Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Magdalena Mikić

Primjena Cholesky dekompozicije na rješavanje linearnih sustava

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Magdalena Mikić

Primjena Cholesky dekompozicije na rješavanje linearnih sustava

Završni rad

Mentorica: doc. dr. sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2022.

Sažetak: U ovom ćemo radu izvesti Cholesky dekompoziciju matrice i pokazati kako se ona primjenjuje na rješavanje nekih specifičnih sustava linearnih jednadžbi. Najprije ćemo navesti osnovne pojmove i rezultate vezane uz linearne sustave te metode rješavanja linearnih sustava. Nakon toga, definirat ćemo simetrične matrice i iskazati važne tvrdnje vezane uz pozitivnu definitnost simetričnih matrica. Pokazat ćemo jedinstvenost Cholesky dekompozicije, kao i ekvivalenciju između pozitivne definitnosti simetrične matrice te postojanja i jedinstvenosti dekompozicije. Navest ćemo algoritam kojim dolazimo do dekompozicije i na primjeru pokazati kako matricu rastaviti koristeći navedeni algoritam. Objasnit ćemo postupak rješavanja linearnog sustava koristeći Cholesky dekompoziciju, takozvanu Cholesky metodu, i ilustrirati ga primjerom. Na kraju ćemo ukratko objasniti LDL^T dekompoziciju, kao posebnu varijantu Cholesky dekompozicije.

Ključne riječi: sustav linearnih jednadžbi, simetrična matrica, pozitivna definitnost, Cholesky dekompozicija, Cholesky metoda

Application of Cholesky decomposition to solving linear systems

Abstract: In this paper, we will derive the Cholesky decomposition of matrix and show how it can be used for solving some specific systems of linear equations. Firstly, we will state basic terms and results related to linear systems and methods of solving them. After that, we will define symmetric matrices and state the important statements regarding the positive definiteness of symmetric matrices. We will prove the uniqueness of the Cholesky decomposition and the equivalence between positive definiteness of symmetric matrices and existence and uniqueness of decomposition. We will state the algorithm by which we get the decomposition and show an example of how to decompose the matrix using the specified algorithm. We will explain the procedure for solving a linear system using the Cholesky decomposition, the so-called Cholesky method, and illustrate it with an example. Finally, we will briefly explain the LDL^T decomposition, as a special variant of the Cholesky decomposition.

Keywords: system of linear equations, symmetric matrix, positive definiteness, Cholesky decomposition, Cholesky method

Sadržaj

1. Uvod

Rješavanje linearnih sustava problem je kojim se matematičari bave od davnih vremena. Ponekad ono predstavlja jednostavan zadatak, no često je potrebno uložiti puno truda kako bismo riješili neki sustav s velikim brojem jednadžbi i nepoznanica. Iz tog razloga, razvijene su brojne metode rješavanja, čime se posebno bave linearna algebra i numerička matematika, koja nastoji dati što efikasnije i brže metode. Mnoge od njih zasnivaju se na faktorizaciji matrice sustava, odnosno rastavu matrice sustava na produkt nekih jednostavnijih matrica. Rješavanje jednog kompliciranog sustava jednadžbi faktorizacijom matrice sustava svodi se na rješavanje nekoliko jednostavnih sustava jednadžbi.

Prilikom faktorizacije važno je iskoristiti bilo kakvu posebnu strukturu matrice. Neka njena svojstva mogu poboljšati brzinu pronalaska rješenja sustava ili pak smanjiti količinu podataka potrebnih za pohranu. Primjerice, jedno od poželjnih svojstava, koje simetrična matrica može imati, je pozitivna definitnost. Sama simetrija je također važno svojstvo. Ukoliko je matrica simetrična, možemo očekivati da će za nju postojati i faktorizacija, koja će na neki način oslikavati njenu simetričnost. Cholesky[1] dekompozicija, koju ćemo detaljno obraditi u ovom radu, primjer je upravo takve faktorizacije.

Primjena Cholesky dekompozicije je široka. Osim što se koristi pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi, primjenjuje se i kod problema svojstvenih i singularnih vrijednosti, linearnog problema najmanjih kvadrata, nelinearnoj optimizaciji i slično. Mi ćemo se sadržati na primjeni u rješavanju linearnih sustava, gdje je posebno važna za numeričko rješavanje sustava.

U drugom poglavlju uvest ćemo pojam linearne jednadžbe i sustava linearnih jednadžbi, definirat ćemo rješenje sustava i navesti neka važna svojstva vezana uz matricu sustava i tvrdnje o postojanju rješenja sustava. Spomenut ćemo neke bitne metode rješavanja sustava i navesti algoritme za rješavanje trokutastih sustava. Ukratko ćemo objasniti LU dekompoziciju, kao važnu direktnu metodu rješavanja, koja je usko vezana uz Cholesky dekompoziciju.

U trećem poglavlju najprije ćemo navesti osnovne pojmove i tvrdnje vezane uz simetrične matrice i njihovo, već spomenuto, svojstvo definitnosti. Primjenom Gaussovih eliminacija izvest ćemo Cholesky dekompoziciju za simetričnu pozitivno definitnu matricu, dokazati njenu jedinstvenost i zatim pokazati da je postojanje dekompozicije ekvivalentno s posjedovanjem svojstva pozitivne definitnosti. Navest ćemo algoritam za određivanje Cholesky dekompozicije, ukratko opisati njegova svojstva i na primjeru pokazati kako primijeniti navedeni algoritam. Opisat ćemo Cholesky metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi i primjerom pokazati kako na taj način rješavamo sustav. Na kraju ćemo se ukratko dotaknuti LDL^T dekompozicije, kao posebnog oblika Cholesky dekompozicije, koji je u nekim slučajevima primjenjiv i kada ne možemo koristiti standardni oblik.

[1]Andre-Louis Cholesky (1875.-1918.) - francuski vojni časnik i matematičar

2. Općenito o linearnim sustavima

U ovom poglavlju navest ćemo osnovne definicije i tvrdnje vezane uz sustave linearnih jednadžbi. Dotaknut ćemo se nekih poznatih metoda rješavanja takvih sustava i ukratko objasniti kako se rješavaju trokutasti sustavi, koji igraju važnu ulogu u metodi rješavanja koja koristi Cholesky dekompoziciju. Pregled je napravljen prema [1], [4] i [8].

2.1. Osnovni pojmovi i tvrdnje

Definicija 2.1. *Linearna jednadžba* nad poljem $\mathbb{F}$ s nepoznanicama $x_1, x_2, ..., x_n$ je jednadžba oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ skalari iz polja $\mathbb{F}$. Skalare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima, a b slobodnim koeficijentom jednadžbe (1).

Opći sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ koji se sastoji od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, $m, n \in \mathbb{N}$, je oblika

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

gdje se skalari $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, nazivaju koeficijentima sustava (2), a $b_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, slobodnim koeficijentima.

Sustav (2) možemo zapisati u matričnom obliku na sljedeći način

$$Ax = b,$$

pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matricu $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ nazivamo matrica sustava, a vektore $x \in \mathbb{F}^n$, odnosno $b \in \mathbb{F}^m$, nazivamo vektor nepoznanica, odnosno vektor slobodnih koeficijenata. Matrični zapis sustava linearnih jednadžbi najčešće je pogodniji zapis za samo rješavanje sustava. Brojne metode rješavanja zasnovane su upravo na njemu. Problem kojim ćemo se baviti u ovom radu je rješavanje nekih specijalnih sustava linearnih jednadžbi pa stoga definirajmo rješenje sustava.

Definicija 2.2. *Rješenje sustava* (2) je svaka uređena n-torka $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{F}^n$ za koju supstitucija

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2\,, \ldots,\ x_n = \xi_n$$

zadovoljava sve jednadžbe sustava (2).

Propozicija 2.1. *Uređena n-torka* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{F}^n$ *je rješenje sustava* (2) *ako i samo ako vrijedi*

$$b = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *stupci matrice* A.

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktnim uvrštavanjem. □

Definicija 2.3. Matricu oblika

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

nazivamo *proširena matrica* sustava (2).

Važan pojam je *rang matrice.* Rang matrice $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ predstavlja broj linearno nezavisnih stupaca, odnosno redaka matrice A i označava se s $r(A)$. Matrica A je *punog ranga* ako je $r(A)$ jednak broju stupaca, odnosno redaka matrice.

Za sustav jednadžbi kažemo da je *konzistentan* ili *rješiv* ako ima barem jedno rješenje. Sljedeći rezultat daje nam nužan i dovoljan uvjet uz koji je sustav linearnih jednadžbi rješiv.

Teorem 2.1 (Kronecker-Capelli)**.** *Sustav $Ax = b$ je rješiv ako i samo ako vrijedi*

$$r(A) = r(A_p).$$

Dokaz. Dokaz tvrdnje može se pronaći u [1]. □

Posebnu skupinu linearnih sustava čine *kvadratni sustavi*, to jest sustavi oblika

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{3}$$

gdje su $a_{ij} \in \mathbb{F}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad b_i \in \mathbb{F}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$ Dakle, za kvadratne sustave vrijedi da je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica. Pripadna matrica sustava $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ naziva se *kvadratna matrica* i za nju kažemo da je reda n. Kvadratne matrice mogu imati jedno važno svojstvo - regularnost, koje će, između ostalog, osiguravati rješivost sustava.

Definicija 2.4. Matrica $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je *regularna* (invertibilna, nesingularna) ako postoji matrica $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ takva da vrijedi

$$AB = BA = I.$$

Matricu B nazivamo *inverznom matricom* matrice A i označavamo s A^{-1}. Za matricu $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kažemo da je *singularna* ako nije regularna.

Teorem 2.2. *Matrica $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$.*

Dokaz. Dokaz tvrdnje može se pronaći u [1]. □

Korolar 2.1. *Sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je matrica A regularna.*

U daljnjim razmatranjima bit će nam posebno važni *trokutasti* kvadratni sustavi, odnosno sustavi čija je matrica sustava donjetrokutasta ili gornjetrokutasta matrica.

Definicija 2.5. Za matricu $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kažemo da je *donjetrokutasta* ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i > j,\ \ i,j = 1,\dots,n$. Za matricu A kažemo da je *gornjetrokutasta* ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i < j,\ \ i,j = 1,\dots,n$. Matrica A je *dijagonalna* ako svi njeni elementi izvan glavne dijagonale iščezavaju.

Koristit će nam i sljedeći rezultat.

Lema 2.1. *Produkt dvije kvadratne donjetrokutaste (gornjetrokutaste) matrice je donjetrokutasta (gornjetrokutasta) matrica.*

Dokaz. Dokaz tvrdnje može se pronaći u [1]. □

U ovome radu promatrat ćemo kvadratne sustave s realnim koeficijentima, to jest sustave nad poljem $\mathbb{R}$, čija je matrica sustava kvadratna. U tom slučaju je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}^n$. Dakle, od sada pa nadalje podrazumijevamo da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $m = n$. Analogne tvrdnje mogu se pokazati i u kompleksnom slučaju.

2.2. Metode rješavanja

Rješavanje linearnih sustava predstavlja jedan važan problem u numeričkoj matematici, kao i u linearnoj algebri. Najčešće se rješavaju sustavi kod kojih je pripadna matrica kvadratna i regularna. U tom slučaju znamo da imamo jedinstveno rješenje sustava. Postoje razne metode za rješavanje takvih kvadratnih sustava, a možemo ih podijeliti na iterativne i direktne. Više o iterativnim i direktnim metodama može se naći u [2] i [10]. Najpoznatije iterativne metode su Gauss-Seidelova i Jacobijeva metoda. Neke poznate direktne metode za rješavanje sustava su Gaussova i Gauss-Jordanova metoda, Cramerovo pravilo te razne metode koje se temelje na faktorizaciji matrice sustava, kao što su LU dekompozicija, QR dekompozicija, dekompozicija na singularne vrijednosti te Cholesky dekompozicija, kojom ćemo se, kao što smo već naveli, detaljno baviti u ovom radu. Za više o Cramerovom pravilu vidi [4], a detaljnije o ostalim metodama može se naći u [2] i [10].

Često je matricu sustava zgodno zapisati preko trokutastih matrica i tako dobiti *trokutaste sustave* za koje postoje jednostavni algoritmi za rješavanje. Ako je dan sustav $Lx = b$, pri čemu je $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna donjetrokutasta matrica, odnosno matrica oblika

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad l_{ii} \neq 0,\ \ i = 1,\dots,n,$$

možemo ga riješiti *supstitucijom unaprijed*:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}},\ \ x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}x_k\right),\ \ i = 2,\dots,n.$$

Ukoliko imamo sustav jednadžbi $Ux = b$, pri čemu je $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna gornjetrokutasta matrica, to jest matrica oblika

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix},\ \ u_{ii} \neq 0,\ \ i = 1,\dots,n,$$

možemo ga riješiti *supstitucijom unazad*:

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k\right), \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

LU dekompozicija važan je primjer faktorizacije u kojoj se javljaju upravo ovakvi trokutasti sustavi, stoga ćemo ju ukratko opisati.

Matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ u nekim je slučajevima moguće prikazati kao produkt dvije trokutaste matrice, pri čemu je jedna od njih donjetrokutasta s jedinicama na glavnoj dijagonali, a druga gornjetrokutasta matrica, to jest moguće ju je prikazati u sljedećem obliku:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Takav rastav matrice naziva se *LU* dekompozicija ili *LU* faktorizacija. Nju je moguće generirati pomoću Gaussovih eliminacija, a detaljnije o Gaussovim eliminacijama i samom postupku može se pronaći u [10]. Sljedeći teorem govori nam kada možemo načiniti takav rastav te uz koji je uvjet on jedinstven.

Teorem 2.3. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da su svi njeni glavni minori različiti od 0. Tada postoje donjetrokutasta matrica L s jedinicama na glavnoj dijagonali i gornjetrokutasta matrica U, takve da je $A = LU$. Ako je matrica A regularna, onda je faktorizacija jedinstvena.*

Dokaz. Dokaz tvrdnje može se pronaći u [3]. □

Napomena 2.1. Glavni minori matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ su determinante njenih glavnih podmatrica, odnosno sljedeće determinante

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \det A.$$

Primjer 2.1. Matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

možemo zapisati u obliku $A = LU$, pri čemu je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

LU dekompozicija omogućava nam jednostavnije rješavanje sustava koristeći prethodno navedene algoritme za rješavanje trokutastih sustava. Promotrimo sustav $Ax = b$. Pretpostavimo da smo matricu A zapisali kao produkt LU. Uvedemo li supstituciju $Ux = z$, sustav $LUx = b$ možemo riješiti tako da riješimo dva trokutasta sustava: $Lz = b$ i $Ux = z$. Sustav $Lz = b$ je donjetrokutasti i rješavamo ga supstitucijom unaprijed, dok je sustav $Ux = z$ gornjetrokutasti i rješavamo ga supstitucijom unazad.

3. Cholesky dekompozicija i rješavanje linearnih sustava

Posebnu klasu kvadratnih sustava linearnih jednadžbi čine sustavi kojima je matrica sustava simetrična. U ovom poglavlju bavit ćemo se isključivo takvim sustavima pa ćemo stoga uvesti neke osnovne pojmove i rezultate vezane uz njih.

3.1. Simetrične matrice i definitnost

Najprije ćemo se upoznati s pojmom simetrične matrice i nekim njenim važnim svojstvima. Pregled je napravljen prema [2], [7] i [9].

Definicija 3.1. Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kažemo da je *simetrična* ako vrijedi $A^T = A$, to jest ako je $a_{ij} = a_{ji}$, za svaki $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Simetrične matrice mogu imati svojstvo definitnosti, koje se može iskoristiti u raznim primjenama. Nama će posebno važne biti simetrične pozitivno definitne matrice. Također, dotaknut ćemo se i semidefinitnih, kao i indefinitnih matrica, pa ih stoga definirajmo.

Definicija 3.2. Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *pozitivno definitna* ako je $x^T A x > 0$ za svaki nenul vektor $x \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 3.3. Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *pozitivno semidefinitna* ako je $x^T A x \geq 0$ za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 3.4. Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *indefinitna* ako postoje vektori $y, z \in \mathbb{R}^n$ takvi da je $y^T A y < 0 < z^T A z$.

Simetričnost i pozitivna definitnost jedna su od najljepših svojstava koje matrica može posjedovati. Dok simetrija matrice pojednostavljuje razne račune s matricama, pozitivna definitnost, primjerice, osigurava numeričku stabilnost pri rješavanju linearnih sustava.

Postoji jedan važan kriterij koji daje nužan i dovoljan uvjet definitnosti matrice, tzv. *Sylvesterov kriterij*[2]. Prema njemu je simetrična matrica A pozitivno definitna ako i samo ako su svi njeni glavni minori pozitivni. Koristeći tu tvrdnju, u kombinaciji s teoremom 2.3., možemo zaključiti da simetrična pozitivno definitna matrica zasigurno ima jedinstvenu *LU* dekompoziciju. Više o Sylvesterovom kriteriju, kao i sam dokaz tvrdnje, može se pronaći u [7]. Ekvivalentan uvjet za pozitivnu definitnost matrice je i da su sve njene svojstvene vrijednosti realne i pozitivne.

Navedimo i dokažimo još neke korisne tvrdnje, koje će nam poslužiti prilikom konstrukcije Cholesky dekompozicije matrice.

Lema 3.1. *Simetrična pozitivno definitna matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima pozitivne dijagonalne elemente.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$, simetrična pozitivno definitna matrica. Prema definiciji 3.2. matrica je pozitivno definitna ako je $x^T A x > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \neq 0$. Odaberimo $x = e_i$, gdje je e_i i-ti vektor kanonske baze. Tada je $a_{ii} = e_i^T A e_i > 0$, to jest dijagonalni elementi matrice A su pozitivni. □

[2] James Joseph Sylvester (1814.-1897.) - engleski matematičar

Lema 3.2. *Neka je $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je simetrična pozitivno definitna matrica ako i samo ako je matrica S^TAS simetrična pozitivno definitna.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica i $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna. Simetričnost matrice S^TAS slijedi iz

$$(S^TAS)^T = S^TA^TS = S^TAS.$$

Budući da je S regularna, onda je $y = Sx \neq 0$, za svaki $x \neq 0$. Stoga vrijedi

$$x^T(S^TAS)x = (Sx)^TA(Sx) = y^TSy > 0.$$

Za dokaz obrata koristila bi se matrica S^{-1}. □

Lema 3.3. *Ako je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica i B bilo koja glavna podmatrica od A, onda je B simetrična pozitivno definitna matrica.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična i pozitivno definitna i neka je B glavna podmatrica od A reda m. Tada za svaki $y \in \mathbb{R}^m$, $y \neq 0$ i za $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (y^T, 0)^T$ vrijedi $y^TBy = x^TAx$. Kako je A pozitivno definitna, vrijedi $x^TAx > 0$, pa zaključujemo $y^TBy > 0$, odnosno B je pozitivno definitna. Simetričnost podmatrice B je očita. □

Može se, također, pokazati da je svaka pozitivno definitna simetrična matrica punog ranga, to jest da je regularna matrica. Taj rezultat osigurava postojanje rješenja kad god imamo sustav s pozitivno definitnom matricom. Iz tog razloga u nastavku ne moramo posebno zahtjevati regularnost.

Lema 3.4. *Ako je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica, onda je A regularna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A singularna. Tada je $Ax = 0$ za neki $x \neq 0$, što povlači $x^TAx = 0$ za neki $x \neq 0$. To je u kontradikciji s pozitivnom definitnosti matrice A. □

3.2. Cholesky dekompozicija

Važna metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi, kod kojih je matrica sustava simetrična, je upravo Cholesky dekompozicija matrice. Cholesky dekompozicija je rastav simetrične pozitivno definitne matrice na produkt donjetrokutaste matrice i njoj transponirane gornjetrokutaste matrice. Najprije ćemo primjenom Gaussovih eliminacija izvesti ovu dekompoziciju matrice, a kasnije ćemo navesti još jedan elegantan i konstruktivan dokaz tvrdnje o postojanju i jedinstvenosti ovakve faktorizacije.

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dana s

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da je A simetrična pozitivno definitna matrica. Cilj je matricu A rastaviti na sljedeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Neka su $u_1, v_1 \in \mathbb{R}^n$ vektori zadani s

$$u_1 = (0, m_{21}, m_{31}, \dots, m_{n1})^T, \quad v_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$$

te $M_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ elementarna matrica koju određujemo na sljedeći način:

$$M_1 = I - u_1 v_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $m_{i1} := \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2, \dots, n$. Množeći matricu A slijeva s M_1 i zdesna s M_1^T dobivamo

$$A^{(2)} = M_1 A M_1^T = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix},$$

gdje su $a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}$, $i, j = 2, \dots, n$. Sada definiramo matricu $M_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kao $M_2 = I - u_2 v_2^T$, gdje su

$$u_2 = (0, 0, m_{32}, \dots, m_{n2})^T,\ v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T,$$

uz oznaku $m_{i2} := \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$, $i = 3, \dots, n$. Tada je

$$A^{(3)} = M_2 M_1 A M_1^T M_2^T = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix},$$

gdje su $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}$, $i, j = 3, \dots, n$. Postupak nastavljamo analogno i nakon $n-1$ koraka dobivamo

$$M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A M_1^T M_2^T \cdots M_{n-1}^T = diag(a_{11}, a_{22}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n)}) := D. \tag{4}$$

Pozitivna definitnost matrice A osigurava da i dijagonalni elementi matrice D budu pozitivni. Naime, prema lemi 3.2., uz oznaku $S = M_1^T M_2^T \cdots M_{n-1}^T$, matrica D je pozitivno definitna, a lema 3.1. tada povlači da su njeni dijagonalni elementi pozitivni. Stoga možemo definirati

$$\sqrt{D} := diag\Big(\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}^{(2)}}, \dots, \sqrt{a_{nn}^{(n)}}\Big).$$

Tada je $D = \sqrt{D} \cdot \sqrt{D}$. Množeći jednakost (4) slijeva s $M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$ i zdesna s $(M_{n-1}^T)^{-1} \cdots (M_2^T)^{-1} (M_1^T)^{-1}$ dobivamo

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} \sqrt{D}\sqrt{D} (M_{n-1}^T)^{-1} \cdots (M_2^T)^{-1} (M_1^T)^{-1}.$$

Uvedemo li sljedeće oznake

$$L := M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} \sqrt{D},$$

$$L^T := \sqrt{D} (M_{n-1}^T)^{-1} \cdots (M_2^T)^{-1} (M_1^T)^{-1},$$

dobivamo upravo Cholesky dekompoziciju matrice A

$$A = LL^T,$$

gdje je L donjetrokutasta matrica. Cholesky dekompoziciju matrice možemo zapisati u ekvivaletnom obliku na sljedeći način

$$A = R^T R,$$

gdje je $R = L^T$ gornjetrokutasta matrica. Pokažimo sada da je takva faktorizacija jedinstvena.

Teorem 3.1. *Cholesky dekompozicija simetrične pozitivno definitne matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = LL^T$, pri čemu je L donjetrokutasta s pozitivnim dijagonalnim elementima, je jedinstvena.*

Dokaz. Pretpostavimo da za matricu A postoje dvije dekompozicije

$$A = LL^T = \tilde{L}\tilde{L}^T.$$

Kako su L i $\tilde{L}$ regularne, postoje njihove inverzne matrice, pa možemo pomnožiti prethodnu jednakost slijeva s $\tilde{L}^{-1}$ i zdesna s $(L^T)^{-1}$. Dobivamo

$$\tilde{L}^{-1} L = \tilde{L}^T (L^T)^{-1}.$$

Matrica $\tilde{L}$ je donjetrokutasta pa je donjetrokutasti i njen inverz. Isto tako matrica $(L^T)^{-1}$ je gornjetrokutasta, kao inverz gornjetrokutaste matrice. Dakle, na lijevoj strani jednakosti imamo produkt dvije donjetrokutaste matrice, što je prema lemi 2.1. ponovno donjetrokutasta matrica, a na desnoj strani imamo gornjetrokutastu matricu, kao produkt dvije gornjetrokutaste matrice. Iz tog razloga, matrice s obje strane jednakosti moraju biti dijagonalne pa imamo

$$\tilde{L}^{-1} L = D, \;\; \tilde{L}^T (L^T)^{-1} = D.$$

Množenjem prve jednakosti slijeva s $\tilde{L}$ i transponiranjem druge jednakosti dobivamo

$$L = \tilde{L} D, \;\; L^{-1} \tilde{L} = D.$$

Pomnožimo li drugu jednakost slijeva s L, imamo $\tilde{L} = LD$. Uvrštavanjem ovog izraza u prvu jednakost slijedi da je $L = LD^2$, što je moguće jedino ako je $D = I$. Time je pokazana jedinstvenost prikaza. □

Vidjeli smo da se svaka simetrična pozitivno definitna matrica može rastaviti na produkt LL^T, gdje je L donjetrokutasta matrica. Međutim, vrijedi i obratno. Svaka matrica oblika LL^T je simetrična i pozitivno definitna. U dokazu idućeg teorema pokazat ćemo upravo taj obrat te prikazati još jednu elegantnu konstrukciju Cholesky faktorizacije.

Teorem 3.2. *$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je simetrična pozitivno definitna matrica ako i samo ako postoji jedinstvena donjetrokutasta regularna matrica $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, s pozitivnim dijagonalnim elementima, takva da je $A = LL^T$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica. Pokazat ćemo postojanje matrice L indukcijom po redu matrice n. Odaberemo li da je $l_{ii} > 0$, za svaki $i = 1, \dots, n$, dobit ćemo jedinstveni L. Za $n = 1$ imamo $A = [a_{11}]$. A je simetrična i za $a_{11} > 0$ A je pozitivno definitna. Tada je $L = [\sqrt{a_{11}}]$ dobro definirana i vrijedi

$$A = [\sqrt{a_{11}}][\sqrt{a_{11}}] = LL^T.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za matrice reda $n-1$, to jest da za sve simetrične pozitivno definitne matrice A reda $n-1$ postoji jedinstveni rastav u obliku $A = LL^T$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za matrice reda n. Neka je A simetrična pozitivno definitna matrica reda n. A možemo rastaviti na sljedeći način

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{A_{12}^T}{\sqrt{a_{11}}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & A_{12} \\ A_{12}^T & \tilde{A}_{22} + \frac{A_{12}^T A_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix},$$

pri čemu vrijedi $\tilde{A}_{22} = A_{22} - \frac{A_{12}^T A_{12}}{a_{11}}$. Prema lemi 3.2. matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$ je simetrična i pozitivno definitna pa je prema lemi 3.3. matrica $\tilde{A}_{22}$ također simetrična i pozitivno definitna. Prema pretpostavci indukcije, za matricu $\tilde{A}_{22}$ postoji matrica $\tilde{L}$ takva da je $\tilde{A}_{22} = \tilde{L}\tilde{L}^T$. Sada je

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{A_{12}^T}{\sqrt{a_{11}}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{L}\tilde{L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{A_{12}^T}{\sqrt{a_{11}}} & \tilde{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & \tilde{L}^T \end{bmatrix} = LL^T.$$

Obratno, prepostavimo da se A može faktorizirati u obliku $A = LL^T$, pri čemu je L donjetrokutasta regularna matrica. Primijetimo da je A simetrična. Vrijedi

$$A^T = (LL^T)^T = LL^T = A.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan, $x \neq 0$. Matrica L je regularna pa za svaki $x \neq 0$ vrijedi $Lx \neq 0$. Tada vrijedi

$$x^T A x = (x^T L)(L^T x) = (L^T x)^T (L^T x) = \|Lx^T\|_2^2 > 0$$

pa je A simetrična i pozitivno definitna matrica. □

Upravo dokazana ekvivalencija osigurava jedan praktičan test za ispitivanje pozitivne definitnosti matrice koristeći Cholesky dekompoziciju. Dakle, ukoliko postoji Cholesky dekompozicija matrice A, sa strogo pozitivnim korijenima, onda je A pozitivno definitna. Računanje Cholesky dekompozicije je puno brži način provjere pozitivne definitnosti matrice, nego primjerice računanje svojstvenih vrijednosti matrice.

Dokaz prethodnog teorema je konstruktivan i daje nam jedan način određivanja dekompozicije. Međutim, u nastavku ćemo izvesti jednostavne formule za računanje koeficijenata matrice L koristeći samo jednakost $A = LL^T$.

3.3. Algoritam

Pokažimo sada kako jednostavno možemo odrediti matricu L. Kao što smo već naveli, njezine elemente možemo izračunati iz jednakosti $A = LL^T$.

Primjer 3.1. Neka je $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simetrična i pozitivno definitna, takva da je $A = LL^T$, $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Odredimo koeficijente matrice L.

Imamo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Zbog simetrije matrice vrijedi $a_{21} = a_{12}$. Izjednačavanjem koeficijenata s lijeve i desne strane dobivamo sljedeće jednadžbe

$$a_{11} = l_{11}^2, \quad a_{21} = a_{12} = l_{11}l_{21}, \quad a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2,$$

iz kojih jednostavno slijede formule za koeficijente matrice L

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}, \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}.$$

Analogno, kao u prethodnom primjeru, možemo izračunati koeficijente za matrice višeg reda. Zahvaljujući simetriji, dovoljno je promatrati samo donji trokut matrice, to jest elemente za koje vrijedi $i \geq j$. Na taj način dobivamo algoritam za određivanje Cholesky dekompozicije.

Cholesky algoritam:

Ulaz: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simetrična i pozitivno definitna matrica
Izlaz: $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donjetrokutasta matrica s pozitivnim dijagonalnim elementima takva da je $A = LL^T$

for *j=1 to n* **do**

$$l_{jj} = \sqrt{ajj - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

for *i=j+1 to n* **do**

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}(aij - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})$$

end

end

Algoritam se može provoditi po retcima matrice, po stupcima matrice ili koristeći podmatrice. Postoje razne njegove varijante, o čemu se više može pronaći u [3] i [5]. Njegova prednost je u tome što je za pohranu potrebno gotovo dva puta manje prostora, za razliku od LU dekompozicije. Dok algoritam LU dekompozicije zahtjeva pohranu n^2 podataka, Cholesky algoritam, zahvaljujući simetriji matrice, zahtjeva pohranu $\frac{n(n+1)}{2}$ podataka. Također, broj potrebnih aritmetičkih operacija iznosi približno $\frac{1}{3}n^3$, što je otprilike polovina broja aritmetičkih operacija potrebnih za LU dekompoziciju. Razlog tomu je što kod Cholesky dekompozicije određujemo samo jednu trokutastu matricu, dok kod LU dekompozicije moramo odrediti dvije. Dakle, složenost algoritma je dva puta manja u odnosu na LU dekompoziciju pa je u slučaju simetrične pozitivno definitne matrice uvijek pogodnije koristiti ovaj algoritam. Nedostatak je taj što navedeni algoritam možemo koristiti samo u slučaju realne simetrične pozitivno definitne matrice. Ukoliko matrica A nije pozitivno definitna, moglo bi se dogoditi da se pod korijenom nađe negativan broj ili da dođe do dijeljenja s nulom. Na to također treba obratiti pozornost kada radimo u aritmetici računala, gdje i u slučaju pozitivno definitne matrice može doći do grešaka u zaokruživanju.

Algoritam se iznimno može upotrijebiti i kada imamo pozitivno semidefinitnu matricu, no u tom slučaju dekompozicija ne mora biti jedinstvena. Dijagonalni elementi matrice L pritom mogu biti jednaki 0. Primjerice, matricu

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

možemo rastaviti na produkt donjetrokutaste i njoj transponirane gornjetrokutaste matrice na sljedeći način

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Očito je da ovakva faktorizacija nije jedinstvena. Više o Cholesky dekompoziciji pozitivno semidefinitne matrice može se pronaći u [5].

Kao što je navedeno na početku rada, promatrali smo samo slučaj realnih matrica. Međutim, dekompoziciju je moguće načiniti i ako imamo matricu s kompleksnim koeficijentima, to jest matricu iz $\mathbb{C}^{n\times n}$. Pri tome se koriste slične, ali prilagođene, verzije algoritma.

Primjer 3.2. Odredimo Cholesky dekompoziciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 29 & 17 \\ 4 & 17 & 19 \end{bmatrix}.$$

Uočimo najprije da je matrica A simetrična, odnosno vrijedi $A = A^T$. Vrijedi

$$\Delta_1 = 16 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 29 \end{vmatrix} = 400 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 29 & 17 \\ 4 & 17 & 19 \end{vmatrix} = 3600 > 0$$

pa Sylvesterov kriterij povlači da je ona i pozitivno definitna. Dakle, moguće je odrediti njezinu Cholesky faktorizaciju. Koristeći gore navedeni algoritam dobivamo

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = 4, \\ l_{21} &= \frac{1}{l_{11}} \cdot a_{21} = 2, \\ l_{31} &= \frac{1}{l_{11}} \cdot a_{31} = 1, \\ l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 5, \\ l_{32} &= \frac{1}{l_{22}} \cdot (a_{32} - l_{31}l_{21}) = 3, \\ l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 3, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cholesky dekompozicija matrice A je stoga dana s

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.4. Cholesky metoda

Kao što smo već rekli, Cholesky dekompozicija svoju važnu primjenu nalazi u rješavanju linearnih sustava. Obzirom na njezinu učinkovitost, posebno je važna za numeričko rješavanje sustava. Promotrimo sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, pri čemu je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica. Tada matricu sustava A možemo zapisati kao produkt LL^T, a zatim sustav riješiti primjenjujući algoritme za rješavanje supstitucijom unaprijed i supstitucijom unazad. Dakle, provodimo sljedeće korake:

1) Prikažemo A kao LL^T. Sustav je tada oblika $LL^T x = b$.
2) Supstitucijom unaprijed riješimo sustav $Lz = b$.
3) Supstitucijom unazad riješimo sustav $L^T x = z$.

Opisani postupak naziva se *Cholesky metoda* za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Pokažimo sada na jednostavnom primjeru kako možemo lako riješiti sustav ovom metodom.

Primjer 3.3. Riješimo sljedeći sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 45x_2 & + & 45x_3 & = & 27 \\ 5x_1 & + & 45x_2 & + & 75x_3 & = & 35 \end{array}$$

Zapišemo li sustav u matričnom obliku $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 45 & 45 \\ 5 & 45 & 75 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 27 \\ 35 \end{bmatrix},$$

možemo uočiti da je matrica sustava simetrična. Dakle, vrijedi $A = A^T$. Koristeći Sylvesterov kriterij, provjerimo je li ona i pozitivno definitna. Imamo

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 45 \end{vmatrix} = 36 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 45 & 45 \\ 5 & 45 & 75 \end{vmatrix} = 900 > 0.$$

Vidimo da su svi glavni minori matrice sustava pozitivni, odnosno matrica sustava je pozitivno definitna. Dakle, možemo napraviti Cholesky dekompoziciju matrice A i sustav riješiti Cholesky metodom. Odredimo koeficijente matrice L:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = 1, \\ l_{21} &= \frac{1}{l_{11}} \cdot a_{21} = 3, \\ l_{31} &= \frac{1}{l_{11}} \cdot a_{31} = 5, \\ l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 6, \\ l_{32} &= \frac{1}{l_{22}} \cdot (a_{32} - l_{31} l_{21}) = 5, \\ l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 5. \end{aligned}$$

Dobivamo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A = LL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Uvrstimo li $A = LL^T$ u sustav $Ax = b$, dobivamo $LL^T x = b$. Označimo $z = L^T x$ i najprije riješimo sustav $Lz = b$. Dakle, imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 27 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

Sustav je donjetrokutasti i jednostavno ga rješavamo supstitucijom unaprijed. Slijedi

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{b_1}{l_{11}} = 3, \\ z_2 &= \frac{1}{l_{22}}(b_2 - l_{21}x_1) = 3, \\ z_3 &= \frac{1}{l_{33}}(b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2) = 1. \end{aligned}$$

Sada riješimo sustav $L^T x = z$, gdje je $z = (3, 3, 1)^T$. Imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sustav je gornjetrokutasti i jednostavno ga rješavamo supstitucijom unazad. Dobivamo

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{z_3}{l_{33}} = \frac{1}{5}, \\ x_2 &= \frac{1}{l_{22}}(z_2 - l_{32}x_3) = \frac{1}{3}, \\ x_1 &= \frac{1}{l_{11}}(z_1 - l_{21}x_2 - l_{31}x_3) = 1. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadanog sustava je $x = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)^T$.

Kao što smo već spomenuli, Cholesky metoda se često koristi pri numeričkom rješavanju sustava linearnih jednadžbi. U primjenama se nerijetko javljaju veliki linearni sustavi, koji se rješavaju računalno, gdje pak često dolazi do grešaka u zaokruživanju. Ova metoda pokazuje se kao numerički stabilna metoda. Ako pretpostavimo da smo riješili sustav $Ax = b$ koristeći Cholesky metodu i za rješenje dobili $\tilde{x}$, pokazuje se da $\tilde{x}$ zadovoljava sustav $(A+\Delta A)\tilde{x} = b$, pri čemu je $\|\Delta A\|_2 \leq c_n \varepsilon \|A\|_2$, gdje je c_n mala konstanta koja ovisi o n, a ε greška zaokruživanja[3]. Više o stabilnosti algoritma i analizi grešaka može se pronaći u [6].

[3] $\|\cdot\|_2$ označava matričnu 2-normu. Detaljnije o matričnim normama može se pronaći u [6].

3.5. LDL^T dekompozicija

Ponekad se može napraviti simetrična faktorizacija simetrične matrice, iako ona nema svojstvo pozitivne definitnosti. Ona je poznata kao LDL^T varijanta Cholesky dekompozicije. U ovom potpoglavlju kratko ćemo navesti što je to LDL^T dekompozicija, ali nećemo detaljno navoditi izvod i primjere. Više o LDL^T dekompoziciji može se naći u [5] i [6].

Matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ možemo rastaviti kao produkt

$$A = LDL^T,$$

gdje je $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali, a $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dijagonalna matrica.

Prednost ovakve faktorizacije je u tome što se može primijeniti na neke indefinitne matrice i što ima gotovo isti algoritam kao i LL^T oblik faktorizacije, ali bez korjenovanja. Ipak, niti ovu faktorizaciju nije uvijek moguće provesti. Postoje primjeri indefinitnih matrica koje nije moguće faktorizirati u obliku LDL^T. Jedan od osnovnih primjera matrica za koje ne postoji klasična LDL^T dekompozicija je matrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

koja je očito simetrična i indefinitna.

LDL^T dekompoziciju možemo povezati sa standardnom Cholesky dekompozicijom na sljedeći način:

$$A = LDL^T = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = L\sqrt{D}(\sqrt{D})^T L^T = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T = \tilde{L}\tilde{L}^T.$$

Obratno, ukoliko imamo rastav $A = BB^T$, gdje je B donjetrokutasta matrica reda n, možemo definirati matrice $D = diag(b_{ii}^2)$, pri čemu su b_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ dijagonalni elementi matrice B, i $L = BD^{-1/2}$ te na taj način dobiti $A = LDL^T$.

Sustav linearnih jednadžbi možemo riješiti koristeći LDL^T dekompoziciju, rješavajući tri nova sustava od kojih su dva trokutasta i jedan je dijagonalni, koji se jednostavno rješava pomoću n dijeljenja. Obzirom na to da matrice L i L^T u trokutastim sustavima imaju jedinice na glavnoj dijagonali, koristeći ovu faktorizaciju izbjegavamo n dijeljenja, koja se javljaju kod klasične Cholesky dekompozicije.

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, d.d., Zagreb, 2008.

[2] J.W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, MIT, 1996.

[3] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, I. Slapničar, S. Singer, S. Singer, *Numerička analiza, Predavanja i vježbe*, & Zagreb, 2003. https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf

[4] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2006.

[5] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations (Third edition)*, The J. Hopkins University Press, 1996.

[6] N.J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms (Second Edition)*, SIAM, Philadelphia, 2002.

[7] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis, (Second edition)*, Cambridge University Press, 2013.

[8] K. Horvatić, *Linearna algebra*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2004.

[9] I.C.F. Ipsen, *Numerical Matrix Analysis: Linear Systems and Least Squares*, SIAM, Philadelphia, 2009.

[10] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2015.