Pojam funkcije u nastavi matematike

Lađarević, Slađana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Slađana Lađarević

Pojam funkcije u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Slađana Lađarević

Pojam funkcije u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2022.

Sadržaj

Uvod

Da je pojam funkcije jedan od najvažnijih pojmova u matematici dokazuje to što se proteže kroz cijelo školovanje. Već u osnovnoj školi učenici opisuju ovisnost dviju veličina, ali se ne zahtijeva definiranje pojma funkcije nego je bitno na intuitivnoj razini razumjeti tu ovisnost. Kroz srednjoškolsko obrazovanje učenici se postupno upoznaju s elementarnim funkcijama, od linearne do trigonometrijskih funkcija. Također, uz svaku elementarnu funkciju učenici usvajaju i znanje o njihovim svojstvima, grafičkim prikazima te primjenom u svakodnevnom životu.
Kurikulum nastavnog predmeta Matematika određuje odgojno-obrazovne ishode koje učenici moraju ostvariti iz svih područja, pa tako i područja "Algebra i funkcije" kojemu funkcije pripadaju. Školski udžbenici su nastavna sredstva koja bi trebala zadovoljavati sve propisano kurikulumom, ali zbog raznih drugih utjecaja to i nije uvijek tako. U ovome radu dana je analiza udžbenika za srednje škole nakladnika Školska knjiga i Element iz područja funkcija. Kako se na kraju srednjoškolskog obrazovanja provodi državna matura u kojoj se također nalaze zadaci iz područja funkcija, dana je analiza tih zadataka školske godine 2020./2021. jer izvještaj za školsku godinu 2021./2022. još nije objavljen.
Kako bi učenici bolje razumjeli pojam funkcije i postizali bolje rezultate na ispitima, potrebno ih je više zainteresirati za sam sadržaj. Stoga je u ovome radu dano nekoliko primjera kako motivirati i zainteresirati učenike da i sami proučavaju i istražuju nastavni sadržaj.
U tom procesu istraživanja i učenja naravno može doći do zaključaka koji su pogrešni, koji se nazivaju miskoncepcijama. Jedan od zadataka nastavnika je također i da prepozna te pogrešne zaključke, te ih ispravi kako se oni ne bi zadržali kod učenika i nakon završetka školovanja. Neke od miskoncepcija koje učenici imaju o funkcijama opisane su u ovome radu, kao i metode kako se miskoncepcije mogu utvrditi, ali i ispraviti.

1 Pojam funkcije nekada i sada

Začeci pojma funkcije sežu u 14. stoljeće kada je francuski matematičar Nicole Oresme prikazao promjenjive varijable na grafu, jednu horizontalno, a drugu vertikalno, no ovisnost jedne o drugoj nije spominjao. Poznata je njegova definicija:

Definicija 1.1. *Jednolika vrsta je ona koja je podjednako intenzivna u svim dijelovima, dok je vrsta jednoliko promjenjiva ako je za svake tri točke omjer udaljenosti između prve dvije točke i druge dvije točke jednak omjeru viška prve točke s obzirom na drugu točku i viška druge točke s obzirom na treću točku, nazivajući prvom od ove tri točke onu najvećeg intenziteta.*

Za ovu definiciju su tek kasnije matematičari otkrili da je Oresme zapravo definirao linearnu funkciju iako pojam linearne funkcije u njegovo vrijeme još nije bio poznat [6].
Današnja definicija linearne funkcije je ipak puno jednostavnija i razumljivija, a ona glasi:

Definicija 1.2 (Linearna funkcija)**.** *Neka su* $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$*. Linearna funkcija je funkcija* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *zadana formulom* $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbf{R}$.

Rene Descartes je prvi uočio da kada jednadžbu s dvije varijable prikaže geometrijski, krivuljom, mora postojati ovisnost između njezinih vrijednosti. Povezanost između varijabli je također proučavao i Galileo Galilei baveći se prirodnim fenomenima. Međutim, pojam "funkcija" nije se spominjao do Gottfrieda Leibniza, do njegovog djela "Methodus tangentum inversa, sui de functionibus" iz 1673. godine. U tom djelu Leibniz je upotrijebio pojam funkcije kako bi opisao ovisnost geometrijskih vrijednosti subtangente i subnormale na krivulju.
U to vrijeme, Johann Bernoulli je u svom pismu Leibnizu napisao da je funkcija *"veličina koja je na neki način formirana iz neodređenih i konstantnih veličina"* i koristio oznaku φ za funkciju, ali bez zagrade [7].
Leonhard Euler je postavio pojam funkcije kao centralni matematički pojam koji je definirao na sljedeći način:

Definicija 1.3 (Funkcija)**.** *Funkcija varijabilne veličine je analitički izraz koji je na bilo kakav način sastavljen od te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.*

Međutim, Euler nije dao definiciju analitičkog izraza, ali je pod tim smatrao izraz formiran pomoću uobičajenih matematičkih operacija.
Georg Cantor je zaslužan za daljnji razvoj pojma funkcije koji je u 20. stoljeću proširen i na sve proizvoljne korespondencije koje zadovoljavaju uvjet jedinstvenosti između brojčanih i nebrojčanih skupova.
Grupa matematičara poznata pod pseudonimom Nicolas Bourbaki, 1939. godine dala je prvu definiciju funkcije u smislu uređenih parova:

Definicija 1.4 (Funkcija)**.** *Neka su* E *i* F *dva skupa koji mogu i ne moraju biti različiti. Odnos između promjenjivog elementa* x *skupa* E *i promjenjivog elementa* y *skupa* F *zove se funkcijska veza u* y*, ako za svaki* x *iz* E *postoji jedinstven* y *iz* F *koji je u zadanom odnosu s* x.

Upravo ta definicija najsličnija je onoj koja se poučavala u školama.
Prema [8], pojam funkcije u udžbeniku iz 1970. godine za gimnazije definiran je na sljedeći način:

Definicija 1.5 (Funkcija). *Zadan je uređeni par* (S, S_1) *nepraznih skupova* S, S_1. *Svaki postupak* p *kojim svakom članu* x *iz* S *pridružujemo jedan član* fx *ili više članova* fx *iz* S_1 *zove se* ***funkcija*** *kojoj je oblast* S, *a proutoblast leži u* S_1. *Za dani* $x \in S$, $f(x)$ *ili* fx *znači onaj član iz* S_1 *odnosno svaki član iz* S_1 *koji je pridružen članu* x *iz* S. *Govori se o funkciji* $f|S$ *ili* $f : S$ *u smislu da je* fx *određeno za svaki* $x \in S$; f *se zove funkcionalni operator.*

Danas se u školskim udžbenicima funkcija definira na sljedeći način:

Definicija 1.6 (Funkcija). *Neka su* D *i* K *neprazni skupovi.* ***Funkcija (preslikavanje)*** *je postupak koji svakom elementu skupa* D *pridružuje točno jedan element skupa* K.

Iz današnje definicije može se zaključiti da pojam funkcije izražava ideju preslikavanja jednih objekata u druge, ideju transformacije (npr. transformacije geometrijskih likova), kao i ideju ovisnosti jednih veličina o drugima (npr. ovisnost brzine o putu).

Glavna razlika u nekadašnjoj i današnjoj definiciji u školskim udžbenicima je što nije bilo nužno da svakom elementu polaznog skupa bude pridružen točno jedan element dolaznog skupa nego je moguće da bude i više takvih. Prema tome, vertikalni test za ispitivanje je li dano preslikavanje funkcija bio je neupotrebljiv u većini slučajeva jer je bilo moguće da graf funkcije sadrži i čitav pravac paralelan y osi.
Postoji razlika i u terminologiji. Danas se $f(x)$ naziva vrijednost funkcije f u x, a nekada se zvalo značenje funkcije f u x. Također, skup koji sadrži sve vrijednosti funkcije f nazivali su protuoblast ili antidomena funkcije f, a današnji naziv je kodomena funkcije f.

Postavlja se pitanje trebaju li se učenici susresti s formalnom definicijom funkcije u nastavi matematike. Nekada su u osnovnoj školi učenici savladavali pojam funkcije intuitivno, bez da su bili upoznati sa strogom matematičkom definicijom. Taj način prihvaćanja pojma funkcije bio je primjeren dobi učenika, a uvelike je olakšavao kasniji susret učenika sa strogom matematičkom definicijom funkcije i njezinim zapisom.
Postoje argumenti koji govore da bi se formalna definicija trebala učiti, ali postoje i argumenti protiv učenja formalne definicije. Trebala bi se učiti jer definicija funkcije naglašava zajedničku strukturu različitih pojava i primjere funkcionalnih odnosa, jer pomaže u razvijanju sposobnosti učenika da prepoznaju osnovne uzorke i strukture u različitim situacijama i jer je temeljni pojam kod matematičke analize, kod limesa, derivacija, integrala.
Formalna definicija se ne bi trebala učiti jer učenici mogu raditi s pojmovima na matematički način i bez da ih se definira i jer je formalna definicija funkcije "daleko" od pojava u kojima se funkcije zapravo događaju. Međutim, da bi se učenicima približili apstraktni pojmovi poput pojma funkcije, svakako je potrebno da nastavnici predstave održive mentalne modele da bi učenici mogli dati smisao apstraktnim pojmovima.

1.1 Osnovne ideje za pojam funkcije

Kako bi učenici razumjeli mentalne modele moraju internalizirati osnovne ideje, a one se mogu razlikovati ovisno o matematičkom sadržaju i moraju se u skladu s tim prilagoditi ili proširiti. Osnovne ideje se razvijaju kada se učenici bave matematičkim pitanjima i matematičke pojmove pokušavaju učiniti opipljivima. Glavni zadatak osnovnih ideja je stvoriti odnos između učenika, matematike i stvarnosti. Dakle, za razvijanje osnovnih ideja pogodni su zadaci iz primjene. Na osnovne ideje se ne gleda kao na konstantne objekte, već kao na dinamične objekte koji se mogu proširiti, nadopuniti i povezati tijekom obrazovanja. Osnovne ideje za pojam funkcije su: ideja pridruživanja, ideja kovarijacije i ideja objekta.

Koncept pridruživanja opisuje ovisnost jedne veličine o drugoj. Dakle, ovaj koncept govori da se funkcije mogu koristiti za uspostavljanje odnosa između varijabli.
Koncept kovarijacije opisuje kako promjena jedne veličine utječe na drugu veličinu koja o njoj ovisi. Dakle, ovaj koncept koristi se za određivanje načina na koji se dvije varijable mijenjaju jedna ovisno o drugoj.
Koncept objekta pomaže da se ovisnost veličina doživljava kao jedna cjelina. Ovaj koncept koristi se kad se izvode operacije s funkcijama jer se funkcije promatraju kao objekti, pa im se pridružuju svojstva poput neprekidnosti, postojanje nultočki itd.

2 Kurikulum nastavnog predmeta Matematika

Kurikulumom nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole, gimnazije i za srednje strukovne škole na razini 4.2 određuju se svrha predmeta Matematike, odgojno-obrazovni ciljevi učenja i poučavanja predmeta, odgojno-obrazovni ishodi, sadržaji i razine usvojenosti po razredima, povezanost s drugim predmetima i međupredmetnim temama, kao i vrednovanje usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda.
Svrha predmeta Matematike jest razvijanje matematičkih znanja i vještina kojima će se učenici koristiti u osobnom, društvenom i profesionalnom životu. Matematičke kompetencije neprestano se razvijaju putem preplitanja matematičkih procesa i domena predmeta Matematika, tijekom svih godina školovanja. Domene na koje je podijeljena matematika jesu: Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje te Podatci, statistika i vjerojatnost.
Odgojno-obrazovni ciljevi učenja i poučavanja matematike su:

- primijeniti matematički jezik u usmenom i pisanom izražavanju,
- samostalno i u suradničkom okružju matematički rasuđivati logičkim, kreativnim i kritičkim promišljanjem,
- rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije,
- razviti samopouzdanje i svijest o vlastitim matematičkim sposobnostima, upornost, poduzetnost i odgovornost,
- prepoznati povijesnu, kulturnu i estetsku vrijednost matematike njezinom primjenom u različitim disciplinama i djelatnostima.

Odgojno-obrazovni ishodi kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika opisani su razradom ishoda, odgojno-obrazovnim ishodima na razini usvojenosti dobar na kraju razreda, sadržajima te preporukama za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda [11].

2.1 Funkcije u kurikulumu

U domeni "Algebra i funkcije" nalaze se odgojno-obrazovni ishodi koje učenik treba ostvariti za temu funkcije. Poučavanje matematike u školama je strukturirano, pa se velika pažnja posvećuje postupnosti u prihvaćanju i usvajanju matematičkih znanja te je izuzetno važno i uspostavljanje veza među njima. Tako učenici od prepoznavanja pravilnosti i opisivanja ovisnosti dviju veličina jezikom algebre dolaze do definicije funkcije, a nadalje funkcije tumače, uspoređuju, grafički prikazuju i upoznaju njihova svojstva. Modeliraju situacije opisujući ih algebarski, analiziraju i rješavaju matematičke probleme i probleme iz svakodnevnog života. Prema kurikulumu, pojam funkcije uvodi se pomoću linearne ovisnosti u 7. razredu osnovne škole kao prošireni sadržaj, ali s formalnom definicijom funkcije učenici se ne susreću u osnovnoj školi. Naglasak je na proučavanju međusobno zavisnih veličina, na prevođenju uočene situacije linearne ovisnosti u algebarski zapis. Preporuka je koristiti se programima dinamične geometrije te ostalim dostupnim interaktivnim računalnim programima i alatima, za bolje razumijevanje.

2.1.1 Prvi razred srednje škole

Upoznavanje učenika s pojmom preslikavanja započinje s linearnom funkcijom. Za zadanu linearnu funkciju učenici u prvom razredu računaju vrijednosti funkcije, crtaju graf, određuju nultočku i interpretiraju koeficijente. Učenici na kraju prvog razreda srednje škole trebaju moći:

- povezati različite prikaze linearne funkcije,
- primijeniti linearnu funkciju pri rješavanju problema.

Navedeni odgojni-obrazovni ishodi mogu se razraditi tako da linearne funkcije učenici prikazuju i tablično i grafički, pored simboličkog prikaza te da iz grafa čitaju argumente i vrijednosti, određuju koeficijente i da analiziraju problem iz grafičkog prikaza.

2.1.2 Drugi razred srednje škole

Funkcija se definira tek u drugom razredu srednje škole, u kojem se učenici upoznaju i s domenom, kodomenom i slikom funkcije te bijekcijom. Odgojno-obrazovni ishodi za funkcije su:

- analizirati funkciju (domena, kodomena, slika funkcije),
- analizirati grafički prikaz funkcije,
- primijeniti kvadratnu funkciju.

Dakle, u drugom razredu srednje škole susreću se i s kvadratnom funkcijom, kao i racionalnom i iracionalnom funkcijom kod određivanja funkcijske vrijednosti. Navedene su i preporuke koje nastavnici mogu koristiti kod definiranja bijekcije, a to su skupovi prikazani Vennovim dijagramima. Za razradu ishoda grafičkog prikaza funkcije, bitno je na grafu funkcije određivati domenu, kodomenu, sliku funkcije i objasniti bijekciju. Da bi učenici mogli primjenjivati kvadratnu funkciju, potrebno je da savladaju određivanje nultočke, sjecišta s ordinatom, tjemena parabole, osi simetrije, tijeka funkcije, grafički prikaz kvadratne funkcije te oblik funkcije u ovisnosti o diskriminanti i vodećem koeficijentu.

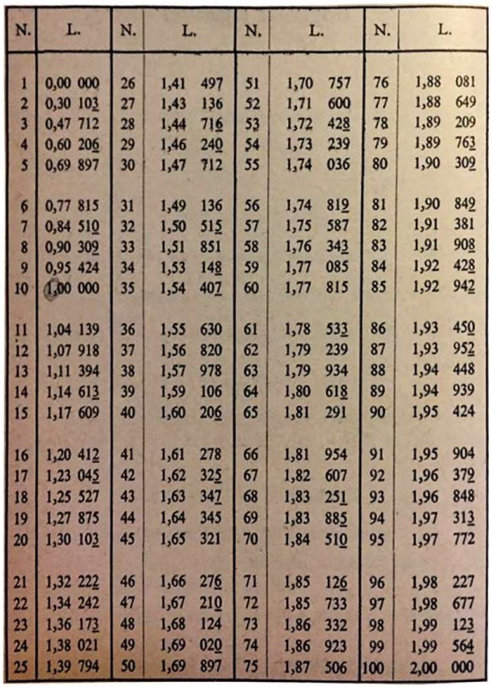
2.1.3 Treći razred srednje škole

U trećem razredu srednje škole učenici se upoznavaju s eksponencijalnom, logaritamskom, trigonometrijskom funkcijom, njihovim svojstvima i grafovima. Ishode koje trebaju ostvariti na kraju trećeg razreda srednje škole vezano za funkcije su:

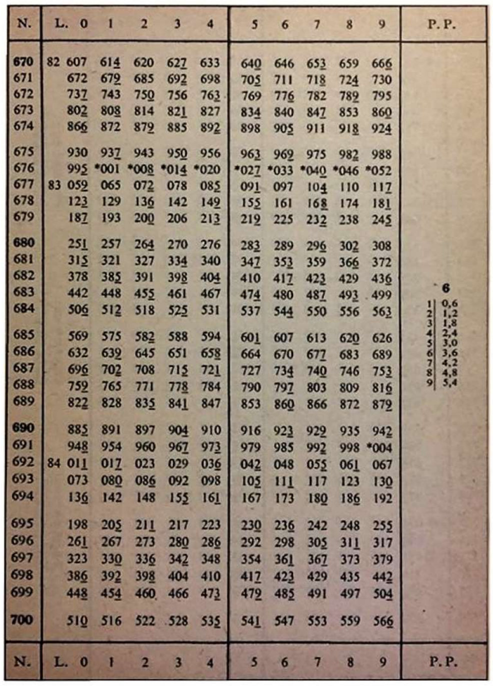
- analizirati i primijeniti eksponencijalnu i logaritamsku funkciju,
- primijeniti trigonometrijske funkcije i njihova svojstva,
- analizirati graf trigonometrijskih funkcija.

Učenik treba uočiti "inverznu" vezu između eksponencijalne i logaritamske funkcije, modelirati problemsku situaciju, odrediti i provjeriti rješenja te im utvrditi smislenost. Kao prošireni sadržaj mogu se koristiti crtice iz povijesti - Briggsove i Napierove logaritamske tablice:

Briggsovi logaritmi

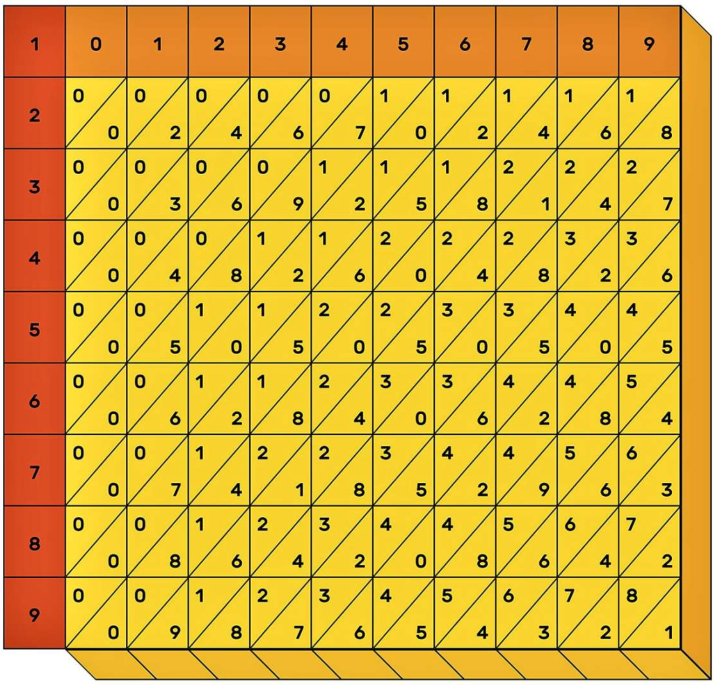


N.	L.	N.	L.	N.	L.	N.	L.
1	0,00 000	26	1,41 497	51	1,70 757	76	1,88 081
2	0,30 103	27	1,43 136	52	1,71 600	77	1,88 649
3	0,47 712	28	1,44 716	53	1,72 428	78	1,89 209
4	0,60 206	29	1,46 240	54	1,73 239	79	1,89 763
5	0,69 897	30	1,47 712	55	1,74 036	80	1,90 309
6	0,77 815	31	1,49 136	56	1,74 819	81	1,90 849
7	0,84 510	32	1,50 515	57	1,75 587	82	1,91 381
8	0,90 309	33	1,51 851	58	1,76 343	83	1,91 908
9	0,95 424	34	1,53 148	59	1,77 085	84	1,92 428
10	1,00 000	35	1,54 407	60	1,77 815	85	1,92 942
11	1,04 139	36	1,55 630	61	1,78 533	86	1,93 450
12	1,07 918	37	1,56 820	62	1,79 239	87	1,93 952
13	1,11 394	38	1,57 978	63	1,79 934	88	1,94 448
14	1,14 613	39	1,59 106	64	1,80 618	89	1,94 939
15	1,17 609	40	1,60 206	65	1,81 291	90	1,95 424
16	1,20 412	41	1,61 278	66	1,81 954	91	1,95 904
17	1,23 045	42	1,62 325	67	1,82 607	92	1,96 379
18	1,25 527	43	1,63 347	68	1,83 251	93	1,96 848
19	1,27 875	44	1,64 345	69	1,83 885	94	1,97 313
20	1,30 103	45	1,65 321	70	1,84 510	95	1,97 772
21	1,32 222	46	1,66 276	71	1,85 126	96	1,98 227
22	1,34 242	47	1,67 210	72	1,85 733	97	1,98 677
23	1,36 173	48	1,68 124	73	1,86 332	98	1,99 123
24	1,38 021	49	1,69 020	74	1,86 923	99	1,99 564
25	1,39 794	50	1,69 897	75	1,87 506	100	2,00 000



N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
670	82 607	614	620	627	633	640	646	653	659	666	
671	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730	
672	737	743	750	756	763	769	776	782	789	795	
673	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860	
674	866	872	879	885	892	898	905	911	918	924	
675	930	937	943	950	956	963	969	975	982	988	
676	995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052	
677	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117	
678	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181	
679	187	193	200	206	213	219	225	232	238	245	
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308	
681	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372	
682	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436	
683	442	448	455	461	467	474	480	487	493	499	6
684	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563	1 0,6 2 1,2 3 1,8
685	569	575	582	588	594	601	607	613	620	626	4 2,4 5 3,0
686	632	639	645	651	658	664	670	677	683	689	6 3,6
687	696	702	708	715	721	727	734	740	746	753	7 4,2 8 4,8
688	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816	9 5,4
689	822	828	835	841	847	853	860	866	872	879	
690	885	891	897	904	910	916	923	929	935	942	
691	948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004	
692	84 011	017	023	029	036	042	048	055	061	067	
693	073	080	086	092	098	105	111	117	123	130	
694	136	142	148	155	161	167	173	180	186	192	
695	198	205	211	217	223	230	236	242	248	255	
696	261	267	273	280	286	292	298	305	311	317	
697	323	330	336	342	348	354	361	367	373	379	
698	386	392	398	404	410	417	423	429	435	442	
699	448	454	460	466	473	479	485	491	497	504	
700	510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

Slika 1: Briggsove logaritamske tablice



Slika 2: Napierove kosti ili logaritamski štapići

2.1.4 Četvrti razred srednje škole

U četvrtom razredu srednje škole učenici detaljno proučavaju svojstva funkcija (parnost, periodičnost, monotonost i ograničenost), susreću se s limesom funkcije, derivacijom funkcije, a u školama koje imaju više od 128 sati godišnje matematiku dodatno i s integralom. Na kraju četvrtog razreda srednje škole učenici bi trebali moći:

- analizirati svojstva funkcija,
- tumačiti značenje limesa funkcije u točki,
- povezati definiciju derivacije funkcije u točki s problemom tangente i brzine,
- primijeniti derivaciju funkcije u problemskim situacijama,
- povezati derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije.

U gimnazijama i strukovnim školama koje matematiku imaju više od 128 sati godišnje treba biti ostvaren i ishod:

- primijeniti računanje površine ispod grafa funkcije.

3 Školski udžbenici

Školski udžbenici su temeljna nastavna sredstva namijenjena učenju i stjecanju znanja u kojima su znanstveni i stručni sadržaji didaktičko-metodički oblikovani. Udžbenik ima tri važne uloge, a to su da predlaže sadržaj poučavanja, diktira metodički postupak i osigurava niz primjera, zadataka i vježbi. U procesu poučavanja udžbenici mogu pomoći, ali i znatno ograničiti rad nastavnika. Različiti nastavnici koriste udžbenike na različite načine. Za neke nastavnike udžbenik je bitno sredstvo koje im omogućuje stalan razvoj, dok je za druge nastavnike udžbenik tek pomoćno sredstvo koje nudi niz zadataka za učenike, ali ne utječe na način poučavanja. U udžbeniku ne mora uvijek biti napisano sve ono što je propisano kurikulumom jer udžbenici nisu samo pod utjecajem odgojno-obrazovnih ciljeva. Na udžbenike utječu i drugi faktori poput komercijalnih razloga, stilova nastavnika i slično. Zadaća svakog nastavnika je da sam odluči što će iz udžbenika koristiti u nastavi, hoće li pratiti redoslijed cjelina u udžbeniku, hoće li dodati druge nastavne materijale ili se strogo držati zadataka u udžbeniku itd. Iz tog razloga bitno je analizirati udžbenik prije početka školske godine. U nastavku je dana analiza teme funkcija u školskim udžbenicima nakladnika Element za gimnazije i tehničke srednje škole te je povučena paralela s udžbenicima Školske knjige.

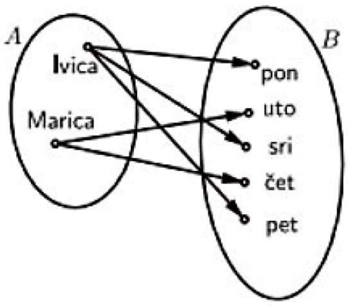
3.1 Funkcije u školskim udžbenicima

3.1.1 Prvi razred srednje škole

U udžbeniku Elementa za 1. razred srednje škole linearna funkcija uvodi se pomoću jednadžbe pravca, dok se u udžbeniku Školske knjige prvo uvodi pojam funkcije, intuitivnije, primjerom iz svakodnevnog života. Naime, radi se o primjeru u kojem učenik ulazi u knjižaru da bi kupio bilježnice, te je pronašao one koje mu se sviđaju po cijeni od 2 kn. Kako mora kupiti 5 bilježnica, razmišlja o cijeni dviju bilježnica koje će platiti 4 kn, tri bilježnice platit će 6 kn itd. To pridruživanje prikazano je pomoću skupova te je na taj način definirana funkcija koja svakom elementu skupa A (predstavlja broj bilježnica) pridružuje element skupa B (predstavlja cijenu bilježnica). Potom slijedi više primjera u kojem je svako pridruživanje prikazano i pomoću skupova i tekstualno i tablično, zatim i grafički. Mislim da će na taj način učenici postati svjesni da funkcija ne mora uvijek biti zadana formulom, odnosno da funkcija nije "$f(x) = ...$". Navodim jedan dobar primjer za shvaćanje koncepta funkcije iz udžbenika Školske knjige:

Ivica i Marica rade u istoj tvrtki i zajedno piju čaj. U ponedjeljak, srijedu i petak čaj priprema Ivica, a u utorak i četvrtak Marica. Je li pridruživanje, koje skupu {Ivica, Marica} pridružuje dane u tjednu kada kuhaju čaj, funkcija?

Rješenje: U skupu A nalaze se Ivica i Marica, A = {*Ivica, Marica*}, a u skupu B dani u tjednu B = {*pon, uto, sri, čet, pet*} kada Ivica i Marica zajedno piju čaj. Prikažimo to pridruživanje. Zaključujemo da to nije funkcija jer bi svakom elementu skupa A trebao biti pridružen točno jedan element skupa B, a u našem slučaju nije tako pa to nije funkcija.

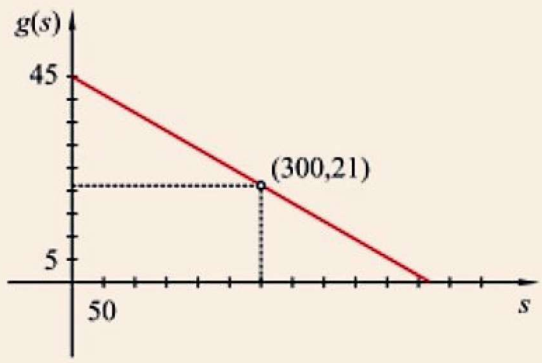


Slika 3: Primjer iz udžbenika Školske knjige

Primjeni linearne funkcije puno više pažnje posvećeno je u udžbeniku Školske knjige jer jedna cijela cjelina sadrži zadatke samo za primjenu, dok je u Elementovom udžbeniku primjena u sklopu dijela "kutak plus", ali zadaci su jednako dobri i korisni za poticanje učenika na promišljanje. U tim zadacima učenici trebaju interpretirati nešto iz grafa ili zadanog teksta, a jedan primjer naveden je u nastavku:

Graf prikazuje potrošnju goriva automobila tijekom vožnje jednolikom brzinom. Na os apscisa nanosi se prijeđeni put s (u km), a na os ordinata količina goriva g (u litrama) u spremniku automobila.

Promatraj graf i odgovori na sljedeća pitanja:



1) **Kolika je količina goriva bila u spremniku na početku puta?**

2) **Kolika je prosječna potrošnja goriva (u litrama na 1 km) tijekom puta?**

3) **Zapiši jednadžbom funkciju koja opisuje smanjivanje količine goriva u spremniku automobila u ovisnosti o prijeđenom putu.**

4) **Koliku udaljenost prijeđe automobil prije nego mu ponestane goriva?**

1) Na početku puta ($s = 0$) u spremniku je bilo 45 litara goriva.

2) Do prijeđenih 300 km utrošene su $45 - 21 = 24$ litre goriva. U prosjeku je to $\frac{24}{300} = \frac{8}{100} = 0.08$ litara po kilometru.

3) Funkcija je linearna, njezin je nagib -0.08 i ona glasi: $g(s) = -0.08s + 45$.

4) Iz $g(s) = -0.08s + 45 = 0$ slijedi $s = 562.5$ km.

Slika 4: Primjer iz udžbenika Elementa

Nakon linearne funkcije, u prvim razredima koji imaju više od 3 sata tjedno matematiku, kao redoviti sadržaj nalazi se grafički prikaz funkcije apsolutne vrijednosti. Na bolji način, po mom mišljenju, uvodi se u udžbeniku Školske knjige jer su u koordinatnom sustavu prikazani cijeli pravci $y = x$ i $y = -x$, a onda je crvenom bojom označen dio pravaca iznad x osi. Učenicima je zornije prikazano i naglašeno da je graf funkcije apsolutne vrijednosti uvijek samo iznad x osi. Nakon toga je nizom primjera prikazano crtanje grafa funkcije translacijom grafa $|x|$, dok se u Elementovom udžbeniku ne spominje crtanje translacijom nego prema definiciji. Iako za ovu temu ima više različitih zadataka u Elementovom udžbeniku, mislim da je pogodniji udžbenik Školske knjige zbog navedenih više načina na koji se može graf nacrtati.

3.1.2 Drugi razred srednje škole

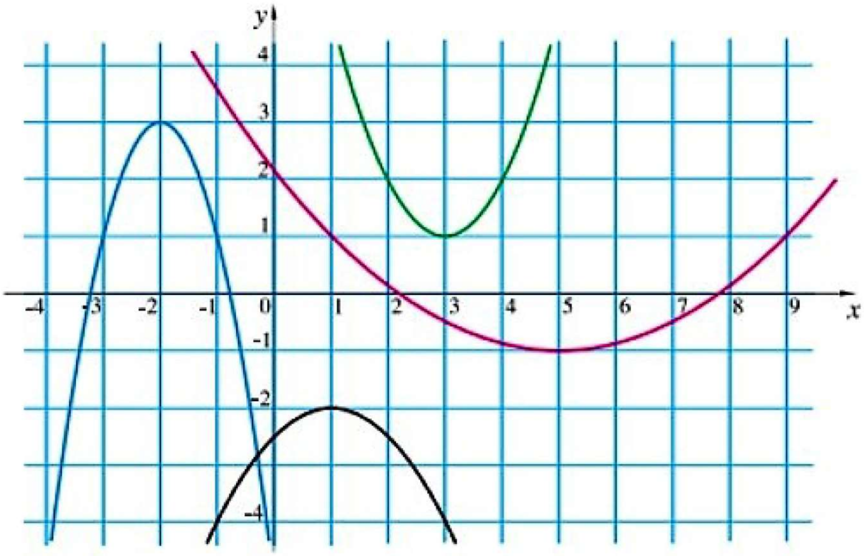
U drugom razredu učenici se upoznaju s kvadratnom funkcijom. U Elementovom udžbeniku nalaze se povijesne crtice, dok se u udžbeniku Školske knjige nalaze motivacijske priče cjeline. Elementov udžbenik uvodi kvadratnu funkciju pomoću funkcije kvadriranja $f(x) = x^2$ jer su se s kvadriranjem učenici upoznali u 8. razredu osnovne škole. Udžbenik Školske knjige uvodi kvadratnu funkciju pomoću linearne funkcije dodajući linearnom i slobodnom članu još i kvadratni član. Mislim da je dobro uvesti kvadratnu funkciju baš tako pomoću linearne, kako bi se povezivao novi nastavni sadržaj s već postojećim znanjem. U tom udžbeniku nakon uvođenja kvadratne funkcije slijedi niz zadataka o tome kako bi učenici mogli provjeriti mogu li točno prepoznati kvadratnu funkciju, dok je u Elementovom udžbeniku odmah fokus na grafu funkcije i svojstvima, ali dobra ideja je što pored svojstva odmah piše i razlog zašto funkcija ima to svojstvo. Na isti način u oba udžbenika obrađuje se graf kvadratne funkcije, počevši od crtanja grafa funkcije $f(x) = ax^2$, zatim $f(x) = ax^2 + c$, zatim $f(x) = a(x - x_0)^2$ te $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ i na kraju konačno $f(x) = ax^2 + bx + c$. Najprije se na primjerima prikazuje kada je otvor parabole okrenut prema gore ili dolje, te se izvodi zaključak na osnovu toga, kao i kada je parabola šira, a kada uža. Zatim se u istom koordinatnom sustavu crtaju grafovi funkcija pomaknuti za c gore ili dolje od grafa funkcije $f(x) = x^2$ kako bi učenici sami mogli izvesti zaključak da graf funkcije $f(x) = ax^2 + c$ mogu nacrtati translacijom grafa funkcije $f(x) = x^2$. Na isti način obrađuje se i crtanje grafa funkcije $f(x) = a(x - x_0)^2$. Na kraju se spajaju te dvije stvari kako bi mogli nacrtati graf funkcije $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ pomoću dvije translacije grafa funkcije $f(x) = x^2$. Jedan od dobrih zadataka za provjeru jesu li učenici savladali crtanje pomoću translacije jest sljedeći:

Na slici su grafovi četiriju funkcija:

1) $y = 0.125(x-5)^2 - 1$; **2)** $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$;

3) $y = -2(x+2)^2 + 3$; **4)** $y = (x-3)^2 + 1$.

Pridruži pojedinoj funkciji njezin graf.



Slika 5: Primjer zadatka iz udžbenika Elementa

Problem bi mogao nastati ukoliko bi učenici dobili funkciju zadanu u obliku $f(x) = ax^2 + bx + c$. Stoga je u oba udžbenika provedena analiza i kako u tom slučaju nacrtati graf. U Elementovom udžbeniku odmah se izvodi postupak nadopunjavanja do potpunog kvadrata te koordinate tjemena parabole i parabola se crta translacijom grafa funkcije $f(x) = x^2$ prema određenim koordinatama tjemena parabole. U udžbeniku Školske knjige, postupak crtanja grafa funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je da se pretvori u tjemeni oblik, očitaju koordinate tjemena parabole, povuče os simetrije i da se odaberu dvije točke s jedne i s druge strane simetrije.
Nakon grafa funkcije, obrađuje se nultočka funkcije i ekstremi. Pristup ovim temama se razlikuje u promatranim udžbenicima. U Elementovom udžbeniku su odmah napisani zaključci

potkrijepljeni primjerom, a u udžbeniku Školske knjige postavljeno je pitanje te zadan primjer kojim učenici i sami mogu doći do zaključka. Takav pristup je puno bolji i kvalitetniji za učenike jer će prije zapamtiti ono što su sami istražili i zaključili. U nastavku su prikazana ta dva pristupa u udžbenicima:

Prema tome, nul-točke tražimo rješavajući jednadžbu $f(x) = 0$. Naprimjer:

$$f_1(x) = 3x + 4, \qquad 3x + 4 = 0 \implies \quad x_0 = -\frac{4}{3};$$

$$f_2(x) = x^2 - 4, \qquad x^2 - 4 = 0 \implies \quad x_0 = -2 \quad \text{ili} \quad x_0 = 2.$$

Ove su nul-točke realni brojevi. Funkcija može imati i kompleksne nul-točke:

$$f_3(x) = x^3 - 1, \quad (x-1)(x^2+x+1) = 0 \implies x - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad x^2 + x + 1 = 0.$$

Ova funkcija ima samo jednu realnu nul-točku $x_0 = 1$, jer su preostala dva rješenja jednadžbe $x^3 - 1 = 0$, koje dobijemo iz $x^2 + x + 1 = 0$ kompleksni brojevi. Jednako tako, funkcija

$$f_4(x) = x^2 + 4$$

nema realnih nul-točaka.

Slika 6: Pristup u udžbeniku Elementa

Ima li svaka kvadratna funkcija realne nultočke? Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.

Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=-x^2+x-1$. U kojim točkama graf funkcije siječe os apscisa?

Rješenje

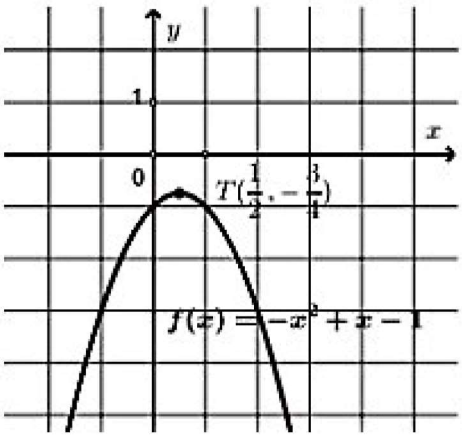
Iz $-x^2+x-1=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$ slijedi da su koordinate tjemena $T\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$. Tjeme se nalazi ispod osi x, a budući da je otvor parabole prema dolje, zaključujemo da parabola ne siječe os apscisa.

Provjerimo što dobivamo rješavanjem jednadžbe $f(x)=0$.

$$-x^2+x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{-2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{-2}\notin\mathbb{R}.$$

Kako rješenja nisu realni brojevi, zaključujemo da kvadratna funkcija $f(x)=-x^2+x-1$ nema realnih nultočaka, čime smo potvrdili prijašnji zaključak. Nacrtajmo graf funkcije.



Slika 7: Pristup u udžbeniku Školske knjige

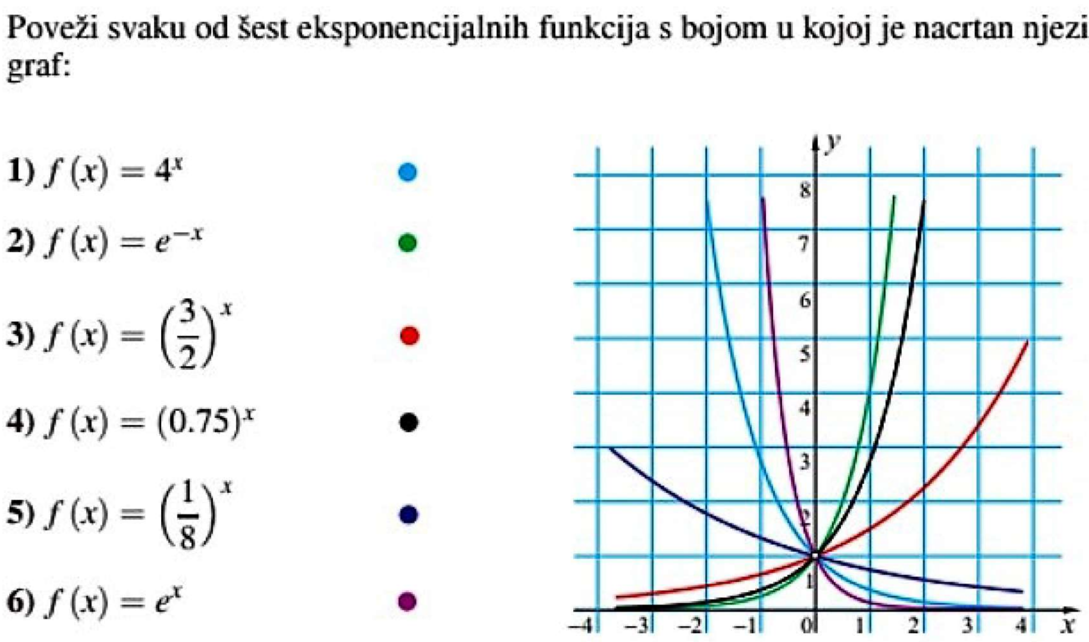
Analogan pristup je i za vezu između broja realnih nultočaka i diskriminante pripadne kvadratne jednadžbe. Dok se u Elementovom udžbeniku nalazi detaljno postupak za crtanje grafa kvadratne funkcije pomoću nultočaka i tjemena, u udžbeniku Školske knjige posvećena je pažnja bitnom dijelu koje učenike često muči, a to je određivanje formule funkcije iz grafa. Dobro je imati u udžbeniku prikazane "trikove" kojima učenici bez previše raspisivanja mogu doći do rješenja. Te "trikove" bitno je i izvesti kako bi učenici mogli razumjeti zašto je to tako, a ne učiti napamet. U ovom dijelu, riječ je o "triku" kako pomoću dvije točke $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ grafa funkcije odrediti vodeći koeficijent a, odnosno da je $a=\frac{y_2-y_1}{(x_2-x_1)^2}$.

Što se tiče primjene kvadratne funkcije, primjeri su vezani za maksimalnu i minimalnu vrijednost kvadratnih funkcija. U udžbeniku Školske knjige pojavljuju se zadaci iz geometrije u kojima treba izračunati najmanju ili najveću površinu nekog geometrijskog lika, zadaci iz svakodnevnog života kao što su najveća zarada, najmanji troškovi, najkraća udaljenost, maksimalna visina nekog luka itd. U Elementovom udžbeniku zadaci iz primjene kvadratne funkcije su zadaci povezani s fizikom i geometrijom, a manje zadaci iz svakodnevnog života.
Nakon kvadratne funkcije, u udžbeniku Školske knjige nalazi se cjelina "Polinomi, racionalne i iracionalne funkcije" u kojoj je na temelju linearne i kvadratne funkcije dana definicija polinoma. Uvode se bitni pojmovi za polinome, kao što su stupanj i koeficijenti polinoma. Intuitivno slijedi pitanje što dobijemo ukoliko podijelimo dva polinoma, a odgovor je racionalnu funkciju, te što ukoliko se vrijednost varijable x pojavljuje pod korijenom, tada je riječ o iracionalnoj funkciji. Također se i ove funkcije prikazuju grafički, pomoću tablice s funkcijskim vrijednostima i pomoću translacije. Zatim se ukratko analizira domena i slika tih funkcija te pojam bijekcije i inverzne funkcije. Mnoge učenike muči prepoznavanje injekcije, surjekcije i bijekcije, stoga je važno zadati niz zadataka na tu temu. Funkcije za koje se provjerava prepoznavanje bijekcije treba postaviti i riječima, i tablično, i grafički i formulom, kako bismo bili sigurni da su učenici savladali taj pojam. Nakon bijekcije uvodi se inverzna funkcija, gdje učenici često zadatke poput "odredi inverznu funkciju zadane funkcije" shvaćaju šablonski te krenu odmah s postupkom određivanja inverzne funkcije koji im se pokaže, a ne provjere je li ta zadana funkcija uopće bijekcija kako bi mogla imati svoju inverznu funkciju. Iz tog razloga dobro je imati u udžbeniku više zadataka u kojima zadane funkcije nisu bijekcije.
U udžbeniku Školske knjige samo bih izmijenila raspored cjelina, da kada se uvodi bijekcija, da se razmatra odmah i grafički, pa nakon toga kada se uvodi inverzna funkcija, da se i ona odmah razmatra grafički. U udžbeniku za program od 5-6 sati tjedno, dodatno se u 2. razredu uči i kompozicija funkcija.

3.1.3 Treći razred srednje škole

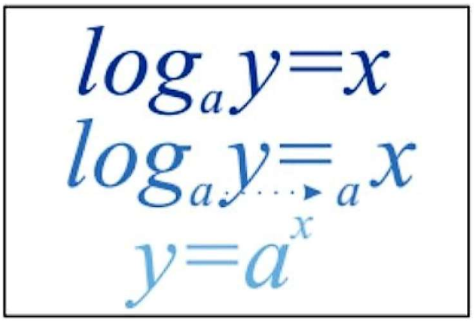
U trećem razredu učenici se upoznaju s eksponencijalnom, logaritamskom i trigonometrijskim funkcijama prema Kurikulumu, iako se eksponencijalne i logaritamske funkcije nalaze u udžbeniku nakladnika Element za drugi razred srednje škole. U udžbeniku nakladnika Školska knjiga za drugi razred srednje škole to nije slučaj.
Prije eksponencijalne funkcije potrebno je podsjetiti učenike računati s potencijama ovisno o skupu brojeva kojem pripadaju baza i eksponent. U udžbeniku Elementa ipak eksponencijalna funkcija uvodi se pomoću primjera iz života u kojem se radi o godišnjoj promjeni vrijednosti rabljenog automobila za 25%. Računajući cijenu nakon godinu, dvije i tri godine, dolazi se do formule pomoću koje se može računati cijena automobila nakon n godina. Prikazujući podatke u koordinatnom sustavu dolazi se do grafa kojeg učenici još nisu vidjeli, a to je graf eksponencijalne funkcije.
Pomoću grafa funkcije, provedena je analiza eksponencijalne funkcije: da je graf iznad osi x te da su grafovi funkcija $f(x) = 2^x$ i $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ simetrični obzirom na os y. U oba udžbenika objašnjeno je zašto se zahtijeva da baza potencije nije negativan broj, niti 0, niti 1, ali učenici to često zanemare, stoga bih ja to u udžbeniku istakla i uokvirila te ponovila više zadataka u kojima bi to bio trik.
Svojstva eksponencijalne funkcije proučavaju se uspoređujući grafove različitih eksponencijalnih funkcija, što mislim da je odličan način jer sve što je zorno prikazano učenicima lakše je za razumjeti. Analizira se domena, kodomena, slika funkcije, ima li funkcija nultočke, asimptote, kada je funkcija rastuća, a kada padajuća te injektivnost, surjektivnost i bijek-

tivnost.
Nakon svojstava promatra se vrlo važna funkcija za primjenu, a to je eksponencijalna funkcija s bazom potencije e.
Za provjeru jesu li učenici usvojili svojstva i graf eksponencijalne funkcije, može se zadati sljedeći zadatak iz udžbenika Elementa:



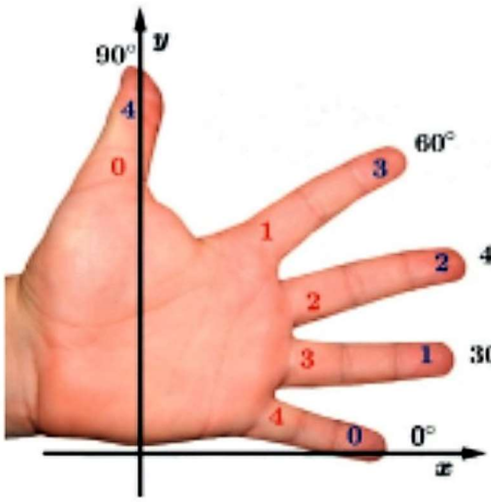
Slika 8: Primjer zadatka iz udžbenika Elementa

U udžbeniku Školske knjige nalazi se još i crtanje grafa eksponencijalne funkcije oblika $f(x) = a^x + c$ i $f(x) = a^{x+c}$ translacijom grafa funkcije $f(x) = a^x$. Također, prikazano je i crtanje grafa eksponencijalne funkcije oblika $f(x) = b \cdot a^x$ suženjem ili proširenjem grafa funkcije $f(x) = a^x$ po osi y ovisno o broju b.
Nakon eksponencijalne funkcije radi se logaritamska funkcija, prije čega se učenici moraju upoznati s pojmom logaritma, a upoznaju ga kao eksponent kojim treba potencirati bazu a da bi se dobio realni broj x.
U udžbeniku Školske knjige, na sličan način kao i eksponencijalna funkcija, obrađuje se i logaritamska. Najprije se crtaju grafovi različitih logaritamskih i eksponencijalnih funkcija kako bi se izveo zaključak da su grafovi tih funkcija simetrični obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta te da je logaritamska funkcija inverzna funkcija eksponencijalnoj.
Dobra ideja u udžbeniku Elementa je što su iskoristili uvodni primjer za eksponencijalnu funkciju kao uvod u logaritamsku. Naime, eskponencijalna funkcija dala je odgovor na pitanje kolika je cijena rabljenog automobila u ovisnosti o godinama njegove starosti, a sada je postavljeno pitanje obrnuto: koliko je godina star automobil, ako mu je poznata cijena. To pitanje dovodi do problema koji se rješava pomoću logaritma. Veza između eksponencijalne i logaritamske funkcije dana je u ovom udžbeniku pomoću jednog učinkovitog pravila za pamćenje, mnemotehničkog pravila, a ono izgleda ovako:



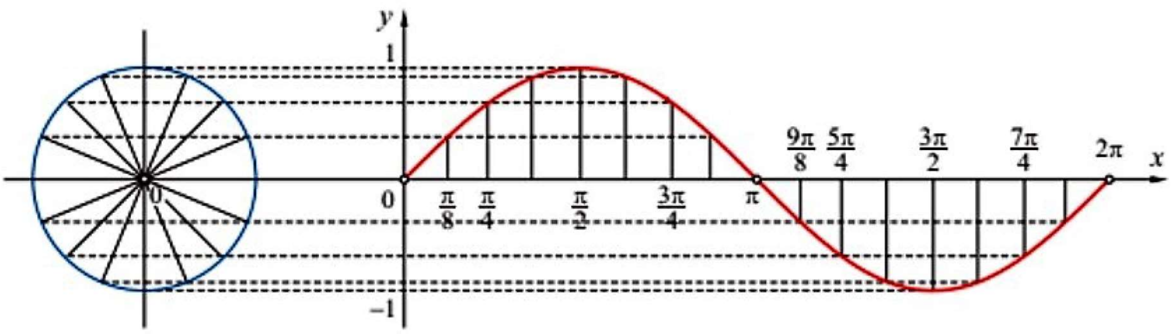
Slika 9: Mnemotehničko pravilo za pamćenje veze eksponencijalne i logaritamske funkcije

Ista ili slična svojstva logaritamske funkcije slijede iz svojstva da su eksponencijalna i logaritamska funkcija po istoj bazi a par inverznih funkcija, pa se na taj način i uvode, uspoređujući s eksponencijalnom funkcijom.
Također, analizira se domena, kodomena, slika funkcije, ima li funkcija nultočke, asimptote, kada je funkcija rastuća, a kada padajuća te injektivnost, surjektivnost i bijektivnost.
U udžbeniku Školske knjige nalazi se i analiza crtanja grafova funkcija oblika $f(x) = \log_a x + c$ i $f(x) = \log_a(x + c)$ translacijom grafa funkcije $f(x) = \log_a x$ za $|c|$ po y ili x osi.
Nakon što su učenici naučili o eksponencijalnoj i logaritamskoj funkciji, upoznaju se i s njihovom primjenom. Najviše zadataka u oba udžbenika je iz primjene u financijama, poduzetništvu, geografiji, biologiji, fizici i kemiji. Dani su primjeri za izračunavanje kamata, porasta bakterija, virusa, broja stanovništva koji se računaju pomoću eksponencijalne funkcije. Za logaritamsku funkciju prikazani su primjeri o računanju pH-vrijednosti, glasnoće zvuka i jačine potresa. Veliku pozornost primjeni daju oba udžbenika, čime se učenici mogu zainteresirati za nastavni sadržaj vidjevši kako se te funkcije kriju u mnogim životnim situacijama.
U trećem razredu također dobar dio sati posvećen je trigonometrijskim funkcijama. Nakon što se učenici upoznaju s brojevnom kružnicom, dolaze do definiranja trigonometrijskih funkcija. Ono što često učenicima predstavlja problem jeste kako zapamtiti vrijdnosti trigonometrijskih funkcija, a u udžbeniku se nalazi mnemotehničko pravilo koje u tome može pomoći:



Slika 10: Mnemotehničko pravilo za pamćenje vrijedosti trigonometrijskih funkcija

Potrebno je zapamtiti samo formule $\sin x = \frac{\sqrt{N}}{2}$ i $\cos x = \frac{\sqrt{N}}{2}$ te da plave brojeve uvrštavamo u formulu za sinus, crvene u formulu za kosinus, a x je pripadajuća vrijednost kuta iznad prsta.
Kao i kod eksponencijalne i logaritamske funkcije, analizira se domena, kodomena, parnost i neparnost pomoću brojevne kružnice i periodičnost. Nakon što se izvedu osnovni trigonometrijski identiteti koji će biti potrebni za rješavanje zadataka, proučava se graf trigonometrijskih funkcija. U udžbeniku Elementa koristi se brojevna kružnica čiji je luk podijeljen na jednake dijelove te je grafičkim postupkom određena vrijednost sinusa na segmentu $[0, 2\pi]$.



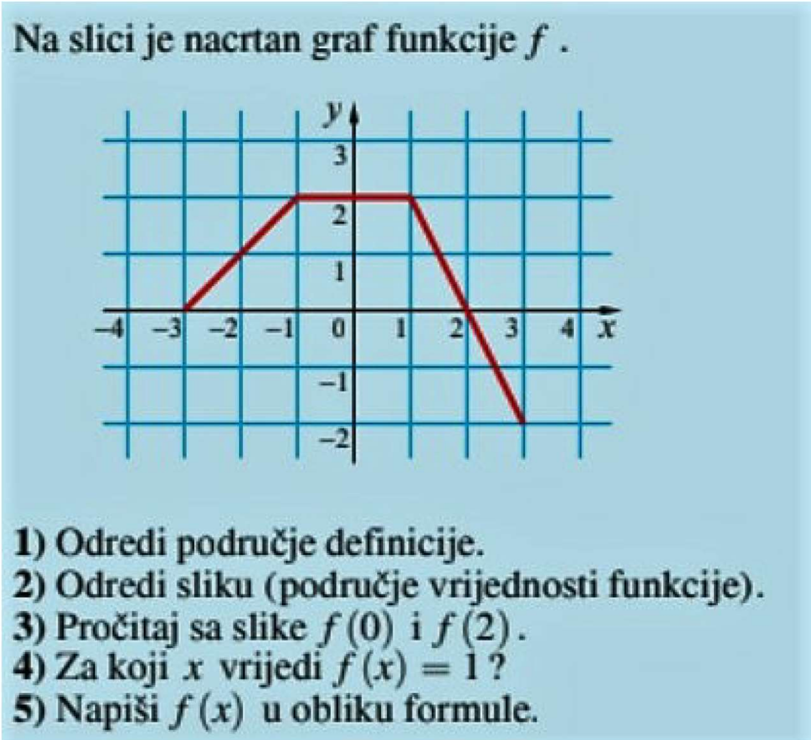
Slika 11: Sinusoida u udžbeniku Elementa

Bolji način crtanja, u kojem se koristi više svojstava nalazi se u udžbeniku Školske knjige. Najprije se na isti način kao u Elementovom udžbeniku nacrtaju vrijednosti u prvom kvadrantu, zatim se koristi činjenica da je pravac $x = \frac{\pi}{2}$ os simetrije dijela grafa sinusoide na segmentu $[0, \pi]$. Nakon toga da bi proširili graf na segment $[-\pi, \pi]$ koristi se svojstvo da je sinus neparna funkcija, pa je sinusoida simetrična obzirom na ishodište koordinatnog sustava. I na kraju, na osnovu periodičnosti funkcije translatiramo graf po osi x ulijevo i udesno za 2π. Nakon što je prikazana funkcija grafički, uočavaju se njena svojstva iz grafa: nultočke, maksimalne i minimalne vrijednosti, periodičnost i tijek funkcije.
U oba udžbenika se kosinusoida crta pomoću formule $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, dakle, translacijom sinusoide po osi x za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo, te se također očitavaju s grafa svojstva. Nakon toga se postupno, kroz primjere, dolazi do crtanja grafa funkcije $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$. Za zaključivanje kako koeficijenti A, B, C, D utječu na sinusoidu (analogno i kosinusoidu), može se iskoristiti interaktivnost Geogebre i pripremljeni apleti, kao što je ovaj na poveznici: `https://www.geogebra.org/m/tbzWwCAa`.
Na isti način, primjenjujući svojstva tangensa i kotangensa crtaju se i njihovi grafovi. Na samom kraju cjeline radi se i primjena trigonometrije, koja se nalazi u fizici, arhitekturi, medicini, kemiji, astronomiji itd. Zbog svoje periodičnosti, trigonometrijske funkcije najčešće se koriste u pojavama u prirodi koje se periodično mijenjaju, a to su temperatura zraka, plima i oseka i sl.

3.1.4 Četvrti razred srednje škole

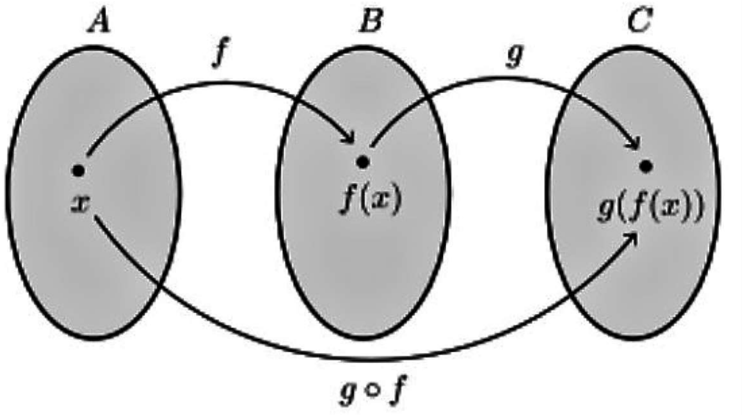
U četvrtom razredu srednje škole detaljnije se proučava pojam funkcije i svojstva te što se događa s graničnim vrijednostima funkcije u nekoj točki. Najprije se raznim primjerima želi osvijestiti učenike da funkcije ne moraju uvijek biti izražene brojevima već se mogu promatrati i druga pridruživanja, primjerice svakom geometrijskom liku može se pridružiti broj vrhova koje ima. Nakon toga proučava se detaljnije graf funkcije gdje se naglašava da graf može biti i samo skup točaka ravnine, ali i da ne predstavlja svaka krivulja graf funkcije

i da im u određivanju je li krivulja graf funkcije pomaže vertikalni test.
Iako su učenici upoznati s pojmovima domena i slika funkcije, u četvrtom razredu detaljnije se analiziraju i računski određuju. U ovom dijelu promatranih udžbenika više je zadataka gdje su funkcije zadane analitički, pa se učenici zbune i ne znaju analizirati grafički prikazane funkcije. Stoga bi bilo dobro zadati još više zadataka poput sljedećeg:



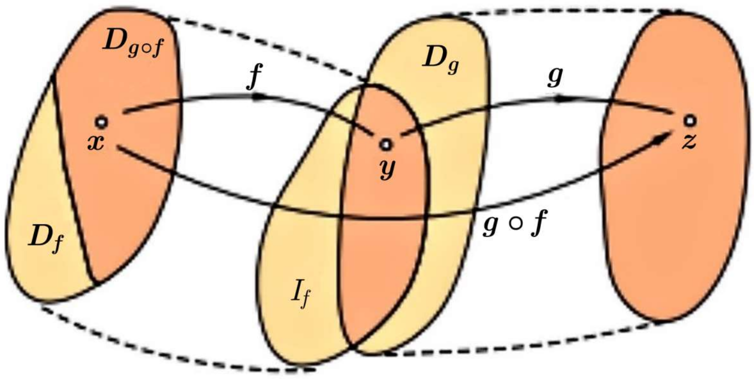
Slika 12: Primjer zadatka iz udžbenika Elementa

Parnost i periodičnost učenici su susreli kod eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijskih funkcija, ali u četvrtom razredu ispituju periodičnost, parnost i neparnost svih funkcija te razmišljaju o parnosti zbroja ili umnoška dviju parnih funkcija.
Također, učenici su promatrali i je li funkcija rastuća ili padajuća iz grafa funkcije, ali s pojmom monotonost se nisu susreli, a taj pojam odnosi se na rast i pad funkcije. Kod definiranja rastuće i padajuće funkcije bitno je naglasiti da funkcija može biti i konstantna, što je slučaj u oba udžbenika.
U udžbeniku Elementa najmanje pozornosti posvećeno je omeđenosti funkcije. Nalazi se nekoliko primjera gdje se grafički prikazuje funkcija te iz grafa promatra je li omeđena, dok u udžbeniku Školske knjige prikazano je i računski kako odrediti je li funkcija omeđena.
U udžbeniku Školske knjige još se nalazi i kratak dio o asimptotama gdje se asimptota definira te određuje iz grafa funkcije.
Nastavni sadržaj koji učenici često ne razumiju je kompozicija funkcije. Ono što im može pomoći u razumijevanju je da se prikaže zorno što se i kako preslikava. Često se može vidjeti sljedeći prikaz kompozicije funkcija f i g:



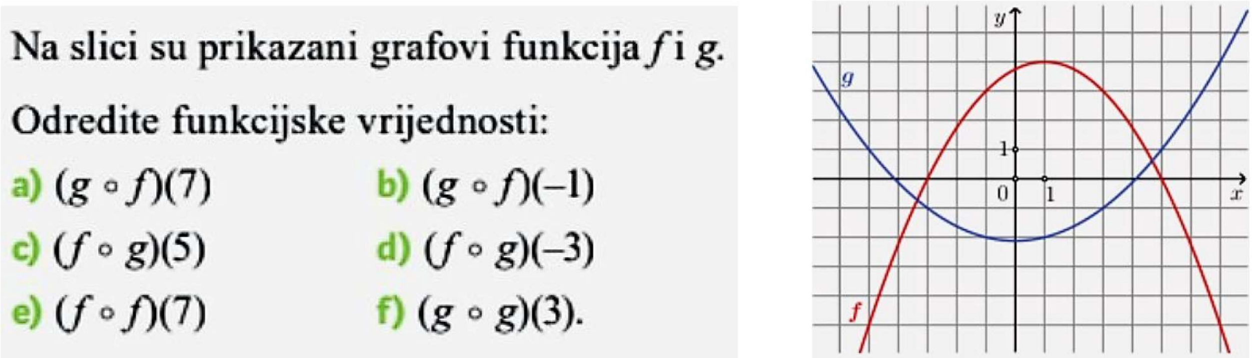
Slika 13: Kompozicija funkcija f i g u udžbeniku Školske knjige

Istaknuto je da se domena funkcije g treba podudarati s kodomenom funkcije f, međutim da bi bila definirana kompozicija funkcija f i g dovoljno je da se ta dva skupa djelomično podudaraju, pa je po mom mišljenju bolji prikaz u Elementovom udžbeniku:



Slika 14: Kompozicija funkcija f i g u udžbeniku Elementa

U tom slučaju domena kompozicije je podskup domene funkcije f jer sadrži samo one elemente za koje je $f(x) \in D_g$. U udžbeniku Elementa primjerima je pokazano da je kompozicija funkcija asocijativna, te da nije komutativna, ali se ne nalaze primjeri kako rastaviti funkciju f na dvije funkcije tako da one slaganjem (kompozicijom) daju funkciju f. Takvi zadaci učenicima predstavljaju veći problem nego odrediti kompoziciju. U udžbeniku Školske knjige nalazi se dovoljan broj takvih zadataka i naglašeno je da to rastavljanje nije jedinstveno. Također, u udžbeniku Školske knjige u zadacima povezana je kompozicija s grafom, a mislim da su ti zadaci ključni za razumijevanje što predstavlja taj kružić kod kompozicije. U Elementovom udžbeniku isto treba biti takvih zadataka, poput ovog:


Na slici su prikazani grafovi funkcija f i g.

Odredite funkcijske vrijednosti:

a) $(g \circ f)(7)$ b) $(g \circ f)(-1)$

c) $(f \circ g)(5)$ d) $(f \circ g)(-3)$

e) $(f \circ f)(7)$ f) $(g \circ g)(3)$.

Slika 15: Primjer zadatka iz udžbenika Školske knjige

Inverzna funkcija u četvrtom razredu se određuje računski, ali za to je dan postupak, pa učenicima takvi zadaci ne predstavljaju problem.
Limes funkcije uvodi se u udžbeniku Elementa oslanjajući se na limes niza koji se radi u poglavlju prije, dok se u udžbeniku Školske knjige uvodi pomoću priče o funkcijama koje imaju prekid i vrijednosti funkcije "blizu" te točke prekida. Uzima se jedan primjer funkcije, uočava se da ta funkcija nije definirana za $x = 2$, stoga se promatraju vrijednosti funkcije za brojeve koji su "blizu" broju 2 i tablično i grafički, te se zaključuje da što je x bliži broju 2, to je vrijednost funkcije bliža broju 4. Zatim se prikazuju na nekoliko primjera grafički mogućnosti za limes funkcije: da limes funkcije može biti jednak beskonačno ili da ne postoji. Nakon definicije limesa funkcije dana su i svojstva koja se mogu koristiti za računanje limesa složenijih funkcija i niz zadataka koji provjeravaju usvojenost određivanja limesa funkcije kada varijabla teži nekom realnom broju. Isto tako može se promatrati i limes funkcije kada varijabla teži u beskonačnost, pa se u udžbenicima nalaze i takvi primjeri i zadaci.
Nakon toga, kratko se proučava neprekidnost funkcije, a intuitivno je jasno da ako se graf funkcije može nacrtati jednim potezom olovke, onda je funkcija neprekidna. U oba udžbenika na jednom mjestu nalaze se sve tri mogućnosti koje se spominju u srednjoj školi, a to je da funkcija nema prekid, da ima prekid, ali se funkcijska vrijednost i limes razlikuju te da ima prekid, ali limes slijeva i zdesna nisu jednaki. Kako je učenicima pojava limesa inače komplicirana, trebalo bi se više vremena posvetiti grafičkom prikazivanju i tražiti od učenika objašnjenje na kraju zadatka kad odrede limes što to znači za zadanu funkciju.
U udžbeniku Školske knjige za program 4 sata tjedno, nalazi se i cjelina Polinomi, u kojoj se učenici upoznaju s osnovnim pojmovima, jednakosti polinoma, zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem polinoma.
Pojam derivacije funkcije uvodi se pomoću motivacijskog zadatka koji se sastoji od s-t grafa i pitanja poput "koji dio grafa prikazuje da se vozilo kretalo najvećom brzinom, kolika je prosječna brzina" itd. Budući da se derivacija funkcije definira pomoću limesa kvocijenta prirasta funkcije i prirasta argumenta, najprije se analizira prirast funkcije i prirast argumenta i prikazuje što se događa grafički. Kako nije svim učenicima jednostavno zamisliti što se događa ako neka točka klizi po grafu, što je ovdje bitno da bi mogli zaključiti da sekanta prelazi u tangentu, može se poslužiti Geogebrinim apletom poput ovog na poveznici: `https://www.geogebra.org/m/GgRfMeM8`. U udžbeniku Školske knjige dano je nekoliko primjera određivanja derivacije funkcije prema definiciji, ali se nužan uvjet za postojanje derivacije nalazi umetnut među dužim tekstom, a bilo bi ga dobro istaknuti i uokviriti. U Elementovom udžbeniku tih primjera nema, ali je istaknut i naglašen nužan uvjet za postojanje derivacije. Udžbenik Školske knjige sadrži primjere kojima su dani slučajevi kad funkcija nema derivaciju u točki: kad nije definirana u toj točki, kad ima šiljak u toj točki,

ali se ne spominje da nema derivaciju ni kada ima vertikalnu tangentu u toj točki, što se u udžbeniku Elementa nalazi, pri tom i ilustrirano:

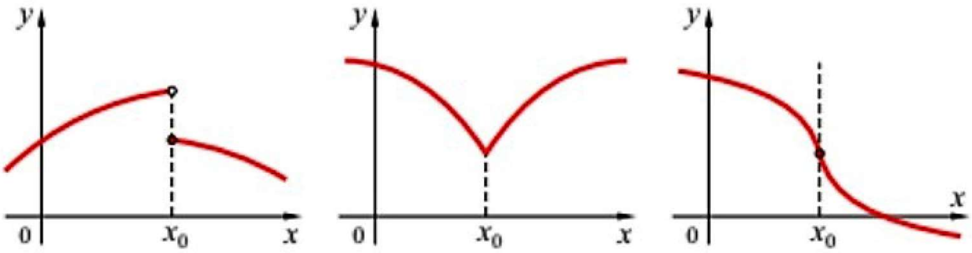
Izdvojimo sljedeće tri situacije u kojima funkcija nema derivaciju u točki x_0:

1) **Funkcija je prekinuta u x_0.**

2) **Funkcija ima šiljak u x_0.**

3) **Funkcija ima vertikalnu tangentu u točki x_0.**

Sljedeća slika ilustrira te situacije:



Slika 16: Ilustracija iz udžbenika Elementa

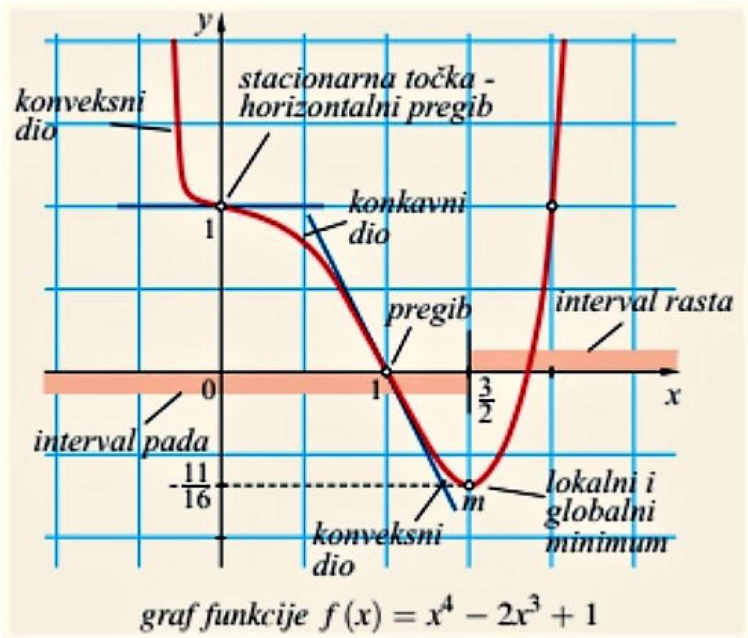
Nakon toga, izvodi se derivacija konstante, identitete, kvadratne funkcije i trigonometrijskih funkcija prema definiciji, pa kako funkcije postaju sve složenije, javlja se potreba za pravilima deriviranja. Pravila se odnose na derivaciju umnoška konstante i funkcije, zbroja i razlike dviju funkcija, umnoška i kvocijenta dviju funkcija. U četvrtom razredu srednje škole također se rade i derivacije višeg reda, a u udžbeniku Školske knjige za program 4 sata tjedno rade se i derivacije složene funkcije pomoću ulančanog deriviranja. Učenicima je često teško prepoznati kada je funkcija složena zbog nedovoljno shvaćene kompozicije funkcija. Nakon toga, izvodi se derivacija logaritamske i eksponencijalne funkcije, a kako su one međusobno inverzne funkcije, dobro je mjesto za izvesti opći izraz za određivanje derivacije inverzne funkcije.

U udžbeniku Školske knjige nalazi se i derivacija implicitno zadane funkcije, koja se u udžbeniku Elementa ne spominje. Tangenta i normala na graf funkcije, kao i kut između krivulja, nalaze se u oba udžbenika, s tim da je u udžbeniku Školske knjige na puno detaljniji način objašnjeno zašto njihove jednadžbe glase baš tako i u primjerima za određivanje jednadžbi tangente i normale su nacrtani grafovi zadanih funkcija.

Za rast i pad funkcije, u udžbeniku Elementa uopće nema uvoda niti objašnjenja zašto rast i pad funkcije možemo povezati s derivacijom funkcije nego je samo dano pravilo koje vrijedi te postupak traženja stacionarnih točaka i intervala monotonosti. Stoga je bolji i jasniji pristup u udžbeniku Školske knjige.

Učenici se ranije susreću s pojmom maksimum i minimum, ali u četvrtom razredu produbljuje se znanje, nazivaju se jednom riječju ekstremi te se oni određuju pomoću derivacija, a najpregledniji način za prikazivanje cijelog tijeka funkcije i ekstrema je tablicom tijeka funkcije. U udžbeniku Školske knjige riješeno je puno više primjera, i to detaljnije i grafički prikazano. Do toga trenutka učenici su trebali naučiti odrediti domenu funkcije, nultočke, sjecišta s osi y, asimptote, parnost, periodičnost, intervale monotonosti i ekstreme. Još se u udžbenicima nalazi pojam zakrivljenost funkcije odnosno konveksnost i konkavnost koji se prvobitno definira pomoću tangente koja je u svakoj točki ispod odnosno iznad grafa funkcije. Zatim se daje definicija pomoću druge derivacije funkcije i niz primjera određivanja zakrivljenosti i točaka infleksije, a potom i zadaci ispitivanja tijeka funkcije i crtanja grafa.

Dobra stvar je u udžbeniku Elementa što je na kraju primjera na grafičkom prikazu funkcije označen svaki element:



Slika 17: Primjer iz udžbenika Elementa

U nekadašnjim udžbenicima više je naglasak bio na samom deriviranju i zadacima poput "deriviraj funkciju $f(x) = ...$", dok je u današnjim udžbenicima dosta zadataka iz primjene i povezivanja derivacija s grafičkim prikazom, kao što je sljedeći zadatak:


Na slici su prikazani grafovi derivacija funkcija f' i f'' iste funkcije f. Promatrajući sliku odgovorite na pitanja i obrazložite odgovore.

a) Na kojem je intervalu funkcija f rastuća?

b) Postoji li interval na kojem je funkcija f padajuća?

c) Koje su apscise stacionarnih točaka funkcije f?

d) Ima li funkcija f ekstreme i koje su vrste?

e) Ako točka $T(0, 0)$ leži na grafu funkcije f, odredite jednadžbu tangente u toj točki.

f) Je li funkcija f polinom? Ako jest, kojega stupnja?

Slika 18: Primjer zadatka iz udžbenika Školske knjige

Zadnja cjelina koja se odnosi na funkcije jesu integrali koji se ne rade po programu 3 sata tjedno, u programu 4 sata tjedno su izborni sadržaj, a u programu od 5 sati tjedno i više redoviti sadržaj. Iz tog razloga, i pristup prema integralima je drugačiji. Puno intuitivniji i razumljiviji način je u udžbenicima za 3 i 4 sata tjedno jer priča počinje o tome zašto se javila potreba za pojavom integrala te je vizualno prikazano računanje površine ispod grafa funkcije do osi x. Nakon geometrijskog značenja određenog integrala dana su njegova svojstva i definicija primitivne funkcije te niz primjera određivanja primitivne funkcije. Zatim

se neodređeni integral definira kao skup svih primitivnih funkcija dane funkcije f na intervalu (a, b), pa je dana tablica neodređenih integrala. Učenici se također upoznaju i s Newton-Leibnitzovom formulom koja je važna poveznica između određenog i neodređenog integrala, te je onda i primjenjuju. Što se tiče primjene određenog integrala, zadaci se odnose na računanje površine kada je poznata funkcija čiji je graf omeđuje.
U udžbenicima za program 5 sati tjedno ili više, dane su i metode koje se primjenjuju pri integriranju, a to su: metoda supstitucije, metoda parcijalne integracije i metoda rastava na parcijalne razlomke.
U odnosu na udžbenike za program 3-4 sata tjedno, puno više je zadataka i složenijih funkcija koje se trebaju integrirati, a iz primjene se ne računa samo površina nego i obujam rotacijskih tijela.
U konačnici, mislim da je u udžbenicima Školske knjige za sve razrede prikazano više ideja za rješavanje zadataka, da je bolji odnosno učenicima razumljiviji pristup novom sadržaju, da ima više riješenih primjera i zadataka za vježbu te da je veći fokus na primjeni nastavnog sadržaja.

4 Državna matura

Državna matura je obavezni završni pismeni ispit koji učenici polažu po završetku svog srednjoškolskog obrazovanja. Provodi se od školske godine 2009./2010., a obavezu polaganja državne mature imaju učenici gimnazije, dok učenici srednjih strukovnih škola polažu samo ako planiraju nastaviti svoje obrazovanje na nekom od visokih učilišta. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja provodi ispite u suradnji sa školama i drugim javnim ustanovama koje su uključene u provedbu ispita državne mature. Ispiti državne mature provode se u cijeloj Hrvatskoj u isto vrijeme, s istim ispitnim materijalima i na isti način za sve pristupnike. Iz tog razloga, rezultati ispita državne mature su međusobno usporedivi i odabir pri upisu na visoka učilišta je transparentan i pravedan. Državna matura sastoji se od obaveznog dijela ispita i izbornog. Obavezni ispiti su iz matematike, hrvatskog jezika te stranog jezika, a izborne predmete državne mature biraju učenici. U jednome roku učenici mogu prijaviti najviše šest izbornih predmeta. Ispiti iz obaveznih predmeta mogu se polagati na višoj (A) ili osnovnoj (B) razini [16]. U nastavku ovoga rada bit će analizirana pojava funkcija na osnovnoj i na višoj razini ispita državne mature iz matematike.

4.1 Funkcije na osnovnoj razini državne mature

Odgojno-obrazovni ishodi osnovne razine ispita školske godine 2021./2022. iz područja "Algebra i funkcije" su: povezati različite prikaze linearne funkcije, primijeniti linearnu funkciju pri rješavanju problema, primijeniti kvadratnu funkciju te analizirati svojstva funkcija. Dakle, provjerava se osnovno znanje iz funkcija naučeno uglavnom još u prvom razredu srednje škole. Školske godine 2021./2022. na ispitu se nalazilo 20 zadataka višestrukog izbora koji donose po 1 bod te 10 zadataka kratkog odgovora koji donose po 2 boda. Ukupno je bilo moguće ostvariti 40 bodova, pri čemu je 10 bodova nužno za polaganje ispita. Učenici su iz područja "Algebra i funkcije" mogli ostvariti 40% od ukupnog broja bodova, što je 16 bodova. Zadaci iz područja funkcija glasili su:

17. Funkcijom $h(t) = 100 - 4t$ procjenjuje se broj sati h potrebnih da se mlijeko ukiseli na temperaturi t izraženoj u °C. Koje je značenje broja 4 u zapisu funkcije h?

A. Ako se temperatura poveća za 1 °C, mlijeko će se ukiseliti 1 sat ranije.
B. Ako se temperatura poveća za 4 °C, mlijeko će se ukiseliti 1 sat ranije.
C. Ako se temperatura poveća za 1 °C, mlijeko će se ukiseliti 4 sata ranije.
D. Ako se temperatura poveća za 4 °C, mlijeko će se ukiseliti 4 sata ranije.

(1 bod)

18. Kolika je vrijednost realnoga parametra k u zapisu funkcije $f(x) = x^2 - 2x + k$ kojoj je slika interval $[5, +\infty\rangle$?

A. $k = 4$
B. $k = 5$
C. $k = 6$
D. $k = 7$

(1 bod)

29.1. Tablica prikazuje nekoliko točaka grafa funkcije $f(x) = kx + l$.

x	y
-2	5
0	1
2	-3

Kako glasi funkcija f?

Odgovor: $f(x) =$ ________________________

(1 bod)

29.2. Zadana je funkcija $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-7}{x^2+5}}$. Odredite domenu funkcije f.

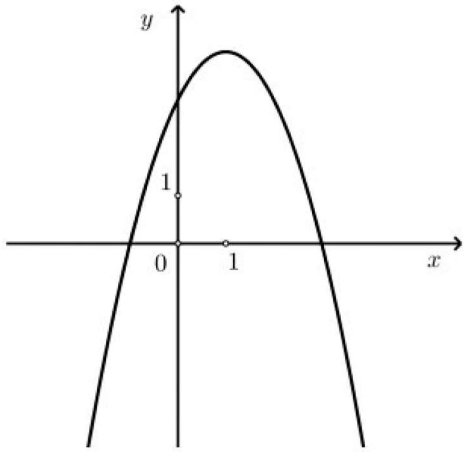
Odgovor: ________________________

(1 bod)

Slika 19: Državna matura 2021./2022.

Budući da još nema statističke analize ovog ispita, analizirat ćemo riješenost zadataka na osnovnoj razini u ljetnome roku u školskoj godini 2020./2021.
Odgojno-obrazovni ishodi osnovne razine ispita školske godine 2020./2021. iz područja "Funkcije" su: izračunati funkcijske vrijednosti, prikazati funkcije tablično i grafički, interpretirati graf funkcije, odrediti nultočke funkcije, odrediti sjecište grafa s koordinatnim osima, iz zadanih svojstava, elemenata ili grafa odrediti funkciju, za kvadratnu funkciju interpretirati ulogu vodećeg koeficijenta i diskriminante, odrediti minimum/maksimum funkcije odnosno tjeme parabole te matematički modelirati problemsku situaciju iz drugih obrazovnih područja i iz svakodnevnoga života.
Na ispitu se nalazilo 16 zadataka višestrukog izbora koji donose po 1 bod te 12 zadataka kratkog odgovora koji donose po 2 boda.
Te godine bodovni udio za područje "Funkcije" iznosio je 15% od ukupnog broja bodova, što je 6 bodova, raspoređenih u nekoliko zadataka. Prvi od njih bio je 13. zadatak u kojem su učenici trebali interpretirati ulogu vodećeg i slobodnog koeficijenta:

13. Što od navedenoga vrijedi za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ čiji je graf prikazan na slici?



A. $a < 0,\ c < 0$

B. $a > 0,\ c < 0$

C. $a < 0,\ c > 0$

D. $a > 0,\ c > 0$

Prema izvještaju [1], samo 47% učenika zaokružilo je odgovor C, što je bio točan odgovor. Ovaj zadatak ne zahtijeva nikakvo računanje nego je dovoljno samo poznavati kako izgleda graf kvadratne funkcije obzirom na vodeći koeficijent a i slobodni koeficijent c. Budući da je zadatak višestrukog izbora, ne može se sa sigurnošću tvrditi ni da je ovih 47% učenika znalo interpretirati jer su mogli zaokružiti točan odgovor na sreću.
Idući zadatak provjeravao je znanje iz kvadratnih funkcija:

14. Grafu koje je od navedenih funkcija os simetrije pravac s jednadžbom $x = 4$?

A. $f(x) = (x-2)(x-6)$

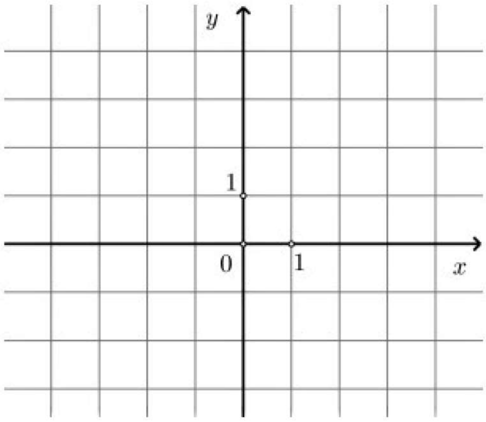
B. $f(x) = (x+2)(x+6)$

C. $f(x) = (x+2)(x-4)$

D. $f(x) = (x-2)(x+4)$

Ovaj zadatak točno je riješilo 36% učenika, a da bi riješili zadatak trebali su znati što je to os simetrije. Zadatak se mogao riješiti na više načina. Ukoliko učenici nisu znali očitati nultočke funkcije iz formule te naći polovište, mogli su za svaku od ponuđenih funkcija nacrtati graf te pravac s jednadžbom $x = 4$ i uočiti kada je to os simetrije. Taj način jeste puno dulji i zahtijeva više vremena, ali vodi do rješenja.
Sljedeći zadatak zahtijevao je od učenika crtanje grafa linearne funkcije u koordinatnom sustavu:

24.2. U zadanome koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $f(x) = -x + 3$.



0
1
bod

Samo 44% učenika uspješno je nacrtalo graf linearne funkcije iako se crtanje grafa funkcije proteže kroz cijelo srednjoškolsko obrazovanje.
Sljedeća dva zadatka odnosila su se na izračunavanje funkcijske vrijednosti uz poznavanje svojstava linearne funkcije i na određivanje funkcije iz zadanih svojstava i elemenata:

25. Riješite zadatke.

25.1. Linearna je funkcija $f(x) = kx - 13.5$ padajuća. Poredajte po veličini od najmanje do najveće $f(-16)$, $f(0)$ i $f(52)$.

Odgovor: ____

0
1
bod

25.2. Serviser elektroničkih uređaja naplaćuje izlazak na teren 60 kn. Svaki sat rada na terenu naplaćuje 150 kn. Napišite formulu $f(x)$ za izračunavanje cijene usluge servisera za rad od x sati.

Odgovor: $f(x) =$ __________________________

0
1
bod

Vjerojatno zbog pojave slova k u formuli linearne funkcije kojeg učenici nisu znali interpretirati, samo 28% učenika točno je riješilo 25.1 zadatak. Da bi točno riješili zadatak, učenici su trebali znati samo da je k negativnog predznaka kada je funkcija padajuća. 25.2 zadatak točno je riješilo 60% učenika, što je i dalje malo, ali od svih navedenih zadataka ovaj zadatak ima najveću riješenost.

4.2 Funkcije na višoj razini državne mature

Odgojno-obrazovni ishodi više razine ispita školske godine 2021./2022 iz područja "Algebra i funkcije", uz odgojno-obrazovne ishode osnovne razine ispita, su: primijeniti eksponencijalnu i logaritamsku funkciju, primijeniti svojstva trigonometrijskih funkcija, primijeniti trigonometrijske funkcije, tumačiti značenje limesa funkcije u točki, primijeniti derivaciju funkcije u problemskim situacijama, povezati derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije.
Na ispitu se nalazilo 24 zadatka višestrukog izbora koji donose po 1 bod, 13 zadataka kratkog odgovora koji ukupno donose 22 boda te 3 zadatka produženog odgovora koji ukupno donose 14 bodova. Ukupno je moguće ostvariti 60 bodova, pri čemu je 15 bodova nužno za polaganje ispita. Iz područja "Algebra i funkcije" moglo se ostvariti 50% od ukupnog broja bodova, pa je time ovo područje i najzastupljenije na ispitu. Zadaci iz područja funkcija glasili su:

6. Funkcijom $h(t)=100-4t$ procjenjuje se broj sati h potrebnih da se mlijeko ukiseli na temperaturi t izraženoj u °C. Koje je značenje broja 4 u zapisu funkcije h?

A. Ako se temperatura poveća za 1 °C, mlijeko će se ukiseliti 1 sat ranije.
B. Ako se temperatura poveća za 4 °C, mlijeko će se ukiseliti 1 sat ranije.
C. Ako se temperatura poveća za 1 °C, mlijeko će se ukiseliti 4 sata ranije.
D. Ako se temperatura poveća za 4 °C, mlijeko će se ukiseliti 4 sata ranije.

(1 bod)

22. Kolika je vrijednost realnoga parametra k u zapisu funkcije $f(x)=x^2-2x+k$ kojoj je slika interval $[5,+\infty\rangle$?

A. $k=4$
B. $k=5$
C. $k=6$
D. $k=7$

(1 bod)

23. Odredite sve intervale rasta funkcije $f(x)=\dfrac{3x-5}{x+2}$.

A. $\langle-\infty,-2\rangle,\langle-2,+\infty\rangle$
B. $\langle-\infty,2\rangle,\langle2,+\infty\rangle$
C. $\langle2,+\infty\rangle$
D. $\mathbf{R}$

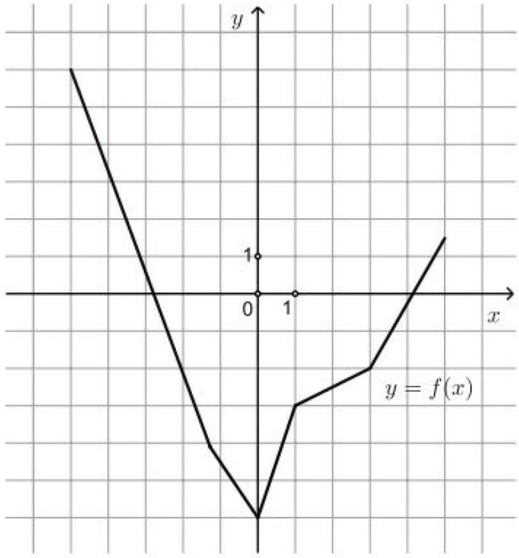
(1 bod)

36.1. Funkcija $P(t)=145\cdot2.72^{-0.092t}$ opisuje puls trkača t minuta nakon utrke, $0\le t\le15$.
Koliki je puls trkača 3 minute nakon utrke?

Odgovor: ___________________________

(1 bod)

36.2. Na slici je prikazan graf funkcije f definirane na $[-5,5]$.



Kolika je vrijednost argumenta a, $a \neq 3$ za koji vrijedi $f(a) = f(3)$?

Odgovor: $a =$ ____________________________

(1 bod)

37.1. Odredite derivaciju funkcije $f(x) = 11\left(x^3 - \sqrt{5}\right)$.

Odgovor: $f'(x) =$ ____________________________

(1 bod)

Slika 20: Državna matura 2021./2022.

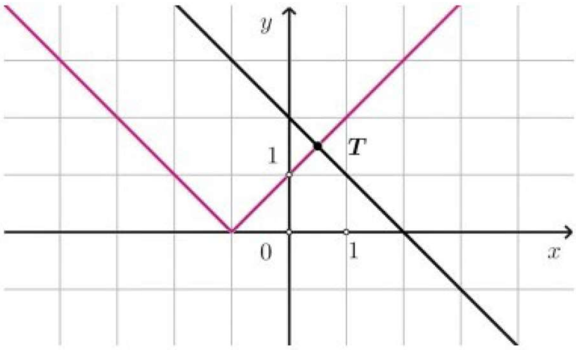
Prva dva zadatka višestrukog izbora ista su kao i kod osnovne razine ispita. Kao i za osnovnu razinu državne mature, tako ćemo i za višu razinu analizirati riješenost zadataka u ljetnome roku u školskoj godini 2020./2021.

Odgojno-obrazovni ishodi više razine ispita školske godine 2020./2021. iz područja "Funkcije", uz odgojno-obrazovne ishode osnovne razine ispita, su: upotrebljavati funkcije zadane tablično, grafički, algebarski i riječima, izvoditi operacije s funkcijama, odrediti domenu i sliku, odrediti i primijeniti rast/pad funkcije, odrediti tijek funkcije, razlikovati parne i neparne funkcije, upotrebljavati osnovne eksponencijalne i logaritamske identitete, odrediti temeljni period i primijeniti svojstvo periodičnosti trigonometrijskih funkcija, derivirati konstantnu funkciju, funkciju potenciranja i trigonometrijske funkcije, derivirati zbroj, razliku, umnožak, kvocijent i kompoziciju funkcija, odrediti tangentu na graf funkcije u točki i upotrebljavati derivaciju funkcije kod ispitivanja tijeka funkcije.

Na ispitu se nalazilo 15 zadataka višestrukog izbora koji donose po 1 bod, 13 zadataka kratkog odgovora koji donose 29 bodova te 2 zadatka produženog odgovora koji donose 16 bodova.

Te godine bodovni udio za područje "Funkcije" iznosio je 30% od ukupnog broja bodova, što je 18 bodova. U nastavku analizirat ćemo zadatke.
U prvom od zadataka vezanih za funkcije, zahtijeva se od učenika da iz grafa odrede funkcije, a riječ je o funkciji apsolutne vrijednosti i linearnoj funkciji što se uči u prvom razredu srednje škole:

11. Sjecište grafova kojega od navedenih parova funkcija jest točka T istaknuta na slici?



A. $f(x)=|x-1|$ i $g(x)=x+2$

B. $f(x)=|x+1|$ i $g(x)=x+2$

C. $f(x)=|x-1|$ i $g(x)=-x+2$

D. $f(x)=|x+1|$ i $g(x)=-x+2$

A. B. C. D.

Prema izvještaju [1], 69% učenika zaokružilo je odgovor pod D, što je bio točan odgovor. Možda je učenike koji nisu točno odgovorili zbunio način na koji je zadatak postavljen i podatak o točki T, što u suštini za rješavanje zadatka ne igra ulogu.
U sljedećem zadatku provjerava se usvojenost ishoda deriviranja trigonometrijske funkcije i izračunavanja funkcijske vrijednosti:

12. Zadana je funkcija $f(x)=\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$. Koliko je $f'(0)$?

A. $\frac{5}{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 4

D. 20

A. B. C. D.

Ovaj zadatak točno je riješilo samo 38% učenika. Problem je možda bio prepoznati da je u pitanju složeno deriviranje.
Sljedeći zadatak bio je isti kao i na ispitu osnovne razine:

13. Grafu koje je od navedenih funkcija os simetrije pravac s jednadžbom $x = 4$?

A. $f(x) = (x-2)(x-6)$
B. $f(x) = (x+2)(x+6)$
C. $f(x) = (x+2)(x-4)$
D. $f(x) = (x-2)(x+4)$

A.
B.
C.
D.

Iako vrlo lagan, ovaj zadatak točno je riješilo samo 59% pristupnika mature više razine. 24.1. zadatak kratkog odgovora od učenika je zahtijevao da napišu domenu zadane funkcije, a 24.2. zadatak da napišu sliku zadane funkcije:

24. Riješite zadatke.

24.1. Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - 5}$.

Odgovor: ________________________

0
1
bod

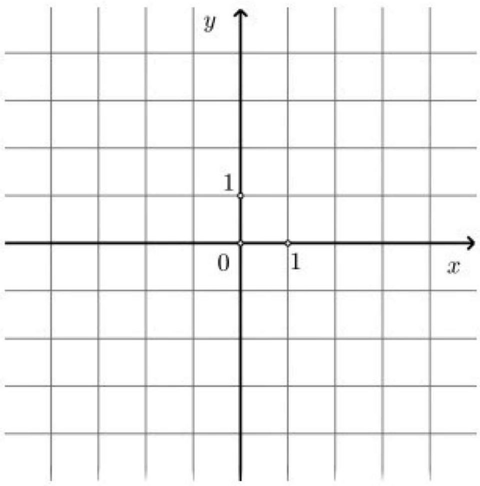
24.2. Odredite sliku (skup svih vrijednosti) funkcije $f(x) = 0.93^x + 6.5$.

Odgovor: ________________________

0
1
bod

24.1. zadatak točno je riješilo 66% učenika, a 13% njih nije ni pokušalo riješiti zadatak, iako se trebao postaviti samo jedan uvjet da je potkorijenska veličina veća ili jednaka 0. Zadatak 24.2 točno je riješilo samo 21% učenika.
Pristupnici mature više razine imali su, za provjeru ishoda prikazivanja funkcije grafički, nacrtati graf kvadratne funkcije:

25.3. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 - 4x + 3$.



0
1
bod

70% učenika znalo je nacrtati graf, dok 8% njih nije ni pokušalo.
U sljedećem zadatku učenici su trebali napisati temeljni period zadane funkcije:

26. Riješite zadatke.

26.1. Odredite temeljni period funkcije $f(x)=-\sin\left(x+\frac{7\pi}{4}\right)$.

Odgovor: ______________________

0	
1	
bod	

Ovaj zadatak uspješno je riješilo 47% učenika.
Sljedeći zadatak isti je kao i na ispitu osnovne razine:

26.3. Linearna je funkcija $f(x)=kx-13.5$ padajuća. Poredajte po veličini od najmanje do najveće $f(-16)$, $f(0)$ i $f(52)$.

Odgovor: ______________________

0	
1	
bod	

Za razliku od pristupnika mature niže razine, ovdje je zadatak točno riješilo 63% učenika.
Jedan zadatak otvorenog tipa odnosio se na funkcije, a glasio je:

29.1. Odredite koordinate dirališta tangenata s koeficijentom smjera -5 na graf funkcije $f(x)=x^3+6x^2-5x+2$.

0	
1	
2	

0 bodova ostvarilo je 31% učenika, 1 bod ostvarilo je 11% učenika, 2 boda 23% učenika, dok njih 35% nije ništa napisalo.

5 Motivacija

Važan, ali i izazovan, dio nastave jest motivacija. Nastavnici nemaju zadatak samo prenijeti znanje učenicima, nego im i pobuditi znatiželju prema nekoj temi kako bi oni i sami dodatno istraživali. Često pitanje je kako motivirati učenike kada većini matematika nije omiljeni predmet. Prema [12], neki od načina su:

- učenje kroz igru,
- povezivanje matematike sa stvarnim životom,
- povezivanje matematike s drugim nastavnim predmetima,
- upotreba tehnologije.

5.1 Učenje kroz igru

Kako je Einstein rekao "igra je je najviši oblik istraživanja", stoga je igru poželjno uključiti u nastavu. Kroz igru učenici također razvijaju motoriku, emocionalne, kognitivne i govorne vještine, kao i socijalne odnose. Jedan primjer igre je nakon uvođenja pojma funkcije u prvom razredu srednje škole, podijelimo učenike u parove. Svaki par ima zadatak osmisliti jednu relaciju koja jeste funkcija i jednu koja nije te relacije zapisati slikovito (primjerice pomoću dijagrama). Nakon što svi parovi osmisle svoje primjere, prvi par predstavlja jednu svoju relaciju drugom paru s pitanjem je li ta relacija funkcija ili nije. Parovi skupljaju bodove ako su osmislili točne relacije koje jesu i koje nisu funkcije te ukoliko su točno odgovorili na pitanje. Pobjednički par bi trebalo nagraditi. Ova igra trebala bi pridonijeti boljem razumijevanju funkcija jer učenici sami trebaju osmisliti primjer relacije i koja nije i koja jeste funkcija, čut će i ostale primjere te diskutirati s prijateljima o tome i argumentirati zašto misle da nešto jeste ili nije funkcija. Budući da rade u paru, poticat će se i suradnja, kao i matematička komunikacija.

5.2 Povezivanje matematike sa stvarnim životom

Često se govori da je matematika svuda oko nas, no učenici se svejedno pitaju zašto moraju učiti matematiku. To je jedan od glavnih razloga zbog kojeg bi nastavne sadržaje nastavnik trebao uvoditi motivacijskim zadatkom iz stvarnoga života.
U nastavku je naveden primjer zadatka iz svakodnevnog života, preuzet s [17].
"Ivan je za rođendan dobio 300 kn što mu nije dovoljno da kupi novi mobitel. Zato je odlučio uštedjeti 75 kn mjesečno. Iskažite ovisnost sume novca o broju mjeseci koje štedi. Izračunajte koliko će novaca imati za šest mjeseci. Izračunajte koliko će dugo morati štedjeti ako mu je za kupnju mobitela potrebno 1200 kn."
Zadatak iz područja arhitekture [18] koji se može zadati učenicima u srednjoj školi nakon obrade kvadratne funkcije glasi: "Odredite jednadžbu parabole Željezničkog (Zelenog) mosta na Savi, ako je duljina mosta nad kojim se pruža luk 135 m te maksimalna visina luka 17.3 m."

5.3 Povezivanje matematike s drugim nastavnim predmetima

Matematiku najčešće povezujemo s fizikom, međutim funkcije se mogu pronaći i u biologiji što dokazuje sljedeći zadatak preuzet s [19] koji se rješava korištenjem Malthusovog modela

$N(t) = N_0 e^{kt}$, koji nije ništa drugo nego eksponencijalna funkcija.
"Znanstvenica je u početku imala 100 bakterija. Nakon 5 sati bakterija je bilo 120. Odredite za koliko će vremena biti dvostruko više bakterija nego na početku."
Široku primjenu funkcije imaju i u ekonomiji. Jedan od zadataka koji se može zadati učenicima u srednjoj školi je također s [18], a glasi: "Prosječni mjesečni troškovi jednog poduzeća izraženi su u kunama formulom $T(x) = 3x + \frac{1900}{x}$. Ako je mjesečna potražnja proizvoda $x = 400 - p$, gdje je p cijena proizvoda, odredite optimalnu količinu mjesečne prodaje za maksimalnu dobit i maksimalni ukupni mjesečni prihod."

5.4 Upotreba tehnologije

Razvoj tehnologije olakšao je mnogo toga i omogućio nastavnicima da na inovativniji i učenicima zanimljiviji način obrađuju nastavni sadržaj. Grafovi funkcija mogu se prikazati precizno pomoću Geogebre, a ono što je jako korisno za iskoristiti u nastavi jeste interaktivnost Geogebre. Kao motivaciju za kvadratnu funkciju s pozitivnim i negativnim vodećim koeficijentom, nastavnici mogu prikazati rad u Geogebri koji na zanimljiv način prikazuje graf kvadratne funkcije u ovisnosti o vodećem koeficijentu: `https://www.geogebra.org/m/zypC2uy6`

6 Miskoncepcije

Pri usvajanju novih pojmova i koncepata, koji su učenicima često vrlo apstrakni, može doći do pojave miskoncepcija. Miskoncepcija (zabluda/pogrešna ideja) je zaključak koji je pogrešan jer se temelji na pogrešnom razmišljanju ili pogrešnim činjenicama. Učenici na nastavu dolaze s već oblikovanim predkoncepcijama koje mogu, ali i ne moraju biti točne. Ukoliko su predkoncepcije netočne, a nastavnici ih ne prepoznaju i ne ispravljaju, one se produbljuju i prelaze u miskoncepcije. Svoje porijeklo miskoncepcije imaju u osobnom iskustvu ili krivom tumačenju gradiva, a prisutne su na svim razinama obrazovanja, od prvog razreda osnovne škole do fakulteta. Zbog svoje stabilnosti i otpornosti mogu se zadržati i nakon završetka školovanja učenika. Upravo iz tog razloga, nastavnici bi tijekom procesa poučavanja trebali ispitati postojanje miskoncepcija kod učenika vezanih uz određenu nastavnu temu, te ih po potrebi ispraviti [15].

Neke od miskoncepcija koje učenici imaju o funkcijama su:

1. proporcionalnost (linearnost) kao preferirani tip odnosa,
2. funkcije moraju biti dane formulom,
3. funkcija je pravac,
4. ako je y funkcija, tada se u formuli mora pojaviti x,
5. graf funkcije mora biti neprekidan,
6. zabluda slika-graf,
7. nedostatak ideje o jednoznačnosti preslikavanja,
8. poistovjećivanje pojma argument i vrijednost funkcije,
9. nepovezivanje vrijednosti funkcije s osi y,
10. poistovjećivanje nultočke funkcije i ishodišta koordinatnog sustava,
11. pravac paralelan s osi x nije graf funkcije,
12. koeficijent smjera grafa linearne funkcije nije samo realni broj već i argument uz kojeg stoji,
13. kvadratnu funkciju smatra eksponencijalnom,
14. kvadratna funkcija s pozitivnim vodećim koeficijentom ima maksimum.

Navedene miskoncepcije u nastavku su opisane malo detaljnije.

1. Učenici često imaju sklonost mišljenju da su određene veličine linearno ili proporcionalno povezane, pa i u situacijama u kojima to nije tako, a ta pojava naziva se "iluzija linearnosti". Kako bi se izbjegla ova pojava, potrebno je učenike izložiti dovoljnom broju zadataka u kojima veličine nisu linearno povezane.

2. Budući da se učenici najčešće susreću u udžbenicima s funkcijama koje su zadane formulom, mnogi od njih izjednačavaju funkciju s formulom. Kako ne bi došlo do ove miskoncepcije, u udžbenicima bi se trebao pojavljivati jednak broj funkcija zadanih tablicom, grafički, kontekstualno i riječima, kao i formulom.

3. Funkcije se uvode strogo preko zapisa linearne funkcije koji se odmah nakon toga povezuje s pravcem. Iz tog razloga učenici pojam funkcije često poistovjećuju s pojmom pravca.

4. Zbog čestog pojavljivanja x u formuli, neki učenici misle da ukoliko nedostaje x nema ni funkcije. Razlog tome može biti i jer se učenici znaju vezati za oznake, stoga oznake treba često mijenjati kako bi uočili da nije bitno koje slovo se koristi u formuli.

5. Kako učenici najčešće crtaju graf linearne, kvadratne ili eksponencijalne funkcije koje su neprekidne, razviju mišljenje da su funkcije uvijek neprekidne. Ukoliko bi vidjeli graf funkcije najveće cijelo, vjerojatno većina njih bi rekla da taj prikaz nije graf neke funkcije.

6. Jedna od čestih miskoncepcija je što učenici graf promatraju kao sliku neke situacije. Primjerice, graf koji prikazuje razinu tekućine prilikom punjenja u posudu u ovisnosti o vremenu promatraju kao graf koji izgleda najsličnije obliku dane posude.

7. Mnogi učenici imaju problema i s razumijevanjem jednoznačnosti preslikavanja. Čim je u koordinatnom sustavu nacrtana krivulja, učenici smatraju da je to graf neke funkcije, zanemarujući bitno svojstvo funkcija, a to je jednoznačnost. Čestim naglašavanjem funkcije vertikalnog testa, učenici mogu savladati svoje pogrešne ideje.

8. Često učenici ne razlikuju pojmove argument i vrijednost funkcije te smatraju da se ti pojmovi odnose na isto. Primjerice, kod zadataka u kojima nije eksplicitno napisano da treba izračunati vrijednost funkcije ”za $x = 2$” nego je napisano ”za argument 2”, učenici ne znaju gdje bi uvrstili taj broj 2.

9. Nepovezivanje vrijednosti funkcije s osi y izraženo je kada učenici trebaju nacrtati graf funkcije zadane formulom ”$f(x) = ...$” jer u formuli nema nigdje slova y, a koordinatnu os označavaju s y.

10. Kako su prethodno učili što je ishodište koordinatnog sustava, učenici ponekad nultočku funkcije poistovjećuju s ishodištem koordinatnog sustava. Kako je ishodište koordinatnog sustava točka s koordinatama $(0, 0)$, a nultočka funkcije u nazivu ima ”nul”, možda i to utječe na to zašto poistovjećuju ta dva pojma.

11. Kako pravac paralelan s osi y nije graf funkcije, učenici stvore pogrešnu misao da ni pravac paralelan s osi x nije graf funkcije, ne razmišljajući o vertikalnom testu.

12. U zadacima u kojima treba odrediti koeficijent smjera grafa linearne funkcije, vrlo česta pogreška učenika je da neće napisati samo realni broj koji stoji uz argument. Primjerice, napisali bi da je koeficijent smjera grafa linearne funkcije zadane formulom $f(x) = 5x + 3$ broj $5x$.

13. Kako se u kvadratnoj funkciji pojavljuje eksponent, učenici imaju sklonost mišljenju da je riječ o eksponencijalnoj funkciji.

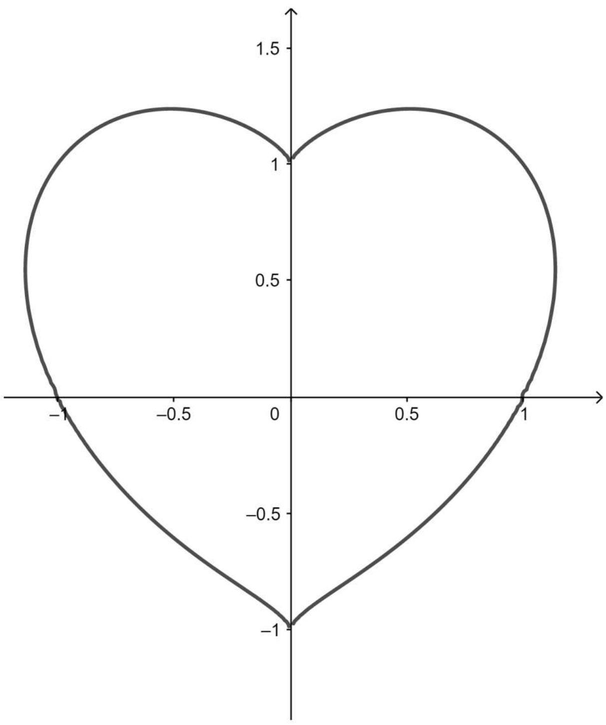
14. Kod određivanja ima li kvadratna funkcija minimum ili maksimum, česta pogreška je da učenici ne paze na otvor parabole nego zaključe da ako je pozitivan vodeći koeficijent funkcija ima maksimum, a ako je negativan funkcija ima minimum.

6.1 Metode za utvrđivanje miskoncepcija

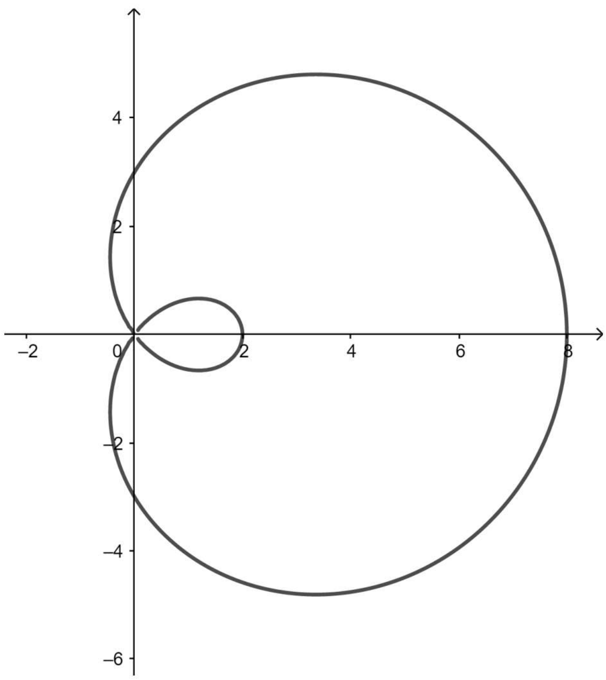
Prvi korak u rješavanju pogrešnih ideja jeste otkriti njihovo postojanje. Najčešće korištene metode za utvrđivanje prisutnosti miskoncepcija su: testovi sa zadacima otvorenog tipa, testovi za zadacima višestrukog izbora, konceptualne mape i diskusije. Kako bi se učenici suočili s pogrešnim idejama koje su razvili odnosno kako bi došli u kognitivni konflikt, dobro je upotrijebiti i konkretne primjere i protuprimjere.
U nastavku je naveden primjer zadatka višestrukog izbora koji se može dati učenicima kako bi shvatili da graf funkcije ne mora biti neprekidan te da funkcije imaju bitno svojstvo, a to je jednoznačnost.

Primjer 6.1. *Zaokruži slovo/slova iznad slike na kojoj se nalazi krivulja koja predstavlja graf neke funkcije.*

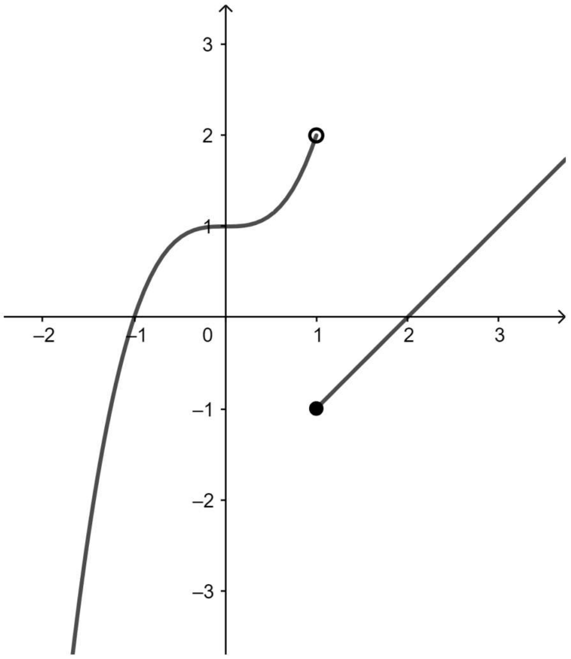
a)



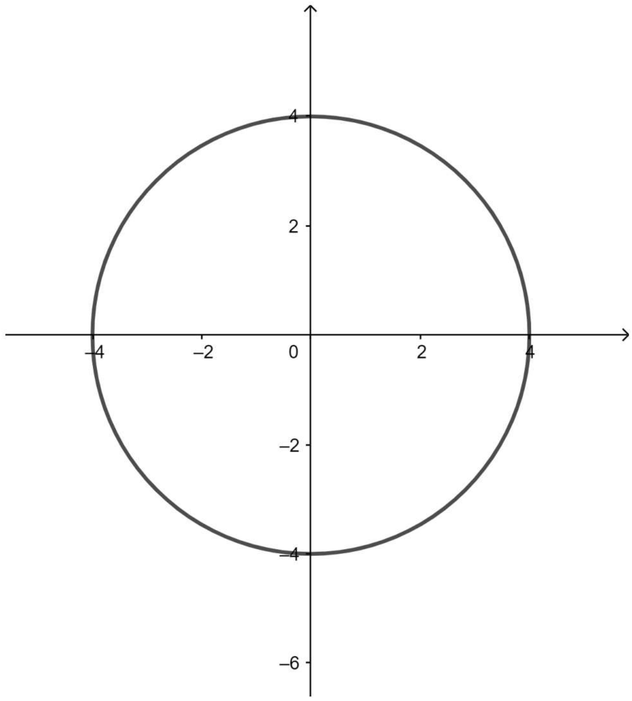
b)



c)



d)

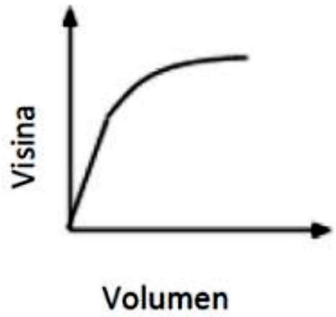


Rješenje. *Pri rješavanju ovog primjera učenicima može pomoći vertikalni test. Povlačenjem pravca paralelnog s osi y, učenici mogu uočiti da jedino na slici pod c) nijedan vertikalni pravac ne siječe krivulju u dvije ili više točaka. Stoga, točan odgovor je slika pod c).*
Zbog miskoncepcije koju učenici imaju o neprekidnosti funkcija i zbog zanemarivanja svojstva jednoznačnosti preslikavanja, vjerojatno bi odgovorili da su slike pod a), b) i d) prikazi funkcija jer je linija neprekinuta.

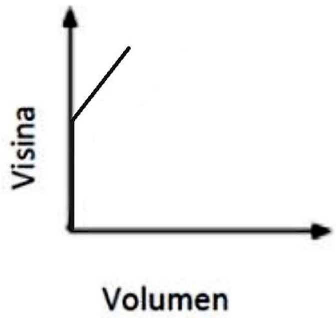
Kako učenici graf ne bi tumačili slikovno, može im u tome pomoći konkretan primjer koji je naveden u nastavku.

Primjer 6.2. *Grafički prikaži situaciju u kojoj se dani spremnik puni vodom konstantno dok se ne napuni.*

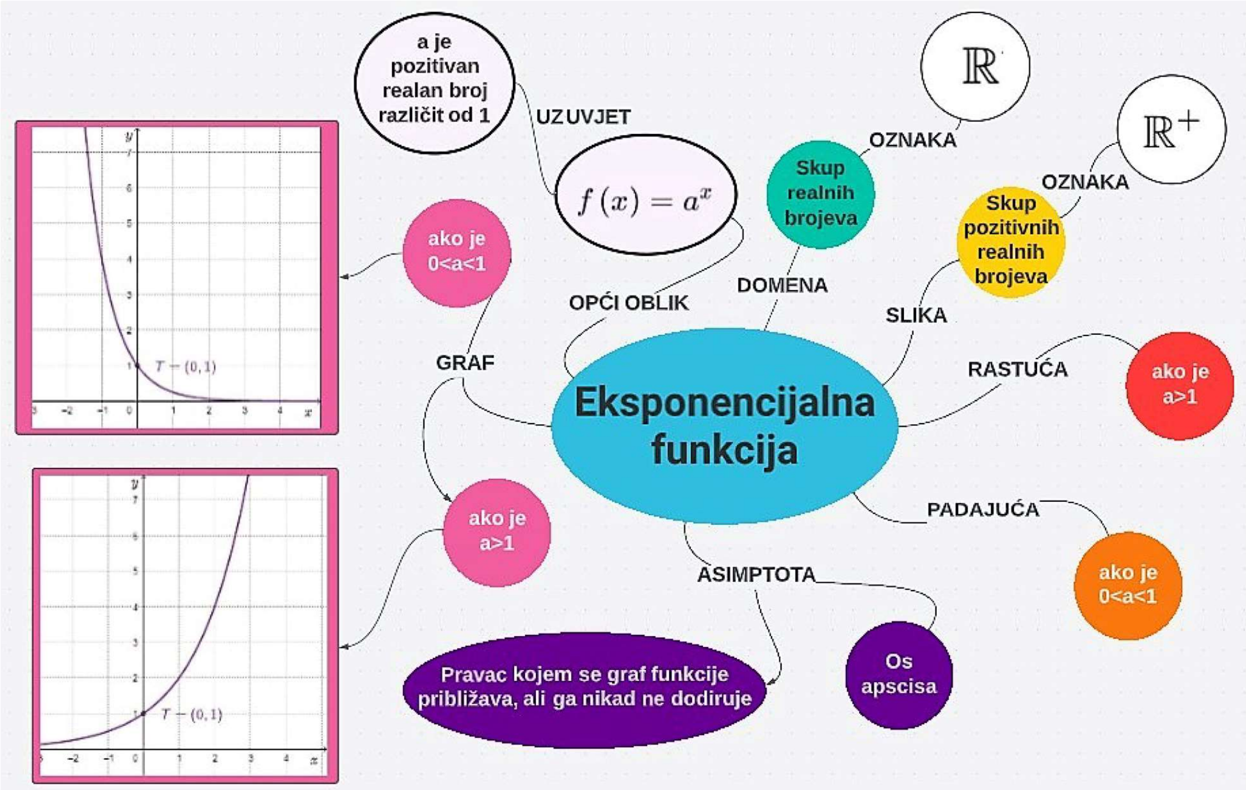
Rješenje. *Učenici bi trebali promatrati kako se mijenja visina vode u spremniku u ovisnosti o tome kako se mijenja volumen vode. Najprije zbog oblika pravokutnika, spremnik se puni linearno, a zatim se visina vode sve sporije povećava. Graf opisane situacije je:*



Na osnovu slike spremnika učenici bi mogli pogrešno skicirati graf na sljedeći način:



Budući da se elementarne funkcije u nastavi matematike uvode postupno, može se na kraju cjeline o svakoj elementarnoj funkciji zadati učenicima da naprave konceptualnu mapu. Konceptualna mapa se koristi za organizaciju i prezentaciju znanja, pomaže u procesu učenja, a bazira se na razumijevanju, povezivanju pojmova i shvaćanju smisla. U nastavku je naveden primjer jedne, točno izrađene, konceptualne mape za eksponencijalnu funkciju.



Slika 21: Primjer konceptualne mape - eksponencijalna funkcija

Kako bi nastavnici utvrdili imaju li učenici pogrešan zaključak da se u formuli funkcije uvijek mora pojaviti x, nastavnici mogu organizirati diskusiju unutar razreda. Zadatak o kojem će se raspravljati dan je u nastavku:

Primjer 6.3. *Je li s* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(s) = s^2 - 2s$ *ispravno zadana kvadratna funkcija* f*?*

Učenici nakon što razmisle, zauzmu svoj stav, podijele se u dvije grupe prema odgovoru na pitanje DA ili NE. Nakon toga međusobno u grupi diskutiraju o pitanju te iznose svoje argumente i zaključke, nakon čega započinje debata.

Rješenje. *Budući da je zadana domena, kodomena i pravilo pridruživanja formulom, nevažno o oznakama, funkcija* f *je ispravno zadana.*
Mnogim učenicima će biti zbunjujuće što u formuli nema slova x *jer su navikli uvijek vidjeti* x*, stoga će bez razmišljanja odgovoriti da funkcija nije ispravno zadana jer nema nigdje* x*.*

U udžbeniku Elementa točno-netočno pitalice su izvrsna pitanja za provjeru imaju li učenici miskoncepcije, a budući da se odgovor mora obrazložiti, potpitanjima nastavnika učenici mogu doći u kognitivni konflikt. Primjer jedne pitalice vezane uz temu eksponencijalna funkcija dan je u nastavku:

Točno-netočno pitalice

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Funkcija $f(x) = x^{-3}$ primjer je eksponencijalne funkcije. T N
2. Ako je $f(x) = 8^x$, onda je $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -2$. T N
3. Ako je $10^m = 10^n$, onda je $m = n$. T N
4. Ako je $f(x) = 4^x$, tada je $f(-x) = (-4)^x$. T N
5. Funkcija $f(x) = 2^{-x}$ prima pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x. T N
6. Funkcija $f(x) = (\sqrt{2})^x$ nije definirana za negativne realne brojeve. T N
7. Ako je $f(x) = (0.1)^x$, onda je $f(-1) < f(-2)$. T N
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^x$ za sve $x < 0$. T N
9. Grafovi funkcija $f(x) = 10^x$ i $g(x) = (0.1)^x$ simetrični su prema osi ordinata. T N
10. Graf eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, presijeca os x u točki $(0, 1)$. T N

Slika 22: Primjer pitalice iz udžbenika Elementa

Nakon što nastavnik utvrdi postojanje miskoncepcija za određenu nastavnu temu, potrebno ih je ispraviti, međutim miskoncepcije su vrlo otporne na promjene. Razlog njihove otpornosti i trajnosti je njihova razumljivost i jednostavnost.
Proces ispravljanja miskoncepcija naziva se konceptualna promjena, a sam proces nije nimalo jednostavan, niti brz. Stoga, nastavnici trebaju biti uporni i strpljivi kako bi učenici uspješno savladali miskoncepcije.

Literatura

[1] J. Bugarin, N. Ćurković, L. Lukačin, J. Gotovac Borčić, G. Mikulić, *Statistička i psihometrijska analiza ispita državne mature u školskoj godini 2020./2021.*, Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, Zagreb, 2021.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika I*, Element d.o.o., Zagreb, 2020.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika II*, Element d.o.o., Zagreb, 2020.

[4] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika III*, Element d.o.o., Zagreb, 2020.

[5] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika IV*, Element d.o.o., Zagreb, 2020.

[6] R. Juras, *Funkcionalne jednadžbe u nastavi matematike*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2020.

[7] M. Kolarić, *Razvoj koncepta funkcije kroz povijest*, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[8] M. Marjanović Matić, *Pojam funkcije u nastavi matematike – nekad i danas*, Poučak, 57 (2014), 51-60.

[9] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Mišurac, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika II*, Školska knjiga, d. d., Zagreb, 2020.

[10] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika IV*, Školska knjiga, d. d., Zagreb, 2020.

[11] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2.*, Zagreb, 2019.

[12] M. Petković, *Motivacija u nastavi matematike*, Odjel za matematiku, Osijek, 2021.

[13] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika I*, Školska knjiga, d. d., Zagreb, 2019.

[14] A. Pletikosić, I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Njerš, R. Gortan, T. Srnec, Ž. Dijanić, *Matematika III*, Školska knjiga, d. d., Zagreb, 2020.

[15] Ž. Žanko, *Miskoncepcije u uvodnoj nastavi programiranja*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Split, 2016.

[16] `https://is.gd/V47LeH`

[17] `https://is.gd/LDvFtU`

[18] `https://is.gd/K9RVrl`

[19] `https://is.gd/74KY2j`

Sažetak

U ovome radu bavili smo se funkcijama u nastavi matematike, počevši od analize funkcija u kurikulumu, školskim udžbenicima, do državne mature. Kako je pojam funkcije bio poznat još u 14. stoljeću, dana je ukratko povijest tog pojma i definicije koje su se pojavljivale kroz povijest. Opisane su osnovne ideje za pojam funkcije, a to su: ideja pridruživanja, kovarijacije i objekta. Navedeni su svi odgojno-obrazovni ishodi iz kurikuluma koji se odnose na funkcije, te su analizirani školski udžbenici Elementa i Školske knjige od prvog do četvrtog razreda srednje škole. Svaki udžbenik ima svoje prednosti i nedostatke, a na nastavniku je da odluči koji će udžbenik koristiti kao svoje nastavno sredstvo. Državna matura iz matematike pokriva zadatke iz svih područja, a u ovome radu navedeni su zadaci i rezultati učenika iz područja funkcija. Budući da je i motivacija važan dio nastave, dani su primjeri kako motivirati učenike za pojedine teme. Kako bi nastavnici mogli lakše prepoznati i ispraviti pogrešne zaključke odnosno miskoncepcije učenika, opisane su miskoncepcije učenika vezano uz funkcije te metode za utvrđivanje miskoncepcija.

Ključne riječi

Funkcija, svojstva funkcije, graf, kurikulum, udžbenik, državna matura, motivacija, miskoncepcije.

Title: The concept of function in mathematics teaching

Abstract

In this paper, we dealt with the functions in mathematics teaching, starting with the analysis of functions in the curriculum, school textbooks, and all the way to the matriculation examination. Since the concept of function was already known in the 14th century, a brief history of this concept and definitions that appeared throughout history are given. The basic ideas for the concept of function are described: the idea of association, covariation and object. All the educational outcomes from the curriculum related to the functions are listed, and the textbooks "Element" and "Školska knjiga" from the first to the fourth grade of high school are analyzed. Each textbook has its advantages and disadvantages, and it is up to the teacher to decide which textbook to use as a teaching tool. The state matriculation exam in mathematics covers tasks from all areas of mathematics, and this paper lists the tasks and results of students from the field of functions. Since motivation is also an important part of teaching, examples are given of how to motivate students for certain topics. In order for teachers to more easily recognize and correct students wrong conclusions or misconceptions, student misconceptions related to functions and methods of determining misconceptions are described.

Key words

Function, properties of the function, graph, curriculum, textbook, state matriculation exam, motivation, misconceptions.

Životopis

Rođena sam 13.08.1998. godine u Vukovaru. Osnovnu školu završila sam 2013. godine, nakon čega sam upisala Gimnaziju Vukovar, jezični smjer. Gimnaziju završavam 2017. godine, te tada upisujem Sveučilišni preddiplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Studij završavam 2020. godine sa završnim radom na temu "Relacije i funkcije", pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Dragane Jankov Maširević, te stječem akademski naziv prvostupnika matematike. Iste godine upisujem Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike, na Odjelu za matematiku. Tijekom završne godine studija odrađujem stručnu praksu u osnovnim i srednjim školama u Osijeku kao nastavnica matematike i informatike. U prosincu 2021. godine nagrađena sam Pročelnikovom nagradom za izvrstan uspjeh te Pohvalom za uspješnost u studiranju, a u svibnju 2022. godine Rektorovom nagradom. U svibnju 2022. godine zapošljavam se u OŠ Siniše Glavaševića u Vukovaru kao nastavnica matematike.