Životno osiguranje

Barišić Mihić, Irena

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Irena Barišić Mihić

Životno osiguranje

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište te J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Irena Barišić Mihić

Životno osiguranje

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2022.

Sadržaj

Uvod

Temeljni cilj životnog osiguranja je pružiti financijsku sigurnost članovima obitelji u slučaju smrti ili teške bolesti osiguranika. Ukoliko polica životnog osiguranja istekne, a nema smrtnog slučaja, isplaćuje se osigurana svota i udio u dobiti ako ga osiguravajuće društvo ostvari. Štedni dio police životnog osiguranja prvenstveno je oblik obvezne štednje, dok rizični dio police isplaćuje naknade u slučaju neočekivanog događaja. U ovom radu ćemo predstaviti tri osnovne vrste životnih osiguranja: *Osiguranje doživljenja*, *Riziko osiguranje* i *Mješovito osiguranje*. U praksi još postoji *Investicijsko životno osiguranje* gdje ugovaratelj osiguranja ulaže vlastita sredstva u investicijske fondove koje je samostalno odabrao.

U prvom poglavlju ćemo navesti osnovne definicije i formule financijske matematike za lakše razumijevanje samog koncepta osiguranja. Životno osiguranje se sklapa između osiguravajuće kuće (osiguratelja) i ugovaratelja osiguranja koji je najčešće i korisnik osiguranja. Polica životnog osiguranja sastoji se od osiguranog slučaja (događaj s obzirom na koji se sklapa osiguranje), rizika koji je obuhvaćen osiguranjem, trajanja osiguranja, osigurane svote i premije osiguranja (cijena osiguranja).

Za izračun premije u životnim osiguranjima bitno nam je prvo definirati osnovne biometrijske funkcije poput očekivanog trajanja života, vjerojatnost doživljenja, broj živih, broj umrlih, itd. koje se dobivaju iz tzv. tablica mortaliteta koje ćemo obraditi u drugom poglavlju. U trećem poglavlju ćemo detaljnije opisati vrste životnih osiguranja i navesti primjere modela mješovitog osiguranja koje trenutno nude neke osiguravajuće kuće u RH. Vrste premija i njihov izračun ćemo objasniti u završnom, četvrtom poglavlju gdje ćemo također predstaviti policu mješovitog osiguranja iz stvarnog života kako bi uvidjeli razlike između teorijskog i praktičnog izračuna premije.

1. Osnovni pojmovi i oznake financijske matematike

1.1. Efektivna i nominalna kamatna stopa

Pojam kamata možemo definirati kao cijenu koju plaćamo za korištenje tuđih sredstava za određeno vremensko razdoblje. Novac koji posuđujemo zove se glavnica, a postotak kamate koji se plaća na glavnicu je kamatna stopa. Na primjer, 100 HRK kredita košta 5 HRK, tj. 100 HRK kredita košta 5%. S druge strane, mi možemo uložiti novac na štednju u banku, banka dobije naš novac na raspolaganje na određeno vrijeme i za to nam daje određenu naknadu tj. kamatu.

U daljnjem razmatranju uzet ćemo 1 godinu za jedinični vremenski interval. U praksi je često jedinični interval 1 godina, a u teoriji može biti bilo koji drugi interval. Započnimo s investicijom u iznosu 1 uloženom u trenutku t na razdoblje od 1 godine. Pretpostavimo da se u trenutku $t+1$ vraća iznos od $1+i(t)$. Tada, $i(t)$ nazivamo kamatnom stopom za jedinični vremenski interval $[t, t+1]$ ili godišnja efektivna kamatna stopa. Pretpostavimo da godišnja kamatna stopa $i(t)$ ne ovisi o investiranom novcu. Svejedno nam je uložili iznos od 100 ili 1 000 000, kamatna stopa će ostati nepromijenjena.

Ukoliko uložimo iznos od X u trenutku t, nakon jedne godine ćemo dobiti $X \cdot (1+i(t))$. Ako u trenutku $t = 0$ uložimo iznos X_0 u složenom sustavu kamate u trenutku $t = n$, $n \in \mathbb{N}$, imat ćemo izraz

$$X_n = X_0 \cdot (1 + i(0)) \cdot (1 + i(1)) \cdot (1 + i(2)) \cdots (1 + i(n-2)) \cdot (1 + i(n-1)). \qquad (1.1.1)$$

Ako je godišnja efektivna kamatna stopa neovisna o vremenu investicije, tj. $i(t) = i$, tada formulu (1.1.1) možemo zapisati na sljedeći način

$$X_n = X_0 \cdot (1+i)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje je X_n akumulirani iznos od X_0 u trenutku n po godišnjoj efektivnoj kamatnoj stopi i.

Nadalje, razmotrimo transakcije za razdoblje h, $h > 0$, pri čemu h ne mora nužno biti cijeli broj. Neka je promatrani period $[t,\ t + h]$ i neka kamatna stopa ne ovisi o visini uloženog novca. Brojem $i_h(t)$ definiramo nominalnu kamatnu stopu u trenutku t za transakciju na intervalu $[t,\ t + h]$. Ako je iznos 1 uložen u trenutku t za razdoblje h, u trenutku $t + h$ dobit ćemo iznos

$$A(t, t+h) = 1 + h \cdot i_h(t). \qquad (1.1.2)$$

Ostale veličine dobivamo proporcionalno. Uložimo li iznos X u trenutku t za razdoblje h, u trenutku $t + h$ dobit ćemo iznos

$$X \cdot A(t, t+h).$$

Primijetimo, za $h = 1$ nominalna kamatna stopa jednaka je efektivnoj kamatnoj stopi $i(t)$ za vremenski period $[t,\ t + 1]$, tj.

$$i_1(t) = i(t). \tag{1.1.3}$$

Često su u praksi akumulacije $A(t,\ t + h)$, odnosno kamatne stope neovisne o vremenu investiranja t i tada pišemo

$$i_h(t) = i_h, \quad \forall t.$$

Ako je $h = \frac{1}{p}$, $p \in N$ onda pišemo

$$i_{\frac{1}{p}} = i^{(p)}, \quad p \in N.$$

Kažemo da je $i^{(p)}$ godišnja nominalna kamatna stopa konvertibilna ili plativa p puta godišnje.

$p = 2$	$h = \frac{1}{2}$	polugodišnja transakcija
$p = 4$	$h = \frac{1}{4}$	kvartalna transakcija
$p = 12$	$h = \frac{1}{2}$	mjesečna transakcija
$p = 365$	$h = \frac{1}{365}$	dnevna transakcija

Tablica 1: Nazivi transakcija u ovisnosti od p

Investirani iznos 1 će za razdoblje duljine $\frac{1}{p}$ dati povrat od

$$1 + \frac{1}{p} \cdot i^{(p)}, \quad p \in N.$$

1.2. Faktor akumulacije

Neka su nam dani trenutci t_1 i t_2, te neka je $t_1 \leqslant t_2$. Definirajmo veličinu $A(t_1, t_2)$ kao akumulaciju u trenutku t_2 investicije iznosa 1 investirane u trenutku t_1. Trenutak investicije ćemo zvati trenutak t_1 dok ćemo trenutak t_2 zvati dospijeće.
Iz formule (1.1.2) vrijedi da je $A(t, t+h) = 1 + h \cdot i_h(t)$ i definiramo da je $A(t,t) = 1, \forall t$.
S obzirom kako je $A(t_1, t_2)$ akumulacija jediničnog kapitala, vrijedi proporcionalnost

$$X(t_2) = X(t_1) \cdot A(t_1, t_2). \tag{1.2.1}$$

Formulom (1.2.1) opisali smo akumulaciju u trenutku t_2 za investirani iznos $X(t_1)$ koji je investiran u trenutku t_1. Veličinu $A(t_1, t_2)$ nazivamo faktor akumulacije.

Promotrimo sada investiciju u trenutku t_0 iznosa 1 i neka je $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$. U trenutku t_2 imamo akumulaciju $A(t_0, t_2)$. U drugom slučaju kada investiramo jedinični iznos u t_0, a u trenutku t_1 povučemo akumulirani iznos $A(t_0, t_1)$ te ga reinvestiramo, tada u trenutku t_2 imamo iznos $A(t_0, t_1) \cdot A(t_1, t_2)$. U konzistentnim tržištima oba slučaja trebala bi dati isti akumulirani iznos

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1) \cdot A(t_1, t_2), \quad \forall\, t_0 \le t_1 \le t_2.$$

Gornje svojstvo nazivamo *princip konzistencije*. U praksi često ne vrijedi princip konzistencije zbog poreza, administrativnih troškova i drugih naknada, no mi ćemo nadalje pretpostavljati da tržište zadovoljava taj uvjet. Induktivno slijedi

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1) \cdot A(t_1, t_2) \cdots A(t_{n-1}, t_n), \quad \forall\, t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n,\ n \in N. \tag{1.2.2}$$

Fiksirajmo sada godišnju efektivnu kamatnu stopu, tj. neka je kamatna stopa i neovisna o t i fiksirajmo $p \in N$. Vremenski interval koji promatramo je [0, 1]. Uz pomoć principa konzistencije izračunat ćemo odgovarajuće nominalne kamatne stope $i^{(p)}$. Želimo pokazati vezu između nominalne i efektivne kamatne stope. Prema formuli (1.1.2) slijedi

$$A\left(t, t + \frac{1}{p}\right) = 1 + \frac{1}{p} i^{(p)}, \quad \forall t. \tag{1.2.3}$$

Iz (1.2.3) slijedi

$$A\left(0,\frac{1}{p}\right)=A\left(\frac{1}{p},\frac{2}{p}\right)=A\left(\frac{2}{p},\frac{3}{p}\right)=\cdots=A\left(\frac{p-1}{p},1\right)$$

Primjenjujući princip konzistencije (1.2.2) i svojstvo (1.1.3) dobivamo

$$\left(1+\frac{1}{p}i^{(p)}\right)^{(p)}=A\left(0,\frac{1}{p}\right)\cdot A\left(\frac{1}{p},\frac{2}{p}\right)\cdots A\left(\frac{p-1}{p},1\right)=A(0,1)=1+i_1=1+i.$$

Na ovaj način smo pokazali vezu između nominalne i efektivne kamatne stope

$$\left(1+\frac{1}{p}i^{(p)}\right)^{p}=1+i \tag{1.2.4}$$

$$i^{(p)}=p\left((1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right). \tag{1.2.5}$$

Stoga, s prethodna dva izraza dana je veza između nominalne kamatne stope i efektivne kamatne stope, kada su ekvivalentne jedna drugoj.

Iz prethodne analize slijedi da za fiksnu efektivnu kamatnu stopu akumulacijski faktor $A(t,t+h)$ na intervalu $[t,t+h]$ možemo zapisati na sljedeći način

$$A(t,t+h)=(1+i)^h.$$

Primjer 1.1. *Pronađimo ekvivalentnu godišnju efektivnu kamatnu stopu za nominalnu godišnju kamatnu stopu 6% plativu mjesečno.*

Rješenje:

$h=\frac{1}{12}$, $p=12$, $i^{(12)}=0.06$
- *prema (1.2.4) slijedi da je* $i=\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12}-1=0.0617=6.17\%$.

1.3. Sadašnja vrijednost i financijske rente

U slučaju neprekidnog ukamaćivanja potrebno je definirati veličinu $\delta(t)$ koju nazivamo intenzitet kamate u trenutku t. Definiramo ju na slijedeći način

$$\delta(t) := \lim_{h \to 0+} i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}.$$

Ako su $\delta(t)$ i $A(t_0, t)$ neprekidne funkcije u varijabli $t \in [t_0, \infty]$ i ako vrijedi princip konzistencije iz (1.2.2), onda je

$$A(t_1, t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt}, \qquad \forall t_2 \geq t_1 \geq t_0.$$

Teorem i dokaz ove tvrdnje može se vidjeti u [1].

Do sada smo promatrali proces ukamaćivanja gdje nas je zanimala buduća vrijednost investiranog iznosa. Što ako nas zanima koliki je početni iznos od kojeg moramo krenuti štedjeti sada da bi kupili nešto u budućnosti. Primjerice, želimo u trenutku t_2 kupiti željeni auto od X novčanih jedinica. Zanima nas s koliko novčanih jedinica moramo početi štedjeti u trenutku t_1 i označimo to sa P. Akumulacija od P investiranog u trenutku t_1, u trenutku t_2 iznositi će $P \cdot A(t_1, t_2)$ i to je jednako iznosu X.

Pišemo

$$\frac{X}{A(t_1, t_2)} = X \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt}.$$

Iznos koji trebamo staviti na štednju je $X \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt}$ i zovemo ga diskontirana vrijednost u trenutku t_1 iznosa X koji dospijeva u trenutku t_2. Ako gledamo u trenutku $t = 0$ ("sadašnji trenutak"), onda iznos $X \cdot e^{-\int_0^t \delta(s) ds}$ nazivamo sadašnja vrijednost iznosa X koji dospijeva u trenutku t.

Neka je sa

$$v(t) := e^{-\int_0^t \delta(t) dt} = \frac{1}{A(0, t)}, \qquad \forall t \geq 0$$

definirana funkcija koja mjeri sadašnje vrijednosti iznosa 1 koji dospijeva u trenutku t.

Slučaj kada je $t < 0$ ima smisla gledati jer je tada sadašnja vrijednost dana sa

$$v(t) := e^{-\int_0^t \delta(s)ds} = e^{\int_t^0 \delta(s)ds} = A(t,0)$$

i predstavlja akumulaciju iznosa 1 od trenutka t u prošlosti do trenutka $t = 0$ u sadašnjosti.

U slučaju konstantne efektivne kamatne stope kada je $i(t) = i$, tada je i intenzitet kamate konstantan $\delta(t) = \delta, \forall t$ pa vrijedi

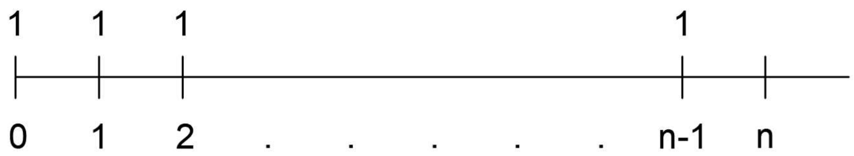
$$v(t) = e^{(-\delta)t}.$$

Ako je δ konstanta, slijedi da je i $e^{-\delta}$ konstanta. Neka je

$$v := e^{-\delta} = \frac{1}{1+i} \implies v(t) = v^t, \qquad t \geq 0.$$

Konstantu v zovemo diskontni faktor, a $d := 1 - v$ ćemo zvati diskontna ili efektivna anticipativna kamatna stopa. U trenutku $t = 0$ možemo gledati $v = 1 - d$ kao zajam za koji smo u trenutku $t = 0$ platili kamatu d, a u trenutku $t = 1$ naš će zajam biti isplaćen u iznosu 1.

Sada ćemo promatrati seriju od n jednakih isplata u jednakim vremenskim intervalima. Takvu seriju od n jednakih isplata ili uplata nazivamo financijska renta ili samo renta. Za takve isplate možemo biti sigurni da će se dogoditi neovisno o doživljenju ili smrti neke osobe. Nadalje, pretpostavit ćemo da i dalje koristimo konstantnu kamatnu stopu i. Prvo pogledajmo primjer kada se isplata izvršava na početku svake godine.



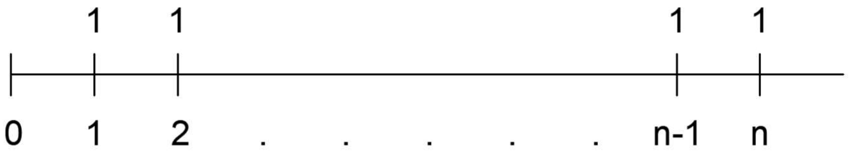
Slika 1: Prenumerando renta

Sadašnja vrijednost kada se isplata ostvaruje početkom svake godine u oznaci $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ prikazana na slici 1, jednaka je

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}\\ &= \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}.\end{aligned}$$

Ovakvu vrstu rente koja je plativa unaprijed, tj. plaćanja se izvršavaju na početku vremenskog intervala naziva se prenumerando renta. Sadašnja vrijednost prenumerando rente ukoliko se isplaćuje iznos X, iznosi $X \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Ako imamo slučaj isplate iznosa 1 na kraju svake godine, tada govorimo o postnumerando renti ili renti plativoj unatrag.



Slika 2: Postnumerando renta

Sadašnja vrijednost rente plative unatrag je

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n.$$

Primjer 1.2. *Zamislimo da uzimamo zajam u iznosu 10 000 na dan 1.1.2022. Zajmodavcu moramo vratiti dug u 20 jednakih uplata koje se plaćaju unaprijed godišnje. Trebamo odrediti iznos uplate ako je godišnja efektivna kamatna stopa $i = 6\%$.*
Rješenje:

$$10000 = X\ddot{a}_{\overline{20}|} \implies X = \frac{10000}{\ddot{a}_{\overline{20}|}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{20}|} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

sada primjenjujući definiciju za $v := \frac{1}{1+i}$ imamo

$$\ddot{a}_{\overline{20}|} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1.06}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{1.06}} = 12.1581$$

iz čega slijedi

$$X = 822.4958.$$

2. Tablice mortaliteta

U demografskoj analizi jedna od najstarijih tehnika je izrada tablice mortaliteta. Osnovni pokazatelj od niza demografskih pokazatelja koje sačinjavaju tablice mortaliteta je vjerojatnost smrti. Pomoću tog pokazatelja izračunavaju se ostale biometrijske funkcije poput očekivanog trajanja života, vjerojatnost doživljenja, broj živih, broj umrlih i dr. Tablice mortaliteta su jako bitne za izračun premije u životnom osiguranju, u mirovinskom i invalidskom osiguranju. Prve tablice mortaliteta sastavio je Edmund Halley 1693. godine.

Age. Curt.	Per-sons.	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539	36	481
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523	38	463
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515	39	454
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427
Age Curt	Per-sons.	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons	Age. Curt.	Per-sons
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49
45	397	52	324	59	252	66	182	73	109	80	41
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34
47	377	54	302	61	232	68	162	75	88	82	28
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20

Age.	Persons.
7	5547
14	4584
21	4270
28	3964
35	3604
42	3178
49	2709
56	2194
63	1694
70	1204
77	692
84	253
100	107
	34000
Sum Total.	

(Halley, 1693)

Slika 3: Prve tablica mortaliteta (E. Halley)

Promatrajmo skupinu od l_0 novorođenih osoba u dobi 0. Nadalje, pretpostavimo da u promatranoj skupini ne dolazi do novorođenih, da nema doseljavanja niti iseljavanja. Logično je pretpostaviti da umiranjem članova skupine dolazi do njenog smanjenja. Sa l_x označit ćemo broj svih članova promatrane skupine koji su doživjeli dob x, tj. broj novorođenih kojima je trenutna dob 0 i koji će najmanje doživjeti dob x. S obzirom da ljudi ne žive vječno, razumno je pretpostaviti da postoji gornja granica za životnu dob te ćemo nju označiti sa ω. Vrijedi da je $l_x = 0, \forall x \geq \omega$. Neka je d_x broj osoba koje su doživjele dob x, a nisu doživjele dob $x+1$. Zapravo govorimo o smrti u dobnom intervalu $[x, x+1)$.

Vezu između d_x i l_x prikazujemo na sljedeći način:

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Sada ćemo definirati stopu smrtnosti u dobi x te je označiti sa q_x. Ona je definirana kao uvjetna vjerojatnost smrti u dobnom intervalu $[x, x+1)$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \tag{2.0.1}$$

Sa p_x ćemo definirati uvjetnu vjerojatnost doživljenja dobi $x+1$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x.

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}. \tag{2.0.2}$$

Nadalje, definiramo sa ${}_np_x$ uvjetnu vjerojatnost doživljenja dobi $x+n$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x. Analogno sa ${}_nq_x$ definiramo uvjetnu vjerojatnost smrti u dobnom intervalu $[x, x+n)$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}.$$

Primijetimo da za $n = 1$ imamo stopu smrtnosti q_x i vjerojatnost doživljenja p_x. Koristeći formule (2.0.1) i (2.0.2) imamo

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = 1 - p_x.$$

U daljnjim primjerima koristit ćemo LAT A 1967-70 [1] tablice (vidjeti [1]). Sa l_0 se označava korijen tablice i uglavnom mu je vrijednost $l_0 = 100000$, a LAT A 1967-70 uzima za $l_0 = 34489$. Funkcija l_x dobiva smisao onda kada se uspoređuje s početnom l_0, odnosno kada se svaki l_x uspoređuje sa l_{x-1}. U slučaju kada x nije cijeli broj, funkciju l_x odredimo nekom interpolacijom tako da funkcija $l := l(x)$ postane neprekidna. Zbog teorijskih razloga često se pretpostavlja da je l_x derivabilna (glatka) funkcija.

[1] LAT je kratica za Life Assurance Table.

Uz prethodno navedene pretpostavke o funkciji l_x možemo definirati intenzitet smrtnosti na sljedeći način:

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{d}{dx}l_x = -\frac{d}{dx}\, ln(l_x) = -[ln(l_x)]'.$$

Sljedeći izrazi prikazuju neke od najpoznatijih zakona smrtnosti:

De Moivre:

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$$

Gompertz:

$$\mu_x = B\, C^x$$

Makeham:

$$\mu_x = A + B\, C^x$$

Dvostruki geometrijski red:

$$\mu_x = A + B\, C^x + M n^x$$

Makeham II. :

$$\mu_x = A + Hx + B\, C^x$$

gdje su A, B, C, H, M i n konstante. Navedeni zakoni smrtnosti su dosta komplicirani za korištenje u primjeni i ne mogu dovoljno precizno opisati smrtnost u širem dobnom intervalu. Svoju veliku primjenu imali su prije izuma računala.

Primjer 2.1. *Pogledajmo kolika je vjerojatnost da osoba u 55. godini života:*

a) doživi iduću godinu

b) premine tijekom sljedeće godine

c) premine prije dobi 65

d) doživi dob 75.

Rješenje:

Koristimo LAT A 1967-70, i = 4% (vidi [1])

a)

$$p_{55} = \frac{l_{56}}{l_{55}} = \frac{31417.739}{31685.203} = 0.9916$$

b)

$$q_{55} = \frac{d_{55}}{l_{55}} = \frac{267.4637}{31685.203} = 0.0084$$

c)

$$_{10}q_{55} = \frac{l_{55} - l_{65}}{l_{55}} = \frac{31685.203 - 27442.681}{31685.203} = 0.1339$$

d)

$$_{20}p_{55} = \frac{l_{75}}{l_{55}} = \frac{18507.942}{31685.203} = 0.5841.$$

Što ako želimo izračunati vjerojatnost da će osoba od 55 godina kao u gornjem primjeru umrijeti nakon navršenja dobi 75, ali prije dobi 85?

Da bi odgovorili na to pitanje, potrebno je definirati uvjetnu vjerojatnost smrti na intervalu $[x+n, x+n+k)$ uz uvjet da je osoba doživjela dob x:

$$_{n|k}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+k}}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n+k}}{l_x} = {}_np_x - {}_{n+k}p_x.$$

Izračunom smo dobili da je uvjetna vjerojatnost na dobnom intervalu [75,85) jednaka

$$_{20|10}q_{55} = \frac{l_{75} - l_{85}}{l_{55}} = 0.3706.$$

Dakle, ako osoba doživi 55. godinu života, vjerojatnost da će umrijeti nakon navršenja dobi 75, ali prije navršenja dobi 85, jednaka je 0.3706.

2.1. Tablice s odabirom

Odabrana tablica mortaliteta je tablica mortaliteta koja prikazuje koliko se očekuje da će trajati životni vijek ljudi različitih demografskih kategorija, temeljena samo na pojedincima koji su nedavno kupili police životnog osiguranja. Takve osobe imaju nižu stopu smrtnosti od osoba koje su već osigurane, prvenstveno zbog činjenice da su najvjerojatnije prošle određene liječničke preglede potrebne za osiguranje. Nakon određenog vremena, npr. t godina, smatramo da te osobe podliježu općim stopama smrtnosti. Taj period nazivamo period odabira.

Osiguravajuća društva koriste odabrane tablice mortaliteta, zajedno s drugim vrstama tablica mortaliteta, za izračun rizika povezanih sa svakim podnositeljem zahtjeva. Na temelju njih mogu odrediti je li isplativo ponuditi pokriće te ako je, koliko ga naplatiti u obliku premija. Ako koristimo odabranu tablicu mortaliteta, simbol $[x]$ označava da se osoba životne dobi x priključila osiguranju.
Za $s < t$ sa

$$ {}_kq_{[x]+s} $$

označavamo vjerojatnost da će korisnik osiguranja pristupne dobi x umrijeti do dobi $x+s+k$, a pritom je doživio dob $x+s$.

Vjerojatnost da će osoba koja je postala korisnik osiguranja u dobi x doživjeti dob $x+s+k$, ako je doživjela dob $x+s$, označavamo sa

$$ {}_kp_{[x]+s}. $$

Za $k = 1$ imamo oznake $q_{[x]+s}$, $p_{[x]+s}$. Ako osoba koja je pristupila osiguranju u dobi x doživi dob $x+t$, buduća smrtnost ne ovisi više o trajanju osiguranja. Dakle, ako je $x_1 + s_1 = x_2 + s_2$ i $s_1, s_2 \geq t$, slijedi

$$ p_{[x_1]+s_1} = p_{[x_2]+s_2}. $$

Za $s \geq t$ vjerojatnost doživljenja ovisi o vrijednostima x i k pa koristimo oznake ${}_kq_{x+s}$ i ${}_kp_{x+s}$ koje smo prije definirali. Vjerojatnost $p_{[x]+s}$ $(s < t)$ naziva se odabrana vrijednost, a p_{x+s} $(s \geq t)$ krajnja vrijednost.

Primjer 2.2. *Pogledajmo sljedeće vrijednosti koje prikazuju da osobe koje su nedavno pristupile osiguranju imaju manju stopu smrtnosti*

$$q_{[28]} = 0.00143 < q_{28} = 0.00212$$

$$q_{[28]+1} = 0.00179 < q_{29} = 0.00217$$

$$q_{[28]+2} = 0.00208 < q_{30} = 0.00223.$$

Korišten je dio tablice odabira [2] *(selected table) s odabranim periodom od 3 godine.*

[x]	q[x]	q[x]+1	q[x]+2	qx+3	x+3
20	.00132	.00156	.00177	.00191	23
21	.00135	.00161	.00182	.00196	24
22	.00137	.00164	.00186	.00200	25
23	.00139	.00167	.00190	.00204	26
24	.00140	.00169	.00193	.00208	27
25	.00140	.00171	.00196	.00212	28
26	.00140	.00173	.00199	.00217	29
27	.00141	.00175	.00203	.00223	30
28	.00143	.00179	.00208	.00230	31
29	.00146	.00183	.00215	.00239	32
30	.00149	.00189	.00224	.00250	33

Slika 4: Tablice s odabirom

Duljina odabranog perioda je uglavnom 3, 5, 10 ili 15 godina.

[2] Tablica preuzeta iz [3].

3. Životno osiguranje

3.1. Osnovni pojmovi

U 16. stoljeću u Velikoj Britaniji potpisan je prvi nama poznat ugovor o osiguranju života pomorskog kapetana Williama Gibbonsa koji je umro četiri dana prije isteka osiguranja. Životno osiguranje može se definirati kao dugoročno svotno osiguranje u kojem isplata ugovorene svote ovisi o vrsti police odnosno osiguranom riziku.

Sada ćemo navesti neke osnovne pojmove u osiguranju, vidi [6].

Osiguranik je osigurana osoba na čiji život se sklapa polica osiguranja.
Osiguratelj je pravna osoba koja na tržištu osiguranja obavlja poslove osiguranja. Poslove u Republici Hrvatskoj mogu obavljati društva za osiguranje sa sjedištem u Republici Hrvatskoj i podružnice stranih društava za osiguranje pod uvjetom da imaju dozvolu Hrvatske agencije za nadzor financijskih usluga.
Osigurana svota je novčani iznos na koji je sklopljeno osiguranje.
Ugovaratelj osiguranja je pravna ili fizička osoba koja s osigurateljem sklapa ugovor o osiguranju te plaća premiju osiguranja. U većini ugovora o osiguranju ugovaratelj osiguranja i osiguranik su iste osobe.
Premija je novčani iznos koji naplaćuje osiguratelj pri sklapanju ugovora o osiguranju za preuzeti rizik.
Polica osiguranja je isprava koju izdaje osiguratelj o sklopljenom ugovoru o osiguranju.
Matematička pričuva je razlika između sadašnje vrijednosti procijenjenih budućih obveza osiguratelja (temeljena na sklopljenom ugovoru o životnom osiguranju) i sadašnje vrijednosti procijenjenih budućih premija koje će biti uplaćene od strane ugovaratelja osiguranja.
Doživljenje je datum isteka životnog osiguranja koji osiguranik treba doživjeti kako bi stekao pravo na isplatu ugovorene osigurane svote.

U nastavku ćemo pojasniti tri osnovne vrste životnog osiguranja:

- osiguranje za slučaj doživljenja
- riziko osiguranje i
- osiguranje za slučaj smrti i doživljenja, takozvano mješovito osiguranje.

Osiguranje za slučaj doživljenja ugovaraju osobe kojima je cilj štedjeti. Ukoliko osiguranik doživi istek osiguranja, isplatit će mu se osigurana svota. U suprotnome ne dolazi do isplate osigurane svote ako osiguranik ne doživi istek osiguranja. U određenim uvjetima može se isplatiti dotad uplaćena premija ili matematička pričuva.

Suprotno od osiguranja za slučaj doživljenja je *riziko osiguranje* kod kojeg se isplata osigurane svote izvršava samo u slučaju smrti osiguranika (ako osiguranik doživi istek police osiguranja ne isplaćuje se osigurana svota). Zbog toga riziko osiguranje nema štednu komponentu i ovakva polica osiguranja je korisna jedino za obitelj osiguranika u slučaju njegove smrti. Riziko policu najčešće uvjetuju banke za osiguranje stambenog ili nenamjenskog kredita i na taj način si osiguravaju isplate kredita u slučaju smrti.

Mješovitim osiguranjem su pokrivena oba rizika:

- smrt korisnika tijekom trajanja osiguranja i
- slučaj doživljenja, nakon isteka police.

Osiguratelj će isplatiti osiguranu svotu ako nastupi smrt osiguranika tijekom trajanja osiguranja ili za slučaj doživljenja.

Kod životnog osiguranja osiguranik sam odlučuje koliko će štedjeti, ali također postoji i nekoliko čimbenika koji utječu na premiju:

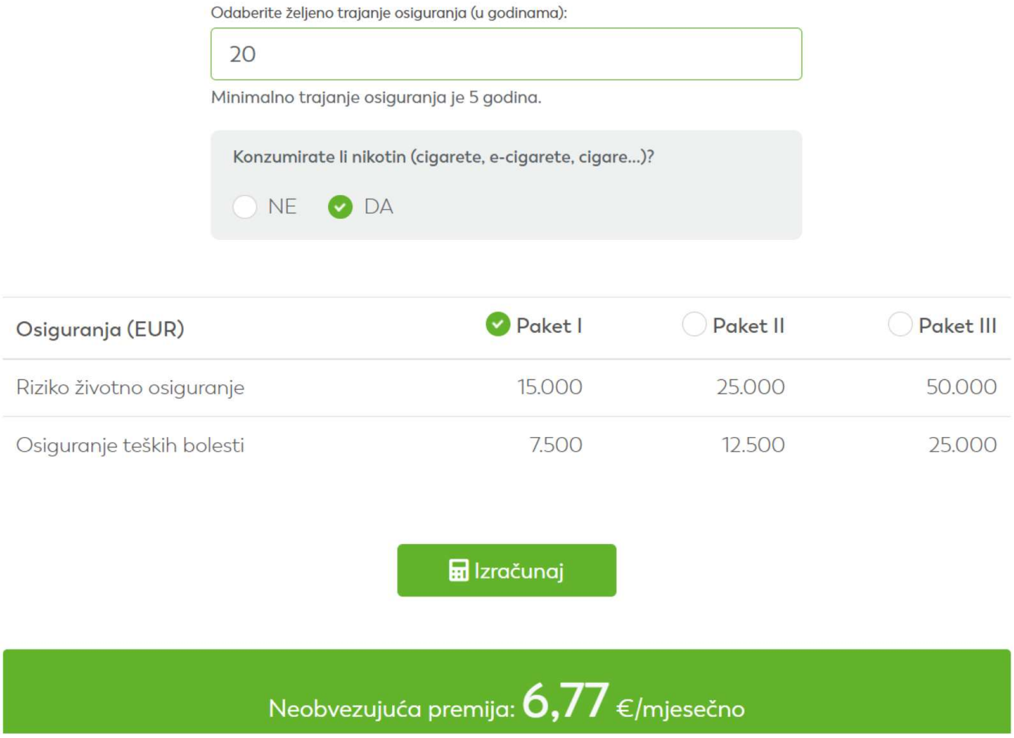
- koliku količinu novaca osiguranik može izdvajati na mjesečnoj, kvartalnoj, polugodišnjoj ili godišnjoj razini za životno osiguranje (premija)
- visina osigurane svote koju će dobiti korisnik osiguranja u slučaju smrti osiguranika i
- na koji vremenski period se osiguranik želi osigurati.

Trajanje osiguranja sa štednom komponentom je najčešće između 10 do 25 godina, dok kod riziko osiguranja je trajanje nešto kraće, između 2 do 10 godina. Također je i premija manja u slučaju da se korisnik odluči za riziko policu.

Prilikom ugovaranja osiguranja moguće je ugovoriti dopunska osiguranja od nezgode koja povećavaju premiju. U nekim slučajevima na to mogu utjecati zdravlje te osiguranikove životne navike. U slučaju da osoba konzumira nikotin često plaća veću premiju od one koja ne konzumira.

Na stranici osiguravajućeg društva Merkur može se pronaći kalkulator za izračun premije riziko osiguranja, te jedan od čimbenika za izračun premije je upravo konzumacija nikotina. Na sljedećim slikama možete vidjeti razliku u premiji osobe koja je nepušač i pušač.

Slika 5: Izračun mjesečne premije osobe koja je nepušač



Slika 6: Izračun mjesečne premije osobe koja je pušač

3.2. Osiguranje doživljenja

Neka je osigurana osoba u dobi x, a osigurana svota iznosa 1 (proporcionalno dobivamo ako je osigurana svota bilo kojeg iznosa). Osiguranje doživljenja je jednokratna isplata ugovorene svote na dogovoreni dan u budućnosti uz uvjet da je osiguranik tada živ. Nas zanima sadašnja vrijednost takvog osiguranja nakon n godina. Označimo sadašnju vrijednost osiguranja doživljenja s $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$.
Tada se dobiva

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = 1 \cdot v^n \cdot {}_np_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}. \tag{3.2.1}$$

Uvođenjem oznake za veličinu D_x

$$D_x := v^x l_x, \text{ za } x \geq 0$$

jednakost (3.2.1) možemo zapisati kao

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{3.2.2}$$

Kod oznake za sadašnju vrijednost osiguranja doživljenja $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$, broj 1 iznad n označava da će osigurana svota iznosa 1 biti isplaćena za n godina od početka perioda osiguranja kada je osoba imala x godina, pod uvjetom da smrt nije nastupila prije $x+n$ godina. Vrijednosti funkcije D_x[3] za cjelobrojne x i n, te za fiksnu kamatnu stopu i se tabeliraju. Također, vrijednosti za D_x se mogu pronaći u LAT A 1967-70 tablici gdje je $i = 4\%$.

3.3. Osobne rente

Niz isplata u jednakim vremenskim intervalima uz uvjet da je osigurana osoba živa u trenutku isplate naziva se doživotna (osobna) renta. Isplata rente može biti odmah nakon uplate cjelokupne premije (neposredne rente) ili nakon određenog broja godina od kupnje (odgođene rente). Rente mogu biti plative unatrag (postnumerando rente) ili unaprijed (prenumerando rente) kao i kod financijskih renti. Ugovorom se određuje visina rente koja može biti konstantna ili varijabilna. Uglavnom se ugovara mjesečna isplata rente kao dopuna mirovini osiguranika.
Za vremensku jedinicu ćemo uzeti 1 godinu i jedinični iznos rente. Pogledajmo prvo slučaj neposredne doživotne rente plative unatrag ili tzv. postnumerando doživotne rente.

[3] U [3] autor D_x naziva komutacijskom funkcijom.

Sadašnja vrijednost takve osobne rente dana je izrazom (korištenjem formule (3.2.1))

$$a_x = A_{x:\overline{1|}}^{\;1} + A_{x:\overline{2|}}^{\;1} + A_{x:\overline{3|}}^{\;1} + \cdots + A_{x:\overline{\omega-x|}}^{\;1}$$

odnosno pomoću formule

$$\sum_{t=1}^{\omega-x} A_{x:\overline{t|}}^{\;1} = \sum_{t=1}^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{D_x}(D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{\omega-1}).$$

Označimo sa $N_x = \sum_{t=1}^{\omega-1} D_{x+t}$, te dobivamo

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x},$$

gdje a_x označava sadašnju vrijednost u trenutku x neposredne postnumerando doživotne rente u iznosu 1. Za slučaj prenumerando doživotne rente vrijedi sljedeća jednakost

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}, \quad N_x = 0, \forall x \geq \omega.$$

Vrijednosti za N_x i D_x možemo pronaći u aktuarskim tablicama. Tablice se formiraju u ovisnosti koja se kamatna stopa odabere te se za određenu kamatnu stopu konstruira jedinstvena tablica.

Spomenuli smo da doživotne rente možemo i odgoditi. Pretpostavimo da se renta počinje isplaćivati nakon k godina. Sadašnja vrijednost odgođene doživotne postnumerando rente za osobu u dobi x i godišnjim iznosom isplate 1 jednaka je

$$\begin{aligned}
{}_{k|}a_x &= a_{x+k} \cdot {}_k p_x \cdot v^k \\
&= \frac{N_{x+k+1}}{D_{x+k}} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k \cdot \frac{v^x}{v^x} \\
&= \frac{N_{x+k+1}}{D_{x+k}} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{v^{x+k}}{v^x} \\
&= \frac{N_{x+k+1}}{D_{x+k}} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+k+1}}{D_x}.
\end{aligned}$$

Stoga, nakon sređivanja formule dobivamo izraz:

$${}_{k|}a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}.$$

Gornju formulu smo dobili promatrajući neposrednu postnumerando doživotnu rentu u trenutku $x+k$ uz uvjet doživljenja trenutka $x+k$ te diskontiranjem na sadašnji trenutak x. Na sličan način dolazimo do formule za rentu plativu unaprijed:

$$ {}_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}. $$

Nadalje, postoje tzv. privremene životne rente kod kojih plaćanje prestaje nakon određenog broja godina ili ranije u slučaju smrti osiguranika.

Sadašnja vrijednost neposredne privremene postnumerando rente iznosa 1 i roka trajanja n godina, iskazana je sljedećom formulom:

$$ a_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{1}|}^{\;\;1} + A_{x:\overline{2}|}^{\;\;1} + \cdots + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}. $$

Za prenumerando rentu vrijedi:

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|} = \frac{D_x}{D_x} + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. $$

Ako želimo neposrednu privremenu rentu s rokom odgode od k godina, onda govorimo o odgođenoj privremenoj renti. Sadašnja vrijednost takve rente s godišnjim iznosom 1, s rokom odgode od k godina i u trajanju od n godina iznosi:

$$ {}_{k|n}a_x = a_{x:\overline{k+n}|} - a_{x:\overline{k}|} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x} $$

$$ {}_{k|n}\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{k+n}|} - a_{x:\overline{k}|} = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}. $$

3.4. Riziko osiguranje

Riziko osiguranje često se još naziva osiguranje života ili osiguranje za slučaj smrti. Za razliku od osiguranja doživljenja, riziko osiguranje omogućuje isplatu ugovorene svote samo u slučaju smrti osiguranika. Ako osiguranik doživi istek sklopljene police, isplata se ne izvršava. Specifičnost ovog osiguranja su male premije za visoku osiguranu svotu te se često riziko osiguranje koristi za potrebe osiguranja kredita. Isplata riziko osiguranja se događa u trenutku smrti osigurane osobe tijekom trajanja osiguranja. U svrhu jednostavnosti neka se isplata izvršava na kraju godine kada je smrt nastupila.
Prvo ćemo se upoznati s doživotnim osiguranjem života osobe dobi x. Ako je smrt nastupila u dobnom intervalu $[x+k, x+k+1)$ naknada u iznosu 1 naplaćuje se na kraju intervala. Vjerojatnost smrti u danom dobnom intervalu je definirana sa

$$_{k|1}q_x = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Slijedi da je sadašnja vrijednost obveza $_{k|1}q_x v^{k+1} \cdot 1$, a sadašnja vrijednost obveze osiguravajućeg društva jednaka je

$$A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_{k|1}q_x \cdot v^{k+1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \cdot \frac{v^x}{v^x} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{x+k+1} \cdot d_{x+k}.$$

Definirat ćemo dvije komutacijske funkcije

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{\omega-1}.$$

S obzirom da je $D_x = v^x l_x$ možemo A_x zapisati na sljedeći način:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

U slučaju odgode doživotnog osiguranja s odgodom od m godina, sadašnju vrijednost računamo kao

$$_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}.$$

Drugi oblik riziko osiguranja je ono privremeno, tj. osiguranje života na određeno vrijeme, primjerice na n godina. Neka je osigurani iznos 1, sadašnja vrijednost obveze osiguravajućeg društva iznosi

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-x} {}_{k|}q_x \cdot v^{k+1} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \qquad (3.4.1)$$

U slučaju odgode na m godina vrijedi

$$
{}_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-x} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}.
$$

3.5. Mješovito osiguranje

Najčešći oblik ugovora životnog osiguranja je osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja, tzv. mješovito osiguranje. Osigurana svota se isplaćuje u trenutku smrti osiguranika ili na dan isteka osiguranja (doživljenja).

Promotrimo slučaj privremenog osiguranja u dobi od x godina do dobi $x + n$ godina i osiguranje doživljenja dobi $x + n$ godina. Neka osigurana svota iznosi 1 i ona će se isplatiti ako korisnik osiguranja dobi x umre unutar sljedećih n godina ili ako doživi dob $x + n$ godina. Sadašnja vrijednost mješovitog osiguranja dana je formulom koja slijedi iz izraza (3.4.1) i (3.2.2):

$$
A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.
$$

3.5.1. Primjeri mješovitog osiguranja u RH

Croatia Osiguranje - Mješovito osiguranje života

Modeli osiguranja

Basic	Premium	Exclusive
Osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja	Osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja, ali u slučaju smrti zbog nezgode isplaćuje se dvostruki osigurani iznos	Osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja s jednokratnom uplatom premije u minimalnom iznosu od 2.500 eura
Tko može biti osiguranik	Osobe od 14 do 65 godina te osobe starije od 65 godina uz liječnički pregled	
Trajanje police	10 do 20 godina	
Minimalna premija	180 eura godišnje	
Dinamika plaćanja	Mjesečno, kvartalno, polugodišnje i godišnje	

Slika 7: Croatia osiguranje

Wustenrot osiguranje - Mješovito osiguranje života	
FLEX LIFE	
Klijent bira omjer između osiguranog iznosa za slučaj doživljenja i osiguranog iznosa za slučaj smrti.	
Tko može biti osiguranik	Osobe od 14 do 65 godina
Trajanje police	5 do 35 godina
Minimalna premija	19 eura mjesečno
Dinamika plaćanja	Mjesečno, kvartalno, polugodišnje i godišnje ili jednokratno (premija se plaća odjednom za cijelo vrijeme trajanja osiguranja)
Minimalna osigurana svota za doživljenje	1000 eura

Slika 8: Wustenrot osiguranje

Wiener osiguranje - Mješovito osiguranje života	
sProfit	
Mješovito osiguranje sa štednom komponentom za slučaj smrti i doživljenja uz istovremeno sudjelovanje u dobiti.	
Tko može biti osiguranik	Osobe od 18 do 65 godina
Trajanje police	5 do 40 godina
Minimalna premija	19 eura mjesečno
Dinamika plaćanja	Kod ovog programa osiguranja plaćanje premije je jednokratno (odjednom za cijelo trajanje osiguranja)
Minimalna osigurana svota za doživljenje	1500 eura
Minimalna osigurana svota u slučaju smrti	3000 eura

Slika 9: Wiener osiguranje

4. Premije

Kao što smo već definirali, premija je novčani iznos koji je osiguranik dužan platiti osiguravatelju po ugovoru o osiguranju.
Razlikujemo dvije vrste premija:

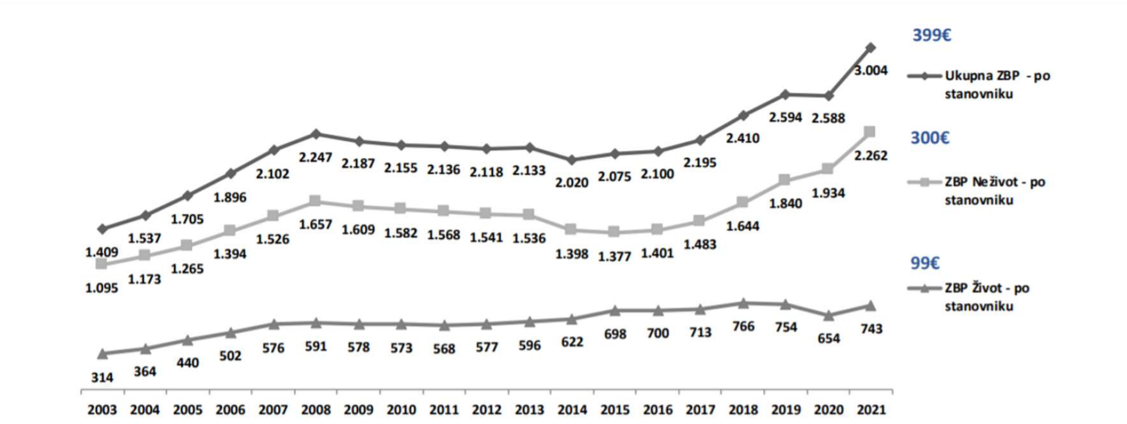
- Neto premija i
- Bruto premija.

Neto premija je dio bruto premije potreban za pokriće predvidivih izdataka za štete. U zakonu o osiguranju koristi se naziv premija osiguranja koja sadrži funkcionalnu premiju, a eventualno i dio premije za obavljanje posla osiguranja. Neto premija je jednaka očekivanoj šteti.

Bruto premija (cijena osiguranja) je ukupna premija koju dobijemo kada se na neto premiju dodaju troškovi poslovanja (plaće zaposlenika, najam prostora za urede, provizije plaćene agentima,...) i druge obveze (porez, taksa i sl.).

Zaračunata bruto premija (vidi [6]) životnih osiguranja uključuje sve premije osiguranja koje su naplaćene do kraja obračunskog razdoblja, bez obzira odnose li se ti iznosi u cijelosti ili djelomično na kasnije obračunsko razdoblje ili razdoblja.

Sljedeća slika (preuzeta iz [7]) prikazuje zaračunatu bruto premiju osiguranja po stanovniku (gustoća osiguranja) u razdoblju 2003. - 2021. godine (u HRK). Europski prosjek u 2021. godini je bio 2085 EUR, a u Hrvatskoj 399 EUR. U prosjeku premija životnih osiguranja u EU iznosi 1163 EUR, dok je u RH iznosila 99 EUR. Ovakva disproporcionalnost ukazuje na slabiji životni standard i lošiju financijsku pismenost građana RH.



Slika 10: Zaračunata bruto premija po stanovniku

4.1. Izračun neto premije

Kod izračuna neto premija koristimo se definicijom da je očekivana sadašnja vrijednost svih neto premija jednaka očekivanoj sadašnjoj vrijednosti naknade. Sada ćemo prethodnu definiciju prikazati jednadžbom. Promotrimo prvo slučaj doživotnog osiguranja života za osobu dobi x i sa P_x označimo godišnju premiju koja se plaća unaprijed.

Vrijedi

$$\ddot{a}_x \cdot P_x = A_x,$$

sada imamo da je

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Za privremeno osiguranje života u slučaju smrti na određeno vrijeme od n godina i premijom u oznaci $P^1_{x:\overline{n}|}$ vrijedi

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

dok u slučaju mješovitog osiguranja premiju računamo sljedećom formulom

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{4.1.1}$$

Primjer 4.1. *Osoba starosti 35 godina kupuje 15-godišnje mješovito osiguranje života na svotu u iznosu 5 000. Izračunajmo godišnju neto premiju. Za rješenje zadatka koristi se LAT A 1967-70, $i = 4\%$.*

Rješenje:
Za $x = 35$ i $n = 15$ uvrštavanjem u formulu (4.1.1) imamo:

$$P = 5000 \cdot \frac{M_{35} - M_{50} + D_{50}}{N_{35} - N_{50}} = 243.993\ .$$

4.2. Izračun bruto premije

Očekivana sadašnja vrijednost svih bruto premija je jednaka sumi očekivane sadašnje vrijednosti obveze i troškova. Troškove dijelimo na troškove obnove i početne troškove. Bruto premiju ćemo označiti sa $P"$.
Definirajmo troškove:

- u po jedinici vremena svake bruto premije
- v po jedinici osigurane svote svake godine
- T dodatni početni troškovi.

Nadalje, neka je S označena sadašnja vrijednost naknade.
Vrijedi sljedeća jednadžba

$$P" \cdot \ddot{a}_x = S + u \cdot P" \cdot \ddot{a}_x + v \cdot \ddot{a}_x + T.$$

Primjer 4.2. *Promotrimo slučaj u kojem osoba u dobi od 40 godina ugovara mješovito osiguranje na osiguranu svotu od 800 u trajanju od 15 godina. Dogovoreno je da ako nastupi nesretni slučaj osim osigurane svote vraća se i uplaćena premija. Troškovi su 5% osigurane svote, a fiksni troškovi su 5 svake godine. Izračunajmo godišnju bruto premiju koristeći LAT A 1967-70 select.*

Rješenje:
$x = 40$, $n = 15$

$$P" \cdot \ddot{a}_{[40]:\overline{15}|} = (800 + P") \cdot A_{[40]:\overline{15}|} + \frac{5}{100} \cdot 800 + 5 \cdot \ddot{a}_{[40]:\overline{15}|}$$

$$A_{[40]:\overline{15}|} = \frac{M_{[40]} - M_{55} + D_{55}}{D_{[40]}} = 0.5656$$

$$\ddot{a}_{[40]:\overline{15}|} = \frac{N_{[40]} - N_{55}}{D_{[40]}} = 11.386$$

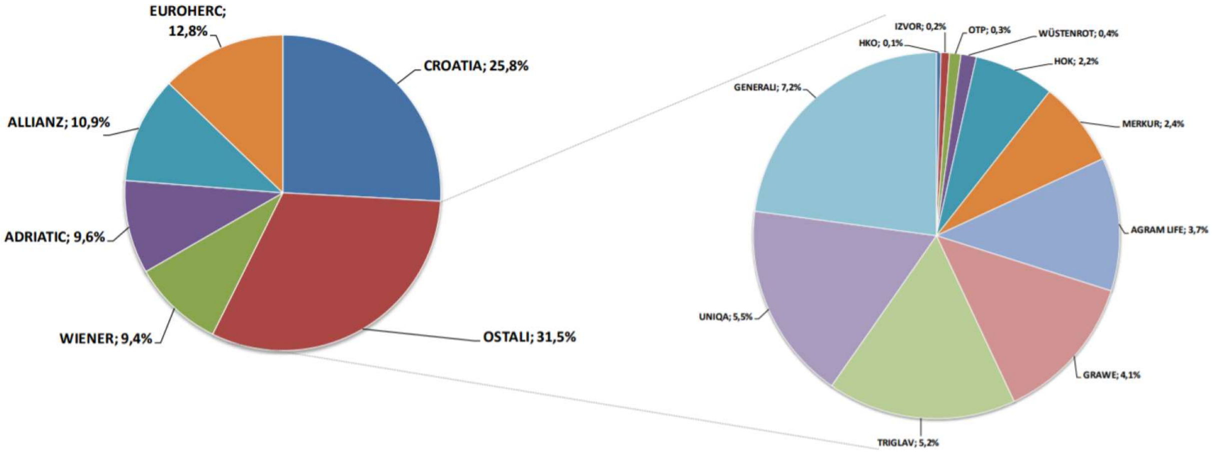
$$P" = 50.7754$$

Izračunajmo sada iznos neto premije $P \cdot \ddot{a}_{[40]:\overline{15}|} = 800 \cdot A_{[40]:\overline{15}|}$. *Slijedi da je* $P = 39.74$, *što znači da omjer bruto premije i neto premije iznosi*

$$\frac{P"}{P} = 1.28.$$

4.3. Tržište životnog osiguranja u RH

U Hrvatskoj je prvo osiguravajuće društvo osnovano 1884. pod nazivom Croatia osiguravajuća zadruga (danas Croatia osiguranje d.d.). Prema podatcima iz 2020. godine možemo vidjeti da upravo Croatia osiguranje ima najveći udio na tržištu od čak 25.8%.



Slika 11: Udjeli na tržištu 2020. Slika preuzeta iz [7]

Hrvatski ured za osiguranje (HUO) objavljuje statistiku o stanju tržišta osiguranja na mjesečnoj, kvartalnoj i godišnjoj razini. Ova izvješća temelje se na podacima unesenim u sustav i potvrđenim od strane svakog osiguravatelja pojedinačno. Za 2021. godinu imamo sljedeće podatke:

- zaračunata bruto premija društava za osiguranje u RH iznosilaje 11 717 milijuna kuna, što je rast od 11.86% u odnosu na 2020
- broj osiguranja na kraju 2021. godine iznosio je 10 647 081 polica neživotnog osiguranja i 1 349 454 polica životnog osiguranja.

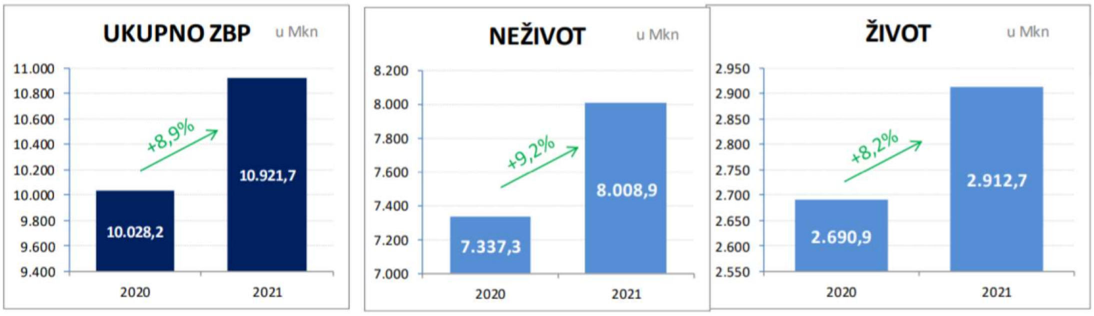
Industrija osiguranja u RH u 2021. godini sastoji se od:

- 15 društava za osiguranje
- 3 podružnice društava za osiguranje iz EU
- 62 društva za brokerske poslove u (re)osiguranju
- 323 (pravne osobe) + 457 (obrt) za zastupanje u osiguranju

- 19 kreditnih institucija, FINA, Hrvatska pošta d.d. s ovlaštenjem za obavljanje poslova distribucije u osiguranju
- 500 društava za osiguranje iz drugih država članica EU.

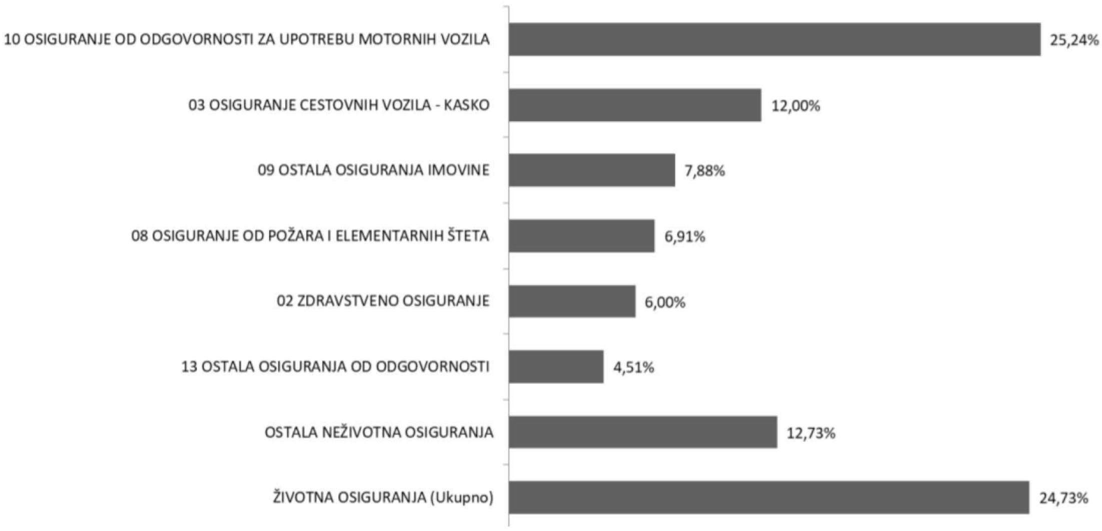
Zaračunata bruto premija životnog osiguranja na godišnjoj razini rasla je za 8.24%, na 2.9 milijardi kuna, dok u slučaju neživotnog osiguranja ukupna premija porasla je za 672 milijuna kuna tj., 9.15% u odnosu na prethodnu godinu.

	HR TRŽIŠTE		2021 vs. 2020	
	2020	2021	ABS	%
NEŽIVOT	7.337.314.463,78	8.008.942.439,66	671.627.975,88	9,15%
ŽIVOT	2.690.874.429,39	2.912.712.659,44	221.838.230,05	8,24%
UKUPNO ZBP	**10.028.188.893,17**	**10.921.655.099,10**	**893.466.205,93**	**8,91%**



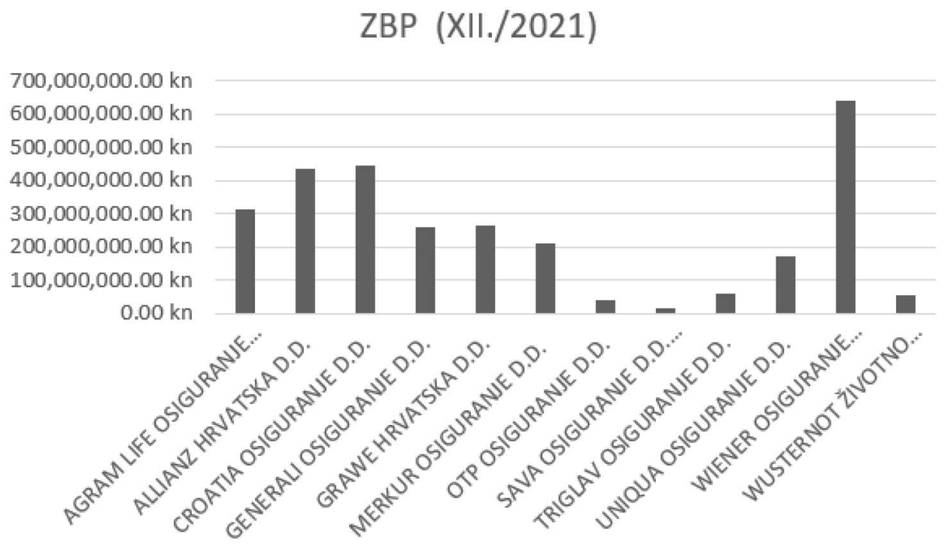
Slika 12: Ukupna zaračunata bruto premija 2021. godine (slika preuzeta iz [7])

Na sljedećem grafičkom prikazu možemo vidjeti da životno osiguranje u ukupnoj premiji sudjeluje s 24.73%, a najveći udio neživotnog osiguranja odlazi na osiguranje od odgovornosti za upotrebu motornih vozila s 25.24%.



Slika 13: Struktura portfelja 2021. Slika preuzeta iz [7].

Pogledajmo sada zaračunatu bruto premiju za životna osiguranja po društvima za osiguranje na tržištu RH. Na slici 14 možemo vidjeti da Wiener osiguranje (Vienna Insurance Group d.d.) ima najveću zaračunatu bruto premiju (640 030 386 HRK) dok Sava osiguranje d.d. ima najmanju zaračunatu bruto premiju (17 226 472 HRK) u 2021. godini.



Slika 14: ZBP životnog osiguranja. Vrijednosti preuzete iz HUO, vidi [7].

4.4. Primjer police životnog osiguranja

POLICA OSIGURANJA ŽIVOTA

UGOVARATELJ OSIGURANJA

OSIGURANIK

rođen
13.06.1976

OSIGURANJE ŽIVOTA S UDJELOM U DOBITI

cjenik Z02

OSIGURANA SVOTA

POČETAK OSIGURANJA
01.02.1999

27.215,10 DEM

ISTEK OSIGURANJA
01.02.2019

U slučaju smrti osiguranika od posljedica nesretnog slučaja osiguratelj se obvezuje isplatiti osiguranu svotu u protuvrijednosti 54.430,20 DEM

cjenik 4193

OSIGURANJE OD POSLJEDICA NESRETNOG SLUČAJA

OSIGURANA SVOTA	za trajnu invalidnost	**40.000,00**	**DEM**
	za 100% trajnu invalidnost	**60.000,00**	**DEM**
	dnevna naknada za boravak u bolnici	**30,00**	**DEM**
GODIŠNJA PREMIJA	za osiguranje života	**1.100,00**	**DEM**
	za osiguranje nezgode	**100,00**	**DEM**

Premija u protuvrijednosti 600,00 DEM plaća se 01.02. i 01.08. svake godine do isteka osiguranja.
Prva premija u protuvrijednosti 600,00 DEM plaćena je 15.02.1999. godine.

KORISNIK OSIGURANJA
za slučaj smrti:
za slučaj doživljenja:

Osigurane svote obračunavaju se u DEM, a isplaćuju u Kn u skladu s uvjetima osiguranja koji su sastavni dio ove police.

Sastavni dijelovi ugovora o osiguranju su :

1. Ponuda osiguranja života
2. Uvjeti za osiguranje života UŽO6
3. Tablice invalidnosti OTI2
4. Posebni uvjeti za dopunsko osiguranje od posljedica nesretnog slučaja UNPŽ3

Slika 15: Polica životnog osiguranja

Kao što smo već i spomenuli, mješovito životno osiguranje je najčešće birana polica osiguranja jer su njome pokriva slučaj smrti i slučaj doživljenja. U slučaju smrti uzrokovane bolešću osiguranika, osiguravatelj isplaćuje osiguranu svotu, a ako je smrt prouzročena nezgodom osiguravatelj isplaćuje najčešće dvostruki iznos osigurane svote, a može dosezati i do trostrukog iznosa. Primarna karakteristika ovog životnog osiguranja je zaštiti korisnika osiguranja tj. obitelj osiguranika ako nastupi nesretni slučaj, no u slučaju ako osiguranik doživi istek police, onda ovo osiguranje ima i štednu komponentu. Za razliku od riziko osiguranja gdje se osiguranik po doživljenju ne može isplatiti, mješovito životno osiguranje pruža sigurnost da će se vaša ulaganja isplatiti po doživljenju i to nerijetko uvećana za određenu dobit koju je osiguravajuće društvo ostvarilo i raspodijelilo u tom razdoblju. Navodimo jedan primjer mješovitog osiguranja s udjelom u dobiti (Slika 15).

Polica osiguranja sadrži naziv osiguratelja, ime i prezime ugovaratelja osiguranja, ime i prezime osiguranika, datum rođenja osiguranika, osigurani slučaj, rizik obuhvaćen osiguranjem, početak i istek osiguranja, osiguranu svotu, premiju osiguranja, korisnika osiguranja za slučaj smrti odnosno doživljenja, te datum izdavanja police. Početak osiguranja je bio 01.02.1999, a istek osiguranja 01.02.2019, znači polica osiguranja je sklopljena u trajanju od 20 godina. Osigurana svota je izražena u valuti DEM (Deutsche Mark – Njemačka marka) i iznosi 27 215.10 DEM. Dogovoreno je da osigurana svota obračunava u DEM, a isplaćuje u HRK u skladu sa uvjetima osiguranja koji su sastavni dio ove police. U slučaju smrti osiguranika od posljedice nesretnog slučaja osiguratelj će isplatiti dvostruku osiguranu svotu u iznosu od 54 430.20 DEM. Prednost životnih osiguranja je ta što se mogu kombinirati različite police životnih osiguranja (što nije slučaj neživotnog osiguranja) pa se u praksi najčešće uzima i dopunsko osiguranje od posljedica nesretnog slučaja. U ovom primjeru je osiguranik također uzeo osiguranje od posljedica nesretnog slučaja. Osiguratelj ovdje nesretni slučaj smatra svaki iznenadni i o volji osiguranika nezavisni događaj koji za posljedicu ima potpunu ili djelomičnu trajnu invalidnost ili narušenje zdravlja koje zahtijeva liječničku pomoć, odnosno liječenje u bolnici. U slučaju trajne invalidnosti dogovoreno je da će osigurana svota iznositi 40 000 DEM, a ako dođe do 100% trajne invalidnosti (npr. potpuni gubitak vida na oba oka) osigurana svota bi iznosila 60 000 DEM. Ako osigurani slučaj za posljedicu ima boravak u bolnici kao posljedica nesretnog slučaja, dnevna naknada za boravak u bolnici će iznositi 30 DEM (od dana kada je započet boravak u bolnici do posljednjeg dana boravka, ali najviše 180 dana). Premija osiguranja utvrđena je cjenicima osiguratelja, a ovisi o visini ugovorene svote, vremenu trajanja osiguranja, spolu, starosti i zanimanju osiguranika. Osiguranik u ovom primjeru je muškog spola, dobna starost na dan sklapanja osiguranja je 23 godine, a osoba se tada bavila uredskim poslom (niska podložnost opasnosti za život).

Godišnja premija iznosi 1200 DEM, gdje se 1100 DEM uplaćuje za osiguranje u slučaju smrti ili doživljenja, a 100 DEM za osiguranje od nezgode. Dogovoreno je da se premija plaća polugodišnje, 600 DEM 01.02. i 01.08. svake godine do isteka osiguranja. S obzirom da se premija plaća polugodišnje, primjenjuje se doplatak za odgovarajuće ispodgodišnje plaćanje premije zbog toga što dolazi do dodatnih troškova naplate premije i gubitka na kamati ako je predviđena godišnja premijska stopa. U slučaju da je osoba pušač i građevinski radnik, premija bi bila veća jer je takav profil osobe podložniji većoj opasnosti za život. Osiguranik u ovom primjeru je doživio istek police te mu se isplatio udio u dobiti zajedno sa osiguranom svotom te je na taj način dobio uvećani iznos ušteđevine.

U praksi smo vidjeli da visina premije ne ovisi samo o dobnoj starosti, troškovima poslovanja (režija) i drugim obvezama (porez, taksa i sl.) već veliku ulogu ima spol osiguranika, zdravstveno stanje, zanimanje osiguranika, te dopunsko osiguranje od posljedica nesretnog slučaja.

Literatura

[1] D. Bakić, D. Francišković: *Financijska i aktuarska matematika*, Osijek, 2013.

[2] H. U. Gerber: *Life Insurance Mathematics*, Springer, 1997.

[3] A. K. Gubta, T. Varga: *An Introduction to Acturial Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[4] J. J. McCutcheon, W. F. Scott: *An Introduction to the Mathematics of Finance*, Butterworth–Heinemann, 1989.

[5] A. Neill: *Life Contigencies*, Heinemann Professional Publishing, 1977.

[6] Grawe: *Pojmovi u osiguranju*, `https://www.grawe.hr/pitanja-i-pojmovi/`

[7] Hrvatski ured za osiguranje: `https://huo.hr/hr/`

Sažetak

Tema rada je životno osiguranje i pojašnjenje tri osnovna tipa životnog osiguranja: osiguranje doživljenja, riziko osiguranje i mješovito osiguranje. U prvom poglavlju rada opisali smo osnovne pojmove financijske matematike za lakše praćenje samog rada u nastavku. U drugom poglavlju smo se upoznali sa tzv. tablicom mortaliteta koja sadrži jedan od najvažnijih demografskih pokazatelja – vjerojatnost smrti pomoću kojeg se dobivaju ostali pokazatelji poput očekivanog trajanja života, što je bitan faktor za izračun visine premije u segmentu životnog osiguranja. S razradom teme započinjemo u trećem poglavlju gdje uvodimo neke osnovne definicije životnog osiguranja, tipove i primjere najzastupljenijeg osiguranja na tržištu, tzv. mješovito životno osiguranje koje pokriva oba rizika, onaj za slučaj smrti i za slučaj doživljenja.

Cijenu osiguranja nazivamo premijom te razlikujemo dvije vrste premije: neto premiju i bruto premiju. Formule za njihov izračun smo predstavili u zadnjem poglavlju gdje smo pokazali teorijski izračun bruto premija i komponente koje utječu na izračun. Primjerom police iz stvarnog života pokazali smo da na određivanje visine premije bitnu ulogu imaju spol, zdravstveno stanje, zanimanje korisnika koje nismo uzimali u obzir tijekom teorijskog izračuna.

Ključne riječi: životno osiguranje, osiguranje doživljenja, riziko osiguranje, mješovito osiguranje, premija

Life Insurance

Summary

The topic of the thesis is Life Insurance and clarification of the three basic types of life insurance: Pure Endowment, Risk Insurance and Endowment. In the first chapter of the paper, we described the basic concepts of financial mathematics for easier monitoring of the paper below. In the second chapter, we got introduced with a mortality table that contains one of the most important demographic indicators - the probability of death, which is used to obtain other indicators such as life expectancy, which is an important factor for calculating the amount of the premium in the life insurance segment. We begin with the elaboration of the topic in the third chapter, where we introduce some basic definitions of life insurance, types and examples of the most represented insurance on the market, which is endowment that covers both risks, the one for death and for survival.

Premium is the price you pay for the policy, and we distinguish two types of premium: net premium and gross premium. In the last chapter we presented the formulas for their calculation, where we showed the theoretical calculation of premiums and the components that affect the calculation. With the example of a policy from real life, we have shown that the gender, state of health, and profession play an important role in determining the amount of the premium, which we did not take into account during the theoretical calculation.

Keywords: Life Insurance, Pure Endowment, Risk Insurance, Endowment, premium

Životopis

Rođena sam 02. studenog 1994. godine u Đakovu. Nakon završene osnovne škole Vladimir Becić u Osijeku, 2009. godine upisujem Prvu Gimnaziju u Osijeku. Obrazovanje nastavljam upisom na Odjel za matematiku gdje 2017. završavam Preddiplomski studij s temom završnog rada Modalna logika. Iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike također na Odjelu za matematiku u Osijeku. Od 2018. godine počinjem raditi u tvrtki Gideon za robotiku i softverska rješenja temeljena na umjetnoj inteligenciji.