Primjene linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima

Kovač, Silvija

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Silvija Kovač

Primjene linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Silvija Kovač

Primjene linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Burazin
Komentor: dr. sc. Ivana Crnjac

Osijek, 2022.

Sažetak

Cilj ovog rada je prikazati jednu klasu običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda i njihove primjene. Točnije, prikazat ćemo linearne obične diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima i njihovu primjenu na neke fizikalne probleme. Najprije ćemo uvesti pojam obične diferencijalne jednadžbe i navesti definiciju rješenja. Dati ćemo oblik linearne obične diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima i reći što je Cauchyjeva zadaća. Zatim ćemo uvesti definicije i teoreme koji su nam potrebni za rješavanje homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima. Ovim radom će biti prikazano kako je primjena diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima nezamjenjiva u raznim granana. Navest ćemo problem ravnoteže napete žice i problem harmonijskog oscilatora kao dvije primjene linearnih diferencijalnih jednadžbi. Za navedene probleme biti će dana teorijska pozadina te krajnji zapis matematičkog modela pomoću diferencijalnih jednadžbi i njegovo rješenje, uz primjere primjena modela.

Ključne riječi: linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima, ravnoteža napete žice, harmonijski oscilator.

Applications of second order linear ordinary differential equations with constant coefficients

Abstract

The aim of this paper is to present a class of the second order ordinary differential equations and their applications. More specifically, we will show the second order linear ordinary differential equations with constant coefficients and their application to some physical problems. First, we will introduce the concept of an ordinary differential equation and state the definition of a solution. We will provide the form of the second order linear ordinary differential equation with constant coefficients and tell what Cauchy's problem is. Then, we will introduce the definitions and theorems we need to solve the second order homogeneous linear differential equations with constant coefficients. This paper will show how the application of the second order differential equations with constant coefficients is irreplaceable in various branches. We will mention the equilibrium of tension wire problem and the harmonic oscillator problem as two applications of linear differential equations. For the mentioned problems, the theoretical background will be provided, as well as the final notation of the mathematical model using differential equations and its solution with examples of model applicatioons.

Keywords: second order linear ordinary differential equation, equilibrium of tension wire, harmonic oscillator.

Sadržaj

1 Uvod

Uvođenjem pojma derivacije kao mjere promjene u 17. stoljeću postavljeni su temelji diferencijalnog računa. Temeljni fizikalni zakoni opisani su diferencijalnim računom, koji je osnova matematičke analize. U primjenama funkcija predstavlja neku fizikalnu veličinu, dok derivacija predstavlja brzinu promjene te veličine. Diferencijalne jednadžbe često primjenjujemo za matematičko izražavanje problema u diferencijalnoj geometriji, fizici, inženjerstvu te brojnim drugim znanstvenim disciplinama. Primjerice, obična diferencijalna jednadžba povezuje struju i promjenu električnog naboja u nekom vremenskom intervalu; opisuje zakon radioaktivnog raspadanja i sl.

Diferencijalne jednadžbe su jednadžbe u kojima imamo sadržanu vezu između nepoznatih funkcija i njihovih derivacija po nezavisnoj varijabli ili nezavisnim varijablama. Red diferencijalne jednadžbe definiran je kao red najviše derivacije koja se nalazi u jednadžbi. Glavni cilj ovog rada je proučavanje i primjena linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima. Prije same analize navedene jednadžbe reći ćemo što je to obična diferencijalna jednadžba, kako glasi definicija rješenja i što su to homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda. Navest ćemo osnovne definicije i teoreme koji nam pomažu u njihovom rješavanju. Nadalje ćemo govoriti o primjeni ovog tipa linearnih jednadžbi konkretno na ravnoteži napete žice te harmonijskom oscilatoru prvo bez prigušenja, zatim s prigušenjem, i na kraju s dodanom vanjskom silom. Harmonijsko titranje je titranje fizikalnog tijela ili čestice pod djelovanjem sile opruge. Sustav koji pri utjecaju sile opruge oscilira nazivamo harmonijski oscilator. Uočit ćemo da kod harmonijskog oscilatora gibanje mase uvijek na kraju nestane ako postoji prigušenje u sustavu. Odnosno, svaki početni poremećaj sustava se raspršuje prigušenjem koje je prisutno u sustavu. Jedan od razloga zašto su ovakvi modeli korisni u mehaničkim sustavima je jer se mogu koristiti za prigušivanje neželjenih smetnji. Neki od primjera takvih pojava su amortizeri na automobilima koji prenose neravninu na cesti ili cijev pištolja koja ublažuje trzaj pri pucnju.

2 Obična diferencijalna jednadžba

Diferencijalne jednadžbe možemo klasificirati po broju varijabli o kojima ona ovisi ili po redu diferencijalne jednadžbe. Diferencijalna jednadžba u kojoj nepoznata funkcija ovisi samo o jednoj varijabli naziva se obična diferencijalna jednadžba (ODJ). Ukoliko nepoznata funkcija ovisi o više varijabli, govorimo o parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi (PDJ). Nadalje, ako se u jednadžbi pojavljuje najviše prva derivacija nepoznate funkcije tada jednadžbu nazivamo obična diferencijalna jednadžba prvog reda, a ukoliko se pojavljuje najviše druga derivacija nepoznate funkcije u jednadžbi onda se ona naziva obična diferencijalna jednadžba drugog reda i dalje induktivno.

Implicitni oblik ODJ n-tog reda glasi

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

gdje je x nezavisna varijabla, a y nepoznata funkcija varijable x. Ovdje F označava poznatu funkciju više varijabli.

Prisjetimo se i eksplicitnog oblika ODJ n-tog reda:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)), \tag{2.1}$$

gdje je f poznata funkcija koja je neprekidna na nekom intervalu I.

Riješiti diferencijalnu jednadžbu znači odrediti sve funkcije i njihove derivacije koje ju identički zadovoljavaju. Slijedi definicija rješenja obične diferencijalne jednadžbe. Sve definicije, teoremi i dokazi ovoga poglavlja mogu se pronaći u [2, 3, 4, 7].

Definicija 1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Za funkciju $u : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je rješenje ODJ (2.1) ukoliko vrijedi:*

1) *$I \subseteq \mathbb{R}$ je otvoren interval*

2) $u \in C^n(I)$

3) $(\forall x \in I)\ (x, u(x), u'(x), ..., u^{(n-1)}(x)) \in \Omega$

4) $(\forall x \in I)\ u^n(x) = f(x, u(x), ..., u^{(n-1)}(x))$.

Skup svih rješenja neke diferencijalne jednadžbe nazivamo njenim **općim rješenjem**, a jedno rješenje te iste jednadžbe nazivamo **partikularno rješenje**.

Podjelu diferencijalnih jednadžbi još možemo napraviti na linearne i nelinearne diferencijalne jednadžbe. U ovom radu bavit ćemo se linearnim diferencijalnim jednadžbama. Označimo s $C(I)$ prostor svih neprekidnih funkcija na intervalu I.

Definicija 2. *Običnu diferencijalnu jednadžbu oblika*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \tag{2.2}$$

gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren interval,* $f \in C(I)$, $a_i \in C(I)$, $i = 0, 1, ..., n-1$ *nazivamo linearna obična diferencijalna jednadžba n-tog reda.*

2.1 Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Linearna diferencijalna jednadžba je vrsta diferencijalne jednadžbe u kojoj se nepoznata funkcija i njezine derivacije pojavljuju u linearnom obliku. Upravo linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda imaju značajnu ulogu u raznim područjima matematičke fizike i potrebne su pri proučavanju provođenja topline, gibanja fluida, gibanja valova, itd.

Diferencijalnu jednadžbu (2.2) za $n = 2$ nazivamo **linearna diferencijalna jednadžba drugog reda**. Preciznije, njezin opći oblik zapisujemo kao

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{2.3}$$

gdje su a, b, c i f neprekidne funkcije na nekom intervalu I.

Ako je $a \neq 0$ te a, b, $c \in \mathbb{R}$, tada govorimo o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima

$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{2.4}$$

Ukoliko su uz jednadžbu (2.4) zadana i dva početna uvjeta $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, za neki $x_0 \in I$, tada zadaću

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{2.5}$$

nazivamo **Cauchyjeva zadaća**.

Definicija 3. *Funkciju* $u : I \to \mathbb{R}^3$ *nazivamo rješenjem Cauchyjeve zadaće (2.5) ukoliko je u rješenje jednadžbe (2.4) i zadovoljava početne uvjete.*

2.1.1 Homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda

Jednadžbu (2.3) nazivamo homogenom ako je $f(x) = 0$, $\forall x \in I$, to jest ako je

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

U suprotnom, jednadžbu nazivamo nehomogenom.

Ukoliko su a, b, $c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$, to jest ako je

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.6}$$

govorimo o homogenoj diferencijalnoj jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Rješenje jednadžbe (2.6) tražimo u obliku $y(x) = e^{\lambda x}$, gdje je $\lambda \in \mathbb{C}$. Budući da je $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ i $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, uvrštavanjem u (2.6) dobivamo

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0. \tag{2.7}$$

Polinom

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

nazivamo karakteristični polinom, a jednadžbu

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

karakteristična jednadžba jednadžbe (2.6). To je kvadratna jednadžba gdje je λ nepoznanica. Njezina rješenja $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ nazivamo karakterističnim korjenima. Skup svih rješenja jednadžbe (2.6) nalazimo u ovisnosti o karakterističnim korjenima λ_1, λ_2. O tome nam govori sljedeći teorem:

Teorem 1. *Neka su λ_1 i λ_2 rješenja karakteristične jednadžbe $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.*

1) Ako su λ_1 i λ_2 međusobno različiti i realni brojevi, tada je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano s $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante.

2) Ako su λ_1 i λ_2 jednaki ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) i realni brojevi, tu je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano s $y(x) = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3) Ako su λ_1 i λ_2 kompleksni brojevi, tada vrijedi $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $\beta \neq 0$ i rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

U svim slučajevima, konstante C_1 i C_2 su jednoznačno određene početnim uvjetima $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Kako bismo dokazali Teorem 1 nužno je uvesti pojam linearne nezavisnosti funkcija, definirati determinantu Wronskog i iskazati teorem kojim možemo provjeriti linearnu nezavisnost funkcija.

Definicija 4. *Za funkcije y_1 i y_2 kažemo da su **linearno nezavisne** ako iz*

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0,$$

pri čemu su C_1 i C_2 realne konstante, nužno slijedi $C_1 = C_2 = 0$.

Definicija 5. *Neka su $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije. Funkciju*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{2.8}$$

*nazivamo **determinanta Wronskog** ili **Wronskijan** funkcija y_1 i y_2.*

Teorem 2. *Ako su funkcije y_1 i y_2 linearno zavisne, onda je njihov Wronskijan jednak nuli.*

Dokaz:
Ako je $C_1y_1 + C_2y_2 = 0$, gdje je na primjer $C_2 \neq 0$, onda je $y_2 = \lambda y_1$ za $\lambda = -\frac{C_1}{C_2}$. Uvrštavanjem y_1, y_2 u (2.8) slijedi da je $W = 0$. □

Za homogene linearne jednadžbe općenito vrijedi **princip superpozicije rješenja** koji glasi:

Teorem 3. *Neka su y_1 i y_2 rješenja jednadžbe (2.6). Tada je*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

također njeno rješenje.

Dokaz:
Tvrdnja se lako pokaže uvrštavanjem $C_1y_1 + C_2y_2$ u (2.6). Vrijedi:

$$\begin{aligned} a(C_1y_1 + C_2y_2)'' + b(C_1y_1 + C_2y_2)' + c(C_1y_1 + C_2y_2) = \\ C_1(\underbrace{ay_1'' + by_1' + cy_1}_{=0}) + C_2(\underbrace{ay_2'' + by_2' + cy_2}_{=0}) = 0. \end{aligned}$$

□

Prethodnim teoremom smo pokazali da ukoliko imamo dva rješenja, u mogućnosti smo generirati beskonačnu familiju rješenja jednadžbe (2.6). Linearno nezavisan skup rješenja jednadžbe (2.6) zovemo **fundamentalan skup rješenja**.

Vratimo se sada na dokaz Teorema 1.

Dokaz:

1) Prvi korak je provjeriti jesu li $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ rješenja jednadžbe (2.6):

$$\begin{aligned} ay_1'' + by_1' + cy_1 = a\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + b\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + ce^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) = 0 \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 = a\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 x} + ce^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_2 x}(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) = 0. \end{aligned}$$

Drugi korak je provjeriti linearnu nezavisnost y_1 i y_2. Uvrštavanjem u (2.8) slijedi $|W(x)| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, odnosno za $x = 0$ je $|W(0)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ pa dobivamo da su y_1 i y_2 linearno nezavisni. Tvrdnja slijedi iz Teorema 3.

2) U ovom slučaju je $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Prvi korak je provjeriti jesu li $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$ rješenja jednadžbe (2.6):
za y_1 analogno kao i pod 1), pogledajmo y_2:

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = 2a\lambda e^{\lambda x} + a\lambda^2 xe^{\lambda x} + b(e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x}) + cxe^{\lambda x} = e^{\lambda x}[\underbrace{2a\lambda + b}_{=0} + x(\underbrace{a\lambda^2 + b\lambda + c}_{=0})] = 0.$$

Drugi korak je provjeriti linearnu nezavisnost y_1 i y_2. Uvrštavanjem u (2.8) slijedi $|W(x)| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, odnosno za $x = 0$ je $|W(0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1$ pa dobivamo da su y_1 i y_2 linearno nezavisni. Tvrdnja slijedi iz Teorema 3.

3) Prvi korak je provjeriti jesu li $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ rješenja jednadžbe (2.6). Ovaj dio ide analogno kao u prethodna dva slučaja, raspis je tehničke prirode pa ga izostavljamo. Drugi korak je provjeriti linearnu nezavisnost y_1 i y_2. Uvrštavanjem u (2.8) slijedi $|W(x)| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, odnosno za $x = 0$ je $|W(0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0$ pa dobivamo da su y_1 i y_2 linearno nezavisni. Tvrdnja slijedi iz Teorema 3.

$\square$

Na kraju ovog poglavlja pogledajmo primjere na kojima ćemo primijeniti Teorem 1.

Primjer 1. *Odredimo opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi koje zadovoljavaju pripadajuće početne uvjete:*

a) $2y''(x) - y'(x) - 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{2}$,

b) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$,

c) $y''(x) + 2y'(x) + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$.

Rješenje:

a) Karakteristična jednadžba je oblika

$$2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$$

i njena rješenja su $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ *i* $\lambda_2 = -1$. *Iz toga slijedi da je opće rješenje oblika*

$$y(x) = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Iz početnih uvjeta odredimo konstante C_1 *i* C_2:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 2,$$
$$y'(0) = \frac{3}{2}C_1 - C_2 = \frac{1}{2},$$

odakle dobivamo da je $C_1 = 1 = C_2$. *Traženo partikularno rješenje je*

$$y(x) = e^{\frac{3}{2}x} + e^{-x}.$$

b) Karakteristična jednadžba je oblika

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$$

i ima jedno dvostruko rješenje $\lambda = -3$. *Iz toga slijedi da je opće rješenje oblika*

$$y(x) = e^{-3x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Iz početnih uvjeta odredimo konstante C_1 *i* C_2*:*

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 2, \\ y'(0) &= -3C_1 + C_2 = 0, \end{aligned}$$

odakle dobivamo da je $C_1 = 2$ *i* $C_2 = 6$. *Traženo partikularno rješenje je*

$$y(x) = e^{-3x}(2 + 6x).$$

c) Karakteristična jednadžba je oblika

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

i njeno rješenje je kompleksno-konjugirani par $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. *Iz toga slijedi da je opće rješenje oblika*

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Iz početnih uvjeta odredimo konstante C_1 *i* C_2*:*

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 0, \\ y'(0) &= -C_1 + C_2 = 3, \end{aligned}$$

odakle dobivamo da je $C_1 = 0$ *i* $C_2 = 3$. *Traženo partikularno rješenje je*

$$y(x) = 3\sin(x)e^{-x}.$$

2.1.2 Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda

Jednadžbu oblika (2.4) nazivamo nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima ukoliko je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.
Funkcija $f(x)$ zove se **funkcija smetnje**. Taj naziv dolazi iz primjena jer f opisuje vanjsku silu nekog električkog ili mehaničkog sustava.

Kako bismo našli sva rješenja nehomogene linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, potrebno je pronaći rješenje pripadne homogene jednadžbe,

$$ay'' + by' + cy = 0$$

i njeno partikularno rješenje, o čemu govori sljedeći teorem [4].

Teorem 4. *Opće rješenje jednadžbe (2.4) na otvorenom intervalu I, gdje su a, b, $c \in \mathbb{R}$, je suma općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe $y_H(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ i jednog partikularnog rješenja $y_P(x)$ nehomogene jednadžbe, odnosno*

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x).$$

U nastavku ćemo navesti teoreme koji opisuju pronalazak partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe. Teoremi su poznati pod nazivom Metoda varijacije konstanti i Metoda neodređenih koeficijenata.

Teorem 5. ***(Metoda varijacije konstanti)***
Neka je $\{y_1, y_2\}$ fundamentalan skup rješenja homogene diferencijalne jednadžbe (2.6). Neka su $C_1, C_2 \in C^2(I)$ funkcije takve da vrijedi sljedeći sustav $\forall x \in I$:

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Tada je s

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

dano partikularno rješenje nehomogene linearne jednadžbe (2.4).

Dokaz: Ako vrijede gornje pretpostavke, tada je

$$\begin{aligned} y_P &= C_1y_1 + C_2y_2 \\ y_P' &= C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2 = C_1y_1' + C_2y_2' \\ y_P'' &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + f. \end{aligned}$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} y_P'' + y_P' + y_P &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + f + C_1y_1' + C_2y_2' + C_1y_1 + C_2y_2 \\ &= C_1(y_1'' + y_1' + y_1) + C_2(y_2'' + y_2' + y_2) + f = f. \end{aligned}$$

Dakle, y_P je zaista rješenje nehomogene jednadžbe. $\square$

Napomena 1. *Uočimo da je determinanta matrice sustava iz prethodnog teorema jednaka Wronskijanu. Znamo da je ona različita od nule što znači da imamo jedinstveno rješenje. Dakle, funkcije C_1 i C_2 su jedinstvene.*

Primijenimo sada Teorem 5 u rješavanju sljedećeg primjera.

Primjer 2. *Odredimo opće rješenje jednadžbe $y'' - y = \dfrac{e^x}{3}$.*

Rješenje: *Karakteristična jednadžba pripadne homogene jednadžbe je oblika*

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

a njeni korijeni su $\lambda_{1,2} = \pm 1$. *Slijedi da je njeno opće rješenje oblika*

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pomoću metode varijacije konstanti nalazimo partikularno rješenje dane jednadžbe:

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} &= 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} &= \frac{e^x}{3}. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je

$$\begin{array}{rcr} C_1' = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & C_1 = \frac{1}{3}x \\ C_2' = -\frac{e^{2x}}{6} & \Longrightarrow & C_2 = -\frac{1}{12}e^{2x} \end{array}$$

pa je pripadno partikularno rješenje prema (2.9) dano s $y_P(x) = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{12}e^x$.

Prema Teoremu 4 opće rješenje polazne jednadžbe dano je s

$$y = y_H + y_P = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{12}e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Za razliku od metode varijacije konstanti, metoda neodređenih koeficijenata opisuje kako rješavamo nehomogene jednadžbe kada je funkcija smetnje posebnog oblika [4].

Teorem 6. ***(Metoda neodređenih koeficijenata)***
Neka je $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, *pri čemu su* $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, *nultočka kratnosti* k_0 *karakterističnog polinoma jednadžbe*

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{2.10}$$

u kojoj su $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Ukoliko* λ_0 *nije nultočka, onda uzimamo* $k_0 = 0$. *Nadalje, neka je* $f(x) = e^{\alpha_0 x}[P_1(x)\cos(\beta_0 x) + P_2(x)\sin(\beta_0 x)]$ *za neke polinome* P_1, P_2 *s realnim koeficijentima. Tada jednadžba (2.10) ima partikularno rješenje oblika*

$$y_P(x) = x^{k_0} e^{\alpha_0 x}[Q_1(x)\cos(\beta_0 x) + Q_2(x)\sin(\beta_0 x)],$$

za neke polinome Q_1 *i* Q_2 *čiji je stupanj* $\leq \max\{degP_1, degP_2\}$.

Koeficijente polinoma Q_1 i Q_2 iz prethodnog teorema dobivamo uvrštavanjem rješenja u početnu diferencijalnu jednadžbu. Pogledajmo kako se metoda neodređenih koeficijenata može primijeniti na neke primjere.

Primjer 3. *Odredimo opće rješenje sljedećih jednadžbi:*

a) $y'' - 3y' = 2\sin(3x)$,

b) $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

Rješenje:

a) Karakteristična jednadžba pripadne homogene jednadžbe je oblika

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0,$$

a njeni korijeni su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. *Slijedi da je njeno opće rješenje oblika*

$$y_H(x) = C_1 + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Funkcija smetnje je oblika $f(x) = 2\sin(3x)$ *pa možemo primijeniti Teorem 6. Slijedi da je* $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 3$, $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 2$. *Kako je* $\lambda_0 = 3i$ *dobivamo da je* $k_0 = 0$. *Tada je, uz* $Q_1 = A = const.$, $Q_2 = B = const.$ *partikularno rješenje oblika*

$$y_P(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x).$$

Deriviramo $y_P' = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$, $y_P'' = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$ *te uvrstimo u polaznu jednadžbu:*

$$\begin{aligned} -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) + 9A\sin(3x) - 9B\cos(3x) &= 2\sin(3x) \\ (-9A - 9B)\cos(3x) + (9A - 9B)\sin(3x) &= 2\sin(3x). \end{aligned}$$

Dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} -9A - 9B &= 0 \\ 9A - 9B &= 2, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $A = \frac{1}{9}$ *i* $B = -\frac{1}{9}$ *pa je*

$$y_P(x) = \frac{1}{9}\cos(3x) - \frac{1}{9}\sin(3x).$$

Konačno, opće rješenje polazne jednadžbe prema Teoremu 4 je oblika

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{9}\cos(3x) - \frac{1}{9}\sin(3x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Karakteristična jednadžba pripadne homogene jednadžbe je oblika

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

a njeni korijeni su $\lambda_{1,2} = 1$. *Slijedi da je njeno opće rješenje oblika*

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Funkcija smetnje je oblika $f(x) = 6xe^x$ *pa možemo primijeniti Teorem 6. Slijedi da je* $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $P_1(x) = 6x$, $P_2(x) = 0$. *Kako je* $\lambda_0 = 1$ *dobivamo da je* $k_0 = 2$. *Tada je, uz* $Q_1 = Ax + B$, $Q_2 = 0$ *partikularno rješenje oblika*

$$y_P(x) = x^2 e^x (Ax + B) = Ae^x x^3 + Be^x x^2.$$

Deriviramo

$$\begin{aligned} y_P' &= Ae^x x^3 + (3A+B)e^x x^2 + 2Be^x x, \\ y_P'' &= Ae^x x^3 + (6A+B)e^x x^2 + (6A+4B)e^x x + 2Be^x \end{aligned}$$

te uvrstimo u polaznu jednadžbu:

$$\begin{aligned} Ae^x x^3 + (6A+B)e^x x^2 + (6A+4B)e^x x + 2Be^x - 2Ae^x x^3 \\ - (6A+2B)e^x x^2 - 4Be^x x + Ae^x x^3 + Be^x x^2 = 6xe^x. \end{aligned}$$

Nakon poništavanja dobivamo

$$6Ae^x x + 2Be^x = 6xe^x,$$

iz čega slijedi $A = 1$ i $B = 0$ pa je

$$y_P(x) = e^x x^3.$$

Konačno, opće rješenje polazne jednadžbe prema Teoremu 4 je oblika

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^3 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

U sljedeća dva poglavlja bavit ćemo se primjenama linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima. Preciznije, u poglavlju 3 proučavat ćemo ravnotežni položaj napete žice, a u poglavlju 4 harmonijski oscilator. Slijedit ćemo [1, 3, 7].

3 Ravnoteža napete žice

U ovom poglavlju ćemo proučavati kontinuum ili materijalno tijelo. Bavit ćemo se uglavnom samo makroskopskim svojstvima. Osnovno svojstvo kontinuuma je da sila kojom dva njegova komada djeluju jedan na drugog ne ovisi o samim komadima, nego samo o položaju njihovog kontakta; tu silu nazivamo **kontaktna sila**. Često ćemo koristiti *zakon ravnoteže sila* koji kaže da ako je tijelo u ravnoteži, onda je rezultanta svih sila koje na njega djeluju jednaka nuli [1].

Neka je $\Omega = [0, l]$ na x-osi položaj tanke žice koja je napeta čivijom, primjerice kao na gitari. Kada govorimo o tankoj žici to znači da je njena težina zanemariva, dok kod teške žice težina nije zanemariva. S $a(x)$ ćemo označiti kontaktnu silu u točki x, to je sila kojom dio $\langle x, l\rangle$ djeluje na dio $\langle 0, x\rangle$, odnosno s desna na lijevo. Nazivamo ju **napetost žice** i sila je longitudinalna ili uzdužna, to jest paralelna je s x-osi. Onda je $-a(x)$ sila kojom dio $\langle 0, x\rangle$ djeluje na dio $\langle x, l\rangle$.

Ako je $\langle x_1, x_2\rangle \subseteq [0, l]$, $x_1 < x_2$, onda je ukupna longitudinalna sila na komad $\langle x_1, x_2\rangle$ jednaka $a(x_2) - a(x_1)$, dok prema zakonu ravnoteže vrijedi

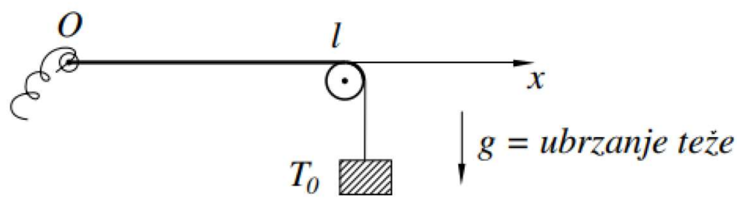
$$a(x_2) - a(x_1) = 0,$$

odnosno

$$a(x) = const.$$

U ovakvom slučaju dobivamo da je napetost žice konstantna i jednaka je longitudinalnoj sili koja djeluje na desnom kraju $x = l$, odnosno jednaka je $a(l) > 0$.

Osim čivijom, žicu možemo napinjati horizontalno utegom težine T_0, kako je i prikazano na Slici 1. Nadalje ćemo pretpostaviti da je $T_0 > 0$. Tada je napetost $a(x) = const. = a(l) = T_0$.



Slika 1: Žica napeta utegom (preuzeto iz [1])

Promotrimo sada tešku žicu koja slobodno visi i neka pri tome x-os ima smjer ubrzanja sile teže. Žica je napeta svojom težinom. S $T(x_1, x_2)$ označimo težinu komada $\langle x_1, x_2 \rangle$. Tada je ukupna longitudinalna sila na taj komad jednaka $a(x_2) - a(x_1) + T(x_1, x_2)$, pa koristeći zakon ravnoteže dobivamo

$$a(x_2) - a(x_1) + T(x_1, x_2) = 0.$$

Ako uvrstimo $x_1 = x, x_2 = l$ i uzmemo pri tome u obzir da je lijevi kraj $x = l$ slobodan, što znači $a(l) = 0$, dobivamo

$$a(x) = T(x, l), \tag{3.1}$$

iz čega slijedi da je $a(x) > 0$ za $x < l$.

Ako u $x = l$ objesimo uteg težine T_0, onda umjesto (3.1) dobivamo

$$a(x) = T(x, l) + T_0,$$

iz čega slijedi da je $a(x) > 0$ za $x \leq l$.

Uz dodatnu pretpostavku da je žica homogena, to jest da je konstantne gustoće, onda je $T(x, l) = \rho g(l - x)$, gdje ρ označava linijsku gustoću mase, pa dobivamo

$$a(x) = \rho g(l - x) + T_0.$$

Općenitije, ovaj slučaj možemo zapisati na sljedeći način: ako na žicu djeluje longitudinalna linijska sila s gustoćom sile $\varphi : [0, l] \to \mathbb{R}$, onda je ukupna linijska sila na komad $\langle x_1, x_2 \rangle$ jednaka

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(\xi) d(\xi).$$

Slijedi da je ukupna sila na taj komad uz primjenjen zakon ravnoteže

$$a(x_2) - a(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \varphi(\xi) d(\xi) = 0.$$

Uvrštavanjem $x_1 = x$, $x_2 = l$ slijedi

$$a(x) = \int_{x}^{l} \varphi(\xi) d(\xi).$$

Ako na žicu uz linijsku silu djeluje i kontaktna sila $a(l) = T_0 > 0$, onda je

$$a(x) = T_0 + \int_{x}^{l} \varphi(\xi) d(\xi).$$

Promotrimo dalje slučaj kada je uzdužno napeta žica pod utjecajem vanjske poprečne ili transverzalne sile gustoće $\overrightarrow{f}$, to jest sile koja je okomita na x-os, a paralelna nekoj fiksnoj ravnini. Pretpostavimo da je vanjska sila slaba, odnosno puno manja od napetosti. Također pretpostavljamo da se žica malo deformira kada je pod utjecajem slabe transverzalne sile.

Točka $x \in [0,l]$ prilikom deformacije dođe u točku $P(x) = (x, u(x)) \in \mathbb{R}^2$, gdje s $u(x)$ označavamo **progib** točke x.

Pretpostavka da mala deformacija žice povlači da je onda progib puno manji od duljine žice zapisujemo kao

$$|u(x)| \ll l, \tag{3.2}$$

$$|u'(x)| \ll 1, \tag{3.3}$$

za svaki $x \in [0,l]$.

Lako se provjeri da je (3.2) posljedica (3.3): kako je žica učvršćena u lijevom kraju $x = 0$, vrijedi $u(x) = 0$, pa je

$$u(x) = \int_0^x u'(\xi)d(\xi),$$

pa iz gornje jednakosti i $a(x) > 0$ za $x < l$ slijedi

$$|u(x)| \leq \int_0^l |u'(\xi)|d(\xi) \leq l \cdot \max |u'| \ll l.$$

Za element duljine luka deformirane žice imamo

$$ds = \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx \approx dx,$$

pa možemo reći da mala deformacija ne uzrokuje istezanje žice.

Sa $\overrightarrow{q} = (q_x, q_y)$ označujemo **kontaktnu silu** u točki $P(x)$, odnosno silu kojom dio $\widehat{P(x)P(l)}$ djeluje na $\widehat{P(0)P(x)}$. Ovdje ćemo koristiti *zakon ponašanja* koji određujemo eksperimentalno: ako je deformacija napete žice mala, kontaktna sila $\overrightarrow{q}(x)$ u točki $P(x)$ po apsolutnoj vrijednosti je jednaka napetosti $a(x)$ i paralelna je tangencijalnom vektoru žice u toj točki. Slijedi

$$\vec{q}(x) = a(x)\vec{T}(x),$$

gdje je $\vec{T}(x)$ jedinični tangencijalni vektor na Γ_u u točki x koji je izraza

$$\vec{T}(x) = \frac{\vec{i} + u'(x)\vec{j}}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \approx \vec{i} + u'(x)\vec{j}.$$

Uzdužna komponenta kontaktne sile je $q_x(x) = a(x)$, a poprečna je $q_y(x) = a(x)u'(x)$. Zakon ravnoteže za komad $\widehat{P(x_1)P(x_2)}$ glasi

$$\vec{q}(x_2) - \vec{q}(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \vec{f}(\xi)d(\xi) = 0 \tag{3.4}$$

iz čega imamo rastav na uzdužnu i poprečnu komponentu $\vec{i}$ i $\vec{j}$ redom

$$\vec{i} : q_x(x_2) - q_x(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f_x(\xi)d(\xi) = 0$$

$$\vec{j} : q_y(x_2) - q_y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f_y(\xi)d(\xi) = 0,$$

što još zapisujemo kao

$$\vec{i}: \int_{x_1}^{x_2} (q_x'(\xi) + f_x(\xi))d(\xi) = 0$$
$$\vec{j}: \int_{x_1}^{x_2} (q_y'(\xi) + f_y(\xi))d(\xi) = 0.$$

U nastavku ćemo iskoristiti osnovnu lemu varijacijskog računa [1].

Lema 1. ***(Osnovna lema)*** *Ako je $h \in C([0,l])$ i $(\forall x_1, x_2 \in [0,l])$ $\int_{x_1}^{x_2} h(\xi)d(\xi) = 0$, onda je $h \equiv 0$.*

□

Prema navedenoj lemi zakon ravnoteže možemo zapisati u diferencijalnom obliku jer su funkcije f_x, f_y, q_x' i q_y' redom neprekidne:

$$q_x'(x) + f_x(x) = 0$$
$$q_y'(x) + f_y(x) = 0,$$

što vrijedi ako i samo ako je

$$\vec{q}'(x) + \vec{f}(x) = 0, \tag{3.5}$$

a to je pak ekvivalentno s (3.4).

Uvrštavanjem uzdužne i poprečne komponente kontaktne sile u (3.5) dobivamo jednadžbe

$$a'(x) + f_x(x) = 0$$
$$(a(x)u'(x))' + f_y(x) = 0.$$

Uočimo da iz prve jednadžbe možemo izračunati napetost, dok drugu jednadžbu nazivamo **jednadžba ravnoteže**.

Kada se žica dodatno nalazi u elastičnom sredstvu koje se elastično opire deformaciji, tada na nju uz vanjsku silu $\vec{f}$, također djeluje i linijska sila s gustoćom koja je u svakoj točki proporcionalna progibu, $-b(x)u(x)$, gdje je $b(x)$ koeficijent elastičnosti sredstva u kojem se nalazi uzdužno napeta žica. U ovakvom slučaju vrijede standardne pretpostavke: $a \in C^1([0,l])$, $a(x) > 0$ i $b \in C([0,l])$, $b(x) \geq 0$.

S obzirom da nema istezanja žice, gustoća djeluje samo u smjeru y-osi, pa uz oznake $x_1 = 0$ i $x_2 = x$ slijedi

$$q_y(x) - q_y(0) + \int_0^x (f_y(\xi) - b(\xi)u(\xi))d(\xi) = 0.$$

Uvrštavajući zakon ponašanja $q_y(x) = a(x)u'(x)$ u gornju jednadžbu, slijedi

$$a(x)u'(x) - a(0)u'(0) + \int_0^x (f_y(\xi) - b(\xi)u(\xi))d(\xi) = 0.$$

Iz gornje jednadžbe deriviranjem dobivamo

$$a'(x)u'(x) + a(x)u''(x) - 0 + f_y(x) - b(x)u(x) = 0,$$

to jest

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) + f_y(x) = 0. \tag{3.6}$$

Jednadžba (3.6) je **jednadžba ravnoteže**, a očito je to linearna obična diferencijalna jednadžba drugog reda za funkciju $u(x)$ sa koeficijentima a i b za koje ćemo u nastavku pretpostaviti da su konstantni.

Ako je $f \equiv 0$, jednadžba je homogena. Jednadžba (3.6) je linearna, pa ukoliko su funkcije u_1 i u_2 rješenja homogene jednadžbe, za dane koeficijente a i b, odnosno

$$(au_1')' - bu_1 = 0,$$
$$(au_2')' - bu_2 = 0,$$

onda je također i njihova linearna kombinacija

$$u = C_1u_1 + C_2u_2,$$

za proizvoljne $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, rješenje homogene jednadžbe

$$(au')' - bu = 0.$$

Svako rješenje jednadžbe oblika (3.6) nazivamo **stacionarno** ili **ravnotežno stanje**. Postoje brojni drugi modeli iz matematičke fizike u kojima koristimo linearne obične diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima, kao npr. uzdužna deformacija tankog štapa, torzija tankog kružnog štapa, provođenje topline kroz tanki štap, itd. Za daljnje proučavanje istih pogledati [1].

3.1 Rubni uvjeti

Nas zanimaju rješenja koja predstavljaju ravnotežno stanje sa zadanim uvjetima na krajevima $x = 0$ (lijevi kraj) i $x = l$ (desni kraj), a takve uvjete nazivamo **rubni uvjeti** i njih ćemo ukratko proučiti u ovom potpoglavlju te dati jedan primjer kako bi pokazali rješavanje takvih zadataka. Određivanje rješenja koje zadovoljava rubne uvjete zove se **rubna zadaća**.

Prisjetimo se primjera poprečno opterećene napete žice. Rubni uvjeti mogu biti:

a) DIRICHLETOV

   Dirichletov uvjet zadaje vrijednost progiba. Imamo učvršćen kraj, bilo čivijom ili utegom. Kada je lijevi kraj učvršćen, tada je $u(0) = 0$. Kada je desni kraj učvršćen, tada je $u(l) = c$, gdje je c zadani broj i on je jednak nuli ukoliko je kraj učvršćen utegom.

b) NEUMANNOV

Umjesto progiba, u ovom slučaju je zadana kontaktna sila. Pretpostavimo da imamo žicu napetu pomoću niti vezane kotačem za lijevi kraj ($x = 0$). Ako na taj kraj objesimo uteg težine C imamo $q_y'(0) = C$ iz čega slijedi da je $a(0)u'(0) = C$, odnosno $u'(0) = \dfrac{C}{a(0)}$. Ako pak je $C = 0$ imamo samo kotač i vrijedi $u'(0) = 0$ te kažemo da je lijevi kraj slobodan.

c) ROBINOV

Ako je žica napeta pomoću niti vezane za desni kraj $x = l$ i ako je taj kraj povezan elastičnom oprugom konstante $\kappa > 0$, rubni uvjet glasi

$$\begin{aligned} q_y(l) &= -\kappa u(l) \\ a(l)u'(l) &= -\kappa u(l) \\ u'(l) + \frac{\kappa}{a(l)}u(l) &= 0. \end{aligned}$$

Ako označimo s $k := \dfrac{\kappa}{a(l)}$, dobivamo

$$u'(l) + ku(l) = 0. \tag{3.7}$$

Općenito, rubnu zadaću zapisujemo na sljedeći način

$$\begin{cases} (a(x)u'(x))' - b(x)u(x) + f(x) = 0 \\ \alpha u'(0) - \beta u(0) = c \\ \gamma u'(l) + \delta u(l) = d, \end{cases} \tag{3.8}$$

pri čemu su α, β, γ, $\delta \geq 0$ te $\alpha + \beta > 0$, $\gamma + \delta > 0$.

Primjer 4. *Teška homogena žica duljine l, linijske gustoće ρ, napeta je i učvršćena na lijevom kraju utegom mase m, dok joj je desni kraj učvršćen za kotač koji se može slobodno kotrljati po poprečnom žlijebu. Za kotač je vezan uteg težine C. Nađite ravnotežni progib ako se žica nalazi u polju sile teže koja djeluje poprečno na nju.*

Rješenje:

U smjeru y-osi imamo kontaktnu silu $q_y(l) = -C$, to jest $a(l)u'(l) = -C$ iz čega dobivamo Neumannov rubni uvjet koji glasi $u'(l) = \dfrac{-C}{a(l)}$.

Kako je lijevi kraj učvršćen, imamo Dirichletov rubni uvjet koji glasi $u(0) = 0$.

Nemamo vanjsku horizontalnu silu pa je $f \equiv 0$.

Ako nemamo uzdužne sile, $a(x)$ je konstanta i jednaka je težini utega, odnosno $a(x) = mg$.

Uvrštavanjem u Neumannov rubni uvjet slijedi $u'(l) = \dfrac{-C}{mg}$.

Trebamo još izračunati gustoću sile u smjeru y-osi, f_y. Imamo silu linijske gustoće mase ρ te dobivamo da je $f_y = -\rho g$.

Prema tome, iz jednadžbe ravnoteže (3.6) slijedi

$$(mgu'(x))' - \rho g = 0,$$

što zajedno s rubnim uvjetima $u(0) = 0$ *i* $u'(l) = \dfrac{-C}{mg}$ *daje Cauchyjevu zadaću koju rješavamo u nastavku.*
Sređivanjem jednadžbe ravnoteže dobivamo

$$u''(x) = \frac{\rho}{m}.$$

Integriranjem po varijabli x *gornjeg izraza slijedi*

$$u'(x) = \frac{\rho}{m}x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo li u prethodnu jednadžbu Neumannov rubni uvjet slijedi

$$u'(l) = \frac{\rho}{m}l + C_1 = -\frac{C}{mg},$$

iz čega dobijemo da je

$$C_1 = \frac{-C - \rho l g}{mg}.$$

Integriramo li sada izraz

$$u'(x) = \frac{\rho}{m}x - \frac{C + \rho l g}{mg},$$

slijedi

$$u(x) = \frac{\rho}{m}\frac{x^2}{2} - \frac{C + \rho l g}{mg}x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem Dirichletovog rubnog uvjeta dobivamo da je

$$C_2 = 0.$$

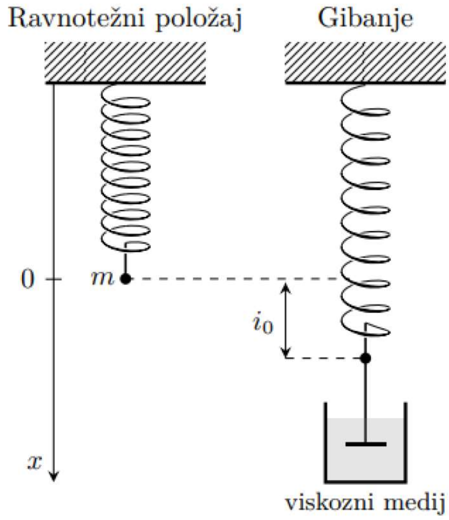
Dakle, pronašli smo ravnotežni progib za ovakav slučaj i on glasi

$$u(x) = \frac{\rho}{m}\frac{x^2}{2} - \frac{C + \rho l g}{mg}x.$$

4 Harmonijski oscilator

U ovom poglavlju ćemo proučiti gibanje harmonijskog oscilatora. Pri promatranju čestice obješene na oprugu koja titra opažamo da se amplituda titranja sve više smanjuje, čemu je razlog gubitak energije u okolini. Amplituda se smanjuje sve dok titranje potpuno ne prestane. Glavni uzrok gubitka energije je otpor medija u kojem promatrana čestica titra.

Promatramo tijelo mase m koje je pričvršćeno na oprugu koja je učvršćena u fiksnoj točki. Tijelo se giba pod utjecajem elastične sile opruge, u viskoznom mediju koji se opire gibanju. Koeficijent elastičnosti k je pozitivna konstanta kojom je opisano kako se opruga rasteže.



Slika 2: Harmonijski oscilator (preuzeto iz [6])

Na Slici 2 je prikazan opisani model. Pretpostavimo da se tijelo giba samo u smjeru x-osi te da nema djelovanja gravitacijske sile u sustavu. Označimo s F_u zbroj svih sila koje djeluju na promatrano tijelo. Prema drugom Newtonovom zakonu vrijedi

$$F_u = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

pri čemu je m masa, v brzina te a akceleracija tijela.

Sile koje djeluju na sustav su:

- **Sila opruge**, koju označavamo s F_o i definiramo formulom $F_o = -kx$, $k > 0$. Sila je proporcionalna (prema Hookeovom zakonu) i suprotno usmjerena otklonu x (jer je vektor sile suprotne orijentacije od vektora produljenja).

- **Sila prigušenja**, koju označavamo s F_p i definiramo formulom $F_p = -c\frac{dx}{dt}$, gdje je $c > 0$ konstanta prigušenja. Sila je proporcionalna i suprotno usmjerena brzini gibanja. To je sila kojom se viskozni medij opire gibanju.

- **Vanjska sila**, koju označavamo s $f(t)$ i definiramo kao sumu svih vanjskih sila koje djeluju na sustav.

Kako vrijedi $F_u = F_o + F_p + f(t)$, uvrštavanjem u drugi Newtonov zakon dobivamo

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t),$$

to jest

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m}, \tag{4.1}$$

pri čemu je $\Gamma = \frac{c}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Uočimo da je konstanta ω^2 pozitivnog predznaka jer je $k > 0$, a masa ne može biti negativna. Jednadžba (4.1) je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Pretpostavimo sada da nema djelovanja vanjske sile niti prigušenja, odnosno $f(t) = 0$ i $c = 0$. Onda je jednadžba (4.1) sljedećeg izgleda:

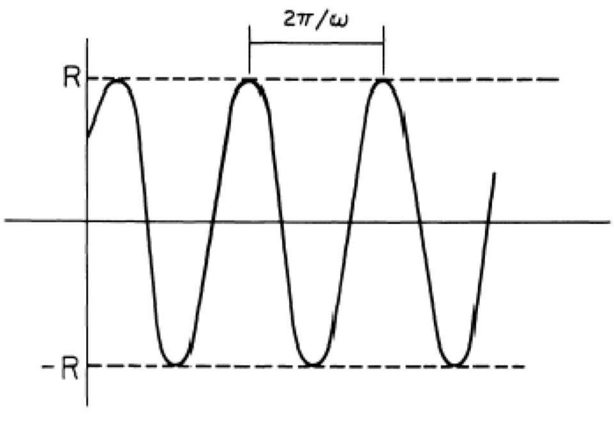
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{4.2}$$

a to je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda. Njena karakteristična jednadžba je oblika $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, a rješenja te jednadžbe su $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$.

Tada je prema Teoremu 1 s $x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ dano opće rješenje jednadžbe (4.2). Može se pokazati ([3]) da se funkcija $x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$ može zapisati u obliku

$$x(t) = R\cos(\omega t - \beta),$$

gdje je $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ i $\beta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$.



Slika 3: Jednostavno harmonijsko gibanje (preuzeto iz [3])

Ovako opisano gibanje nazivamo **jednostavno harmonijsko gibanje**. Uočimo da je gibanje periodično s temeljnim periodom $T = \frac{2\pi}{\omega}$, pri čemu je ω vlastita frekvencija titranja sustava, R amplituda te β fazni pomak. Prikaz gibanja je vidljiv na Slici 3, na kojoj vidimo da funkcija x poprima vrijednosti na segmentu $[-R, R]$.

4.1 Harmonijski oscilator s prigušenjem

Kada u sustavu nema vanjskih sila ali je uključeno prigušenje, to jest neki otpor jednadžba (4.1) glasi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{4.3}$$

što je homogena linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima koju znamo riješiti. Pripadna karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 + \Gamma\lambda + \omega^2 = 0,$$

a njeni korijeni su

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

U ovisnosti o diskriminanti, to jest o predznaku $\sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2}$, dobivamo tri moguća slučaja koja ćemo pogledati u narednim potpoglavljima.

4.1.1 Jako (nadkritično) prigušenje

U ovom slučaju je $\Gamma^2 - 4\omega^2 > 0$, to jest vrijedi $\Gamma^2 > 4\omega^2$ što nam govori da je konstanta prigušenja c jako velika. Rješenja λ_1 i λ_2 su negativna, što znači da uteg ne oscilira, a opće rješenje jednadžbe (4.3) glasi

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Činjenicu da će se uteg naći u ravnotežnom položaju $x = 0$ nakon dovoljno dugo vremena potvrđujemo time da $x(t) \to 0$, kada $t \to \infty$.

Pogledajmo sada primjer ovakvog gibanja.

Primjer 5. *Kugla mase 1 kg rastegne oprugu za 5 m. Treba odrediti diferencijalnu jednadžbu gibanja ako je ono prigušeno viskoznim medijem konstante prigušenja 3 kg/s, uzimajući da je $g \approx 10\,m/s^2$. Opruga je istegnuta za 2 m, s početnom brzinom $-1\,m/s$.*

Rješenje: *Uvrstimo sve poznate elemente u jednadžbu (4.3). Dobivamo*

$$x'' + 3x' + 2x = 0.$$

Njena karakteristična jednadžba je oblika

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

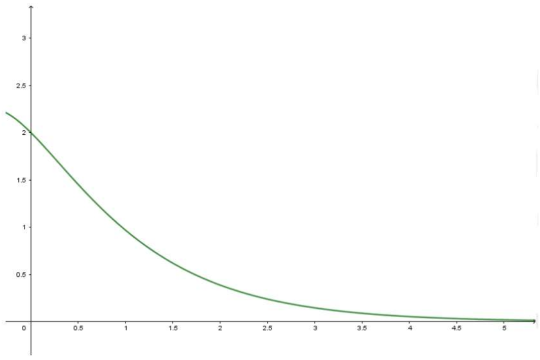
iz čega dobivamo da je $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = -1$.

Rješenje dane jednadžbe prema Teoremu 1 glasi $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Iz početnih uvjeta $x(0) = 2$ *i* $x'(0) = -1$*, slijedi da je* $C_1 = -1$ *i* $C_2 = 3$*, pa je konačno rješenje zadanog gibanja dano s*

$$x(t) = -e^{-2t} + 3e^{-t}.$$

Gibanje je prikazano na Slici 4.



Slika 4: primjer jakog prigušenja

4.1.2 Granično (kritično) prigušenje

U ovom slučaju je $\Gamma^2 - 4\omega^2 = 0$, to jest vrijedi $\Gamma^2 = 4\omega^2$. Rješenja λ_1 i λ_2 su jednaka i označimo ih s $\lambda = -\frac{\Gamma}{2} < 0$, što znači da uteg ne oscilira. Opće rješenje jednadžbe (4.3) prema Teoremu 1 dano je s

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da $x \to 0$ kada $t \to \infty$ što nam govori da će se uz ovakvo prigušenje uteg vratiti u ravnotežni položaj.

Primjer 6. *Kugla mase* $1kg$ *rastegne oprugu za* $2.5m$*. Treba odrediti diferencijalnu jednadžbu gibanja ako je ono prigušeno viskoznim medijem konstante prigušenja* $4\,kg/s$*, uzimajući da je* $g \approx 10\,m/s^2$*. Opruga je istegnuta za* $1\,m$*, pa ispuštena.*

Rješenje: *Uvrstimo sve poznate elemente u jednadžbu (4.3). Dobivamo*

$$x'' + 4x' + 4x = 0.$$

Njena karakteristična jednadžba je oblika

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

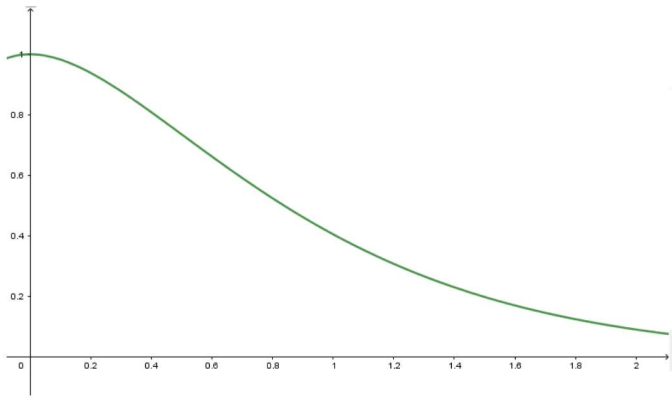
iz čega dobivamo da je $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Rješenje dane jednadžbe dano je s $x(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2 t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Iz početnih uvjeta $x(0) = 1$ *i* $x'(0) = 0$, *slijedi da je* $C_1 = 1$ *i* $C_2 = 2$, *pa je konačno rješenje zadanog gibanja dano s*

$$x(t) = e^{-2t}(1 + 2t).$$

Gibanje je prikazano na Slici 5.



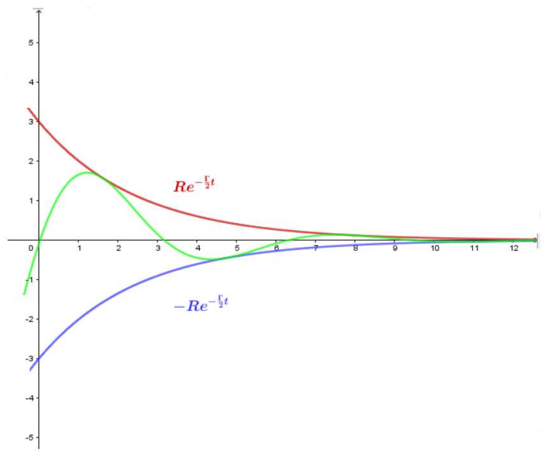
Slika 5: primjer graničnog prigušenja

4.1.3 Slabo (potkritično) prigušenje

U ovom slučaju je $\Gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, to jest vrijedi $\Gamma^2 < 4\omega^2$, što nam govori da je konstanta prigušenja c jako mala. Rješenja λ_1 i λ_2 su kompleksno konjugirani brojevi s negativnim realnim dijelom. Slijedi da je opće rješenje jednadžbe (4.3)

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(C_1 \cos(\eta t) + C_2 \sin(\eta t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

gdje je $\eta = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2}$.



Slika 6: Graf funkcije $x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\eta t - \beta)$

Dobiveno rješenje možemo zapisati u obliku

$$x(t) = Re^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\eta t - \beta), \tag{4.4}$$

gdje je s $Re^{-\frac{\Gamma}{2}t}$ označena amplituda, a s β fazni pomak.

Kako je trigonometrijska funkcija kosinus definirana na segmentu $[-1, 1]$, funkcija $x(t)$ je ograničena na segmentu $[-Re^{-\frac{\Gamma}{2}t}, Re^{-\frac{\Gamma}{2}t}]$. Preciznije, pomak x je kosinusoidalnog izgleda čija se amplituda smanjuje s vremenom t što nam je jasnije prikazano na Slici 6, pri čemu su $R = 3$, $\Gamma = 0.8$, $\eta = 1$ te $\beta = 1.6$ uvršteni u jednadžbu (4.4). Dakle, $\lim_{t\to\infty}(x(t)) = 0$.

Primjer 7. *Kugla mase $1\,kg$ rastegne oprugu za $2\,m$. Treba odrediti diferencijalnu jednadžbu gibanja ako je ono prigušeno viskoznim medijem konstante prigušenja $2\,kg/s$, uzimajući da je $g \approx 10\,m/s^2$. Opruga je istegnuta za $1\,m$, s početnom brzinom $1\,m/s$.*

Rješenje: *Uvrstimo sve poznate elemente u jednadžbu (4.3). Dobivamo*

$$x'' + 2x' + 5x = 0.$$

Njena karakteristična jednadžba je oblika

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

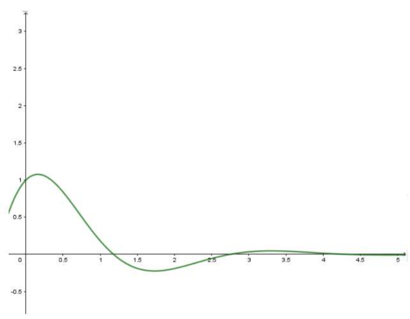
iz čega dobivamo da je $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 + 2i$.
Rješenje dane jednadžbe prema Teoremu 1 glasi

$$x(t) = e^{-t}(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Iz početnih uvjeta $x(0) = 1$ i $x'(0) = 1$, slijedi da je $C_1 = 1$ i $C_2 = 1$, pa je konačno rješenje zadanog gibanja dano s

$$x(t) = e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t)).$$

Gibanje je prikazano na Slici 7.



Slika 7: primjer slabog prigušenja

4.2 Rezonancija

U prethodnom potpoglavlju smo imali uključeno prigušenje, dok ćemo sada uključiti djelovanje neke vanjske sile $f(t)$ u sustavu. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da u sustavu nema prigušenja ($c = 0$). Sada je nehomogena diferencijalna jednadžba koja opisuje gibanje sustava oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F(t), \tag{4.5}$$

gdje je $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $F(t) = \frac{f(t)}{m}$. Rješenje dobivene homogene jednadžbe glasi

$$x_H = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ukoliko je F oblika $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ jednadžba (4.5) glasi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos(\omega_0 t) \tag{4.6}$$

pa je partikularno rješenje nehomogene jednadžbe (4.5) oblika

$$x_P = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t),$$

pri čemu su A_1 i A_2 nepoznate konstante. Nakon uvrštavanja

$$x_P'' = -A_1\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - A_2\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

i x_P u (4.6) te izjednačavanja koeficijenata uz $\cos(\omega_0 t)$ i $\sin(\omega_0 t)$ dobivamo

$$\begin{aligned} A_1(-\omega_0^2 + \omega^2) &= F_0, \\ A_2(-\omega_0^2 + \omega^2) &= 0. \end{aligned}$$

Slijedi da je $A_1 = \dfrac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$, $A_2 = 0$ te je opće rješenje jednadžbe (4.6) jednako

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t) = R \cos(\omega t - \beta) + \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t),$$

pri čemu je $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{C_2}{C_1}$. Konstanta $\dfrac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ ovisi o vanjskoj sili $f(t)$, dok konstante R i β možemo odrediti iz početnih uvjeta.

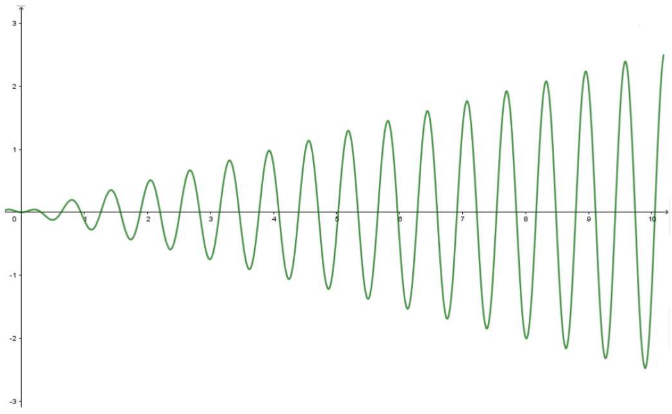
Uočavamo da amplituda može biti velika ako je $\omega \approx \omega_0$, dok u slučaju $\omega = \omega_0$ dolazi do pojave koju nazivamo **rezonancija**. U tom slučaju je frekvencija sustava jednaka frekvenciji vanjske sile te je partikularno rješenje jednadžbe (4.6) dano s

$$x_P = t(A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)).$$

Postupamo kao i ranije u pronalasku konstanti A_1 i A_2 te je $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{F_0}{2\omega_0}$. Dakle, u ovom slučaju opće rješenje jednadžbe (4.6) glasi

$$x = x_H + x_P = R \cos(\omega_0 t - \beta) + \frac{F_0 t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t). \tag{4.7}$$

Primijetimo da će kada $t \to \infty$ oscilacije biti neomeđene pa će za dovoljno veliki t doći do razbijanja sustava. Iduća slika prikazuje pojavu rezonancije, pri čemu je u jednadžbu (4.7) uvršteno $R = 0$, $\omega_0 = 10$, $\beta = 5$ i $F_0 = 5$.



Slika 8: pojava rezonancije

Pojava rezonancije može uzrokovati velike katastrofe, najčešće se to događa u graditeljstvu pa se prilikom gradnje se u obzir trebaju uzeti vibracije. Jedan od najpoznatijih slučajeva pojave rezonancije je urušavanje Tacoma Bridgea u Washingtonu.

Literatura

[1] I. Aganović, K. Veselić *Linearne diferencijalne jednadžbe: uvod u rubne probleme*, Drugo izdanje, Element, Zagreb, 1997.

[2] M. Alić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[3] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Fourth edition, Springer, New York, 1993.

[4] W.E. Boyce, R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Seventh edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2001.

[5] I. Ivanšić, *Fourierovi redovi. Diferencijalne jednadžbe*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2000.

[6] I. Radišić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2020.

[7] W.S. Weiglhofer, K.A. Lindsay, *Ordinary Differential Equations and Applications - Mathematical Methods for Applied Mathematicians, Physicist, Engineers*, First edition, Woodhead Publishing, 1999.