0 := y(0) = 0.$$

$f(x, y) = y + 1$ *i* $t_0 = 0$*, pa Picardov niz aproksimacija glasi:*

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= y_0 = 0\\
y_1(t) &= y_0 + \int_0^t f(s, y_0(s))ds = \int_0^t 1ds = t\\
y_2(t) &= y_0 + \int_0^t f(s, y_1(s))ds = \int_0^t (1+s)ds = t + \frac{x^2}{2}\\
y_3(t) &= y_0 + \int_0^t f(s, y_2(s))ds = \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})ds = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}\\
&\vdots\\
y_k(t) &= y_0 + \int_0^t f(s, y_k - 1(s))ds = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Rješenje je:

$$y = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{t^i}{i!} = e^t - 1.$$

2.4. Newtonova metoda za pronalaženje nultočke jednadžbe $f(x) = 0$

Neka je f realna konveksna funkcija definirana na segmentu $I = [a, b]$ takva da je:

1) f ima pozitivnu derivaciju na I
2) Vrijedi
$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Tada postoji jedinstvena točka ξ iz segmenta I za koju vrijedi da je $f(\xi) = 0$. Pronađimo sada tu točku. Za pronalazak točke ξ koristit ćemo modificiranu Newtonovu[4] metodu tangenti. Uzet ćemo početnu aproksimaciju $u_0 \in [u, v]$, zatim ćemo razviti funkciju u Taylorov[5] red oko točke u_0. Ako pogledamo samo linearni član, tada možemo funkciju f u okolini točke u_0 aproksimirati linearnom funkcijom:

$$v = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0)$$

čiji je graf tangenta na graf funkcije f u točki $(u_0, f(u_0))$. Nadalje, pronađimo točku u_1 u kojoj spomenuta tangenta siječe os u, tj. za koju vrijedi:

$$u_1 = u_0 - |f'(u_0)|^{-1} \cdot f(u_0).$$

Definirajmo niz (u_n) rekurzivnom formulom (modificirana Newtonova metoda):

$$u_{n+1} = u_n - |f'(u_0)|^{-1} \cdot f(u_n).$$

Sada razmotrimo preslikavanje

$$u \mapsto A(u) := u - [f'(u_0)]^{-1} \cdot f(u).$$

Pomoću Lagrageova[6] teorema o srednjoj vrijednosti dobivamo:

$$|A(u_2) - A(u_1)| = |[f'(u_0)]^{-1} \cdot f'(\xi)| \cdot |u_2 - u_1|,$$

gdje je ξ točka između u_1 i u_2. Ako su ispunjene pretpostavke iz leme 1, tj. ako je preslikavanje A kontrakcija, onda ono ima fiksnu točku. Drugim riječima, ako je

$$A(I) \subseteq I$$

i ako je

$$|f'(u_0)|^{-1} \cdot f(u_n)| \leq q < 1,$$

za neki realan broj q, tada po lemi 1 A ima jedinstvenu fiksnu točku. Do istog zaključka možemo doći primjenom Banachovog teorema jer je I s euklidskom metrikom potpun metrički prostor (vidi teorem 4). Osim toga, Banachov teorem, za razliku od leme 1, daje nam iterativni postupak za pronalaženje te jedinstvene fiksne točke (formula (2)) i ocjenu greške aproksimacije (nejednakost (3)).

[4]Isaac Newton (1642.-1717.), engleski fizičar, matematičar i astronom
[5]Brook Taylor (1685.-1731.), engleski matematičar
[6]Joseph-Louis Lagrange (1736.-1813.), talijanski matematičar i astronom

Primjer 10. *S točnošću $\varepsilon = 0.005$ treba naći pozitivno rješenje jednadžbe*

$$x = \ln\left(x + \tfrac{5}{4}\right) =: A(x).$$

Lako je provjeriti da je $A([0,1]) \subset [0,1]$. Nadalje, za sve $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$, prema Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti postoji točka $c \in (x_1, x_2)$ takva da je

$$|A(x_2) - A(x_1)| = |A'(c)(x_2 - x_1)| = \left|\frac{1}{c + \frac{5}{4}}(x_2 - x_1)\right| < \tfrac{4}{5}|x_2 - x_1|.$$

Time smo pokazali da je funkcija $A : [0,1] \to [0,1]$ kontrakcija s konstantom $\lambda = \frac{4}{5}$. Segment je potpun jer je zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ (teorem 4). Stoga, prema Banachovom teoremu, f ima fiksnu točku $x^\star \in [0,1]$. Dakle, $x^\star = f(x^\star)$, tj.

$$x^\star = \ln\left(x^\star + \tfrac{5}{4}\right).$$

Osim toga, niz iteracija

$$x_1 = 0, \quad x_n = f(x_{n-1}) = \ln\left(x_{n-1} + \tfrac{5}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

kovergira prema $x^\star$. Da bi našli aproksimaciju fiksne točke do na zadanu točnost ε, prema (3) dovoljno je zahtijevati da bude

$$\tfrac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} d(x_1, f(x_1)) < \varepsilon,$$

odakle dobivamo $n \geq 25$. Točku x_{25} možemo uzeti za traženu aproksimaciju.

Literatura

[1] M. Crnjac, D.Jukić, R.Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[2] B. Guljaš, *Metrički prostori*, predavanja, Sveučilište J.J.Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[3] D.Jukić, *Realna analiza*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[4] M.A Khamsi, W.A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, John Wiley and Sons, Kanada, 2001.

[5] Š.Ungar, *Matematička analiza 3*, PMF- Matematički odsjek, Zagreb, 2002.

[6] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis II*, Springer, 2016.