Rente i životna osiguranja

Ždralović, Valentina

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:674242

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Valentina Ždralović

Rente i životna osiguranja

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Valentina Ždralović

Rente i životna osiguranja

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2022.

Sadržaj

1 Uvod

Osiguranje je obaveza osiguravajućeg društva prema osiguranoj osobi da, zauzvrat za plaćanje premije, smanji rizik financijskih gubitaka. Potrebno je da rizik osiguranja odgovara određenim karakteristikama. Osiguranja se često smatraju kao drugi način ulaganja, iako su prinosi daleko od optimalnih.

Razlikujemo neživotna i životna osiguranja. Životna osiguranja se sastoje od isplate naknade koja ovisi o smrti ili doživljenju osigurane osobe te zatim imaju ulogu sigurnosti za obitelj i bližnje.

Tablice smrtnosti, kao najbolji pokazatelji smrtnosti podijeljeni prema spolu i dobi, omogućuju osiguravajućem društvu izračun rizika te je stoga njihovo korištenje prilikom ugovaranja osiguranja neizbježno. Te tablice su objašnjene u trećem poglavlju te zajedno s osiguranjem doživljenja, koje je definirano u četvrtom poglavlju, služe kao važne informacije za bolje razumijevanje razlika u izračunu jednokratnih neto premija za svaku vrstu životnog osiguranja opisanih u petom poglavlju.

Ukoliko se umjesto jednokratne premije gleda niz periodičnih isplata, radi se o financijskoj ili životnoj renti. U šestom poglavlju su za svaku vrstu tih renti definirani načini izračuna te objašnjeni su na primjeru i vremenskom prikazu.

U sedmom poglavlju su opisane bruto i neto premije, odnosno uplate osigurane osobe prema osiguravajućem društvu.

2 Osnovni pojmovi i formule

Kamatna stopa je iznos kamata koji se plaća na jedinični kapital za neki vremenski interval, odnosno za obračunsko razdoblje. Za svrhe ovog rada pretpostavlja se da kamatne stope ne ovise o iznosu te je tada dovoljno razmatranja provesti za iznos 1, gdje se ostale veličine dobiju analogno množenjem. Razlikuju se godišnja kamatna stopa $i(t)$ u trenutku t na intervalu $[t, t+1]$ koja se naziva efektivna kamatna stopa i nominalna kamatna stopa $i_h(t)$ u trenutku t za transakciju na intervalu $[t, t+h]$, $h > 0$.

Ako se u trenutku t_1 investira iznos, akumulacija do trenutka t_2 se označava s $A(t_1, t_2)$. Vrijedi:

$$A(t, t+1) = 1 + i(t)$$

i

$$A(t, t+h) = 1 + h \cdot i_h(t). \tag{1}$$

U slučaju kada je godišnja kamatna stopa fiksna, odnosno ne ovisi o t, piše se $i(t) = i$ i kada se gledaju transakcije u trajanju $h = \frac{1}{p}, \quad p \in \mathbb{N}$, vremenskih jedinica, označava se $i_{\frac{1}{p}} = i^{(p)}$.

Veza između efektivne kamatne stope i i nominalne kamatne stope $i^{(p)}$ proizlazi iz principa konzistencije koji se ovako iskazuje:

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1) \cdots A(t_{n-1}, t_n), \quad t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n.$$

Iz prethodnih izraza može se pokazati i da vrijedi:

$$(1 + \frac{i^{(p)}}{p})^p = 1 + i,$$

odnosno:

$$i^{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]. \tag{2}$$

Ukoliko se u formulu (1) uvrsti (2) dobiva se da pripadna akumulacija ima oblik:

$$A(t, t + \frac{1}{p}) = 1 + \frac{1}{p} \cdot i^{(p)} = 1 + \frac{1}{p}[p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]] = 1 + (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 = (1+i)^{\frac{1}{p}}.$$

Intenzitet kamate je definiran po jedinici vremena u trenutku t kao:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0+} i_h^{(t)} = \lim_{h \to 0+} \frac{A(t, t+h) - 1}{h},$$

odnosno, ako se uzme da je godišnja kamatna stopa konstantna (fiksna), vrijedi:

$$\delta = \lim_{p \to \infty} i^{(p)} = \lim_{p \to \infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - (1+i)^0}{\frac{1}{p}} = ((1+i)^x)'_{x=0} = ln(1+i). \tag{3}$$

Sadašnja vrijednost jediničnog iznosa koja dospijeva u trenutku t označava se s $v(t)$ te ako je kamatna stopa i konstantna (fiksna), onda se dobiva:

$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)\, ds} = e^{-\delta s|_0^t} = e^{-\delta t}. \tag{4}$$

Sadašnja vrijednost iznosa C koja dospijeva u trenutku t naziva se diskontirana vrijednost u trenutku $t = 0$ i definirana je kao:

$$C \cdot v(t) = C \cdot e^{-\int_0^t \delta(s)\, ds}.$$

Sadašnja vrijednost jediničnog iznosa koji dospijeva u trenutku $t = 1$ naziva se diskontni faktor v te iz izraza (4) dobiva se:

$$v(1) = v = e^{-\delta}. \tag{5}$$

Ako se u formulu (5) uvrsti (3), dobiva se:

$$v = e^{-ln(1+i)} = \frac{1}{1+i},$$

iz čega slijedi:

$$\frac{1}{v} = 1 + i$$

i

$$i = \frac{1}{v} - 1,$$

dok iz formula (4) i (5) slijedi:

$$v(t) = v^t.$$

Gornji izraz može se intepretirati kao vrijednost u bilo kojem trenutku, koja dospijeva t godina kasnije u iznosu 1. Specijalno, za $t = 0$ dobiva se $v(0) = v^0 = 1$.

Ako se pretpostavi da osoba u trenutku $t = 0$ raspolaže s vrijednošću $v = 1 - d$, gdje je d diskontna ili anticipativna kamatna stopa već isplaćena u trenutku $t = 0$ za posuđeni iznos 1, tada će u trenutku $t = 1$ zajam biti isplaćen u iznosu 1. Odatle se dobiva sljedeći izraz:

$$1 - d = v \cdot 1$$

te izraz:

$$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = i \cdot v.$$

Neka je $d^{(p)}$ nominalna diskontna kamatna stopa plativa p puta godišnje. Ako bi se kamata $d^{(p)}$ otplatila u p jednakih dijelova i u trenucima $0, \frac{1}{p}, ..., \frac{p-1}{p}$, onda vrijedi:

$$d = \frac{d^{(p)}}{p}(1 + v^{\frac{1}{p}} + ... + v^{\frac{p-1}{p}}).$$

Odatle slijedi:

$$d = \frac{d^{(p)}}{p} \cdot \frac{(v^{\frac{1}{p}})^p - 1}{v^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{d^{(p)}}{p} \cdot \frac{1 - v}{1 - v^{\frac{1}{p}}} = \frac{d^{(p)}}{p} \cdot \frac{d}{1 - (1-d)^{\frac{1}{p}}}.$$

Iz prethodnog izraza dobiva se formula:

$$(1 - \frac{d^{(p)}}{p})^p = 1 - d.$$

3 Tablice smrtnosti

Tablice smrtnosti su tablice za analiziranje smrtnosti stanovništva u određenom vremenu te za određene skupine ljudi koje se koriste prilikom ugovaranja osiguranja. Ako se naknada životnog osiguranja isplaćuje u slučaju smrti osigurane osobe, rana smrt je najveći rizik osiguravajućeg društva. Stoga se često osobe koje pristupaju osiguranju podvrgavaju liječničkom pregledu. Dakle, osoba koja je tek pristupila osiguranju podliježe nižim stopama smrtnosti, odnosno specijalnim stopama smrtnosti, u prvim godinama u usporedbi s drugim ljudima iste dobi. S druge strane, osobe koje nisu dobrog zdravlja najčešće neće kupiti životnu rentu, što također rezultira nižim stopama smrtnosti. Međutim, nakon nekoliko godina, osiguranoj osobi se pripisuju opće stope smrtnosti.

Duljina perioda u kojemu se promatraju specijalne stope smrtnosti naziva se period odabira i označavamo ga sa s. Tablice smrtnosti u kojima je uzet u obzir ovaj period nazivaju se tablice s odabirom. Nakon perioda odabira, osiguranoj osobi se pripisuju opće stope smrtnosti koje su dane u općim tablicama smrtnosti te njih nazivamo krajnje tablice smrtnosti.

Postoje tablice s različitim periodom odabira. Za svrhe ovog rada, promatrat ćemo period odabira od 2 godine, odnosno tablicu smrtnosti LAT: A1967-70 za $i = 4\%$.

Kada koristimo tablice s odabirom imamo sljedeće oznake:

- $[x]$ - osoba je pristupila osiguranju u dobi x
- ${}_tp_{[x]+r}$ - vjerojatnost doživljenja dobi $x+r+t$ uz uvjet doživljenja dobi $x+r$ za osobu koja je pristupila osiguranju u dobi x
- ${}_tq_{[x]+r}$ - vjerojatnost smrti u dobi $x+r+t$ uz uvjet doživljenja dobi $x+r$ za osobu koja je pristupila osiguranju u dobi x
- ${}_{m|n}q_{[x]+r}$ - vjerojatnost smrti u dobnom intervalu $[x+r+m, x+r+m+n)$ uz uvjet doživljenja dobi $x+r$ za osobu koja je pristupila osiguranju u dobi x.

Vidimo da za $s \leq r$ vrijedi:

$$ {}_tp_{[x]+r} = {}_tp_{x+r} $$

i

$$ {}_tq_{[x]+r} = {}_tq_{x+r}. $$

S l_x se označava broj svih osoba s doživljenjem dobi x, a broj osoba s doživljenjem dobi x, ali ne i $x+1$, s:

$$ d_x = l_x - l_{x+1}. $$

Granična dob, oznake ω, je prva dob za koju vrijedi $l_x = 0$.

Stoga vrijede sljedeće formule:

$$ p_{[x]+r} = \frac{l_{[x]+r+1}}{l_{[x]+r}}, $$

$$q_{[x]+r} = \frac{l_{[x]+r} - l_{[x]+r+1}}{l_{[x]+r}}$$

i

$$_{m|n}q_{[x]+r} = \frac{l_{[x]+r+m} - l_{[x]+r+m+n}}{l_{[x]+r}}.$$

4 Osiguranje doživljenja

Osiguranje doživljenja se sastoji od jednokratne isplate koju nazivamo osigurana svota na definirani datum u budućnosti samo ako je osigurana osoba doživjela kraj perioda osiguranja. Period osiguranja je vremenski interval od dana ugovaranja osiguranja do dana isplate svote. U slučaju osigurane osobe u dobi x, osigurane svote 1 i perioda osiguranja od n godina, sadašnja vrijednost jediničnog iznosa iznosi:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t = 0, ..., n-1 \\ v^n, & \text{za } t = n \end{cases}$$

a sadašnja vrijednost osiguranja doživljenja je definirana s:

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\,1} = 1 \cdot v^n \cdot \ {}_n p_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Ako se uvede zamjenska funkcija:

$$D_x = v^x \cdot l_x,$$

tada je

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\,1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{6}$$

Za odgođeno osiguranje doživljenja (s odgodom od m godina) vrijedi:

$${}_{m|}A_{x:\overline{n}|}^{\;\,1} = \frac{D_{x+m+n}}{D_x}. \tag{7}$$

Ukoliko vrijednost osigurane svote iznosi C tada je sadašnja vrijednost osiguranja doživljenja dana s:

$$s.v. = C \cdot A_{x:\overline{n}|}^{\;\,1} = C \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$s.v. = C \cdot \ {}_{m|}A_{x:\overline{n}|}^{\;\,1} = C \cdot \frac{D_{x+m+n}}{D_x}.$$

Primjer 4.1. Potrebno je pronaći sadašnju vrijednost osiguranja doživljenja na period od 20 godina osobe sada u dobi 40. Osigurana svota iznosi 1000 kn.

Rješenje: Uvrštavanjem danih vrijednosti i korištenjem tablice LAT: A1967-70 za $i = 4\%$ dobiva se:

$$\begin{aligned} s.v. &= C \cdot A_{x:\overline{n}|}^{\;\,1} = C \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = 1000 \cdot \frac{D_{40+20}}{D_{40}} \\ &= 1000 \cdot \frac{D_{60}}{D_{40}} = 1000 \cdot \frac{2855.5942}{6986.4959} = 408.73\ kn. \end{aligned}$$

5 Životna osiguranja

U životna osiguranja, pored osiguranja doživljenja, spada i osiguranje života (tzv. riziko osiguranje). Osiguranje života je takva vrsta osiguranja kod kojeg je obaveza osiguravajućeg društva da određenu svotu isplati samo u slučaju smrti osigurane osobe. Osiguravajuće društvo će, u zamjenu za plaćanje premija, nakon smrti osigurane osobe, platiti unaprijed dogovoreni iznos novca zvan ugovorena svota. Iznos ugovorene svote ovisi o trenutku smrti te će nakon toga biti isplaćen, ali u matematičke svrhe pretpostavljamo da će biti isplaćen na kraju godine u kojoj je nastupila smrt.

Tri najčešća osiguranja života su:

- osiguranje života na određeno vrijeme (tj. riziko osiguranje)
- doživotno osiguranje života
- mješovito osiguranje života i doživljenja.

5.1 Osiguranje života na određeno vrijeme

Osiguranje života na određeno vrijeme ili privremeno osiguranje na n godina nudi isplatu osigurane svote ukoliko smrt nastupi unutar n godina, tj. prije isteka perioda osiguranja. Za privremeno osiguranje života osobe sada u dobi x i odgodom od m godina, sadašnju vrijednost jediničnog iznosa zapišimo kao:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t = 0, ..., m-1 \\ v^{t+1} & \text{za } t = m, ..., m+n-1 \\ 0 & \text{za } t = m+n, ... \end{cases}$$

a isplatu jediničnog iznosa na kraju godine u kojoj smrt nastupi, odnosno sadašnju vrijednost privremenog osiguranja života na n godina, s:

$$\begin{aligned} {}_{m|}A^1_{x:\overline{n|}} &= \sum_{t=m}^{m+n-1} v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x \\ &= \sum_{t=m}^{m+n-1} v^{t+1} \cdot \frac{d_{x+t}}{l_x} \\ &= \sum_{t=m}^{m+n-1} \frac{v^{x+t+1} d_{x+t}}{v^x l_x}. \end{aligned}$$

Definiranjem novih zamjenskih funkcija:

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + ... + C_{\omega-1}$$

$$D_x = v^x \cdot l_x$$

dobiva se:

$$\begin{aligned} {}_{m|}A^1_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=m}^{m+n-1} \frac{C_{x+t}}{D_x} \\ &= \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}. \end{aligned} \tag{8}$$

U slučaju gdje je $m = 0$, odnosno za osiguranje života na određeno vrijeme bez odgode, vrijedi:

$$v(t) = \begin{cases} v^{t+1} & \text{za } t = 0, ..., n-1 \\ 0 & \text{za } t = n, ... \end{cases}$$

i

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Ukoliko vrijednost osigurane svote iznosi C tada je:

$$s.v. = C \cdot A^1_{x:\overline{n}|} = A^C_{x:\overline{n}|},$$

$$s.v. = C \cdot {}_{m|}A^1_{x:\overline{n}|} = {}_{m|}A^C_{x:\overline{n}|}.$$

Primjer 5.1. Osoba stara 35 godina ugovara privremeno osiguranje života (tj. na određeno vrijeme) na svotu 4000 kn. Osiguravajuće društvo će isplatiti tu svotu ako smrt nastupi prije dobi od 60 godina. Kolika je cijena tog osiguranja (uz pretpostavku da se primjenjuje tablica LAT: A1967-70 za $i = 4\%$)?

Rješenje: Uvrštavanjem danih vrijednosti u odgovarajuću formulu (8), dobiva se:

$$\begin{aligned} s.v. = C \cdot A^1_{x:\overline{n}|} &= C \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = 4000 \cdot \frac{M_{35} - M_{35+25}}{D_{35}} \\ &= 4000 \cdot \frac{M_{35} - M_{60}}{D_{35}} = 4000 \cdot \frac{1949.1300 - 1477.0842}{8545.0060} \\ &= 220.97\ kn. \end{aligned}$$

5.2 Doživotno osiguranje života

Kada je period osiguranja n beskonačan, odnosno vrijedi $x+m+n > \omega$, radi se o doživotnom osiguranju života koje nudi isplatu osigurane svote u slučaju smrti osigurane osobe, bez obzira na trenutak smrti. Ako se promatra doživotno osiguranje života osobe sada u dobi x kojoj se u slučaju smrti u dobnom intervalu $[x+t, x+t+1)$ isplaćuje naknada 1 u trenutku $x+t+1$, odnosno na kraju godine u kojoj je smrt nastupila, sadašnja vrijednost jediničnog iznosa za $t \in \mathbb{N}_0$ označava se s:

$$v(t) = v^{t+1},$$

a ukupna sadašnja vrijednost obaveza osiguravajućeg društva s:

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \cdot \ {}_{t|1}q_x \\ &= \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \cdot \frac{d_{x+t}}{l_x} \\ &= \frac{1}{v^x l_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{x+t+1} \cdot d_{x+t}. \end{aligned}$$

Korištenjem istih zamjenskih funkcija:

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + ... + C_{\omega-1}$$

$$D_x = v^x \cdot l_x$$

dobiva se:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Ako gledamo doživotno osiguranje života s odgodom od m godina, sadašnju vrijednost obaveza pišemo kao:

$${}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}.$$

Ukoliko vrijednost osigurane svote iznosi C, tada je sadašnja vrijednost doživotnog osiguranja života dana s:
-u slučaju s odgodom od m godina: $s.v. = C \cdot \ {}_{m|}A_x = C \cdot \frac{M_{x+m}}{D_x}$
-u slučaju bez odgode: $s.v. = C \cdot A_x = C \cdot \frac{M_x}{D_x}$.

Primjer 5.2. Kolika je cijena osiguranja iz prethodnog primjera 5.1, ukoliko se umjesto privremenog osiguranja gleda doživotno osiguranje života odgođeno 25 godina?
Rješenje:

$$\begin{aligned} s.v. &= C \cdot \ {}_{m|}A_x = C \cdot \frac{M_{x+m}}{D_x} = 4000 \cdot \frac{M_{35+25}}{D_{35}} \\ &= 4000 \cdot \frac{M_{60}}{D_{35}} = 4000 \cdot \frac{1477.0842}{8545.0060} = 691.44\ kn. \end{aligned}$$

5.3 Mješovito osiguranje života i doživljenja

Doživotno osiguranje života i privremeno osiguranje života koje smo raspravili u prethodnim poglavljima nude isplatu osigurane svote samo u slučaju smrti. Suprotno tome, mješovito osiguranje života i doživljenja nudi, ne samo isplatu osigurane svote ukoliko smrt nastupi unutar perioda osiguranja n, već i isplatu osigurane svote ukoliko je osigurana osoba doživjela kraj perioda osiguranja, odnosno $x+n$. Stoga se takva osiguranja koriste kao pogodno sredstvo za akumuliranje fonda koji će kasnije postati dostupan za korištenje osiguranoj osobi.

Dakle, mješovito osiguranje života i doživljenja je kombinacija osiguranja doživljenja i privremenog osiguranja života s isplatom na kraju perioda osiguranja n.

Promotrimo mješovito osiguranje života i doživljenja uzeto u dobi x, naknade 1, perioda osiguranja n i odgode m. Sadašnja vrijednost jediničnog iznosa za $t=m,...,m+n-1$ označava se s:

$$v(t)=v^{t+1},$$

a ukupnu sadašnju vrijednost obaveza osiguravajućeg društva s:

$$_{m|}A_{x:\overline{n}|}= {}_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|}+{}_{m|}A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Koristeći formule (7) i (8) dobiva se:

$$\begin{aligned}_{m|}A_{x:\overline{n}|}&=\frac{M_{x+m}-M_{x+m+n}}{D_x}+\frac{D_{x+m+n}}{D_x}\\&=\frac{M_{x+m}-M_{x+m+n}+D_{x+m+n}}{D_x}.\end{aligned}$$

Ukoliko je n beskonačan, odnosno vrijedi $x+m+n>\omega$, mješovito osiguranje života i doživljenja postaje doživotno osiguranje života jer će smrt zasigurno nastupiti prije dobi od $x+m+n$.

Za mješovito osiguranje života i doživljenja bez odgode, odnosno za $m=0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}A_{x:\overline{n}|}&=A^{1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\\&=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}+\frac{D_{x+n}}{D_x}\\&=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}.\end{aligned}$$

Ukoliko vrijednost osigurane svote iznosi C tada je sadašnja vrijednost mješovitog osiguranja života i doživljenja dana s:

- u slučaju bez odgode: $s.v.=C\cdot A_{x:\overline{n}|}$
- u slučaju s odgodom od m godina: $s.v.=C\cdot {}_{m|}A_{x:\overline{n}|}$.

Primjer 5.3. Kolika je cijena mješovitog 15-godišnjeg osiguranja osobe u dobi 40 sa svotom 20000 kn u slučaju smrti i svotom 25000 kn u slučaju doživljenja?

Rješenje: Uvrštavanjem danih vrijednosti u gornje formule, dobiva se (uporabom vrijednosti u tablici LAT: A1967-70 za $i=4\%$):

$$\begin{aligned}s.v.=C\cdot A^{1}_{x:\overline{n}|}&=C_1\cdot\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}+C_2\cdot\frac{D_{x+n}}{D_x}\\&=20000\cdot\frac{M_{40}-M_{40+15}}{D_{40}}+25000\cdot\frac{D_{40+15}}{D_{40}}=20000\cdot\frac{M_{40}-M_{55}}{D_{40}}+25000\cdot\frac{D_{55}}{D_{40}}\\&=20000\cdot\frac{1909.4986-1645.2318}{6986.4959}+25000\cdot\frac{3664.5684}{6986.4959}=13869.55\ kn.\end{aligned}$$

6 Rente

Renta je niz isplata koje se isplaćuju u jednakim vremenskim intervalima. Potrebno je razlikovati pojmove doživotna renta i životno osiguranje. Doživotna renta osigurava niz periodičnih isplata, dok se životno osiguranje sastoji od jednokratne isplate ugovorene svote, odnosno, primarna svrha životnih osiguranja je izgradnja fonda nakon perioda osiguranja, dok rente svojim nizom isplata osobi daju opciju redovite likvidacije fonda tijekom vremenskog intervala.

Razlikujemo financijske i životne rente. Životne rente su uvjetovane doživljenjem neke osobe, a financijske rente su neovisne o smrti ili doživljenju. Ako su rente plative na kraju vremenskog intervala, takve rente nazivamo postnumerando rente ili rente plative unatrag. Ako su rente plative na početku vremenskog intervala, takve rente nazivamo prenumerando rente ili rente plative unaprijed. U ovom radu promatraju se rente iznosa 1, jer se rente drugih iznosa računaju analogno.

6.1 Financijske rente

6.1.1 Postnumerando renta

1. Postnumerando renta (oznaka njezine sadašnje vrijednosti: $a_{\overline{n}|}$).
   Promotrimo slučaj isplate na kraju svake od n uzastopnih godina:

Slika 1: Postnumerando financijska renta

Sadašnja vrijednost postnumerando rente s n godišnjim isplatama iznosa 1 je:

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= 1 \cdot v^1 + 1 \cdot v^2 + ... + 1 \cdot v^n \\ &= v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{\frac{1}{v} - 1} \\ &= \frac{1 - v^n}{i}. \end{aligned} \tag{9}$$

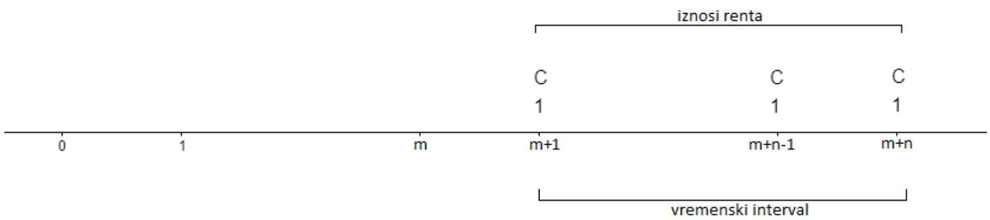
Akumulirana vrijednost se dobiva množenjem sadašnje vrijednosti s akumulacijskim faktorom $(1 + i)^n$. Označava se s $s_{\overline{n}|}$ i vrijedi:

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot (1 + i)^n = \frac{a_{\overline{n}|}}{v^n}.$$

Također, akumulirana vrijednost je vrijednost niza od n godišnjih isplata u trenutku zadnje isplate. Stoga, dobiva se:

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|} &= 1 \cdot (1+i)^0 + 1 \cdot (1+i)^1 + ... + 1 \cdot (1+i)^{n-1} \\ &= 1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \end{aligned}$$

2. Odgođena postnumerando renta (oznaka njezine sadašnje vrijednosti: ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$.)
   Promotrimo postnumerando rentu odgođenu m godina (Slika 2).



Slika 2: Odgođena postnumerando financijska renta

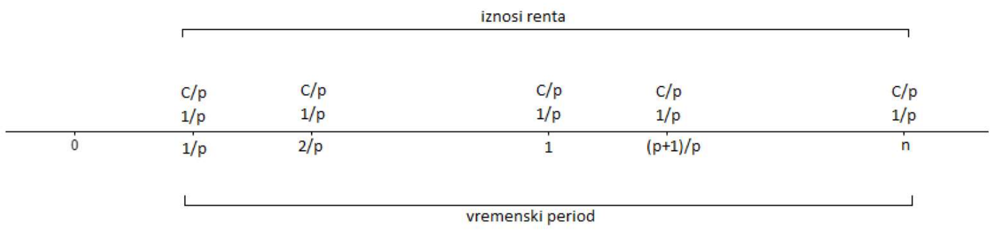
Sadašnja vrijednost odgođene postnumerando rente piše se kao:

$$\begin{aligned} {}_{m|}a_{\overline{n}|} &= 1 \cdot v^{m+1} + 1 \cdot v^{m+2} + ... + 1 \cdot v^{m+n} \\ &= v^m(1 \cdot v + 1 \cdot v^2 + ... + 1 \cdot v^n). \end{aligned}$$

Koristeći (9) dobiva se:

$${}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m \cdot a_{\overline{n}|}.$$

3. Postnumerando renta koja se isplaćuje p puta godišnje (oznaka njezine sadašnje vrijednosti: $a^{(p)}_{\overline{n}|}$.)
   Postnumerando renta koja se isplaćuje p puta godišnje definirana je na sljedećem vremenskom prikazu (Slika 3):



Slika 3: Postnumerando financijska renta koja se isplaćuje p puta godišnje

Sadašnja vrijednost postnumerando rente koja se isplaćuje p puta godišnje izračunava se ovako:

$$\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}^{(p)} &= \frac{1}{p}\cdot v^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}\cdot v^{\frac{2}{p}} + \ldots + \frac{1}{p}\cdot v^{1} + \frac{1}{p}\cdot v^{\frac{p+1}{p}} + \ldots + \frac{1}{p}\cdot v^{n} \\
&= \frac{1}{p}\cdot v^{\frac{1}{p}}(1 + v^{\frac{1}{p}} + \ldots + v^{\frac{np-1}{p}}) = \frac{1}{p}\cdot v^{\frac{1}{p}}\cdot \frac{(v^{\frac{1}{p}})^{np} - 1}{v^{\frac{1}{p}} - 1} \\
&= \frac{1 - v^n}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} = \frac{1 - v^n}{i^{(p)}} \\
&= \frac{i}{i^{(p)}}\cdot \frac{1 - v^n}{i}.
\end{aligned}$$

Kada se uvrsti formula (9) dobiva se:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{i^{(p)}}\cdot a_{\overline{n}|}.$$

Ako se isplaćuje iznos C, tada je sadašnja vrijednost postnumerando rente jednaka:
- u slučaju bez odgode: $C \cdot a_{\overline{n}|}$
- u slučaju s odgodom od m godina: $C \cdot {}_{m|}a_{\overline{n}|}$,
odnosno, ako se postnumerando renta isplaćuje p puta godišnje:

$$C \cdot a_{\overline{n}|}^{(p)}.$$

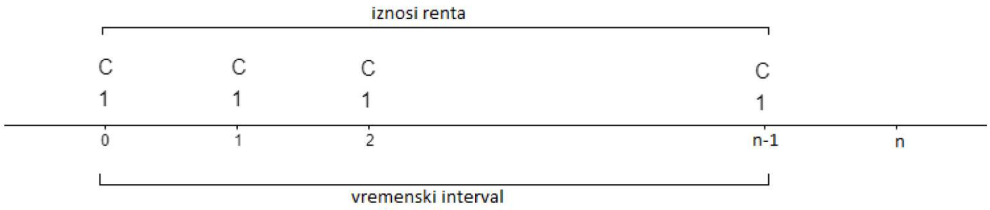
Primjer 6.1. Pretpostavlja se da se iznos od 3000 kn otplaćuje u 25 jednakih rata uz efektivnu kamatnu stopu 8%. Odredite iznos svake postnumerando uplate.
Rješenje: Sadašnja vrijednost takve postnumerando uplate iznosi 3000 kn. Uporabom gornjih formula, dobiva se:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1 - (\frac{1}{1+0.08})^{25}}{0.08} = 10.6748\, kn$$

$$s.v. = C \cdot a_{\overline{n}|} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{s.v.}{a_{\overline{n}|}} = \frac{3000}{10.6748} = 281.04\, kn.$$

6.1.2 Prenumerando renta

1. Prenumerando renta (oznaka njezine sadašnje vrijednosti: $\ddot{a}_{\overline{n}|}$.)
   Ako se promatra slučaj isplate na početku svake od n uzastopnih godina, ta prenumerando renta može se prikazati pomoću Slike 4:



Slika 4: Prenumerando financijska renta

Za sadašnju vrijednost prenumerando rente u trenutku prve isplate dobiva se:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 \cdot v^0 + 1 \cdot v^1 + 1 \cdot v^2 + ... + 1 \cdot v^{n-1} \\ &= 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1} = 1 \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} \\ &= \frac{1 - v^n}{d}.\end{aligned} \tag{10}$$

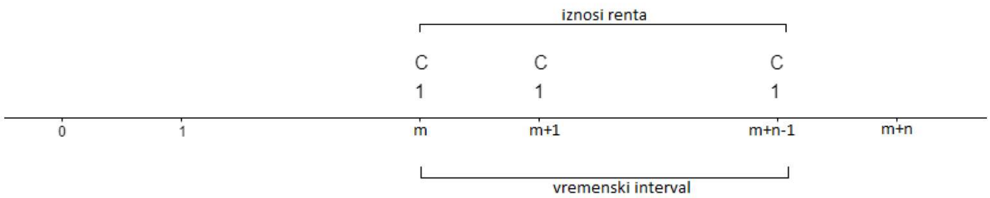
Analogno kao kod postnumerando rente, za akumuliranu vrijednost prenumerando rente, koja se označava s $\ddot{s}_{\overline{n}|}$, vrijedi:

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n}|} &= 1 \cdot (1+i)^1 + 1 \cdot (1+i)^2 + ... + 1 \cdot (1+i)^n \\ &= (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{\frac{i}{1+i}} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{d},\end{aligned}$$

a ista formula dobiva se i ovako:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{v^n} = \frac{1}{v^n} \cdot \frac{1 - v^n}{d} = \frac{\frac{1}{v^n} - 1}{d} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

2. Odgođena prenumerando renta (oznaka njezine sadašnje vrijednosti: ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$).
   Na sljedećoj slici može se vidjeti prikaz prenumerando rente odgođenu m godina:

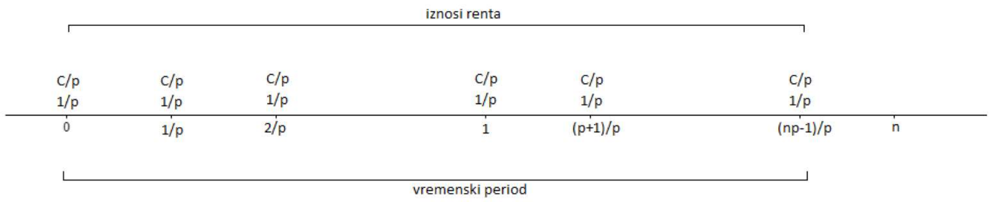


Slika 5: Odgođena prenumerando financijska renta

Sadašnja vrijednost odgođene prenumerando rente zapisuje se pomoću (10) kao:

$$\begin{aligned}{}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 \cdot v^m + 1 \cdot v^{m+1} + ... + 1 \cdot v^{m+n-1} \\ &= v^m \cdot (1 + v^1 + ... + v^{n-1}) \\ &= v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}.\end{aligned}$$

3. Prenumerando renta koja se isplaćuje p puta godišnje (oznaka njezine sadašnje vrijednosti: $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$).
Na sljedećoj slici se promatra prenumerando renta koja se isplaćuje p puta godišnje:



Slika 6: Prenumerando financijska renta koja se isplaćuje p puta godišnje

Sadašnja vrijednost ovakve prenumerando rente ima sljedeći oblik:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} &= \frac{1}{p}\cdot v^0 + \frac{1}{p}\cdot v^{\frac{1}{p}} + ... + \frac{1}{p}\cdot v^{\frac{np-1}{p}} \\
&= \frac{1}{p}(1 + v^{\frac{1}{p}} + ... + v^{\frac{np-1}{p}}) = \frac{1}{p}\cdot 1 \cdot \frac{(v^{\frac{1}{p}})^{np}-1}{v^{\frac{1}{p}}-1} \\
&= \frac{v^n - 1}{p[(\frac{1}{1+i})^{\frac{1}{p}} - 1]} = \frac{1-v^n}{p[1-(1+i)^{\frac{-1}{p}}]} \\
&= \frac{1-v^n}{d^{(p)}}.
\end{aligned}
$$

Ako se isplaćuje iznos C, tada je sadašnja vrijednost prenumerando rente jednaka:
- u slučaju bez odgode: $C\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$,
- u slučaju s odgodom od m godina: $C\cdot \ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$
i u slučaju da se prenumerando renta isplaćuje p puta godišnje:

$$C\cdot \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}.$$

Primjer 6.2. Kolike su prenumerando uplate ako su dani podaci kao u prethodnom primjeru 6.1?
Rješenje: Dana je sadašnja vrijednost takve prenumerando uplate, $s.v. = 3000\ kn$, te $n = 25$, $i = 0.08$. Uporabom gornjih formula, dobiva se:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d} = \frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1-(\frac{1}{1+0.08})^{25}}{1-\frac{1}{1+0.08}} = \frac{0.85398}{0.07407} = 11.5294$$

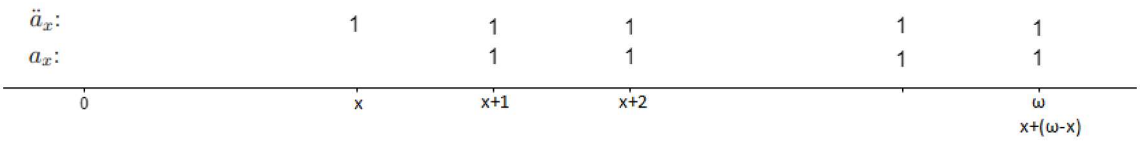
$$s.v. = C\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{s.v.}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{3000}{11.5294} = 260.20\ kn.$$

6.2 Životne rente

Životne rente se još nazivaju i osobne rente. Za razliku od financijskih renti, kod životnih renti isplate će prestati nakon smrti osobe, odnosno životne rente ovise o životnom tijeku. Možemo ih smatrati kao niz osiguranja doživljenja. Dijelimo ih na sljedeće:

- neposredne doživotne rente,
- neposredne privremene rente,
- odgođene doživotne rente,
- odgođene privremene rente.

1. Neposredne doživotne rente
   Najčešći tip rente je doživotna renta koja nudi isplatu tijekom cijelog života osobe. Promotrimo neposrednu doživotnu rentu koja nudi godišnju isplatu naknade 1:



Slika 7: Neposredne doživotne rente

Sadašnju vrijednost postnumerando rente se može definirati pomoću osiguranja doživljenja, odnosno formule (6):

$$\begin{aligned} a_x &= A_{x:\overset{1}{\overline{1|}}} + A_{x:\overset{1}{\overline{2|}}} + ... + A_{x:\overset{1}{\overline{\omega-x|}}} \\ &= \sum_{t=1}^{\omega-x} A_{x:\overset{1}{\overline{t|}}} \\ &= \frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{\omega-x} D_{x+t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Definiranjem nove zamjenske funkcije:

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}$$

dobiva se:

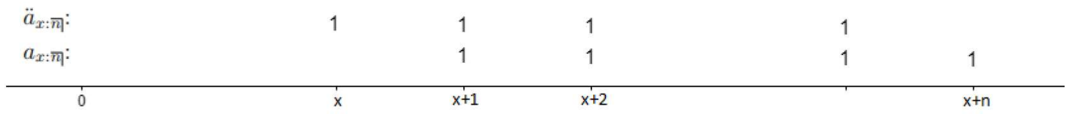
$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

Koristeći izraz (11) određuje se sadašnja vrijednost prenumerando neposredne doživotne rente:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= A_{x:\overline{0}|}^{\;1} + A_{x:\overline{1}|}^{\;1} + \dots + A_{x:\overline{\omega-x}|}^{\;1} \\
&= 1 + A_{x:\overline{1}|}^{\;1} + \dots + A_{x:\overline{\omega-x}|}^{\;1} \\
&= 1 + a_x \\
&= 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} \\
&= \frac{N_x}{D_x}.
\end{aligned}$$

2. Neposredne privremene rente

   Rente koje nude isplatu za određeni broj godina te zatim prestaju, nazivaju se privremene rente. Pogledajmo vremenski prikaz neposredne privremene rente:



Slika 8: Neposredne privremene rente

Sadašnja vrijednost postnumerando rente definira se kao:

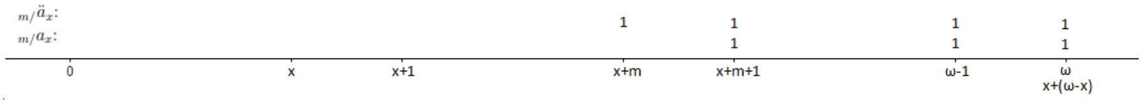
$$\begin{aligned}
a_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{1}|}^{\;1} + A_{x:\overline{2}|}^{\;1} + \dots + A_{x:\overline{n}|}^{\;1} \\
&= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \dots + \frac{D_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x},
\end{aligned}$$

a sadašnja vrijednost prenumerando s:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{0}|}^{\;1} + A_{x:\overline{1}|}^{\;1} + \dots + A_{x:\overline{n-1}|}^{\;1} \\
&= 1 + a_{x:\overline{n-1}|} \\
&= 1 + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}$$

3. Odgođene doživotne rente

   Odgođene rente su rente čija prva isplata počinje nakon određenog broja godina. Na primjer, osoba koja želi da početak isplata počne kod stupanja u mirovinu bi odabrala tu vrstu renti. Pogledajmo vremenski prikaz odgođene doživotne rente:



Slika 9: Odgođene doživotne rente

Analogno se definira sadašnja vrijednost odgođene doživotne postnumerando rente:

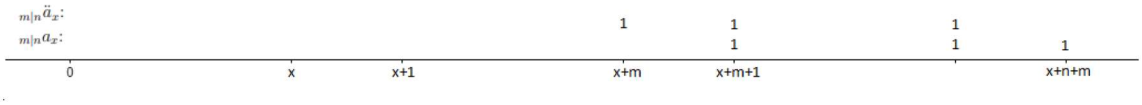
$$\begin{aligned}
{}_{m|}a_x &= A_{x:\overline{m+1|}}^{\;\;1} + ... + A_{x:\overline{\omega-x|}}^{\;\;1} \\
&= \frac{D_{x+m+1}}{D_x} + ... + \frac{D_{x+\omega-x}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+m+1}}{D_x}
\end{aligned}$$

i sadašnja vrijednost odgođene doživotne prenumerando rente:

$$\begin{aligned}
{}_{m|}\ddot{a}_x &= A_{x:\overline{m|}}^{\;\;1} + ... + A_{x:\overline{\omega-x|}}^{\;\;1} \\
&= \frac{D_{x+m}}{D_x} + {}_{m|}a_x \\
&= \frac{D_{x+m}}{D_x} + \frac{N_{x+m+1}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+m}}{D_x}.
\end{aligned}$$

4. Odgođene privremene rente

Ukoliko je renta odgođena za m godina i isplata traje n godina, radi se o odgođenoj privremenoj renti te je vremenski prikaz sljedeći:



Slika 10: Odgođene privremene rente

Sadašnja vrijednost odgođene privremene postnumerando rente određuje se ovako:

$$\begin{aligned}
{}_{m|n}a_x &= A_{x:\overline{m+1|}}^{\;\;1} + ... + A_{x:\overline{n+m|}}^{\;\;1} \\
&= \frac{D_{x+m+1}}{D_x} + ... + \frac{D_{x+n+m}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x},
\end{aligned}$$

a sadašnja vrijednost odgođene privremene prenumerando rente ima sljedeći oblik:

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}\ddot{a}_x &= A_{x:\overline{m|}}^{\;\;1} + ... + A_{x:\overline{n+m-1|}}^{\;\;\;\;\;\;1} \\
&= \frac{D_{x+m}}{D_x} + ... + \frac{D_{x+n+m-1}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+m} - N_{x+n+m}}{D_x}.
\end{aligned}
$$

Primjer 6.3. Osoba sada u dobi 40 želi da joj se krene isplaćivati postnumerando doživotna renta s odgodom od 10 godina, godišnje iznosa 200 kn. Koliki je iznos koji osoba treba uplatiti?

Rješenje: Treba izračunati sadašnju vrijednost doživotne rente odgođene $m = 10$ godina. Dobiva se koristeći tablicu LAT: A1967-70, gdje je $i = 4\%$.

$$
\begin{aligned}
s.v. = C \cdot {}_{m|}a_x = C \cdot \frac{N_{x+m+1}}{D_x} = 200 \cdot \frac{N_{40+10+1}}{D_{40}} \\
= 200 \cdot \frac{N_{51}}{D_{40}} = 200 \cdot \frac{68970.076}{6986.4959} = 1974.38\ kn.
\end{aligned}
$$

7 Premije

Premije su iznosi koje osigurana osoba plaća osiguravajućem društvu u zamjenu za osigurani iznos. Dijele se na neto i bruto premije. Neto premije ne sadrže dodatne troškove, dok bruto premije sadrže. Sadašnje vrijednosti osiguranja nazivaju se i jednokratne neto premije.

Kod osiguranja doživljenja, životnih osiguranja i odgođenih renti, premije se plaćaju u jednakim iznosima i jednakim vremenskim razmacima te uvijek prenumerando, kako smrt ne bi nastupila prije nego što osoba uplati prvu premiju.

7.1 Neto premije

Promotrimo godišnju premiju u neto iznosu, odnosno bez uključenih troškova.

Kako bi se odredila godišnja premija P_x doživotnog osiguranja života za osobe u dobi x koja se plaća prenumerando, koriste se sljedeće jednakosti:

$$\begin{pmatrix} \text{Očekivana s.v.} \\ \text{svih neto premija} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Očekivana s.v.} \\ \text{naknade} \end{pmatrix}$$
$$P_x \cdot \ddot{a}_x = A_x$$

iz čega slijedi:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}} = \frac{M_x}{N_x}.$$

Analogno, kod osiguranja života na određeno vrijeme, za godišnju premiju $P^1_{x:\overline{n}|}$ vrijedi:

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

te za godišnju premiju $P_{x:\overline{n}|}$ mješovitog osiguranja života i doživljenja vrijedi:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

7.2 Bruto premije

Kada osiguravajuće društvo odredi premiju, ona mora sadržavati i troškove. Ako su troškovi uključeni u premiju, govorimo o bruto premijama. Ti troškovi se dijele s obzirom na vrijeme nastanka. Troškovi nastali u trenutku izdavanja osiguranja se nazivaju početni troškovi. Ostali troškovi, nastali za vrijeme trajanja osiguranja, se nazivaju troškovi obnove. U većini slučajeva, troškovi su definirani kao postotak premije ili naknade.

Osnovna jednadžba iz koje se računaju bruto premije je:

$$\begin{pmatrix} \text{Očekivana s.v.} \\ \text{svih bruto premija} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Očekivana s.v} \\ \text{naknade} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Očekivana s.v.} \\ \text{troškova} \end{pmatrix}$$

Bruto premije se označuju s P", a razlika bruto premije i neto premije, $P" - P$, se naziva opterećenje.

Primjer 7.1. Osoba sada u dobi 40 ugovara 15-godišnje mješovito osiguranje života i doživljenja na svotu u iznosu 5000. Početni troškovi iznose 100, a troškovi obnove iznose 0.5% od osigurane svote nastale na početku svake godine. Kolika je bruto premija i opterećenje?
Rješenje: Iz uvjeta u primjeru postavlja se izraz za izračun bruto premije P".

$$\begin{aligned} P" &= 5000 \cdot A_{40:\overline{15}|} + 0.005 \cdot 5000 \cdot \ddot{a}_{40:\overline{15}|} + 100 \\ &= 5000 \cdot \frac{M_{40} - M_{55} + D_{55}}{D_{40}} + 0.005 \cdot 5000 \cdot \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{40}} + 100 \\ &= 3096.21, \end{aligned}$$

gdje se u izračunu koriste vrijednosti zamjenskih funkcija D_x, M_x, N_x danih u tablici LAT: A1967-70, uz pretpostavku $i = 4\%$.
Nadalje, neto premija P iznosi:

$$P = 5000 \cdot A_{40:\overline{15}|} = 5000 \cdot \frac{M_{40} - M_{55} + D_{55}}{D_{40}} = 2811.7351.$$

Stoga, opterećenje je:

$$P" - P = 3096.21 - 2811.74 = 284.47.$$

8 Primjer police životnog osiguranja

Allianz Zagreb d.d.

AllLife

Polica osiguranja života

Allianz

Broj police:

Početak osiguranja: 01.05.2007
Istek osiguranja: 01.05.2027
Verzija 1 od dana 01.05.2007
Ugovoreno temeljem ponude broj

UGOVARATELJ OSIGURANJA I OSIGURANIK:

Datum rođenja: 18.02.1962

OSIGURANJE	**CJENIK**	**UGOVORENA SVOTA (EUR)**	**GODIŠNJA PREMIJA (EUR)**
1. OSIGURANJA ŽIVOTA JEDNE OSOBE ZA SLUČAJ SMRTI I DOŽIVLJENJA	M4	8.000	399,60
2. DOPUNSKO OSIGURANJE OD POSLJEDICA NESRETNOG SLUČAJA	DN45		44,00
Ugovorena svota za slučaj smrti zbog nezgode		4.000	
Osnovica za trajni invaliditet		10.000	
Ugovorena svota za 100% - tni trajni invaliditet		20.000	
Dnevna naknada za boravak u bolnici		5	
		Godišnja premija osiguranja ukupno:	**443,60**
		Mjesečna premija osiguranja ukupno:	**38,82**

Premija se plaća u kunskoj protuvrijednosti po srednjem tečaju HNB-a na dan dospijeća, odnosno kod zakašnjenja u plaćanju na dan plaćanja, mjesečno svakog 01. u mjesecu do isteka trajanja osiguranja. Temeljem članka 11. Zakona o PDV-u, PDV se ne obračunava. Prva premija u iznosu od 278,16 HRK plaćena je 24.04.2007.

KORISNIK OSIGURANJA
Za doživljenje:
Za slučaj smrti:

SASTAVNI DIO OVOG UGOVORA UZ OVU POLICU ČINE:
PONUDA br. Uvjeti za osiguranje života (901-0206), TABLICA ZA ODREĐIVANJE POSTOTKA TRAJNOG INVALIDITETA KAO POSLJEDICE NESRETNOG SLUČAJA (NEZGODE) (447-0303), Tablica kapitaliziranih svota osiguranja, Tablica otkupnih vrijednosti, Dopunski uvjeti za osiguranje osoba od posljedica nesretnog slučaja (nezgode) uz osiguranje života (902-0206), Posebni uvjeti za osiguranje uvećanih rizika (903-0404).

Posebne napomene: Za osiguranje života po cjeniku M4 ugovorena je indeksacija 2% godišnje, sukladno članku 11. Uvjeta za osiguranje života 901-0206.

Zagreb, 30.04.2007

Allianz Zagreb d.d.

Slika 11: Polica životnog osiguranja

Kako mješovito osiguranje života i doživljenja nudi isplatu osigurane svote i u slučaju smrti i u slučaju doživljenja, to ga čini jednim od najpoželjnijih osiguranja među osiguranim osobama. Na Slici 11 je primjer jednog takvog osiguranja. Osigurana svota iznosi 8000, te je izražena u eurima, ali se mjesečna premija osiguranja plaća u kunama po srednjem tečaju HNB-a na dan dospijeća. Polica vrši razliku između smrti zbog bolesti i zbog nezgode, te u slučaju smrti zbog nezgode nudi isplatu u visini pola osigurane svote. Osim isplate za slučaj doživljenja i smrti, polica osiguranja nudi i isplatu od 10000 za trajni invaliditet te skoro trostruku isplatu osigurane svote za 100%-tni trajni invaliditet, odnosno 20000 eura.

Polica osiguranja je sklopljena 01.05.2007 godine u trajanju od 20 godina te je dobna starost u trenutku sklapanja osiguranja osigurane osobe 45 godina. Unutar police je također definirana dnevna naknada za boravak u bolnici i iznosi 5 eura. Godišnja premija iznosi 443.60 eura, a mjesečna premija 38.82 eura. Premija osiguranja ovisi o mnogim čimbenicima, a među njima su iznos osigurane svote, spol, starost i zanimanje osigurane osobe te vremensko trajanje police. Osigurana osoba u primjeru je ženskog spola, dobna starost u trenutku sklapanja osiguranja je 45 godina te se osoba u trenutku sklapanja ugovora bavila građevinskim poslom, što je rezultiralo višoj premiji zbog veće opasnosti za život.

Smrt je neizbježna te sa smrću dolazi i moguć rizik od financijskog gubitka. Kupnja životnog osiguranja je jedan način kako se taj teret u tom trenutku može smanjiti, na način da se prenese na osiguravajuće društvo. Osim emocionalne patnje, u slučaju smrti primarne osobe koja zarađuje u obitelji dolazi do velike financijske nesigurnosti. Životno osiguranje pruža sigurnost ako je sa smrću prekinut dio ili cijeli prihod u obitelji, te sigurnost protiv bilo kojeg financijskog problema. Također, životno osiguranje može financirati mirovinske planove ili služiti kao nadoknada za zajam u slučaju prerane smrti. Neophodno je razumjeti vrste životnih osiguranja kako bi se donijela najbolja odluka o kupnji baziranoj na potrebama osigurane osobe.

Kupnja osiguranja i ugovaranje renti je važan dio financijskih odluka te pomoću njih može se zaštiti osoba od neočekivanih financijskih nesreća u životu. Uz redovitu zaradu i štednju, osiguranje i rente mogu samo još više poboljšati financijski položaj.

Životno osiguranje se može kupiti bez obzira na visinu primanja te osobe s niskim primanjima se mogu odlučiti na niži osigurani iznos koji odgovara njihovim financijskim mogućnostima. Ukoliko je polica dobro isplanirana, njezina postojanost bi mogla dobro doći u teškim financijskim vremenima.

Popis slika

Literatura

[1] D. Bakić, D. Francišković, *Financijska i aktuarska matematika*, Odjel za matematiku Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2013, skripta.

[2] F.E. De Vylder, *Life Insurance Theory: Actuarial Perspectives*, Springer US, Berlin, 1997.

[3] H.U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*, Springer Berlin Heidelberg, New York, 1990.

[4] A.K. Gupta, T. Varga, *An Introduction to Actuarial Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[5] S.S. Huebner, K. Black, *Life insurance*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.

[6] S.D. Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics*, Wiley, Toronto, 2011.

Sažetak

Životno osiguranje je obaveza osiguravajućeg društva prema osiguranoj osobi. U ovom radu su prikazana osiguranja ovisna o smrti osigurane osobe, odnosno osiguranje života na određeno vrijeme, doživotno osiguranje života i mješovito osiguranje života i doživljenja. Na početku su definirani osnovni pojmovi potrebni za njihovo bolje razumijevanje i tablice smrtnosti koje se koriste prilikom ugovaranja osiguranja. Svako osiguranje je detaljno objašnjeno vremenskim prikazom i primjerom. Analizirano je i osiguranje doživljenja te su razmatrane rente i premije. Istaknuta je važnost i potreba za razlikovanje osiguranja i renti te su objašnjene njihove razlike. U posljednjem poglavlju su analizirane premije koje osigurana osoba plaća osiguravajućem društvu u zamjenu za osigurani iznos.

Ključne riječi: osiguranje, životno osiguranje, doživotno osiguranje, privremeno osiguranje, mješovito osiguranje, osiguranje doživljenja, tablice smrtnosti, rente, premije

Title and summary

Annuities and life insurance

Life insurance is an obligation of the insurance company to the insured person. This paper presents insurances dependent on the death of the insured person, i.e. term life insurance, whole life insurance and endowment. In order to be better understood, basic terms are defined at the beginning of the paper as are mortality tables which are used when buying insurance. A timeline and an example of every type of insurance is presented in detail. Pure endowment is also analysed with annuities and premiums taken into consideration. The importance of differentiating insurances and annuities is explained. The last chapter analyses premiums paid by the insured person to the insurance company in exchange for the insured amount.

Keywords: insurance, life insurance, whole life insurance, term life insurance, endowment, pure endowment, mortality tables, annuities, premiums

Životopis

Rođena sam 09. veljače 1995. godine u Sisku. Osnovnu školu Novska završavam 2009. i iste godine upisujem Srednju školu Tina Ujevića u Kutini koju 2014. godine završavam. Nakon srednjoškolskog obrazovanja sam upisala Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku te sam 2019. godine stekla naziv sveučilišne prvostupnice matematike uz završni rad *Vivianijev teorem* i mentorstvo izv.prof.dr.sc. Zdenke Kolar-Begović. Nakon završetka Preddiplomskog studija, upisala sam diplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku, smjer Financijska matematika i statistika.