Kvadratne forme

Kurtović, Marija

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Marija Kurtović

Kvadratne forme

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Marija Kurtović

Kvadratne forme

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2022.

Sažetak

Kroz ovaj rad upoznajemo se s temom kvadratnih formi pri čemu naglasak stavljamo na rad s kvadratnim formama dviju varijabli. Na samom početku definirane su kvadratne forme, te je pokazana njihova uska veza sa simetričnim operatorima. Osim toga, pomoću priložene definicije i kriterija za ispitivanje definitnosti istih, saznajemo kako odrediti je li kvadratna forma definitna, indefinitna, semidefinitna, pozitivno definitna, pozitivno semidefinitna, negativno definitna ili pak negativno semidefinitna. Ukratko su, na sličan način opisane i kvadratne forme triju varijabli. U radu je analizirana veza kvadratnih formi dviju, odnosno triju varijabli, s krivuljama, odnosno plohama drugog reda. Sva navedena teorija ilustrirana je odgovarajućim primjerima.

Ključne riječi: kvadratna forma, krivulje drugog reda, plohe drugog reda

Quadratic forms

Abstract:

Throughout this final work we are getting to know the theory of quadratic forms, although the emphasis is put on quadratic forms with two variables. In the beginning, we define them and show their close connection with symmetrical operators. Besides that, with the help of given definition and criteria for testing their definiteness, we are able to find whether quadratic form is definite, indefinite, semi-definite, positive definite, positive semi-definite, negative definite or negative semi-definite. Similarly to that, we are shortly defining and analysing quadratic forms with three variables. Further on, we are dealing with quadratic forms with two and three variables, and analysing their connection with second order curves and surfaces. In addition, we present examples throughout, related to particular section.

Keywords: quadratic form, second order curves, second order surfaces

Sadržaj

Uvod

Tema ovog rada su funkcije specijalnog oblika, koje nazivamo kvadratne forme, te proučavanje njihovih veza s krivuljama, odnosno plohama druge vrste.

Kvadratne forme odavno su predmet interesa matematičara. O tome nam svjedoče brojni teoremi i djela poput primjerice Fermatovog teorema o zbroju dva kvadrata koji je povezan s problemom Pitagorinih trojki. Osim toga, spominje se i u Brāhmasphuṭasiddhānti iz davne 628. godine u kojoj Brahmagupta njihovu primjenu razmatra u obliku Pellovih jednadžbi, te u Gaussovom djelu "Disquisitiones Arithmeticae" iz 1801. godine u kojoj se nadovezuje na Lagrangeovu teoriju iz 1773. godine i dodatno razjašnjava pojam kvadratnih formi. Višestruko su korisne što je i vidljivo iz primjena u raznim granama matematike poput teorije brojeva, diferencijalne geometrije pa i linearne algebre u što ćemo se uvjeriti u daljnjim razmatranjima.

Radi boljeg razumijevanja rada, u prvom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi i teoremi linearne algebre usko vezani uz temu dok u drugom poglavlju prelazimo na definiranje kvadratnih formi i njihovu analizu. U radu je istaknuta veza kvadratnih formi sa simetričnim operatorima, te je predstavljena njihova klasifikacija. U drugom i trećem potpoglavlju navedene su definicije krivulja, odnosno ploha druge vrste, te su navedene njihove veze s kvadratnim formama što je i potkrijepljeno s nekoliko primjera.

1. Osnovni pojmovi

Najprije definirajmo i razjasnimo pojmove koji će upotpuniti daljnje definicije i teoreme vezane uz temu. Priložene definicije, teoremi kao i njihovi dokazi preuzeti su iz [1], [2], [4] i [5].

Definicija 1.1. *Za prirodne brojeve m i n, preslikavanje A : $\{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\} \to F$ naziva se* ***matrica*** *tipa (m, n) s koeficijentima iz polja F. Djelovanje svake takve funkcije A pišemo tablično, u m redaka i n stupaca, pišući u i-ti redak i j-ti stupac funkcijsku vrijednost $A(i, j)$. Tada kažemo da je A matrica s m redaka i n stupaca.*

Napomena 1.1. *Funkcijska vrijednost $A(i,j)$ često se označava s a_{ij}. Prema tome matricu s m redaka i n stupaca pišemo u obliku*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Skup svih matrica s m redaka i n stupaca s koeficijentima iz polja F označavamo s $M_{mn}(F)$. Kada je $m = n$ skup označavamo s $M_n(F)$, a njegove elemente zovemo kvadratnim matricama reda n.

Napomena 1.2. *Determinantu matrice n-tog reda definiramo induktivno pomoću determinante matrice $(n-1)$-og reda, pa prema tome, determinantu matrice $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ računamo pomoću izraza $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, dok determinantu matrice $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ računamo pomoću izraza $A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. Osim toga možemo koristiti i Laplaceov razvoj determinante, pri čemu za matricu A trećeg reda imamo razvoje:*

- *po i-tom stupcu: $detA = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+i}\, a_{ki}\, detA_{ki}$,*
- *po i-tom retku: $detA = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+i}\, a_{ik}\, detA_{ik}$.*

Definicija 1.2. *Za operator $\mathcal{A}$: $X_0 \to X_0$ kažemo da je* ***linearan operator*** *ako $\forall x,y \in Xo$, $\forall \alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ vrijedi $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A} x + \beta \mathcal{A} y$.*

Definicija 1.3. *Kažemo da je kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}$* ***svojstvena (karakteristična) vrijednost*** *linearnog operatora $\mathcal{A}$: $X_0 \to X_0$ ako postoji vektor $x \neq 0$, takav da je $\mathcal{A}x = \lambda x$, pri čemu vektor x nazivamo* ***svojstveni (karakteristični) vektor*** *koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.*

Definicija 1.4. ***Karakteristični (svojstveni) polinom*** *linearnog operatora $\mathcal{A}$ definiramo kao funkciju $\kappa : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ zadana s $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = det(\lambda I - A)$, pri čemu je A matrica pridružena operatoru $\mathcal{A}$.*

Definicija 1.5. *Kažemo da je linearan operator* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ ***simetričan*** *ako* $\forall x, y \in Xo$ *vrijedi* $\mathcal{A}x \cdot y = x \cdot \mathcal{A}y$.

Teorem 1.1. *Ako je* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *simetrični linearni operator na vektorskom prostoru, onda postoje brojevi* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *i ortonormirana baza* (e_1', e_2') *vektorskog prostora* $\mathbb{R}^2$*, tako da bude* $\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1'$, $\mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2'$.

Dokaz. Vidi [4] str. 20. □

Analogan teorem vrijedi i u slučaju simetričnog linearnog operatora definiranog na prostoru $\mathbb{R}^3$.

2. Kvadratne forme

Sve definicije i teoremi navedeni u ovom poglavlju preuzeti su iz [3], [4] i [5].

2.1. Kvadratne forme dviju varijabli

Definicija 2.1. *Kvadratnu funkciju $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika*

$$q(x_1, x_2) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2, \ a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

nazivamo ***kvadratna forma*** *dviju varijabli. Matricu A oblika*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{1}$$

nazivamo ***matrica kvadratne forme****.*

Pokazat ćemo usku povezanost kvadratnih formi i simetričnih operatora.
Neka je linearnom operatoru $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pridružena matrica (1).
Kako je matrica A simetrična, možemo zaključiti da je $\mathcal{A}$ simetričan operator, tj. vrijedi $\mathcal{A}x \cdot y = x \cdot \mathcal{A}y$. Uzmimo desnu ortonormiranu bazu (e_1, e_2) u prostoru $\mathbb{R}^2$. Tada za prethodno definiran linearni operator $\mathcal{A}$ vrijedi

$$\mathcal{A}e_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \quad \mathcal{A}e_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2. \tag{2}$$

Svaki $x \in \mathbb{R}^2$ možemo zapisati i u obliku $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ te vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= x_1\mathcal{A}e_1 + x_2\mathcal{A}e_2 \\ &= x_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12})e_1 + (x_1a_{12} + x_2a_{22})e_2 \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x \cdot x &= x_1(x_1a_{11} + x_2a_{12}) + x_2(x_1a_{12} + x_2a_{22}) \\ &= a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 \\ &= q(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Prema tome, kvadratna forma $q(x_1, x_2)$, može se prikazati kao skalarni produkt $\mathcal{A}x \cdot x$.

Kako je $\mathcal{A}$ simetričan operator, prema teoremu 1.1. postoji desna ortonormirana baza (e_1', e_2') i λ_1,$\lambda_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \quad \mathcal{A}'e_2 = \lambda_2 e_2',$$

tj. u novoj bazi (e_1', e_2'), linearnom operatoru $\mathcal{A}$ pripada dijagonalna matrica $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$. Pri tome je baza (e_1', e_2') dobivena iz baze (e_1, e_2) rotacijom za kut ρ u pozitivnom smjeru, pri čemu je

$$\cos\rho = e_1' \cdot e_1.$$

Ako je $x = x_1e_1 + x_2e_2 = x_1'e_1' + x_2'e_2'$ proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^2$, veza između starih i novih koordinata izražena je kao

$$x_1' = x_1\cos\rho + x_2\sin\rho, \quad x_2' = -x_1\sin\rho + x_2\cos\rho.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\mathcal{A}x \cdot x &= (x_1'\mathcal{A}e_1' + x_2'\mathcal{A}e_2')(x_1'e_1' + x_2'e_2')\\ &= (x_1'\lambda_1 e_1' + x_2'\lambda_2 e_2')(x_1'e_1' + x_2'e_2')\\ &= \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2\end{aligned}$$

tada za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 = \lambda_1(x_1\cos\rho + x_2\sin\rho)^2 + \lambda_2(-x_1\sin\rho + x_2\cos\rho)^2. \quad (3)$$

Nadalje, korištenjem definicije jednakosti polinoma, odnosno uspoređivanjem koeficijenata polinoma na lijevoj strani i koeficijenata dobivenih kvadriranjem na desnoj strani, dobivamo sljedeće jednakosti

$$a_{11} = \lambda_1\cos^2\rho + \lambda_2\sin^2\rho \quad (4)$$

$$a_{22} = \lambda_1\sin^2\rho + \lambda_2\cos^2\rho \quad (5)$$

$$a_{12} = (\lambda_1 - \lambda_2)\sin\rho\cos\rho \quad (6)$$

iz kojih računamo

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2\\ &= ({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)\sin^2\rho\cos^2\rho + \lambda_1\lambda_2(\sin^4\rho + \cos^4\rho) - (\lambda_1-\lambda_2)^2\sin^2\rho\cos^2\rho\\ &= \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - (\lambda_1-\lambda_2)^2\right)\sin^2\rho\cos^2\rho + \lambda_1\lambda_2(\sin^4\rho + \cos^4\rho)\\ &= \lambda_1\lambda_2(2\sin^2\rho\cos^2\rho + \sin^4\rho + \cos^4\rho)\\ &= \lambda_1\lambda_2(\sin^2\rho + \cos^2\rho)^2\\ &= \lambda_1\lambda_2.\end{aligned}$$

Zbrajanjem jednadžbi (4) i (5) dolazimo do izraza

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2,$$

pri čemu trA predstavlja zbroj dijagonalnih elemenata matrice A i naziva se **trag** matrice.

Koristeći Vieteove formule dobivamo kako je svojstveni polinom linearnog operatora $\mathcal{A}$ sa svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2 moguće zapisati kao

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\\ &= \lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2\\ &= \lambda^2 - \lambda\cdot\mathrm{tr}A + \det A.\end{aligned}$$

Kako su svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 nultočke polinoma $P(\lambda)$ za njih vrijedi

$$\lambda_1 = \left(\frac{\mathrm{tr}A - \sqrt{\mathrm{tr}A^2 - 4\det A}}{2}\right) \quad (7)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{\mathrm{tr}A + \sqrt{\mathrm{tr}A^2 - 4\det A}}{2}\right). \quad (8)$$

Uočimo da je $\mathrm{tr}A^2 - 4 \ < \det A = (a_{11} - a_{22})^2 + 4\ a_{12}^2$, pa za $a_{12} \neq 0$ iz (4) i (5) slijedi

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\cos 2\rho = a_{11} - a_{22},$$

što s jednadžbom

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\sin 2\rho = 2a_{12}$$

dovodi do

$$ctg(2\rho) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

iz čega računamo kut ρ za koji treba rotirati bazu (e_1, e_2), dok iz (7) i (8) odredimo λ_1, λ_2 takve da vrijedi (3).

Primjer 2.1. *Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini i $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrica kvadratne forme.*

Odgovarajuća kvadratna forma je

$$q(x_1, x_2) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 = 3{x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2.$$

Iz $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 6$ i $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$ slijedi $P(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A = \lambda^2 - 6\lambda + 8$, što je svojstveni polinom simetričnog linearnog operatora $\mathcal{A}$ kojem u bazi (e_1, e_2) pripada matrica A. Prema tome su svojstvene vrijednosti operatora $\mathcal{A}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2},$$

odnosno $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$. Odgovarajuće svojstvene vektore dobivamo iz jednadžbe

$$P(\mathcal{A})e = (\mathcal{A} - \lambda_1 I)(\mathcal{A} - \lambda_2 I)e, \tag{9}$$

$v_1 = \mathcal{A}e_1 - \lambda_2 e_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 - \lambda_2 e_1 = 3e_1 + e_2 - 2e_1 = e_1 + e_2,$
$v_2 = \mathcal{A}e_1 - \lambda_1 e_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 - \lambda_1 e_1 = 3e_1 + e_2 - 4e_1 = -e_1 + e_2.$

Kako bismo imali desno orijentiran koordinatni sustav $(O; e_1, e_2)$, pomnožit ćemo jednadžbu (9) s -1 pa umjesto vektora v_2 imamo $(-v_2)$. Zbog toga je nova ortonormirana baza u kojoj linearnom operatoru $\mathcal{A}$ pripada dijagonalna matrica $D = diag(4, 2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ zadana vektorima

$$e_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \quad e_2' = \frac{-v_2}{\|-v_2\|} = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}.$$

Obzirom da je

$$\cos\rho = e_1 \cdot e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

slijedi kako kut rotacije u pozitivnom smjeru stare baze prema novoj iznosi $\rho = \dfrac{\pi}{4}$.

Prema tome kvadratna forma glasi $q(y_1, y_2) = 4{y_1}^2 + 2{y_2}^2$ pri čemu je $x = y_1 e_1' + y_2 e_2'$ prikaz vektora y u novoj bazi.

Ispitivanje definitnosti kvadratne forme

Kvadratne forme klasificiraju se prema tome primaju li samo pozitivne, odnosno negativne vrijednosti ili primaju li i pozitivne i negativne vrijednosti. Tako dolazimo i do pojma definitnosti kvadratne forme.

Definicija 2.2. *Kvadratna forma $q(x_1, x_2)$ je:*

1. ***semidefinitna*** *ako prima samo pozitivne, odnosno samo negativne vrijednosti,*
2. ***pozitivno semidefinitna*** *ako prima samo pozitivne vrijednosti,*
3. ***pozitivno definitna*** *ako je pozitivno semidefinitna i $q(x_1, x_2) = 0$ ako i samo ako je $x_1 = x_2 = 0$,*
4. ***negativno semidefinitna*** *ako prima samo negativne vrijednosti,*
5. ***negativno definitna*** *ako je negativno semidefinitna i $q(x_1, x_2) = 0$ ako i samo ako je $x_1 = x_2 = 0$,*
6. ***indefinitna*** *ako prima i pozitivne i negativne vrijednosti,*
7. ***definitna*** *ako je pozitivno ili negativno definitna.*

Sljedeći teorem daje kriterij pomoću kojeg možemo odrediti koje je definitnosti kvadratna forma što je upotrijebljeno prilikom rješavanja primjera 2.2. i 2.3.

Teorem 2.1. ***Kriterij za ispitivanje definitnosti kvadratne forme***

Kvadratna forma $q(x_1, x_2)$ kojoj pripada matrica (1) je

1. ***pozitivno definitna*** *ako i samo ako je $a_{11} > 0$ i $detA > 0$,*
2. ***pozitivno semidefinitna*** *ako i samo ako je $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$ i $detA \geq 0$,*
3. ***negativno definitna*** *ako i samo ako je $a_{11} < 0$ i $detA > 0$,*
4. ***negativno semidefinitna*** *ako i samo ako je $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ i $detA \geq 0$,*
5. ***indefinitna*** *ako i samo ako je $detA < 0$.*

Dokaz.

1. Ako je kvadratna forma q pozitivno definitna, onda prema izrazu

$$q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

mora vrijediti da su $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$. Zbog toga je $detA > 0$ iz čega slijedi da je $a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0$, tj. $a_{11}a_{22} > 0$, što znači da su a_{11} i a_{22} različiti od nule i istog predznaka. Budući da je $trA = a_{11}+a_{22} = \lambda_1+\lambda_2 > 0$ taj predznak mora biti pozitivan.

Obratno, ako su $a_{11} > 0$ i $detA > 0$, zbog $detA > 0$ vrijedi $a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0$, tj. $a_{11}a_{22} > 0$, što upućuje na to da su a_{11}, a_{22} istog predznaka, a kako je po pretpostavci $a_{11} > 0$, tada mora biti i $a_{22} > 0$. Zatim, kako je $detA = \lambda_1\lambda_2 > 0$, λ_1 i λ_2 su istog predznaka i različiti su od nule pa zbog $\lambda_1 + \lambda_2 = trA = a_{11} + a_{22} > 0$ taj predznak mora biti pozitivan.

Ostale slučajeve pokazujemo analogno.

$\square$

Primjer 2.2. *Ispitajmo definitnost kvadratne forme:*

$$q(x_1, x_2) = 2{x_1}^2 + 2x_1x_2 + 4{x_2}^2.$$

Kako je $q(x_1, x_2) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2$ možemo iščitati da su $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$ i $a_{22} = 4$, pa je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Kako vrijedi $a_{11} > 0$ i $\det A > 0$ zaključujemo da je kvadratna forma pozitivno definitna.

Primjer 2.3. *Ispitajmo definitnost kvadratne forme:*

$$q(x_1, x_2) = 4{x_1}^2 - 4x_1x_2 + {x_2}^2.$$

Kako je $q(x_1, x_2) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2$ možemo iščitati da su $a_{11} = 4$, $a_{12} = -2$ i $a_{22} = 1$, pa je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } \det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dakle, jer su $a_{11} > 0$ i $\det A = 0$, kvadratna forma je pozitivno semidefinitna.

2.2. Kvadratne forme triju varijabli

U sljedećoj definiciji i daljnjem postupku, uočimo analogiju kvadratnih formi dviju i triju varijabli.

Definicija 2.3. *Kvadratnu funkciju $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, oblika*

$$q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + a_{33}{x_3}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3,$$

gdje su $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$ nazivamo ***kvadratna forma*** *triju varijabli.*
Matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

nazivamo ***matrica kvadratne forme****.*

Pokažimo da za kvadratnu formu q postoje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ i linearne forme L_1, L_2, L_3 takve da za svaki $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1[L_1(x_1, x_2, x_3)]^2 + \lambda_2[L_2(x_1, x_2, x_3)]^2 + \lambda_3[L_3(x_1, x_2, x_3)]^2.$$

Uzmimo desnu ortonormiranu bazu (e_1, e_2, e_3) u prostoru $\mathbb{R}^3$ i pomoću matrice (10) definirajmo linearni operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takav da vrijedi

$$\mathcal{A}e_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + a_{3i}e_3.$$

Tako definirani operator $\mathcal{A}$ je simetričan i za svaki vektor $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ vrijedi $q(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{A}x \cdot x$. Analogno kao u slučaju kvadratnih formi dviju varijabli zaključujemo da za prethodno definirani simetrični operator $\mathcal{A}$ postoji desna ortonormirana baza (e_1', e_2', e_3') i $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \quad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2', \quad \mathcal{A}e_3' = \lambda_3 e_3'.$$

Baza (e_1', e_2', e_3') dobivena je rotacijom baze (e_1, e_2, e_3) za kut ρ takav da vrijedi $\cos\rho = e_1'e_1$.

Ukoliko promatramo rotaciju oko x_3 osi, veza između koordinata (x_1, x_2, x_3) u bazi (e_1, e_2, e_3) i (x_1', x_2', x_3') u bazi (e_1', e_2', e_3') dana je s

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\rho + x_2\sin\rho \\ x_2' &= -x_1\sin\rho + x_2\cos\rho \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Obzirom da je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x \cdot x &= (x_1'\mathcal{A}e_1' + x_2'\mathcal{A}e_2' + x_3'\mathcal{A}e_3')(x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3') \\ &= (x_1'\lambda e_1' + x_2'\lambda e_2' + x_3'\lambda e_3')(x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3') \\ &= \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \lambda_3(x_3')^2 \end{aligned}$$

vrijedi

$$q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \lambda_3(x_3')^2.$$

Klasifikacija kvadratnih formi triju varijabli analogna je onoj kod kvadratnih formi dviju varijabli:

Definicija 2.4. *Kvadratna forma $q(x_1, x_2, x_3)$ je:*

1. ***semidefinitna*** *ako prima samo pozitivne odnosno samo negativne vrijednosti,*

2. ***pozitivno semidefinitna*** *ako prima samo pozitivne vrijednosti,*

3. ***pozitivno definitna*** *ako je pozitivno semidefinitna i ako je $q(x_1, x_2, x_3) = 0$ onda i samo onda ako $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,*

4. ***negativno semidefinitna*** *ako prima samo negativne vrijednosti,*

5. ***negativno definitna*** *ako je negativno semidefinitna i ako je $q(x_1, x_2, x_3) = 0$ onda i samo onda ako $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,*

6. ***indefinitna*** *ako prima i pozitivne i negativne vrijednosti,*

7. ***definitna*** *ako je pozitivno ili negativno definitna.*

Teorem 2.2. ***Kriterij za ispitivanje definitnosti kvadratne forme***
Kvadratna forma $q(x_1, x_2, x_3)$ s matricom (10) je

1. ***pozitivno definitna*** *ako i samo ako je $a_{11} > 0$ i $detA > 0$,*

2. ***pozitivno semidefinitna*** *ako i samo ako je $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$, $a_{33} \geq 0$ i $detA \geq 0$,*

3. ***negativno definitna*** *ako i samo ako je $a_{11} < 0$ i $detA > 0$,*

4. ***negativno semidefinitna*** *ako i samo ako je $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$, $a_{33} \leq 0$ i $detA \geq 0$,*

5. ***indefinitna*** *ako i samo ako je $detA < 0$.*

Dokaz. Analogan dokazu teorema 2.1. □

2.3. Veza s krivuljama drugog reda

Skupove točaka ravnine, poput kružnice, elipse, hiperbole i parabole, povezanih nizom zajedničkih svojstava jednim imenom nazivamo **krivulje drugog reda**. Jedno od svojstava je da se svaka takva krivulja može prikazati kao skup nultočaka polinoma drugog stupnja. Osim toga, često se krivulja drugog reda definira i kao krivulja u ravnini koju proizvoljni pravac siječe u najviše dvije točke. Za svaku od njih moguće je odabrati pravokutni koordinatni sustav $(O; e_1, e_2)$ u ravnini M pri čemu su koordinate točaka koje pripadaju krivulji opisane sljedećim jednadžbama:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ kružnica radijusa r sa središtem u O,}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ elipsa s poluosima } a, b > 0 \text{ i središtem u O,}$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hiperbola s poluosima } a, b > 0 \text{ i središtem u O,}$$
$$y^2 = 2px \text{ parabola s parametrom p i tjemenom u O.}$$

Definicija 2.5. *Funkcija $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika*

$$p(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0,$$

gdje su a_{11}, a_{12}, a_{22}, $a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}$ i barem jedan od koeficijenata a_{11}, a_{12}, a_{22} nije jednak nuli naziva se ***polinom drugog stupnja dviju varijabli****. Skup svih nultočaka polinoma drugog stupnja dviju varijabli naziva se* ***krivulja drugog reda****.*

Uzmimo sada desni pravokutni koordinatni sustav $(O; e_1, e_2)$ u ravnini M. Identificiramo li točku P u ravnini M s njezinim radijvektorom $x = \overrightarrow{OP} = x_1e_1 + x_2e_2$ i uređenim parom njezinih koordinata (x_1, x_2), tada je polinom

$$p(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 \tag{11}$$

moguće interpretirati kao preslikavanje s ravnine M u skup realnih brojeva koje točki $P = (x_1, x_2)$ pridružuje broj $p(x_1, x_2)$. Ako je $p(x_1, x_2) = 0$ kažemo da je $P(x_1, x_2)$ **nultočka**

polinoma (11).
Neka je $S \subset M$ skup svih nultočaka polinoma P. Tada jednadžba kojom su određeni elementi skupa S u $(O; e_1, e_2)$ glasi

$$a_{22}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0. \tag{12}$$

Krivulju danu jednadžbom tog oblika možemo odrediti pomoću predznaka determinante matrice o čemu preciznije govori sljedeći teorem. Taj postupak opisan je u primjeru 2.4. u kojem, služeći se navedenim teoremom, iz dane jednadžbe saznajemo kako je tražena krivulja parabola.

Teorem 2.3. *Neka je $S \subset M$ skup definiran jednadžbom (12) i neka je $A \neq O$ matrica pripadne kvadratne forme. Tada vrijedi*

1. *ako je $\det A > 0$, onda je S elipsa, jednočlan ili prazan skup,*
2. *ako je $\det A < 0$, onda je S hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku,*
3. *ako je $\det A = 0$, onda je S parabola, unija dvaju paralelnih pravaca, jedan pravac ili prazan skup.*

Dokaz. Vidi [4] str. 33. □

Primjer 2.4. *Odredimo koja je krivulja zadana jednadžbom* $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 50x_1 - 100x_2 + 25 = 0$.

Iz zadane jednadžbe moguće je iščitati koeficijente:

$$a_{11} = 9, \quad a_{12} = 12, \quad a_{22} = 16, \quad a_1 = 50, \quad a_2 = -100, \quad a_0 = 25,$$

pa je matrica A oblika

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Obzirom da je $\det A = 9 \cdot 16 - 12 \cdot 12 = 0$, skup zadan polaznom jednadžbom je prema teoremu 2.3. parabola, unija dvaju paralelnih pravaca, jedan pravac ili prazan skup.

Kako bi odredili S moramo naći svojstvene vektore v_1 i v_2 od A.
Iz

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(16-\lambda) - 144 = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25)$$

dobivamo $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 25$.
Za $\lambda_1 = 0$ imamo:

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 + 12x_2 \\ 12x_1 + 16x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pa je $x_2 = -\frac{3}{4}x_1$, odnosno

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3/4\, x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \end{bmatrix} x_1.$$

Tada je $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \end{bmatrix}$, pa je $\|v_1\| = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$ i $e_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -3/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Za $\lambda_2 = 25$ imamo:

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16x_1 + 12x_2 \\ 12x_1 - 9x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pa je $x_2 = \frac{4}{3}x_1$, odnosno

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 4/3\, x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix} x_1.$$

Tada je $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$, pa je $\|v_2\| = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$ i $e_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Kako je $S = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = S^T \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ -100 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 500 \\ -250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -50 \end{bmatrix},$$

pa su $b_1 = 100$ i $b_2 = -50$.
Imamo

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a_0 = 0 \\
&25y_2^2 + 100y_1 - 50y_2 + 25 = 0 / : 25 \\
&y_2^2 + 4y_1 - 2y_2 + 1 = 0 \\
&4y_1 + (y_2 - 1)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Uvedemo li supstituciju

$$\begin{aligned}
x &= y_1, \\
y &= y_2 - 1
\end{aligned}$$

dobijamo izraz $y^2 = -4x$ iz čega je vidljivo da se radi o paraboli.

2.4. Veza s plohama drugog reda

Slično definiciji krivulje drugog reda, definiramo plohe drugog reda:

Definicija 2.6. *Funkciju $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ oblika*

$$\begin{aligned}
p(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\
+ 2a_{23}x_2x_3 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0
\end{aligned}$$

pri čemu su a_{ij}, a_i, $a_0 \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$ nazivamo ***polinom drugog reda*** *triju varijabli. Pri tome, barem jedan od brojeva a_{ij} nije jednak nuli i skup svih nultočaka tog polinoma naziva se* ***ploha drugog reda****.*

U nastavku navodimo implicitne jednadžbe pojedinih ploha drugog reda.

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+0\cdot z=1,\ a,b>0 \text{ eliptički valjak},\\
&\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+0\cdot z=1,\ a,b>0 \text{ hiperbolički valjak},\\
&y^2=2px+0\cdot z,\ p\neq 0 \text{ parabolički valjak},\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0 \text{ elipsoid},\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0 \text{ jednokrilni hiperboloid},\\
-&\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0 \text{ dvokrilni hiperboloid},\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ a,b,c>0 \text{ eliptički stožac},\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz,\ a,b,c\neq 0 \text{ eliptički paraboloid},\\
&\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz,\ a,b,p\neq 0 \text{ hiperbolički paraboloid}.
\end{aligned}$$

Označimo s $(O;e_1,e_2,e_3)$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru E i identificirajmo točku $P\in E$ uređenom trojkom $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ njezinih koordinata u $(O;e_1,e_2,e_3)$. Za točku $P=(x_1,x_2,x_3)$ kažemo da je **nultočka polinoma** p ako je $p(x_1,x_2,x_3)=0$. Skup

$$S=\{(x_1,x_2,x_3)\in E : p(x_1,x_2,x_3)=0\} \tag{13}$$

svih nultočaka polinoma p je podskup u E, a primjeri tog skupa su upravo plohe drugog reda čije se osi podudaraju s koordinatnim osima. Umjesto (13) možemo pisati $p(x_1,x_2,x_3)=0$ i tada takvu jednadžbu nazivamo **jednadžba skupa** S. U $(O;e_1,e_2,e_3)$ se skup svih nultočaka polinoma p identificira sa skupom svih rješenja jednadžbe, pa polinom p poprima oblik

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3\\ +2a_{23}x_2x_3+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_0\end{aligned} \tag{14}$$

gdje su a_{ij}, a_i, $a_0\in R$, $i,j=1,2,3$ te tada jednadžba skupa S glasi

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ij}x_ix_j+\sum_{i,k=1}^{3} a_kx_k+a_0=0$$

pri čemu vrijedi $a_{12}=a_{21}$, $a_{13}=a_{31}$, $a_{32}=a_{23}$.

Za kvadratnu formu kažemo da je kanonska ukoliko ne sadrži mješovite članove. Primjenom ranije pokazane veze između simetričnog operatora i kvadratne forme, promatranu kvadratnu formu možemo zapisati u kanonskom obliku i odrediti koja ploha je zadana polaznim polinomom. Definirajmo stoga simetričan linearan operator $\mathcal{A}\colon X_0\to X_0$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}e_1&=a_{11}e_1+a_{21}e_2+a_{31}e_3\\
\mathcal{A}e_2&=a_{12}e_1+a_{22}e_2+a_{32}e_3\\
\mathcal{A}e_3&=a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3.
\end{aligned}$$

Kako operatoru $\mathcal{A}$ u bazi (e_1, e_2, e_3) pripada matrica $\mathcal{A}$ i ako su dodatno $a = a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$ i $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, onda polinom (14) možemo zapisati u obliku

$$p(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0. \tag{15}$$

Sada u novom sustavu $(O; e'_1, e'_2, e'_3)$ izraz (14), odnosno (15) prelazi u oblik

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + a_0 = 0 \tag{16}$$

gdje su $a = b_1e'_1 + b_2e'_2 + a_3e'_3$ i $x = y_1e'_1 + y_2e'_2 + y_3e'_3$ razvoji vektora a i x po novoj bazi.

Može se pokazati i (vidi [3], teorem 6) da skup S svih nultočaka polinoma drugog stupnja triju varijabli geometrijski možemo predočiti kao **degeneriranu plohu drugog reda** (prazan skup, skup koji sadrži samo jednu točku, pravac, ravnina, unija dviju različitih ravnina), odnosno kao **plohu drugog reda** (eliptički valjak, hiperbolički valjak, parabolički valjak, elipsoid, jednokrilni hiperboloid, dvokrilni hiperboloid, eliptički stožac, eliptički paraboloid, hiperbolički paraboloid).

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] D. Butković, *Predavanja iz linearne algebre*, Osijek, 2008.

[3] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[4] R. Scitovski, D. Jankov Maširević, *Linearni operatori u ravnini*, https://www.mathos.unios.hr/geometrija/Materijali/Geo_2.pdf

[5] R. Scitovski, I. Kuzmanović, Z. Tomljanović, *Linearni operatori u ravnini*, https://www.mathos.unios.hr/geometrija/Materijali/Geo_3.pdf

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_form#History

[7] https://www.mathos.unios.hr/matefos/Files/predavanja/p12n.pdf