

# Modeliranje pomoću trigonometrijskih funkcija

---

Devčić, Katarina

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:322026>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-23**



Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij matematike  
Financijska matematika i statistika

Katarina Devčić

# Modeliranje pomoću trigonometrijskih funkcija

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij matematike  
Financijska matematika i statistika

Katarina Devčić

# Modeliranje pomoću trigonometrijskih funkcija

Diplomski rad

Mentorica: prof. dr. sc. Mihaela Ribčić Penava

Osijek, 2022.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Osnovno o trigonometrijskim funkcijama</b>	<b>2</b>
2.1	Brojeva kružnica . . . . .	2
2.2	Sinus, kosinus, arkus sinus i arkus kosinus . . . . .	3
2.2.1	Svojstva funkcije sinus . . . . .	4
2.2.2	Svojstva funkcije kosinus . . . . .	4
2.2.3	Grafički prikaz funkcija sinus i arkus sinus . . . . .	5
2.2.4	Grafički prikaz funkcija kosinus i arkus kosinus . . . . .	6
2.3	Tangens i arkus tangens . . . . .	7
2.3.1	Svojstva funkcije tangens . . . . .	8
2.3.2	Grafički prikaz funkcije tangens i arkus tangens . . . . .	8
2.4	Kotangens i arkus kotangens . . . . .	9
2.4.1	Svojstva funkcije kotangens . . . . .	10
2.4.2	Grafički prikaz funkcije kotangens i arkus kotangens . . . . .	11
2.5	Trigonometrija pravokutnog trokuta . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Modeliranje pomoću trigonometrijskih funkcija</b>	<b>14</b>
3.1	Temperatura zraka . . . . .	14
3.2	Duljina dana . . . . .	16
3.3	Plima i oseka . . . . .	18
3.4	Opasna uzbrdica . . . . .	20
3.5	Harmonijsko titranje . . . . .	21
3.6	Predviđanje prodaje . . . . .	23
	<b>Sažetak</b>	<b>27</b>
	<b>Summary</b>	<b>28</b>
	<b>Životopis</b>	<b>29</b>

# 1 Uvod

Matematički je model opis nekog sustava ili pojave matematičkim jezikom, a proces se njegova razvoja naziva matematičkim modeliranjem. Iako ih ne opisuju u potpunosti precizno, ako ih se kvalitetno modelira, matematički modeli mogu dovoljno dobro opisati pojave iz stvarnoga svijeta te se pomoću njih mogu donijeti potrebni zaključci ili predviđanja. Da bismo modelirali nekakav matematički model, prvo je potrebno sakupiti odgovarajuće podatke.

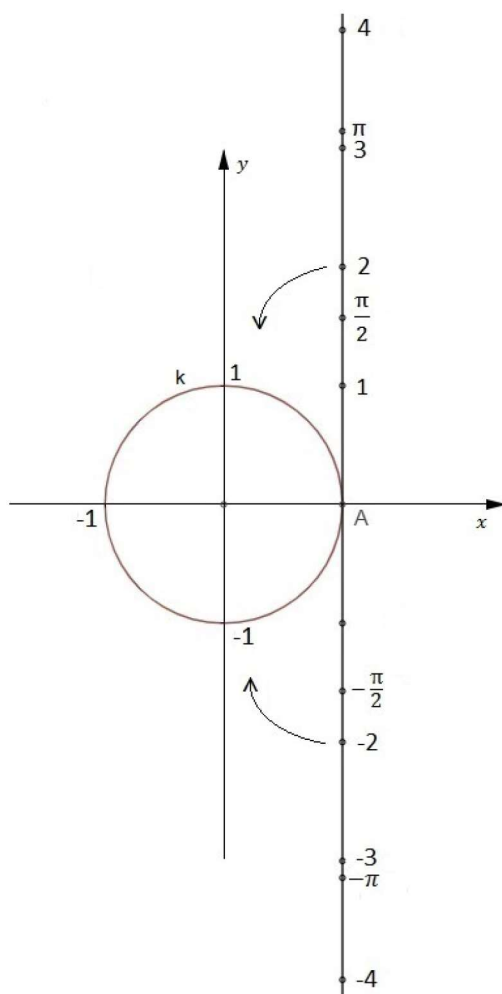
U ovome ćemo se radu baviti trigonometrijskim i ciklometrijskim funkcijama i modeliranjem pomoću njih. Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije imaju čestu primjenu u svakodnevnom životu i svijetu koji nas okružuje. Možemo ih primijeniti u arhitekturi, astronomiji, meteorologiji, ekonomiji, prometu, medicini, fizici i mnogim drugim područjima. Nakon uvodnog dijela rada, pojasnit ćemo brojevenu kružnicu, a zatim pomoću nje definirati trigonometrijske funkcije. Prije nego definiramo ciklometrijske funkcije, svaku ćemo od trigonometrijskih funkcija restringirati na interval na kojemu za svaku od njih postoji inverzna funkcija. Također, svaku ćemo od trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija prikazati grafički, a trigonometrijskim ćemo funkcijama navesti i svojstva. U trećem ćemo poglavlju ovoga rada razraditi neke od primjera primjene trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija. Primjerice, vidjet ćemo kako ih možemo primijeniti pri određivanju temperature zraka, duljine dana kao i pri određivanju kuta pod kojim je nagnuta uzbrdica.

## 2 Osnovno o trigonometrijskim funkcijama

### 2.1 Brojeva kružnica

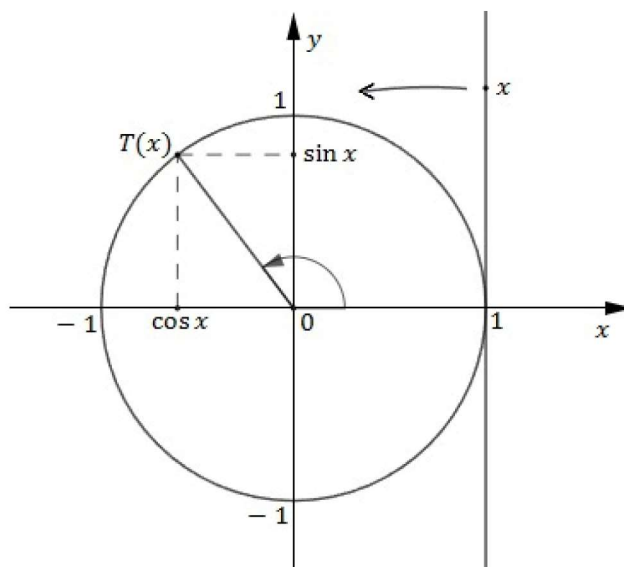
Za definiranje je trigonometrijskih funkcija potrebno poznavati brojevnu kružnicu pa započnimo ovaj rad s pojašnjenjem brojevne kružnice.

U Kartezijevom koordinatnom sustavu nacrtamo kružnicu  $k$  čiji je polumjer jednak jediničnoj dužini koordinatnog sustava. Označimo s  $A(1, 0)$  sjecište kružnice i osi apscise. Prislonimo na kružnicu brojevni pravac tako da svojim ishodištem dodiruje kružnicu  $k$  u točki  $A$ . Zamislimo da se brojevni pravac namata na kružnicu. Na svaku točku kružnice namatanjem padne beskonačno brojeva s brojevnog pravca. Primjerice, na točku  $A$  padnu svi brojevi oblika  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Dakle, svaki se realni broj  $x$  s brojevnog pravca preslika u jednu točku  $T(x)$  na kružnici  $k$ . Jedinična se kružnica na koju su, na navedeni način, smješteni realni brojevi zove brojeva ili trigonometrijska kružnica (vidjeti [6]). Slikovno je objašnjenje brojevne kružnice prikazano na Slici 1.



Slika 1: Brojeva kružnica

## 2.2 Sinus, kosinus, arkus sinus i arkus kosinus



Slika 2: Definicija funkcija sinus i kosinus

Neka je  $K$  skup svih točaka kružnice i  $T : \mathbb{R} \rightarrow K$  funkcija koja svakom broju  $s$  brojevnog pravca koji dodiruje kružnicu u točki s koordinatama  $(1, 0)$  pridružuje točku na brojevnoj kružnici. Funkcija  $T$  brojevima  $0$  i  $\pi$  s brojevnog pravca pridružuje redom točke s koordinatama  $(1, 0)$  i  $(-1, 0)$  na brojevnoj kružnici. Nadalje, brojevima  $2\pi$  i  $3\pi$  opet redom pridružuje iste točke na brojevnoj kružnici. Navedeni se postupak analogno nastavlja. Općenito, brojevima

$$x, x - 2\pi, x + 2\pi, x - 4\pi, x + 4\pi, \dots$$

je pridružena ista točka  $T(x)$  na brojevnoj kružnici. Funkcija  $T$  nije bijektivna pa nema inverznu funkciju. Ako  $x$  ide po intervalu  $[0, 2\pi)$ , pripadna točka  $T(x)$  prolazi brojevnju kružnicu u suprotnom smjeru od kretanja kazaljke na satu. U tom slučaju  $T(x)$  svaku točku brojevnje kružnice prolazi samo jednom pa je restrikcija funkcije  $T$  na interval  $[0, 2\pi)$  bijekcija. Broj  $x \in \mathbb{R}$  je mjera kuta koju pravac koji prolazi točkom  $T$  i ishodištem koordinatnog sustava zatvara s osi apscisa. Kažemo da taj kut ima  $x$  stupnjeva. Kutu od  $\varphi$  stupnjeva odgovara kut od  $\frac{2\pi}{360}\varphi$  radijana, a kutu od  $\psi$  radijana odgovara kut od  $\frac{360}{2\pi}\psi$  stupnjeva (vidjeti [6]).

Sada kada smo odredili vezu između mjere kuta izražene u stupnjevima i radijanima, definirajmo sinus i kosinus pomoću brojevnje kružnice. Definicije koje slijede prate [1] i [16].

Funkcije sinus i kosinus definiramo tako da nam daju koordinate točke  $T$ . Funkciju koja svakom realnom broju  $x$  pridružuje ordinatu točke  $T(x)$  na brojevnoj kružnici zovemo sinus, a funkciju koja svakom realnom broju  $x$  pridružuje apscisu točke  $T(x)$  na brojevnoj kružnici zovemo kosinus.

Funkcije sinus i kosinus su definirane na skupu  $\mathbb{R}$ , a poprimaju vrijednosti iz intervala  $[-1, 1]$ , to jest  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  i  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ .

Prema [5], kako bismo definirali arkus sinus i arkus kosinus, restringirajmo sinus i kosinus na intervale na kojima one imaju inverzne funkcije.

Da bi funkcija imala inverz, mora biti bijektivna. Funkcije sinus i kosinus nisu takve pa nemaju inverzne funkcije. Ipak, restrikcijom sinusa na interval  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  i kosinusa na interval  $[0, \pi]$  dobivamo bijektivne funkcije. Označimo navedene restrikcije sa Sin i Cos

$$\text{Sin} = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \quad \text{i} \quad \text{Cos} = \cos|_{[0, \pi]}.$$

Dakle, funkcija  $\text{Sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  je bijekcija. Inverz tako definirane funkcije nazivamo arkus sinus

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Isto je tako i funkcija  $\text{Cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  bijekcija. Njezin inverz zovemo arkus kosinus

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

### 2.2.1 Svojstva funkcije sinus

Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$  ima sljedeća svojstva (vidjeti [3]):

- 1) Nultočke su brojevi  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 2) Maksimum je funkcije 1, a poprima se za  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 3) Minimum je funkcije -1, a poprima se za  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 4) Na intervalu  $[0, 2\pi]$  tijek je funkcije

$x$	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	$\pi$	↘	$\frac{3\pi}{2}$	↘	$2\pi$
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

- 5) Funkcija je periodična s periodom  $2\pi$ .
- 6) Funkcija je neparna, vrijedi  $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

### 2.2.2 Svojstva funkcije kosinus

Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \cos x$  ima sljedeća svojstva (vidjeti [3]):

- 1) Nultočke su brojevi  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 2) Maksimum je funkcije 1, a poprima se za  $x = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



3) Minimum je funkcije -1, a poprima se za  $x = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4) Na intervalu  $[0, 2\pi]$  tijek je funkcije

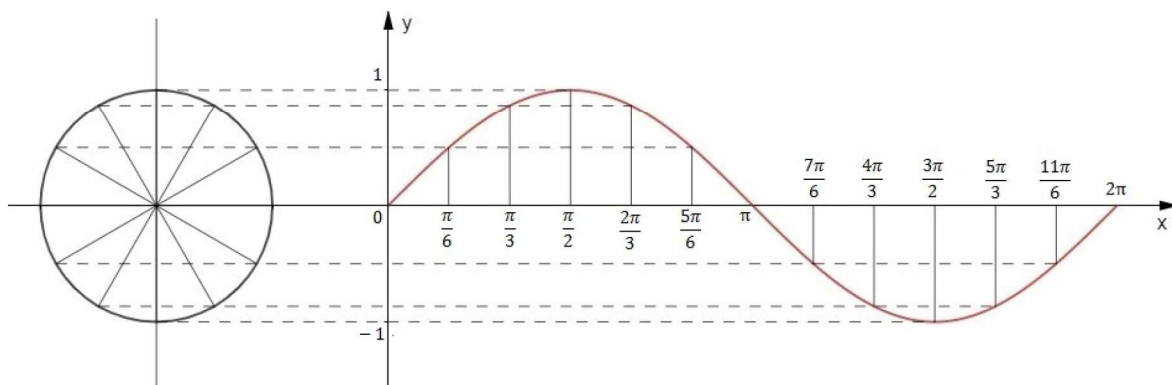
$x$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\pi$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	$2\pi$
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

5) Funkcija je periodična s periodom  $2\pi$ .

6) Funkcija je parna, vrijedi  $f(-x) = \cos(-x) = \cos x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

### 2.2.3 Grafički prikaz funkcija sinus i arkus sinus

Objašnjenja vezana uz grafove sinusa i arkus sinusa prate [3] i [5]. Pogledajmo grafički prikaz funkcije sinus prikazan na Slici 3.



Slika 3: Graf funkcije sinus na intervalu  $[0, 2\pi]$

Funkciju sinus grafički smo prikazali pomoću brojevnice kao što je vidljivo na Slici 3. Kako je funkcija sinus periodična s periodom  $2\pi$  dovoljno je poznavati njezin graf na nekom intervalu duljine  $2\pi$ . Zbog toga je njezin grafički prikaz i dan na intervalu  $[0, 2\pi]$ .

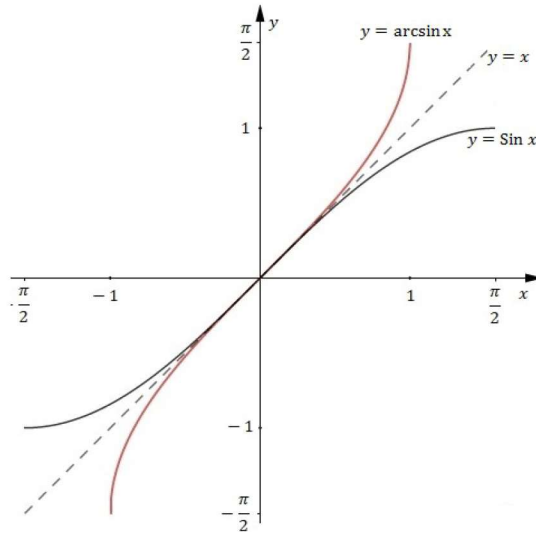
Grafički se prikaz funkcije sinus zove sinusoida. Napomenimo, prema [9], opća sinusoida ima oblik

$$f(x) = A \sin(Bx + C), \quad (1)$$

gdje je  $A$  pozitivna konstanta koju zovemo amplituda,  $B$  kružna frekvencija, a  $C$  fazni pomak (pomak po osi apscisa). Pribrojimo li funkciji (1) slovo  $D$ , dobit ćemo pomak po osi ordinata. Temeljni period opće sinusoida računa se po formuli

$$T = \frac{2\pi}{B}. \quad (2)$$

U nastavku je, na Slici 4, prikazan graf funkcije  $f(x) = \arcsin x$  koji se dobiva kao osnometrična slika funkcije Sin definirane u poglavlju 2.2 s obzirom na pravac  $y = x$ .



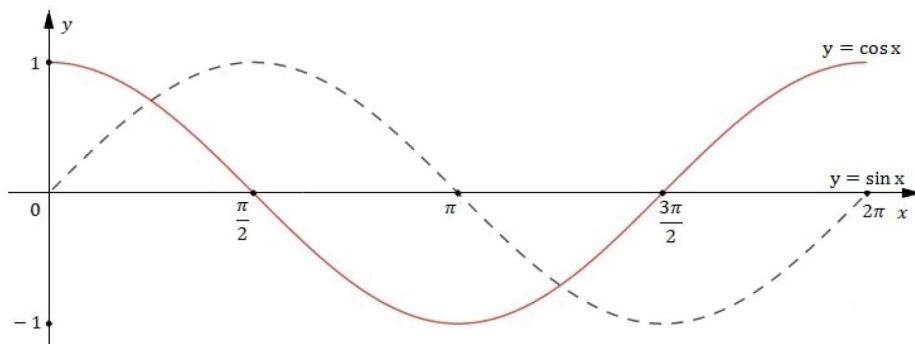
Slika 4: Grafički prikaz funkcije arkus sinus

#### 2.2.4 Grafički prikaz funkcija kosinus i arkus kosinus

Graf se funkcije kosinus dobiva pomakom grafa funkcije sinus za  $\frac{\pi}{2}$  u lijevo kako je prikazano na Slici 5. Naime,  $\forall x \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$

pa se vrijednost funkcije kosinus u broju  $x$  podudara s vrijednošću funkcije sinus u broju koji je za  $\frac{\pi}{2}$  desno od  $x$  (vidjeti [3]).



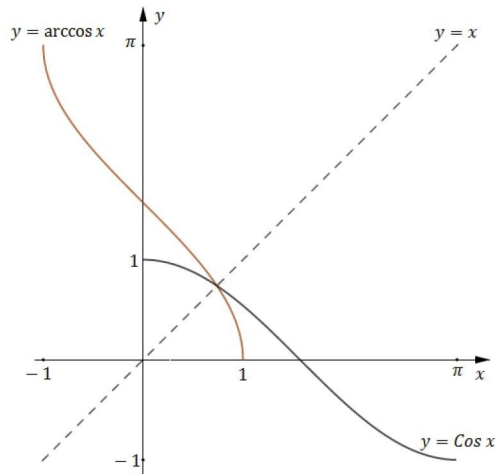
Slika 5: Graf funkcije kosinus na intervalu  $[0, 2\pi]$

Grafički se prikaz funkcije kosinus zove kosinusoida. Prema [9], opća kosinusoida, uz iste oznake kao kod opće sinusoida, ima oblik

$$f(x) = A \cos (Bx + C).$$

Temeljni se period opće kosinusoida računa po formuli (2) iz prethodnog potpoglavlja.

Grafički se prikaz arkus kosinusa (Slika 6) dobiva osnosimetričnom slikom grafa funkcije  $\text{Cos}$  definirane u poglavlju 2.2 s obzirom na pravac  $y = x$  (vidjeti [5]).



Slika 6: Grafički prikaz funkcije arkus kosinus

### 2.3 Tangens i arkus tangens

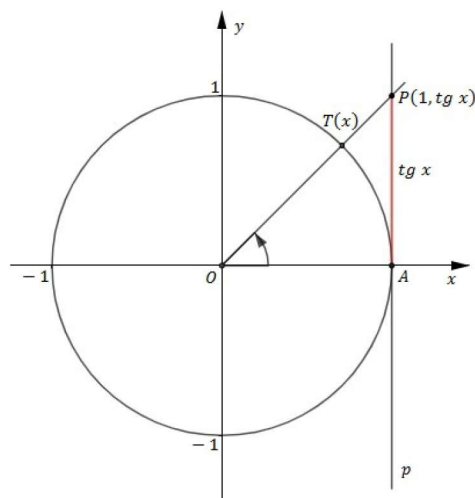
Tangens možemo definirati pomoću funkcija sinus i kosinus. Vrijedi

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}. \quad (3)$$

Iz (3) uočimo da tangens nije definiran kada je  $\cos x = 0$ , to jest za  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Dakle, tangens je definiran na skupu  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ , a poprima vrijednosti iz  $\mathbb{R}$ , odnosno

$$\text{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Isto tako, tangens se može definirati i korištenjem brojevne kružnice (vidjeti [3]). Pogledajmo Sliku 7.



Slika 7: Definicija funkcije tangens

U pravokutnom koordinatnom sustavu nacrtamo kružnicu polumjera duljine 1 sa središtem u ishodištu. U točki  $A(1, 0)$  povučemo tangentu  $p$  na brojevnu kružnicu. Proizvoljno odaberemo realni broj  $x$  te mu na brojevnoj kružnici odredimo pripadnu točku  $T(x)$ . Povučemo pravac kroz ishodište koordinatnog sustava  $O$  i kroz točku  $T$ . Pravac  $OT$ , ako je  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , siječe tangentu  $p$  u nekoj točki  $P$ . Apscisa točke  $P$  je 1, a ordinatu joj označimo s  $y$ . Uočimo da vrijednost od  $y$  ovisi o izabranoj vrijednosti broja  $x$ . Dakle,  $y$  je funkcija od  $x$ , a zovemo je tangens i pišemo  $y = \operatorname{tg} x$ . Zaključimo, tangens po volji odabranog kuta je ordinata točke u kojoj pravac  $OT$  siječe tangentu  $p$  brojevne kružnice.

Tangens je periodična funkcija pa nije bijektivna. Prema [5] i [1], kako bismo dobili bijektivnu funkciju, restringiramo tangens na interval  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Restrikcija

$$\operatorname{Tg} = \operatorname{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$$

je strogo rastuća funkcija te je kao takva i bijektivna. Dakle, funkcija  $\operatorname{Tg} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  ima inverznu funkciju, a zovemo je arkus tangens

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

### 2.3.1 Svojstva funkcije tangens

Funkcija  $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$  ima sljedeća svojstva (vidjeti [3]):

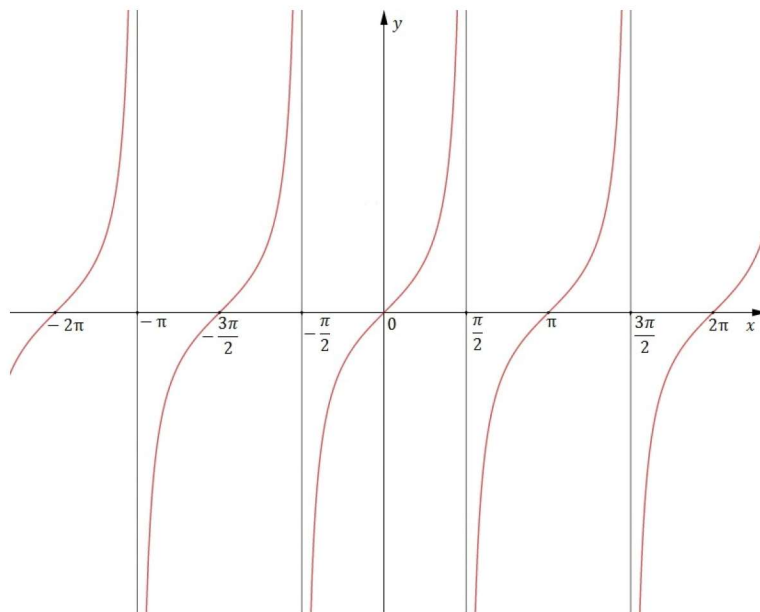
- 1) Nultočke su brojevi  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 2) Vertikalne asimptote funkcije su pravci  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 3) Na intervalu  $[0, \pi]$ , tijek funkcije je

$x$	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	$\pi$
$\operatorname{tg} x$	0 ↗	$+\infty$	$-\infty$	↗ 0

- 5) Funkcija je periodična s periodom  $\pi$ .
- 6) Funkcija je neparna, vrijedi  $f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

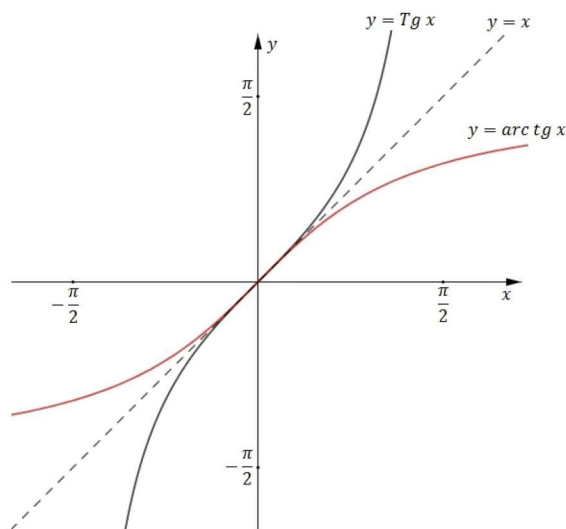
### 2.3.2 Grafički prikaz funkcije tangens i arkus tangens

Graf funkcije  $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$  prikazan je na Slici 8. Pravce  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , kojima se graf približava, ali ih ne dodiruje zovemo vertikalnim asimptotama funkcije tangens. Navedeno prati [10].



Slika 8: Grafički prikaz funkcije tangens

Prema [5], graf se funkcije  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  (Slika 9) dobiva kao osnosimetrična slika grafa funkcije Tg definirane u poglavlju 2.3 s obzirom na pravac  $y = x$ .



Slika 9: Grafički prikaz funkcije arkus tangens

## 2.4 Kotangens i arkus kotangens

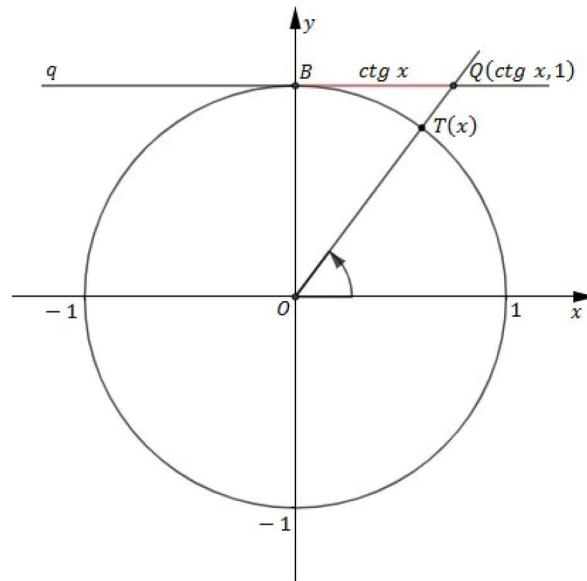
Funkcija kotangens se, kao i tangens, može definirati korištenjem sinusa i kosinusa. Vrijedi

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Uočimo, kotangens nije definiran kada je  $\sin x = 0$ , to jest kada je  $x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ . Dakle, kotangens je definiran na skupu  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ , a poprima vrijednosti iz  $\mathbb{R}$ , odnosno

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definirajmo kotangens i korištenjem brojevne kružnice (vidjeti [3]). Pogledajmo Sliku 10.



Slika 10: Definicija funkcije kotangens

Na brojevnu kružnici povučemo tangentu  $q$  u točki  $B(0, 1)$ . Proizvoljno izaberemo realni broj  $x$  i odredimo mu pripadnu točku  $T(x)$  na brojevnoj kružnici. U sljedećem koraku povučemo pravac koji prolazi kroz ishodište  $O$  koordinatnog sustava i kroz točku  $T$ . Pravac  $OT$ , ako je  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , siječe tangentu  $q$  u nekoj točki  $Q$ . Ordinata točke  $Q$  je 1. Primijetimo da vrijednost apscise točke  $Q$  ovisi o vrijednosti kuta  $x$ . Dakle, apscisa točke  $Q$  je funkcija od  $x$  koju zovemo kotangens i pišemo  $\text{ctg } x$ . Zaključimo, kotangens je po volji odabranog kuta apscisa točke u kojoj pravac  $OT$  siječe tangentu  $q$  brojevne kružnice.

Kotangens, kao i preostale trigonometrijske funkcije, nije bijekcija pa nema inverznu funkciju. Prema [5] i [1], kako bismo odredili inverznu funkciju kotangensa, restringirajmo ga na interval  $\langle 0, \pi \rangle$ . Dakle, restrikcija

$$\text{Ctg} = \text{ctg}|_{\langle 0, \pi \rangle}$$

strogo je rastuća funkcija pa je i bijektivna. Prema tome, funkcija  $\text{Ctg} : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  ima inverznu funkciju koju zovemo arkus kotangens

$$\text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \pi \rangle.$$

### 2.4.1 Svojstva funkcije kotangens

Funkcija  $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \text{ctg } x$  ima sljedeća svojstva (vidjeti [3]):

- 1) Nultočke su brojevi  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 2) Vertikalne asimptote funkcije su pravci  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3) Na intervalu  $[0, \pi]$ , tijekom funkcije je

$x$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\pi$
$\text{ctg } x$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

5) Funkcija je periodična s periodom  $\pi$ .

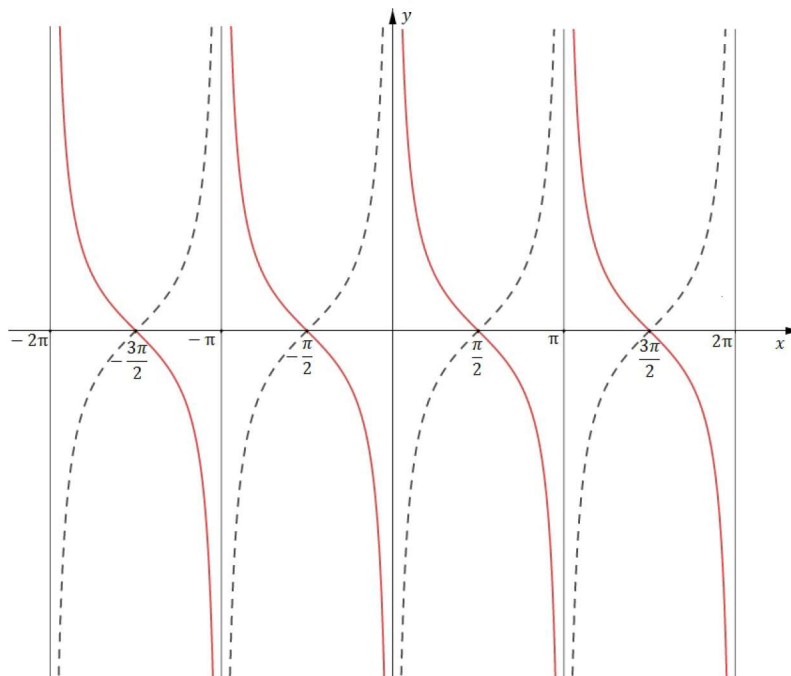
6) Funkcija je neparna, vrijedi  $f(-x) = \text{ctg}(-x) = -\text{ctg } x = -f(x)$ ,  
 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

### 2.4.2 Grafički prikaz funkcije kotangens i arkus kotangens

Graf funkcije kotangens nazivamo još i kotangensoida. Kako bismo grafički prikazali kotangens, poslužiti ćemo se njegovom vezom s funkcijom tangens koja je dana u nastavku. Dakle,

$$\text{ctg } x = \text{tg} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -\text{tg} \left( x - \frac{\pi}{2} \right).$$

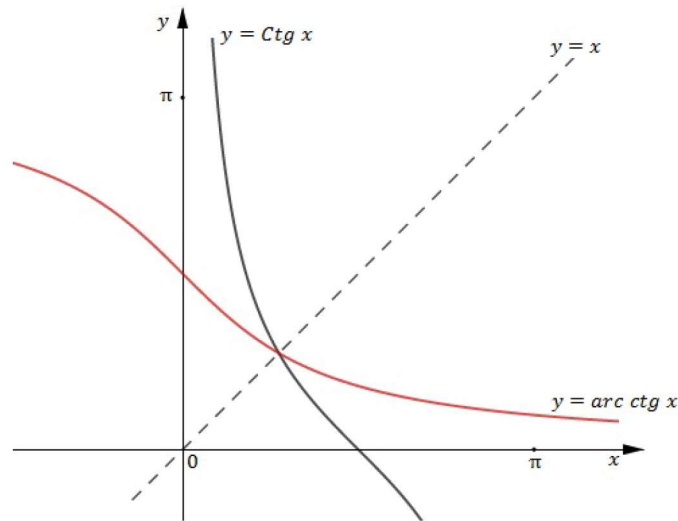
Grafički se prikaz funkcije  $\text{tg} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$  dobiva iz grafičkog prikaza tangensa, ali pomaknutog za  $\frac{\pi}{2}$  udesno. Na kraju, grafički prikaz kotangensa dobivamo zrcaljenjem takvog grafa s obzirom na os apscisu kako je prikazano na Slici 11 (vidjeti [3]).



Slika 11: Graf funkcije kotangens

Pravce  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , kojima se graf približava, ali ih ne dodiruje zovemo vertikalnim asimptotama funkcije kotangens.

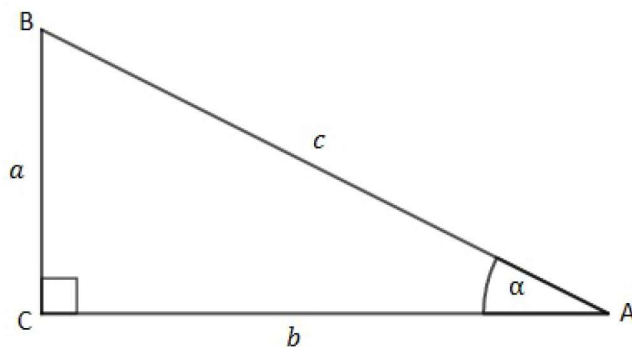
Prema [5], graf se funkcije  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  (Slika 12) dobiva kao osnosimetrična slika funkcije  $\operatorname{Ctg}$  koja je definirana u poglavlju 2.4 s obzirom na pravac  $y = x$ .



Slika 12: Graf funkcije arkus kotangens

## 2.5 Trigonometrija pravokutnog trokuta

Pošto ćemo u posljednjem poglavlju ovoga rada objasniti jedan primjer primjene trigonometrije pravokutnog trokuta u svakodnevnom životu, definirajmo trigonometrijske funkcije korištenjem pravokutnog trokuta. Definicije koje slijede prate [2].



Slika 13: Pravokutni trokut

Na Slici 13 prikazan je pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu  $C$ , kutom  $\alpha$  pri vrhu  $A$  i stranicama duljine  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Prema položaju u odnosu na kut  $\alpha$ , stranicu duljine  $a$  zovemo nasuprotna kateta, a stranicu duljine  $b$  priležeća kateta. Stranicu duljine  $c$  zovemo hipotenuza.

Sinus kuta  $\alpha$  je omjer duljine nasuprotne katete i hipotenuze

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$



Kosinus kuta  $\alpha$  je omjer duljine priležeće katete i hipotenuze

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Tangens kuta  $\alpha$  je omjer duljine nasuprotne i priležeće katete

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Kotangens kuta  $\alpha$  je omjer duljine priležeće i nasuprotne katete

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

### 3 Modeliranje pomoću trigonometrijskih funkcija

Trigonometrijskim funkcijama opisujemo razne periodične pojave iz svakodnevnog života. Možemo ih primjeniti u arhitekturi, astronomiji, meteorologiji, ekonomiji, prometu, medicini, fizici i drugim područjima. U ovome ćemo poglavlju pojasniti neke od spomenutih primjera primjene trigonometrijskih funkcija.

#### 3.1 Temperatura zraka

U meteorologiji, temperatura zraka je temperatura u prizemnom sloju atmosfere koja nije uvjetovana toplinskim zračenjem tla i okoline ili izravnim Sunčevim zračenjem. Mjeri se na visini od 2 metra iznad tla. Temperatura zraka mijenja se tijekom dana i tijekom godine. Dnevna temperatura ovisi o dobu dana, kao i o veličini i vrsti naoblake. Godišnja temperatura ovisi o pložaju Zemlje prema Suncu, geografskom položaju mjesta u kojemu se temperatura mjeri te o klimatskim promjenama. U Hrvatskoj je u prosijeku najhladniji mjesec siječanj, a najtopliji srpanj. Isto tako, prosječne temperature u istim mjesecima u godini su približno jednake (vidjeti [13]). Prema [14], srednja dnevna temperatura zraka izračunava se po formuli

$$t_{sr} = \frac{t_7 + t_{14} + 2t_{21}}{4},$$

gdje su  $t_7, t_{14}$  i  $t_{21}$  terminske vrijednosti temperature mjerene redom u 7, 14 i 21 sat po lokalnom vremenu. Srednje se mjesečne temperature dobiju tako da se zbroj srednjih dnevnih temperatura u mjesecu podijeli s brojem dana u mjesecu.

U sljedećoj su tablici prikazane srednje mjesečne temperature zraka u Osijeku za 2021. godinu.

Mjesec ( $x$ )	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Srednja temperatura ( $^{\circ}C$ )	2.1	4.9	5.4	9	14.9	21.1	23.5	21.2	17.7	10.1	6.7	2.9

Tablica 1: Srednje mjesečne temperature u Osijeku za 2021. godinu

Sada želimo modelirati srednje mjesečne temperature zraka pomoću funkcije sinus.

Cilj nam je pronaći funkciju oblika

$$y(x) = A \sin(Bx - C) + D, \tag{4}$$

koja će odgovarati podacima iz tablice. Slovo  $x$  označava mjesec koji se promatra. Najveća srednja temperatura u Osijeku 2021. godine bila je u srpnju i iznosila je  $23.5^{\circ}C$ , a najmanja je bila u siječnju i iznosila je  $2.1^{\circ}C$ . Amplitudu  $A$  odredimo pomoću najveće i najmanje srednje vrijednosti tako da apsolutnu vrijednost njihove razlike podijelimo s 2.

$$|A| = \left| \frac{\text{najveća temperatura} - \text{najmanja temperatura}}{2} \right|$$

$$|A| = \left| \frac{23.5 - 2.1}{2} \right| = 10.7$$

Podaci su srednjih temperatura dani za razdoblje od 12 mjeseci pa imamo da je  $\frac{2\pi}{B} = 12$ , odnosno  $B = \frac{\pi}{6}$ . Vertikalni pomak  $D$  dobivamo tako da zbroj najmanje i najveće srednje temperature podijelimo s 2.

$$D = \frac{\textit{najveća temperatura} + \textit{najmanja temperatura}}{2}$$

$$D = \frac{23.5 + 2.1}{2} = 12.8$$

Uvrštavanjem vrijednosti  $A$ ,  $B$  i  $D$  u (4) dobivamo

$$y(x) = 10.7 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - C\right) + 12.8. \quad (5)$$

Kako bismo odredili horizontalni pomak, unosimo vrijednosti iz Tablice 1 za siječanj te imamo

$$\begin{aligned} 2.1 &= 10.7 \sin\left(\frac{\pi}{6} - C\right) + 12.8 \\ 2.1 - 12.8 &= 10.7 \sin\left(\frac{\pi}{6} - C\right) \\ -10.7 &= 10.7 \sin\left(\frac{\pi}{6} - C\right) / : (10.7) \\ -1 &= \sin\left(\frac{\pi}{6} - C\right). \end{aligned}$$

Uvođenjem supstitucije  $\theta = \frac{\pi}{6} - C$  dobivamo da je  $\sin \theta = -1$ , to jest  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ . Nadalje, imamo da je

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - C,$$

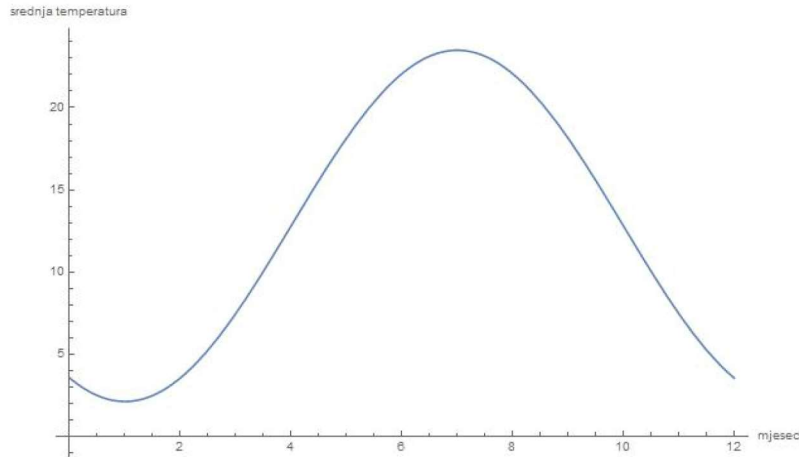
odnosno

$$C = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Konačna funkcije koja odgovara vrijednostima iz Tablice 1 glasi

$$y(x) = 10.7 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{3}\right) + 12.8.$$

Na sljedećoj je slici grafički prikaz funkcije koja modelira srednje mjesečne temperature u Osijeku za 2021. godinu.

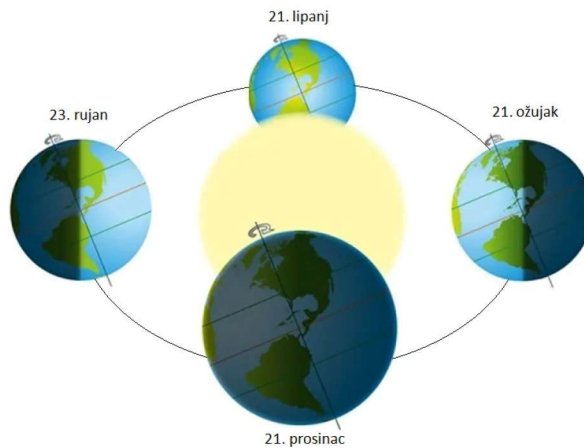


Slika 14: Grafički prikaz srednjih mjesečnih temperatura u Osijeku za 2021. godinu

Primjer je sličnoga zadatka dan u [7].

### 3.2 Duljina dana

Duljina dana, u smislu trajanja dnevnog svjetla, nije uvijek jednaka. Trajanje dnevnog svjetla ovisi o položaju Zemlje u orbiti, to jest o njezinoj udaljenosti od Sunca. Zemljina je orbita elipsa pa njezina udaljenost od Sunca, a time i trajanje dnevnog svjetla, ovisi o dobu godine. Najviše je dnevnoga svjetla oko prvoga dana ljeta, a najmanje oko prvoga dana zime (vidjeti [8]). Kretanje Zemlje oko Sunca po orbiti prikazano je na Slici 15.



Slika 15: Kretanje Zemlje oko Sunca

Pošto se trend duljine dana ponavlja iz godine u godinu, zaključujemo da duljinu dana možemo modelirati pomoću periodičnih funkcija.

Neka je dana funkcija za određivanje duljine dana

$$S = 24 - \frac{24}{\pi} \arccos \left[ \frac{\sin \frac{0.8333 \cdot \pi}{180} + \sin \frac{z \cdot \pi}{180} \cdot \sin y}{\cos \frac{z \cdot \pi}{180} \cdot \cos y} \right]. \quad (6)$$

Vrijednost funkcije  $S$  određuje broj sati u danu u kojima je dnevno svjetlo. Slovo  $z$  je geografska širina mjesta u kojemu se mjeri trajanje dnevnog svjetla. Geografska je širina

izražena u stupnjevima. Slovo  $x$  je redni broj dana u godini, a  $y$  je dan izrazom

$$y = \arcsin(0.3975 \cos(0.2163 + 2 \arctg(0.9671 \operatorname{tg}(0.0086 \cdot (x - 186))))).$$

Odredimo duljinu dana u Osijeku na prvi dan proljeća, ljeta, jeseni i zime u 2021. godini. Geografska je širina Osijeka  $z = 45^\circ 33'$ .

Ljetni se solsticij događa na prvi dan ljeta i toga je dana trajanje dnevnog svjetla najdulje. Ljeto započinje 21. lipnja i to je 172. dan u godini. Prvo odredimo vrijednost za  $y$ , a zatim i za  $S$ .

$$y = \arcsin(0.3975 \cos(0.2163 + 2 \arctg(0.9671 \operatorname{tg}(0.0086 \cdot (172 - 186)))) = 23.42198311$$

Uvrštavanjem  $y$  i  $z$  u (6) dobivamo

$$S = 24 - \frac{24}{\pi} \arccos \left[ \frac{\sin \frac{0.8333 \cdot \pi}{180} + \sin \frac{45^\circ 33' \cdot \pi}{180} \cdot \sin 23.42198311}{\cos \frac{45^\circ 33' \cdot \pi}{180} \cdot \cos 23.42198311} \right] = 15.688800491.$$

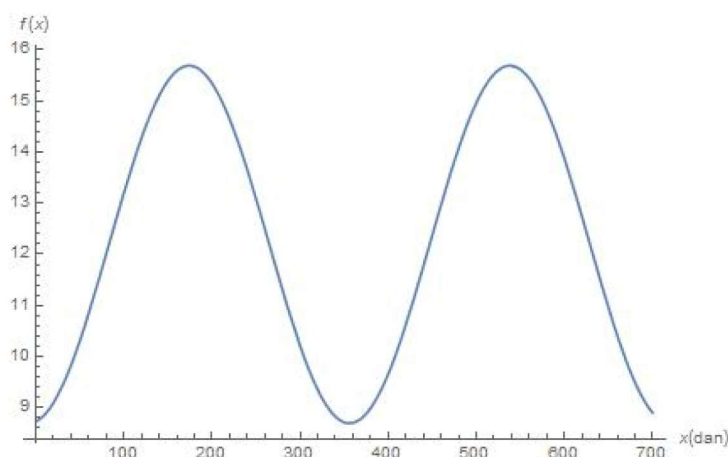
Zimski solsticij događa se na prvi dan zime i tada je noć najdulja, a dan najkraći u godini. Zima započinje 21. prosinca i to je 355. dan u godini. Kao i kod prvoga dana ljeta prvo odredimo  $y$ , a zatim  $S$ .

$$y = \arcsin(0.3975 \cos(0.2163 + 2 \arctg(0.9671 \operatorname{tg}(0.0086 \cdot (355 - 186)))) = -23.41689411$$

Uvrštavanjem  $y$  i  $z$  u (6) dobivamo

$$S = 24 - \frac{24}{\pi} \arccos \left[ \frac{\sin \frac{0.8333 \cdot \pi}{180} + \sin \frac{45^\circ 33' \cdot \pi}{180} \cdot \sin -23.41689411}{\cos \frac{45^\circ 33' \cdot \pi}{180} \cdot \cos -23.41689411} \right] = 8.698377087.$$

Dakle, na prvi je dan ljeta dan značajnije dulji od noći. Isto tako, na prvi je dan zime dan značajnije kraći od noći.



Slika 16: Graf funkcije (8)

Duljina se dana može odrediti i korištenjem funkcije

$$f(x) = A \sin(B(x - C)) + D, \quad (7)$$

gdje  $x$  označava redni broj dana čija nas duljina zanima.  $A$  je razlika, a  $D$  zbroj maksimalne (prvi dan ljeta) i minimalne (prvi dan zime) duljine dana u 2021. godini podijeljen s 2.  $B$  je period  $\frac{2\pi}{364}$ , a  $C$  je jednak 83. Dakle, u 2021. je godini  $A = 3.495211702$ , a  $D = 12.193588789$ . Uvrštavanjem  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  u (7) dobivamo

$$f(x) = 3.495211702 \sin\left(\frac{2\pi}{364}(x - 83)\right) + 12.193588789. \quad (8)$$

Oredimo sada duljinu dana na prvi dan proljeća i jeseni uz pomoć funkcije (8).

Proljeće počinje 21. ožujka, a jesen 23. rujna. Dan i noć na prvi dan proljeća, kao i na prvi dan jeseni, traju približno jednako. Dakle, za prvi dan proljeća i za prvi dan jeseni trebali bismo dobiti da dan traje približno 12 sati.

Prvi je dan proljeća 80. dan u godini. Uvrštavanjem vrijednosti  $A$ ,  $B$  i  $D$  u (8) za 80. dan dobivamo

$$f(80) = 3.495211702 \sin\left(\frac{2\pi}{364}(80 - 83)\right) + 12.193588789 = 12.0126719 \approx 12.$$

Prvi je dan jeseni 266. dan u godini. Kao i kod prvog dana proljeća, uvrštavanjem  $A$ ,  $B$  i  $D$  u funkciju (8) za 266. dan u godini dobivamo

$$f(266) = 3.495211702 \sin\left(\frac{2\pi}{364}(266 - 83)\right) + 12.193588789 = 12.1332592 \approx 12.$$

Uočimo, kao što smo i pretpostavili, duljina je dana na prvi dan proljeća i jeseni približno jednaka 12 sati. Dakle, dan i noć na prvi dan proljeća i jeseni traju približno jednako. Tu pojavu, približno jednakog dana i noći, nazivamo proljetna i jesenska ravnodnevnica.

Primjer je sličnoga zadatka dan u [9].

### 3.3 Plima i oseka

Morske su mijene, poznatije kao plima i oseka, naizmjenično dizanje i spuštanje razine mora. Plima i oseka se pojavljuju zbog gravitacijskih sila koje se nalaze između Zemlje, Mjeseca i Sunca pri njihovom međusobnom kretanju u Svemiru. Mjesec se kreće oko Zemlje te djeluje na nju privlačnom silom. Naime, Mjesec prema sebi privlači vodenu masu na velikim površinama što uzrokuje povlačenje razine mora na obali. Kako utjecaj Mjeseca jača, tako razina mora opada i to zovemo osekom. Utjecaj postepeno slabi te dolazi do postupnog povećanja razine mora što zovemo plimom. Najveća razlika između plime i oseke zabilježena je u Kanadi u zaljevu Fundy, a iznosila je 16 m. Hrvatska se morska obala nalazi u području umjerenih plima i oseka. U Jadranskom se moru, raspon između plime i oseke kreće oko jednoga metra. U Hrvatskoj je najveći plimni val zabilježen 1. prosinca 2008. godine (vidjeti [12]).

U Tablici 2 su podaci (preuzeti s [15]) plime i oseke zabilježeni 25. veljače 2022. godine u Dubrovniku.

Vrijeme(h)	Visina (cm)	Stanje
07 : 58	14	oseka
12 : 58	18	plima
17 : 44	14	oseka

Tablica 2: Plima i oseka, Dubrovnik, 25.2.2022.

Odredimo funkciju koja modelira razine mora po satima toga dana.

U Dubrovniku su 25. veljače bile dvije oseke od 14 cm i jedna plima od 18 cm. Kako su u Tablici 2 dane ekstremne vrijednosti, promjenu razine mora uzrokovanu plimom i osekom modelirat ćemo pomoću funkcije

$$f(t) = -A \cos(Bt) + D. \quad (9)$$

Slovo  $t$  iz (9) je vrijeme u kojemu se mjeri razina mora. Amplitudu  $A$  izračunamo tako da apsolutnu vrijednost razlike ekstremne vrijednosti plime i ekstremne vrijednosti oseke podijelimo s 2

$$|A| = \left| \frac{18 - 14}{2} \right| = 2.$$

Vrijeme proteklo između dvije oseke, to jest interval od 9 sati i 46 minuta, temeljni je period naše funkcije. Kako bismo dobili što precizniju funkciju, temeljni period izrazimo razlomkom. Dakle,  $T = \frac{293}{30}$ .

Sada odredimo vrijednost za  $B$

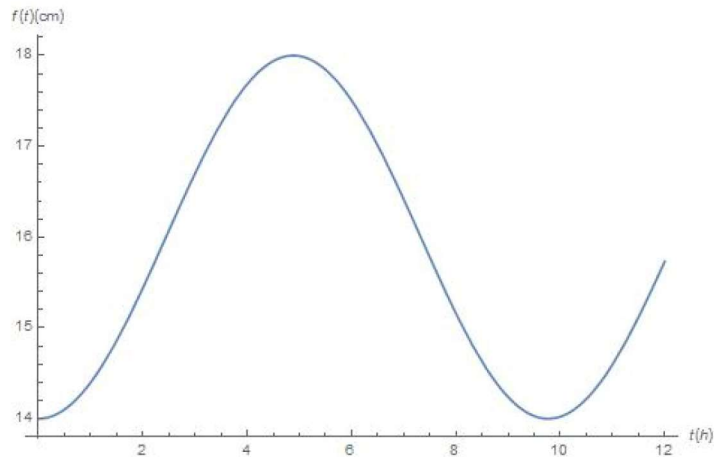
$$B = \frac{2\pi}{T} = \frac{60\pi}{293}.$$

Pomak  $D$  po osi ordinata izračunamo tako da zbroj ekstremnih vrijednosti podijelimo s 2

$$D = \frac{18 + 14}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

Uvrštavanjem vrijednosti  $A$ ,  $B$  i  $D$  u (9) dolazimo do tražene funkcije (Slika 17)

$$f(t) = -2 \cos\left(\frac{60\pi t}{293}\right) + 16. \quad (10)$$



Slika 17: Graf funkcije (10)

Primjer sličnoga zadatka možemo vidjeti u [10].

### 3.4 Opasna uzbrdica

Prometni su znakovi sredstva koja sudionicima u prometu daju informacije i upozorenja potrebna za sigurno i nesmetano kretanje prometnicama. Postoje tri vrste znakova: znakovi opasnosti, znakovi izričitih naredbi i znakovi obavijesti. Znakovi opasnosti označavaju blizinu dijela ceste ili mjesto na cesti na kojem sudionicima u prometu prijeti opasnost. Jedan je od takvih znakova i znak „opasna uzbrdica”, čiji je primjer prikazan na Slici 18.

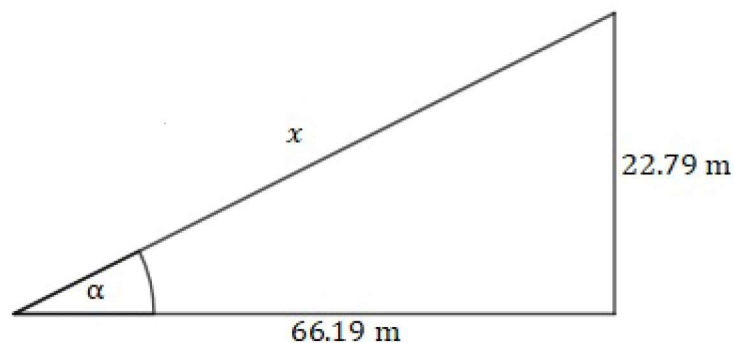


Slika 18: Znak za opasnu uzbrdicu

Znak upozorenja, koji označava opasnu uzbrdicu se nalazi i na početku ulice Baldwin u novozelandskom gradu Dunedinu. Naime, ulica je Baldwin najstrmija ulica na svijetu. Duga je 350 m, a na najstrmijem dijelu uzbrdice, na kraju ulice, nagib je 35%.

Odredimo kolika je duljina te ulice na najstrmijem dijelu i pod kojim se kutom nalazi, ako je poznato da vodoravni pomak od 66.19 m odgovara pomaku od 22.79 m po visini.





Slika 19: Skica uzbrdice

Označimo s  $\alpha$  kut, a s  $x$  duljinu uzbrdice koju trebamo izračunati (Slika 19). Kako bismo odredili željene veličine iskoristit ćemo trigonometrijske omjere pravokutnog trokuta za tangens i sinus.

Prvo odredimo kut  $\alpha$ . Vrijedi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{22.79}{66.19}$$

pa je

$$\alpha = 18.99^\circ \approx 19^\circ.$$

Sada možemo izračunati duljinu najstrmijeg dijela ulice Baldwin. Vrijedi

$$\sin 19^\circ = \frac{22.79}{x} \quad / \cdot x$$

$$x \cdot \sin 19^\circ = 22.79 \quad / : \sin 19^\circ$$

$$x = \frac{22.79}{\sin 19^\circ} \approx 70 \text{ m.}$$

Dakle, posljednjih 70 m najstrmijeg dijela ulice Baldwin nagnuto je pod kutom od  $19^\circ$ .

Ideja je za ovaj primjer preuzeta iz [11].

### 3.5 Harmonijsko titranje

Prema [4], najvažniji je titrajni sustav u prirodi harmonijski oscilator, tijelo koje titra harmonijski. Harmonijski titrati znači titrati pod utjecajem elastične sile

$$F = -kx. \tag{11}$$

U (11),  $k$  je konstanta elastičnosti, a  $x$  je pomak iz ravnotežnog položaja.

Objasnimo pojmove elongacije i brzine (vidjeti [4]) koje ćemo koristiti u nastavku ovoga potpoglavlja. Elongacija je udaljenost tijela koje titra od njegovog ravnotežnog položaja. Kod tijela koje harmonijski titra elongacija  $x$  se s vremenom  $t$  mijenja po funkciji

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12)$$

Brzina je tijela jednaka količniku prijeđenog puta i vremena tijekom kojeg je tijelo prešlo taj put. Brzina harmonijskog oscilatora  $v$  se s vremenom  $t$  mijenja po funkciji

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (13)$$

U (12) i (13) koristimo oznake koje se standardno koriste u fizici.  $A$  je oznaka za amplitudu titranja,  $\omega$  je kružna frekvencija. Argument se funkcija sin i cos zove faza titranja, a  $\varphi_0$  je početna faza u trenutku  $t = 0$ .

Određimo ovisnost brzine i elongacije o vremenu za kuglicu mase  $m = 0.5$  kg koja titra obješena na oprugu konstante elastičnosti  $k = 1.57 \frac{N}{m}$  amplitudom  $A = 1.5$  cm.

Prvo odredimo kružnu frekvenciju i početnu fazu titranja. Kružnu frekvenciju određujemo po formuli

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.57}{0.5}} = 1.77 \frac{rad}{s}.$$

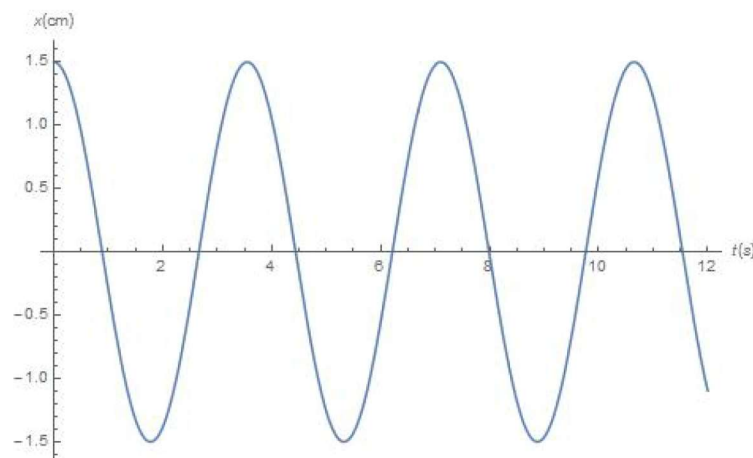
Budući da je kuglica u trenutku  $t = 0$  u ravnotežnom položaju, vrijedi i da je  $x(0) = 0$ .

Uvrštavanjem tih vrijednosti u (12) dobivamo da je  $\sin \varphi_0 = 0$ , odnosno  $\varphi_0 = 0$ .

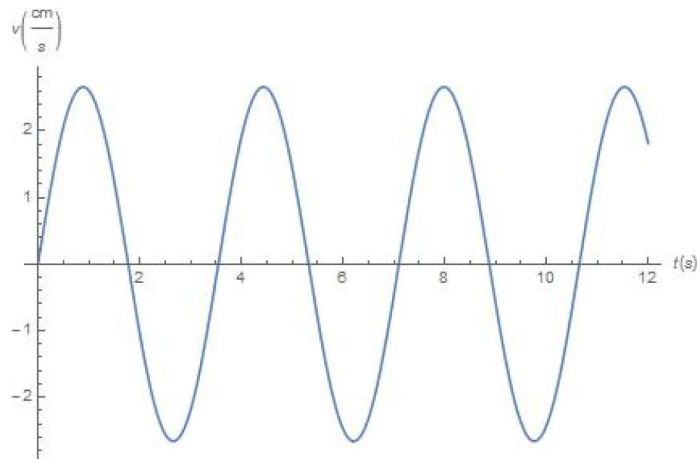
Konačno, uvrštavanjem vrijednosti  $A$ ,  $\omega$  i  $\varphi_0$  u (12) i (13) dobivamo ovisnosti brzine i elongacije o vremenu (Slika 20 i Slika 21).

$$x(t) = 1.5 \cos(1.77t) \text{ cm}$$

$$v(t) = 2.66 \sin(1.77t) \frac{cm}{s}$$



Slika 20: Ovisnost elongacije o vremenu u prvih 12 s

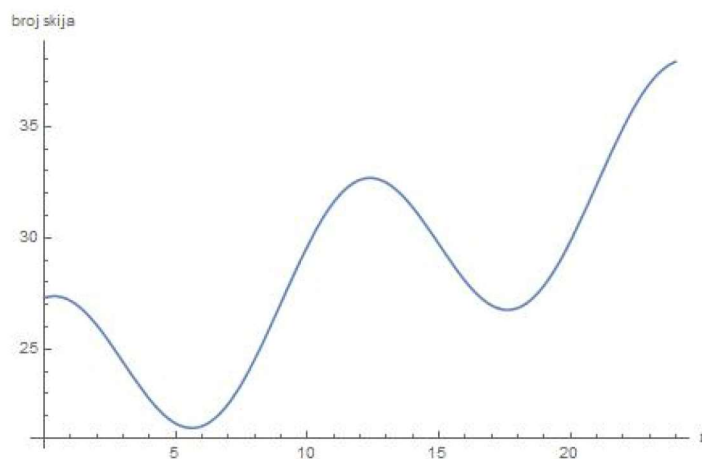


Slika 21: Ovisnost brzine o vremenu u prvih 12 s

Primjer je sličnoga zadatka dan u [9].

### 3.6 Predviđanje prodaje

Predviđanje je prodaje proces prodaje neke tvrtke u budućnosti. Razdoblje predviđanja prodaje može biti mjesečno, tromjesečno, polugodišnje ili godišnje. Predviđanje je prodaje temelj za upravljanje poslovanjem. Bez ideje kakva će joj prodaja biti u budućnosti, tvrtka ne može stvoriti kvalitetan plan za rast. Cilj je predviđanja prodaje dobivanje informacija koje tvrtka može iskoristiti za donošenje osnovnih poslovnih odluka (vidjeti [17]).



Slika 22: Graf funkcije (14)

Promotrimo primjer tvrtke koja proizvodi skije, a mjesečnu prodaju u sljedeće dvije godine predviđa po funkciji

$$S(t) = 23.1 + 0.442t + 4.3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right). \quad (14)$$

U (14),  $S$  je količina prodanih skija u tisućama, a  $t$  vrijeme u mjesecima, pri čemu  $t = 1$  odgovara siječnju 2022. godine.

Određimo koju je količinu skija tvrtka predvidjela da će prodati u veljači i lipnju 2022. godine, a kakva su joj predviđanja prodaje u istim mjesecima 2023. godine:

a) veljača 2022. godine ( $t = 2$ )

$$S(2) = 23.1 + 0.442 \cdot 2 + 4.3 \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 26.134$$

b) lipanj 2022. godine ( $t = 6$ )

$$S(6) = 23.1 + 0.442 \cdot 6 + 4.3 \cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) = 21.452$$

c) veljača 2023. godine ( $t = 14$ )

$$S(14) = 23.1 + 0.442 \cdot 14 + 4.3 \cos\left(\frac{14\pi}{6}\right) = 31.438$$

d) lipanj 2023. godine ( $t = 18$ )

$$S(18) = 23.1 + 0.442 \cdot 18 + 4.3 \cos\left(\frac{18\pi}{6}\right) = 26.756.$$

Trvtka je predvidjela da će i u 2022. i u 2023. godini u veljači prodati više skija nego u lipnju. Svakako, to je bilo i za očekivati jer se skije koriste u zimskim mjesecima pa je i potražnja za istima u tim mjesecima veća. Isto tako, tvrtka predviđa rast prodaje u 2023. godini što je vidljivo i iz grafa funkcije (14) (Slika 22).

Primjer sličnoga zadatka možete vidjeti iz [7].

## Literatura

- [1] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.
- [2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, 1. dio, Udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno - matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2014.
- [3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3, 1. dio, Udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovno - matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2014.
- [4] D. Horvat, D. Hrupec, *Fizika 3, udžbenik za 3. razred gimnazija*, Element, Zagreb, 2020.
- [5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.
- [6] S. Kurepa, *Matematička analiza 1 (diferenciranje i integriranje)*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [7] R. Larson, D.C Falvo, *Trigonometry with CalcChat and CalcView*, The Pennsylvania State University, The Behrend College, Australia: Cengage Learning, 2018.
- [8] P. Žugec, *Duljina dana*, Matematičko - fizički list, LXVIII 1 (2017. - 2018.)
- [9] V. Županović, K. Šorić, *Primjenjena matematika podržana računalom*, Diozit, Slavonski Brod, 2016.
- [10] M. Stepić, K. Brleković, A. Brmbota, S. Loparić, *Matematika 3: Grafovi trigonometrijskih funkcija*  
URL:[https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/1e40c8b9-6d5d-45ae-8776-fe29974fbdfc/html/303\\_grafovi\\_trigonometrijskih\\_funkcija.html](https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/1e40c8b9-6d5d-45ae-8776-fe29974fbdfc/html/303_grafovi_trigonometrijskih_funkcija.html))
- [11] M. Stepić, K. Brleković, A. Brmbota, S. Loparić, *Matematika 3: Trigonometrijske funkcije*  
URL:[https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/1e40c8b9-6d5d-45ae-8776-fe29974fbdfc/html/295\\_trigonometrijske\\_funkcije.html](https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/1e40c8b9-6d5d-45ae-8776-fe29974fbdfc/html/295_trigonometrijske_funkcije.html)
- [12] D. Roša, *Dinamika sustava Sunce - Zemlja - Mjesec: Plime i oseke*  
URL:<https://eskola.zvjezdarnica.hr/osnove-astronomije/suncev-sustav/veliki-planeti/mjesec/dinamika-sustava-sunce-zemlja-mjesec/plime-i-oseke/>
- [13] *Hrvatska enciklopedija, mrežno stanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021.  
URL:<https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=60787>
- [14] *Državni hidrometeorološki zavod, Srednjaci temperature*  
URL: <https://meteo.hr/klima.php>

[15] *Tablica i grafikon plime i oseke*

URL:<https://www.asterion.info/>

[16] *Trigonometric Functions*

URL:[http://mathquest.carroll.edu/CarrollActiveCalculus/S\\_0\\_5\\_TrigFunctions.html](http://mathquest.carroll.edu/CarrollActiveCalculus/S_0_5_TrigFunctions.html)

[17] *Predvidanje prodaje*

URL:<https://hr.unitinal.com/predvidjanje-prodaje/>

## Sažetak

Matematičko je modeliranje proces razvoja matematičkog modela, a matematički je model opis nekog sustava ili pojave matematičkim jezikom. Matematičkim modelima možemo opisati pojave iz svakodnevnog života kao i predvidjeti njihovo buduće ponašanje. U ovome smo se radu bavili trigonometrijskim i ciklometrijskim funkcijama koje imaju čestu primjenu u raznim područjima iz svakodnevnog života. Nakon uvodnog dijela rada je pojašnjena brojeva kružnica pomoću koje su navedene definicije trigonometrijskih funkcija. Nadalje, prije nego su definirane ciklometrijske funkcije, svaka od trigonometrijskih funkcija je restringirana na interval na kojemu za svaku od njih postoji inverzna funkcija. Svaka je od trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija grafički prikazana, a trigonometrijskim su funkcijama navedena i svojstva. U posljednjem poglavlju rada razrađeni su neki od primjera iz svakodnevnog života koji se mogu modelirati pomoću trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija.

**Ključne riječi:** trigonometrijske funkcije, ciklometrijske funkcije, primjene, modeliranje

# Modeling by Trigonometric Functions

## Summary

Mathematical modeling is a process of developing a mathematical model, and a mathematical model is a description of a system or phenomenon in the mathematical language. We can describe phenomena from everyday life as well as predict their future behavior using mathematical models. This paper deals with trigonometric and cyclometric functions, which are often used in various areas of the everyday life. After the introductory part of the paper, the number circle was explained, with which the definitions of trigonometric functions were given. Furthermore, before the cyclometric functions were defined, each of the trigonometric functions was restricted to an interval on which there is an inverse function for each of them. All of the trigonometric and cyclometric functions are shown graphically, and the properties of the trigonometric functions are also listed. The last chapter of the paper elaborates some of the examples from everyday life that can be modeled using trigonometric and cyclometric functions.

**Keywords:** trigonometric functions, cyclometric functions, applications, modeling



## Životopis

Rođena sam 22. kolovoza 1996. godine u Požegi. Osnovnu školu fra Kaje Adžića u Pleternici završila sam 2011. godine. Nakon osnovne škole upisujem prirodoslovno matematičku gimnaziju u Požegi. Srednju školu završavam 2015. godine te upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Preddiplomski studij završavam 2019. godine i stječem naziv sveučilišna prvostupnica matematike uz završni rad Osnovni teoremi diferencijalnog računa funkcije jedne varijable pod mentorstvom prof. dr. sc. Kristiana Sabe. Iste godine, na Odjelu za matematiku, upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika. U srpnju 2022. godine završavam Pedagoško - psihološko - didaktičko - metodičku izobrazbu na Filozofskom fakultetu u Osijeku. Tijekom školske godine 2021./2022. bila sam zaposlena kao učiteljica matematike u Osnovnoj školi Stjepana Radića u Čaglinu.