Preslikavanje ploha u R3

Matošić, Sara

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Sara Matošić

Preslikavanje ploha u $\mathbb{R}^3$

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij Matematika

Sara Matošić

Preslikavanje ploha u $\mathbb{R}^3$

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2022.

Sažetak. Tema ovog rada je preslikavanje ploha u $\mathbb{R}^3$. U prvom dijelu rada upoznat ćemo se s osnovnim pojmovima potrebnim za daljnu razradu teme kao što su ploha, parametrizacija i reparametrizacija plohe, tangencijalni vektor i metrika na plohi. Nadalje ćemo spomeniti prvu i drugu fundamentalnu formu te fundamentalne veličine prvog i drugog reda. To će nam sve biti potrebno za definiranje raznih zakrivljenosti uključujući Gaussovu i srednju zakrivljenost. Naposljetku ćemo razraditi temu ovog rada te pojasniti tri vrste preslikavanja ploha: izometrijsko, konformno te ekviarealno. Navedeni pojmovi su popraćeni primjerima u kojima je još dodatno pojašnjeno njihovo značenje.

Ključne riječi: ploha, metrika, izometrijsko preslikavanje, konformno preslikavanje, ekviarealno preslikavanje

Mapping of surfaces in $\mathbb{R}^3$

Abstract: The theme of this work is mapping of surfaces in $\mathbb{R}^3$. In the first part of the work we will be introduced with some basic terms which are important for the actual theme such as surface, parametrization, reparametrization, tangent vector and metrics on a surface. Furthermore, we will mention first and second fundamental forms, as well as coefficients of the first and second kind. This will all be needed for defining various curvatures such as Gaussian and mean curvature. At the end of this work three types of mapping of surfaces will be explained.

Keywords: surface, metrics, isometric mapping, conformal mapping, equiareal mapping

Sadržaj

Uvod

S plohama smo se većinom prvi put susreli na nastavi likovne kulture. Tada smo ih opisali kao oblik koji ima samo širinu i dužinu dok im je treća dimenzija nenaglašena. Također smo učili da su plohe i sam papir ili platno na kojima smo komponirali dvodimenzionalnu sliku poštujući dvodimenzionalnost plohe ili pak stvarali iluziju prostora koristeći razne metode poput tonske modelacije i geometrijske perspektive. Međutim, kroz daljnje školovanje smo tu definiciju proširili. Jedan od onih koji je za to zaslužan je francuski matematičar, fizičar i političar Gaspard Monge. On je osnivač deskriptivne i diferencijalne geometrije te je započeo opću teoriju plohe. Također, vrlo bitan je i njemački matematičar i astronom Carl Friedrich Gauss koji je stavio naglasak pri proučavanju plohe na ona njezina svojstva koja ne ovise o prostoru u koji je smještena. U ovom radu, bavit ćemo se preslikavanjem ploha u $\mathbb{R}^3$. U prvom poglavlju rada navest ćemo osnovne definicije i izraze za računanje određenih veličina vezanih za plohu kao što su metrika, regularna ploha, parametrizacija (karte) plohe, te prva fundamentalna forma plohe, odnosno njene koeficijente E,F,G u karti plohe. Nadalje, definirat ćemo Gaussovu i srednju zakrivljenost, odnosno njihove formule preko E, F, G, L, M, N. U drugom poglavlju ćemo se posvetiti temi ovog rada, a to je preslikavanje ploha. Analizirat ćemo tri klase preslikavanja: izometričko, konformno i ekviarealno preslikavanje. Na kraju, računat ćemo udaljenost i površinu različitih ploha kao primjenu teorije što smo prethodno naučili.

1. Ploha i metrika na plohi

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove koji će nam biti potrebni za detaljnu razradu teme. Realan euklidski prostor, koji ćemo označavati s $\mathbb{R}^3$ okruženje je u kojem ćemo proučavati plohe u ovom radu. Promatrat ćemo ga kao skup koji se sastoji od svih uređenih trojki realnih brojeva:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

kojima predstavljamo točke tog prostora.

1.1. Ploha

Sve definicije i teoremi u ovom poglavlju preuzeti su iz [4].

Definicija 1.1. *Podskup $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je **ploha** ako za svaki $t \in \Omega$ postoji otvorena okolina $B \subset \mathbb{R}^3$ i preslikavanje $\mathbb{X} : A \to B \cap \Omega$ gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, a $\mathbb{X}$ glatki homeomorfizam otvorenih skupova.*

Za bolje razumijevanje sljedeće definicije podsjetit ćemo se pojma diferencijala.

Definicija 1.2. ***Diferencijal*** *je linearan operator $D\mathbb{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ u paru kanonskih baza dan matricom:*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} \end{bmatrix}.$$

Diferencijal je injektivan ako i samo ako mu je jezgra trivijalna, odnosno, ako i samo ako je njegova slika dvodimenzionalna. Slika od $D\mathbb{X}$ razapeta je stupcima Jacobijeve matrice, stoga slijedi da je diferencijal injektivan ako i samo ako su vektori $\mathbb{X}_a := \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial a}$ i $\mathbb{X}_b := \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial b}$ linearno nezavisni što je ekvivalentno uvjetu $\mathbb{X}_a \times \mathbb{X}_b \neq 0$.

Definicija 1.3. *Ploha Ω zadana parametrizacijom $\mathbb{X}$ **regularna** je ploha ako vrijedi da je diferencijal preslikavanja injektivan.*

Navedimo nekoliko primjera parametriziranih ploha.

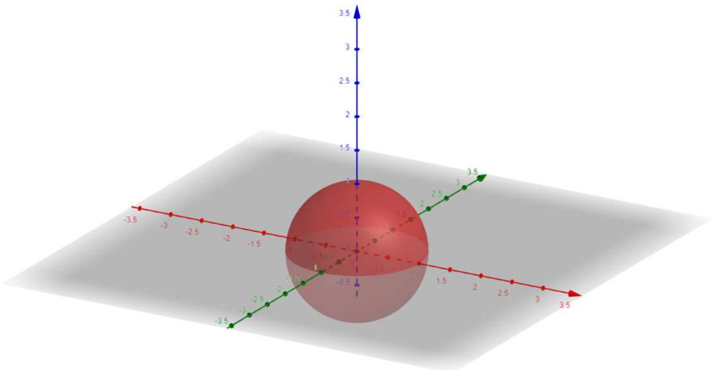
Primjer 1.1. *Ravnina je zadana parametrizacijom $\mathbb{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{X}(a, b) = x_1 \cdot a + x_2 \cdot b + x_3$, gdje su $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ te x_1 i x_2 nisu kolinearni.*

Provjerimo sada, koristeći definiciju regularnosti plohe, je li ravnina regularna ploha.

Vrijedi $\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial a} = x_1$, $\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial b} = x_2 \Rightarrow \mathbb{X}_a \times \mathbb{X}_b = x_1 \times x_2 \neq 0$ (jer x_1 i x_2 nisu kolinearni).

Uočimo da je prema definiciji ravnina regularna ploha.

Primjer 1.2. *Jedinična sfera je skup točaka $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.*



Slika 1: Jedinična sfera

Sferu možemo parametrizirati "po dijelovima":

$$\mathbb{X} : A \to \mathbb{R}^3, A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 < 1\}$$

- Gornja polusfera: $\mathbb{X}(a,b) = (a, b, \sqrt{1-a^2-b^2})$
- Donja polusfera: $\mathbb{X}(a,b) = (a, b, -\sqrt{1-a^2-b^2})$
- Lijeva polusfera: $\mathbb{X}(a,b) = (a, -\sqrt{1-a^2-b^2}, b)$
- Desna polusfera: $\mathbb{X}(a,b) = (a, \sqrt{1-a^2-b^2}, b)$
- Prednja polusfera: $\mathbb{X}(a,b) = (\sqrt{1-a^2-b^2}, a, b)$
- Stražnja polusfera: $\mathbb{X}(a,b) = (-\sqrt{1-a^2-b^2}, a, b)$

Sferu smo pokrili s ukupno 6 karata. Regularnost provjeravamo pojedinačno za svaku kartu. Provjerit ćemo za gornju polusferu, a za ostale ide analogno. Vrijedi:

$$\mathbb{X}_a = (1, 0, \tfrac{-a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}), \ \mathbb{X}_b = (0, 1, \tfrac{-b}{\sqrt{1-a^2-b^2}})$$

Uočimo da su $\mathbb{X}_a$ i $\mathbb{X}_b$ linearno nezavisni pa je ploha regularna.

Definicija 1.4. *Neka su $\mathbb{X} : A \to S \cap C$ i $\tilde{\mathbb{X}} : \tilde{A} \to S \cap \tilde{C}$ dvije karte okoline točke $t \in S \cap C \cap \tilde{C}$, te $B := \mathbb{X}^{-1}(S \cap C \cap \tilde{C}) \subset A$ i $\tilde{B} := \tilde{\mathbb{X}}^{-1}(S \cap C \cap \tilde{C})$ otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^2$. Kompozicija $\theta = \mathbb{X}^{-1} \circ \tilde{\mathbb{X}} : \tilde{B} \to V$ naziva se **funkcijom prijelaza** s karte $\mathbb{X}$ na $\tilde{\mathbb{X}}$. Pišemo $\tilde{\mathbb{X}}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \mathbb{X}(\theta(\tilde{a}, \tilde{b})) = \mathbb{X}(a, b)$.*

1.2. Tangencijalni vektor plohe i tangencijalna ravnina

Radi definiranja prve fundamentalne forme plohe bit će nam korisno prvo se upoznati s terminima tangencijalnog vektora plohe i tangencijalne ravnine.

Definicija 1.5. *Neka je zadana regularna ploha S i točka p na toj plohi S. Ako postoji krivulja $c : I \to S$ tako da je $c(0) = p$, te $c'(0) = v_p$, onda vektor $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$ nazivamo **tangencijalnim vektorom** plohe S u točki p. T_pS označava skup svih tangencijalnih vektora i nazivamo ga **tangencijalnom ravninom** plohe S u točki p.*

Propozicija 1.1. *(Vidjeti [4, 5.6. Theorem]) Tangencijalna ravnina plohe S zadana je parametrizacijom* $\mathbb{X} : A \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{X}(a, b) = \mathbb{X}_a(a_0, b_0)a + \mathbb{X}_b(a_0, b_0)b + \mathbb{X}(a_0, b_0)$*, gdje je* $\mathbb{X}(a_0, b_0) = p$.

Dokaz. Dokaz slijedi iz definicije tangencijalne ravnine. □

1.3. Metrika na plohi

U ovom poglavlju ćemo spomenuti metriku koju ćemo koristiti pri daljnjem pojašnjenju geometrije ploha. Kada su matematičari počeli istraživati plohe na kraju 18. stoljeća, to su činili u smislu jako malih udaljenosti i površina. Metrički prostor skup je na kojem je definirana metrika (udaljenost) između njegovih elemenata. Još nismo objasnili temeljnu ideju udaljenosti i kako je mjerimo na plohama. Udaljenost s između dvije točke $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ možemo izračunati pomoću sljedećeg izraza:

$$s^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2. \tag{1}$$

Međutim, na taj način ne računamo udaljenosti na plohama zato što su plohe zakrivljene. Da bi udaljenost među točkama na plohi točno odredili, prvo moramo precizirati pojam infinitezimala. Infinitezimalna verzija od (1) za n=2 dana je s

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{2}$$

gdje dx i dy možemo zamisliti kao jako male veličine u x i y smjeru. Formulu (2) koristimo za prostor $\mathbb{R}^2$, dok za plohe ili preciznije za dio plohe, moramo koristiti proširenu verziju formule (2) koja glasi ovako:

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdv + Gdy^2. \tag{3}$$

Ovo je standardna notacija za metriku na plohi. Nešto više o veličinama E,F,G i prvoj fundamentalnoj formi ćemo reći u nastavku.

1.4. Prva fundamentalna forma plohe

Definicija 1.6. *Simetričan bilinearan funkcional* $I_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ *koji se definira s* $I_p(v_p, w_p) = v_p \cdot w_p$ *nazivamo* ***prva fundamentalna forma*** *plohe S u točki p. Pridruženu kvadratnu formu* $I_p : T_pS \to \mathbb{R}, I_p(v_p) = v_p \cdot v_p$ *isto tako nazivamo prva fundamentalna forma.*

Ako zapišemo prvu fundamentalnu formu plohe pomoću karte $\mathbb{X} : A \to \mathbb{X}(A) \subset S$, tada postoji krivulja $c : I \to S$ tako da je $c(0) = p, c'(0) = v_p$, $v_p \in T_pS$. Neka je $p = \mathbb{X}(a_0, b_0)$i krivulju c možemo prikazati kao $c(t) = \mathbb{X}(a(t), b(t))$. Budući da vrijedi $v_p = c'(0) = \mathbb{X}_a(a_0, b_0)u'(0) + \mathbb{X}_b(a_0, b_0)v'(0)$, dobit ćemo

$$I_p(v_p) = v_p \cdot v_p = (\mathbb{X}_a(a_0, b_0)a'(0) + \mathbb{X}_b(a_0, b_0)b'(0))^2 =$$
$$\mathbb{X}_a^2(a_0, b_0)(a'(0))^2 + 2\mathbb{X}_a(a_0, b_0)\mathbb{X}_b(a_0.b_0)a'(0)b'(0) + \mathbb{X}_b^2(a_0, b_0)(v'(0))^2$$

Nadalje, definirati ćemo funkcije $E, F, G : A \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$E(a, b) = \mathbb{X}_a^2(a, b),$$
$$F(a, b) = \mathbb{X}_a(a, b)\mathbb{X}_b(a, b),$$
$$G(a, b) = \mathbb{X}_b^2(a, b)$$

i nazvati ih **fundamentalnim veličinama prvog reda** (koeficijentima prve fundamentalne norme). Pokažimo da nam prva fundamentalna forma može poslužiti za računanje duljine luka krivulje na plohi. Označimo s $c : I \to S$ krivulju na plohi $c(I) \subset \mathbb{X}(A)$. Duljina luka krivulje c je onda dana s

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \parallel \dot{c} \parallel dt,$$

što bi mogli zapisati i na sljedeći način:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I_p(\dot{c})} dt.$$

Ukoliko je $c(t) = \mathbb{X}(a(t), b(t))$, tada je

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(a'(t))^2 + 2Fa'(t)b'(t) + G(b'(t))^2} dt.$$

Deriviramo li gornji izraz po varijabli t te ga podjelimo s dt i kvadriramo dobit ćemo

$$\left(\tfrac{ds}{dt}\right)^2 = E(a'(t))^2 + 2Fa'(t)b'(t) + G(b'(t))^2,$$

što se ponekad piše i kao

$$ds^2 = Eda^2 + 2Fdadb + Gdb^2,$$

odnosno dobili smo izraz (3). Primjetimo kako na desnoj strani izraza (3) nema varijable t osim što varijable a i b ovise o t. U tom slučaju možemo reći da je ds infinitezimalna duljina luka jer daje funkciju duljine luka kada se integrira po nekoj plohi. Geometrijski ds možemo interpretirati kao udaljenost od točke $\mathbb{X}(a, b)$ do točke $\mathbb{X}(a + da, b + db)$ izmjerenu duž neke plohe. Zaista, ukoliko je

$$c(t + dt) \approx c(t) + \dot{c}(t)dt = c(t) + \mathbb{X}_a a'(t)dt + \mathbb{X}_b b'(t)dt$$

onda je

$$\parallel c(t + dt)c(t) \parallel \approx \parallel \mathbb{X}_a a'(t) + \mathbb{X}_b b'(t) \parallel dt = \sqrt{Ea'^2 + 2Fa'b' + Gb'^2} dt = ds.$$

Na kolegiju Funkcije više varijabli smo rekli kako je diferencijal funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiran s

$$df = \tfrac{\partial f}{\partial a} da + \tfrac{\partial f}{\partial b} db.$$

Općenitije, ukoliko je $\mathbb{X} : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ regularna i injektivna karta dijela plohe te $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija, onda je

$$df = \tfrac{\partial(f \circ \mathbb{X})}{\partial a} da + \tfrac{\partial(f \circ \mathbb{X})}{\partial b} db.$$

Diferencijali funkcija $\mathbb{X}(a, b) \to a$ i $\mathbb{X}(a, b) \to b$ su označeni s da i db te onda za $d\mathbb{X} = \mathbb{X}_a da + \mathbb{X}_b db$ vrijedi

$$\begin{aligned} d\mathbb{X}d\mathbb{X} &= (\mathbb{X}_a da + \mathbb{X}_b db)(\mathbb{X}_a da + \mathbb{X}_b db) \\ &= \parallel \mathbb{X}_a \parallel^2 da^2 + 2\mathbb{X}_a\mathbb{X}_b dadb + \parallel \mathbb{X}_b \parallel^2 db^2 \\ &= Eda^2 + 2Fdadb + Gdb^2 \\ &= ds^2. \end{aligned}$$

Metrika se može mijenjati s obzirom na koordinate. Osim duljine luka krivulje na plohi, pomoću prve fundamentalne forme također možemo računati i kut između krivulja na plohi u točki njihovog presjeka $c(t_0) = \bar{c}(\bar{t_0})$ kako je prikazano ovdje:

$$\cos\phi = \frac{\dot{c}(t)\cdot\dot{\bar{c}}(\bar{t})}{\parallel \dot{c}(t) \parallel\parallel \dot{\bar{c}}(\bar{t}) \parallel} = \frac{Ea'\bar{a}' + F(a'\bar{b}' + \bar{a}'b') + Gb'\bar{b}'}{\sqrt{E(a')^2 + 2Fa'b'(t) + G(b')^2}\sqrt{E(\bar{a}')^2 + 2F\bar{a}'\bar{v}' + G(\bar{b}')^2}}, \tag{4}$$

gdje je $c(t) = \mathbb{X}(a(t), v(t)), \bar{c}(t) = \mathbb{X}(\bar{a}(\bar{t}), \bar{b}(\bar{t}))$. Posebno, ukoliko imamo parametarske u-krivulje i v-krivulje, kut između njih računamo po sljedećoj formuli:

$$\cos\phi = \tfrac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Naposljetku, možemo izračunati i površinu dijela plohe:

$$P = \textstyle\int_A \sqrt{EG - F^2} dadb.$$

Primjer 1.3. *Izračunajmo prvu fundamentalnu formu za sferu radijusa r parametriziranu s* $\mathbb{X}(a, b) = (r\cos b\cos a, r\cos b\sin a, r\sin b)$*, gdje je* $a \in [0, 2\pi]$ *i* $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Za parcijalne derivacije, odnosno koeficijente prve fundamentalne forme dobivamo:

$$\mathbb{X}_a(a, b) = (-r\cos b\sin a, r\cos b\cos a, 0),\ \mathbb{X}_b(a, b) = (-r\sin b\cos a, -r\sin b\sin a, r\cos b)$$
$$E(a, b) = r^2\cos b^2,\ F(a, b) = 0,\ G(a, b) = r^2.$$

Uvrstimo li sve što smo izračunali u izraz za prvu fundamentalnu formu dobit ćemo:

$$I(a, b) = r^2\cos b^2 a'^2 + r^2 b'^2.$$

Lema 1.1. *(Vidjeti [1, Lemma 12.4.]) Neka su* $\mathbb{X} : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ *te* $\mathbb{Y} : \mathcal{B} \to \mathbb{M}$ *dijelovi regularne plohe* $\mathcal{M}$*, gdje je* $\mathbb{X}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Y}(\mathcal{B})$ *neprazan skup. Nadalje, neka je* $\mathbb{X}^{-1} \circ \mathbb{Y} = (\bar{a}, \bar{b}) : \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \to \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ *promjena koordinata tako da je*

$$\mathbb{Y}(a, b) = \mathbb{X}(\bar{a}(a, b), \bar{b}(a, b)).$$

Pretpostavimo da $\mathcal{M}$ *ima metriku te označimo metriku na* $\mathbb{X}$ *i* $\mathbb{Y}$ *s* $ds^2_{\mathbb{X}} = E_{\mathbb{X}}d\bar{a}^2 + 2F_{\mathbb{X}}d\bar{a}d\bar{b} + G_{\mathbb{X}}d\bar{b}^2$ *i* $ds^2_{\mathbb{Y}} = E_{\mathbb{Y}}d\bar{a}^2 + 2F_{\mathbb{Y}}d\bar{a}d\bar{b} + G_{\mathbb{Y}}d\bar{b}^2$*. Vrijedi:*

$$\begin{cases} E_{\mathbb{Y}} = E_{\mathbb{X}}(\frac{\partial\bar{a}}{\partial a})^2 + 2F_{\mathbb{X}}\frac{\partial\bar{a}}{\partial a}\frac{\partial\bar{b}}{\partial a} + G_{\mathbb{X}}(\frac{\partial\bar{b}}{\partial a})^2, \\ F_{\mathbb{Y}} = E_{\mathbb{X}}\frac{\partial\bar{a}}{\partial a}\frac{\partial\bar{a}}{\partial v} + F_{\mathbb{X}}(\frac{\partial\bar{a}}{\partial a}\frac{\partial\bar{b}}{\partial b} + \frac{\partial\bar{a}}{\partial a}\frac{\partial\bar{b}}{\partial a}) + G_{\mathbb{X}}\frac{\partial\bar{b}}{\partial a}\frac{\partial\bar{b}}{\partial b}, \\ G_{\mathbb{Y}} = E_{\mathbb{X}}(\frac{\partial\bar{a}}{\partial b})^2 + 2F_{\mathbb{X}}\frac{\partial\bar{a}}{\partial b}\frac{\partial\bar{b}}{\partial b} + G_{\mathbb{X}}(\frac{\partial\bar{b}}{\partial b})^2. \end{cases}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti računom za $E_{\mathbb{Y}}$:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Y}} = \mathbb{Y}_a\mathbb{Y}_a &= (\tfrac{\partial\bar{a}}{\partial a}\mathbb{X}_{\bar{a}} + \tfrac{\partial\bar{b}}{\partial a}\mathbb{X}_{\bar{b}})(\tfrac{\partial\bar{a}}{\partial a}\mathbb{X}_{\bar{a}} + \tfrac{\partial\bar{b}}{\partial a}\mathbb{X}_{\bar{b}}) \\ &= (\tfrac{\partial\bar{a}}{\partial a})^2\mathbb{X}_{\bar{a}}\mathbb{X}_{\bar{a}} + 2(\tfrac{\partial\bar{a}}{\partial a})\tfrac{\partial\bar{b}}{\partial b})\mathbb{X}_{\bar{a}}\mathbb{X}_{\bar{b}} + (\tfrac{\partial\bar{b}}{\partial b})^2\mathbb{X}_{\bar{b}}\mathbb{X}_{\bar{b}} \\ &= (\tfrac{\partial\bar{a}}{\partial a})^2 E_{\mathbb{X}} + 2\tfrac{\partial\bar{a}}{\partial a}\tfrac{\partial\bar{b}}{\partial a}F_{\mathbb{X}} + (\tfrac{\partial\bar{b}}{\partial a})^2 G_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

Analogno se dokaže i za $F_{\mathbb{Y}}$ i $G_{\mathbb{Y}}$. $\square$

1.5. Izometrija između ploha

Definicija 1.7. *Neka je $F : M \to N$ preslikavanje ploha.* ***Tangencijalna karta*** *F_* od F svakom tangencijalnom vektoru v plohe M pridružuje tangencijalni vektor $F_*(v)$ plohe N tako da ako je v tangencijalni vektor krivulje α na plohi M u točki p, tada je $F_*(v)$ tangencijalni vektor krivulje $F(\alpha)$ na plohi N u točki $F(p)$.*

Definicija 1.8. *Neka su $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ regularne plohe u $\mathbb{R}^n$. Kartu $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ nazivamo* ***lokalna izometrija*** *ukoliko njena tangencijalna karta zadovoljava*

$$\| \phi_*(v_p) \| = \| v_p \| \tag{5}$$

za sve tangencijalne vektore v_p na $\mathcal{M}_1$.

Lema 1.2. *(Vidjeti [1, Lemma 12.6.]) Lokalna izometrija je lokalni difeomorfizam.*

Svaka izometrija u $\mathbb{R}^n$ koja kartira regularnu plohu $\mathcal{M}_1$ na regularnu plohu $\mathcal{M}_2$ očito je ograničena između ploha $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$. Neka su v_p i w_p tangencijalni vektori na $\mathcal{M}_1$. Ako pretpostavimo da (5) vrijedi, budući da je ϕ_* linearna vrijedi:

$$\begin{aligned} \phi_*\phi_* &= \tfrac{1}{2}(\| \phi_*(v_p + w_p) \|^2 - \| \phi_*(v_p) \|^2 - \| \phi_*(w_p) \|^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(\| (v_p + w_p) \|^2 - \| v_p \|^2 - \| w_p \|^2) \\ &= v_p \cdot w_p. \end{aligned}$$

Prema tome, (5) je ekvivalentno s

$$\phi_*(v_p)\phi_*(w_p) = v_p \cdot w_p. \tag{6}$$

Pokazat ćemo da je plošno kartiranje izometrično ako i samo ako sačuva Riemannovu metriku.

Lema 1.3. *(Vidjeti [1, Lemma 12.7.]) Neka je $\boldsymbol{x} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ regularna injektivna karta dijela plohe, a $\boldsymbol{y} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ karta proizvoljnog dijela plohe. Nadalje, neka su s $ds^2_{\boldsymbol{x}} = E_{\boldsymbol{x}}da^2 + 2F_{\boldsymbol{x}}dadb + G_{\boldsymbol{x}}db^2$ i $ds^2_{\boldsymbol{y}} = E_{\boldsymbol{y}}da^2 + 2F_{\boldsymbol{y}}dadb + G_{\mathbb{Y}}db^2$ označene inducirane Riemannove metrike na $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$. Tada za kartu definiranu kao*

$$\phi = \boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x}^{-1} : \boldsymbol{x}(\mathcal{A}) \to \boldsymbol{y}(\mathcal{A})$$

kažemo da je lokalna izometrija ako i samo ako je $ds^2_{\boldsymbol{x}} = ds^2_{\boldsymbol{y}}$.

1.6. Operator oblika plohe

Neka je zadana regularna ploha S i karta $\mathbb{X} : A \to \mathbb{R}^3$ koja pokriva dio plohe $\mathbb{X}(A) \cap S$. Imamo tangencijalnu ravninu plohe T_pS u točkama $p \in \mathbb{X}(A) \cap S$ koja je razapeta vektorima $\mathbb{X}_a$ i $\mathbb{X}_b$. Dakle, jedinstveni vektor normale tangencijalne ravnine jednak je $n = \frac{\mathbb{X}_a \times \mathbb{X}_b}{\|\mathbb{X}_a \times \mathbb{X}_b\|}$.

Definicija 1.9. *Preslikavanje $n : A \to S^2$, gdje je S regularna ploha pokrivena kartom $\mathbb{X}$, a S^2 jedinična sfera sa središtem u ishodištu, definirano s $n(a, b) = \frac{\mathbb{X}_a(a,b) \times \mathbb{X}_b(a,b)}{\|\mathbb{X}_a(a,b) \times \mathbb{X}_b(a,b)}$ nazivamo* ***Gaussovim preslikavanjem****.*

Uzmimo u obzir da su sve normale jedinični vektori u svim smjerovima pa "lete" po toj sferi.
Nakon što smo se upoznali s prethodnim pojmovima, možemo definirati operator plohe ili Weingartenovo preslikavanje koje je dobilo ime po njemačkom matematičaru Juliusu Weingartenu. On je smatrao teoriju ploha najvažnijim dijelom diferencijalne geometrije.

Definicija 1.10. ***Operator oblika plohe*** *S u točki p je preslikavanje* $S_p : T_pS \to T_p\mathbb{R}^3$ *definirano s* $S_p(v_p) = -D_{v_p}n(p)$.

Obratimo pozornost da je operator oblika S_p plohe S u točki p linearan operator te za svaki $p \in S$ vrijedi $S_p(v_p) \in T_pS$. Također vrijedi $S_p(v)w = vS_p(w)$ za svaki $v, w \in T_pS$, tj. operator oblika plohe je i simetričan operator.

Definicija 1.11. ***Gaussova zakrivljenost*** *plohe S u točki p je funkcija* $K : S \to \mathbb{R}$ *definirana kao* $K(p) = detS_p$.
Srednja zakrivljenost *plohe S u točki p je funkcija* $H : S \to \mathbb{R}$ *definirana kao* $H(p) = \frac{1}{2}trS_p$.

Budući da je S_p simetričan operator, postoji baza od T_pS u kojoj je matrični prikaz tog operatora dijagonalna matrica. Označimo li tu bazu s $\{e_1, e_2\}$, dobit ćemo $S_p(e_1) = k_1(p)e_1$ i $S_p(e_2) = k_2(p)e_2$,

$$S_p = \begin{bmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{bmatrix}.$$

Glavne zakrivljenosti plohe S su svojstvene vrijednosti matrice operatora S_p, a glavni vektori (ili smjerovi) su svojstvene vrijednosti e_1 i e_2. Dakle, sada je Gaussova zakrivljenost dana s $K(p) = k_1(p)k_2(p)$, a srednja zakrivljenost s $H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p))$.

2. Preslikavanje ploha

Neka su zadane plohe M i $\overline{M}$.

S $f : M \to \overline{M}$ označimo preslikavanje koje točki *P(a,b)* plohe M pridružuje točku $\bar{P}(\bar{a}, \bar{b})$ na plohi $\overline{M}$, pri čemu je

$$\bar{a} = \bar{a}(a, b) \tag{7}$$

$$\bar{b} = \bar{b}(a, b) \tag{8}$$

uz uvjet:

$$\tfrac{\partial(\bar{a},\bar{b})}{\partial(a,b)} \neq 0.$$

Pretpostavimo da su funkcije $\bar{a}$ i $\bar{b}$ jednoznačne, neprekidne, diferencijabilne i bijektivne, to jest svakom paru (a, b) odgovara jedan par $(\bar{a}, \bar{b})$ i obrnuto, svaki par $(\bar{a}, \bar{b})$ je slika jednog para (a, b).

Prva fundamentalna forma za plohu M je dana s:

$$ds^2 = Eda^2 + 2Fdadb + Gdb^2, \tag{9}$$

a plohu $\overline{M}$ s:

$$d\overline{s}^2 = \overline{E}da^2 + 2\overline{F}dadb + \overline{G}db^2, \tag{10}$$

gdje su E, F, G, $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ fundamentalne veličine prvog reda te imaju iste parametre a i b.

Promatrat ćemo tri vrste preslikavanja:

1. **izometrijsko preslikavanje**,
2. **konformno preslikavanje**,
3. **ekvivalentno (ekviarealno) preslikavanje**.

2.1. Izometrijsko preslikavanje

Izometrijsko preslikavanje nam je poznato kao preslikavanje koje čuva udaljenosti među točkama pa time i duljine lukova krivulja na plohama. Da bi preslikavanje bilo izometrijsko moraju biti ispunjeni sljedeći uvjeti.
Ako je za plohu M prva fundamentalna formna zadana s $ds^2 = Eda^2 + 2Fdadb + Gdb^2$, a za plohu $\overline{M}$ s $d\overline{s}^2 = \overline{E}dadb + 2\bar{F}dadb + \overline{G}db^2$, onda je pri izometrijskom preslikavanju sačuvana duljina svakog elementa luka. Preslikavanje je izometrijsko ukoliko za sve a i b te za sve da i db, odnosno za sve točke vrijedi

$$ds^2 = d\overline{s}^2.$$

Uočimo da će to vrijediti samo ako je

$$\begin{aligned} E &= \overline{E}, \\ F &= \overline{F}, \\ G &= \overline{G}. \end{aligned}$$

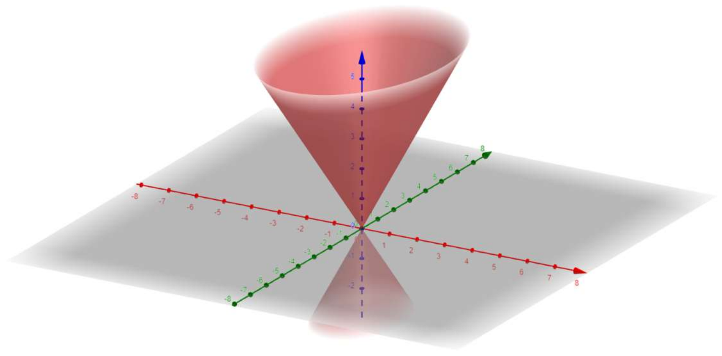
Plohe M i $\overline{M}$ su **izometrične** ukoliko postoji preslikavanje između njih koje je izometrijsko. Uzmemo li točku P s plohe M i s $f : M \to \bar{M}$ zadamo preslikavanje plohe te neka još imamo $\frac{da}{db}$ što je smjer na M u točki P. U tom slučaju definiramo omjer

$$m = \frac{d\overline{s}}{ds} = \sqrt{\frac{\overline{E}d\overline{a}^2 + 2\overline{F}d\overline{a}\overline{b} + \overline{G}d\overline{b}^2}{Eda^2 + 2Fdadb + Gdb^2}}, \tag{11}$$

gdje su E,F,G računati u točki P, dok su $\overline{E}$,$\overline{F}$, $\overline{G}$ u točki $\overline{P}$. Smjer $\frac{d\overline{a}}{d\overline{b}}$ je smjer koji dobijemo preslikavanjem $\frac{da}{db}$ i nazivamo ga **linearnim mjerilom** preslikavanja f u točki T u smjeru $\frac{da}{db}$.
Specijalno, ako je f izometrijsko preslikavanje, onda je $m = 1$.

Ako imamo izometrijsko preslikavanje s plohe M u plohu $\overline{M}$, pri čemu su plohe parametrizirane istim parametrima, onda znamo da su fundamentalne veličine prvog reda jednake te se jednu plohu može saviti ili položiti na drugu. **Razvojne plohe** su plohe koje možemo preslikati, to jest razviti u ravninu. Iz definicije izometrijskog preslikavanja i izraza za Gaussovu zakrivljenost koja iznosi $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$, slijedi da dvije plohe koje se mogu saviti ili položiti jedna na drugu imaju jednaku Gaussovu zakrivljenost. Isto vrijedi i za specijalan slučaj savijanja, odnosno za razvijanje plohe u ravninu.

Primjer 2.1. *Ovoj grupi ploha pripadaju svi stošci i valjci te plohe čije su izvodnice tangente neke prostorne krivulje.*



Slika 2: Eliptički stožac zadan s $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$

Primjer 2.2. *Obzirom da Gaussova zakrivljenost sfere iznosi* $K = \frac{1}{R^2}$*, što je različito od nula, a Gaussova zakrivljenost ravnine je 0, slijedi da se sfera ne može razviti u ravninu.*

Ovaj uvjet je dovoljan samo u slučaju da su Gaussove zakrivljenosti promatranih ploha konstantne. Ne mora nužno značiti da ako su Gaussove zakrivljenosti dvije plohe jednake, da se mogu razviti jedna na drugu.

2.2. Konformno preslikavanje

Definicija 2.1. *Za preslikavanje ploha* $f : M \to \overline{M}$ *kažemo da je lokalno konformno ako za diferencijalno preslikavanje* $F_* : T_pM \to T_p\overline{M}$ *vrijedi* $F_*g = \mu\overline{g}$ *za glatku funkciju* $\mu : M \to \mathbb{R}_+$*, odnosno* $\mu : M \to \mathbb{R}_-$*, gdje su* g*, odnosno* $\overline{g}$ *inducirana metrika na plohi* M*, odnosno* $\overline{M}$*.*

Preslikavanje je **konformno** ako je bijektivno lokalno konformno. Mora vrijediti da ukoliko se na plohi M dvije krivulje sijeku pod kutom α, dok se na plohi $\bar{M}$ slike tih krivulja sijeku pod kutom $\bar{\alpha}$

$$\overline{\alpha} = \alpha. \tag{12}$$

Pogledajmo krivulje $a_1 = a_1(b)$ i $a_2 = a_2(b)$ plohe M na kojima ćemo iskoristiti definiciju za kut između dvije krivulje na plohi (4) i gore navedeni uvjet (12) te dobiti sljedeće:

$$\cos\overline{\alpha} = \frac{\bar{E}da_1da_2+\bar{F}(da_1+da_2)db+\bar{G}db^2}{\sqrt{\bar{E}da_1{}^2+2\bar{F}da_1db+\bar{G}db^2}\sqrt{\bar{E}da_2^2+2\bar{F}da_2db+\bar{G}db^2}}$$
$$= \frac{Em^2da_1da_2+Fm^2(da_1+da_2)db+Gm^2db^2}{\sqrt{Eda_1{}^2+2Fm^2da_1db+Gm^2db^2}\sqrt{Eda_2{}^2+2Fm^2da_2db+Gm^2db^2}}$$
$$=\cos\alpha.$$

Sličnost infinitezimalnih figura ploha M i $\bar{M}$ leži upravo u uvjetu (12). Za konformno preslikavanje iz uvjeta konformnosti proizlazi:

$$\frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = m^2(a,b). \tag{13}$$

Ako parametarske krivulje na plohama M i $\overline{M}$ tvore ortogonalnu mrežu, tada je $\overline{F} = F = 0$ pa je kut α između bilo koje krivulje β i a-krivulje dan s:

$$\cos\alpha = \frac{E\dot{a}}{\sqrt{E}\sqrt{E\dot{a}^2+G\dot{b}^2}}.$$

Koristeći

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{db}{da} \tag{14}$$

i pretpostavku $\bar{F} = F = 0$ definira se **deformacija kutova**:

$$\frac{tg\bar{\alpha}}{tg\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{E}}}}{\sqrt{\frac{G}{E}}}. \tag{15}$$

Kod konformnog preslikavanja vrijedi $\frac{tg\bar{\alpha}}{tg\alpha} = 1$, odnosno deformacija kutova je 1 što znači da ono 'čuva' kutove pa ima važnu primjenu u kartografiji.

2.3. Ekviarealno preslikavanje

Definicija 2.2. *Ako površinu na plohama M i $\overline{M}$ računamo kao*

$$dM = \sqrt{EG - F^2}dadb$$
$$d\overline{M} = \sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}dadb,$$

onda je preslikavanje $F : M \to \overline{M}$ ekviarealno (ekvivalentno) ukoliko vrijedi

$$d\overline{M} = dM, \tag{16}$$

odnosno:

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = EG - F^2. \tag{17}$$

Ako definiramo **površinsko mjerilo preslikavanja** okoline O oko točke T na plohi M u okolinu $\overline{O}$ točke $\overline{T}$ kao

$$P = \lim_{M \to 0} \frac{\overline{M}}{M}, \tag{18}$$

odnosno:

$$P = \frac{d\overline{M}}{dM}, \tag{19}$$

dobijemo da je površinsko mjerilo

$$P = \sqrt{\frac{\overline{EG} - \overline{F}^2}{EG - F^2}}. \tag{20}$$

Iz (17) dobijemo da je za ekviarealna preslikavanja $P = 1$. Općenitije, preslikavanje je ekviarealno ako je:

$$P = C (C = konst. > 0). \tag{21}$$

Literatura

[1] A. Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces*, CRC Press, 2016.

[2] B. O'Neill, *Elementary differential geometry*, Academic Press, 2006.

[3] B. Žarinac-Frančula, *Diferencijalna geometrija*, Zbirka zadataka i repetitorij, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb, 1980.

[4] W. Kuehnel, *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds*, AMS, 2002.