

# Primjena američkih opcija u strategijama trgovanja

---

Radan, Vjekoslav

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:459079>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-12**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

Vjekoslav Radan

**Primjena američkih opcija u strategijama trgovanja**

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

Vjekoslav Radan

**Primjena američkih opcija u strategijama trgovanja**

Diplomski rad

Voditelj: dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2022.

# Sadržaj

Uvod	1
<b>1. Kratki pregled teorije</b>	<b>2</b>
1.1 Black-Scholes-Mertonov model financijskog tržišta . . . . .	3
<b>2. Osnovno o američkim opcijama</b>	<b>5</b>
2.1 Opcijski "Grci" . . . . .	9
2.1.1 Delta . . . . .	10
2.1.2 Gamma . . . . .	11
2.1.3 Theta . . . . .	12
2.1.4 Veza između delte, gamme i thete u uvjetima Black-Scholes-Mertonovog modela . . . . .	12
2.1.5 Vega i Rho . . . . .	13
2.2 Opcijske strategije . . . . .	13
2.2.1 Osnovne strategije . . . . .	14
2.2.2 Strategije razmaka . . . . .	15
2.2.3 Kombinirane strategije . . . . .	21
<b>3. Optimalno vrijeme izvršenja</b>	<b>25</b>
3.1 Optimalno vrijeme izvršenja američke call opcije . . . . .	27
3.2 Optimalno vrijeme izvršenja američke put opcije . . . . .	28
<b>4. Numeričke metode za određivanje cijene</b>	<b>31</b>
4.1 Metode razlika . . . . .	31
4.1.1 Eksplicitna metoda razlika . . . . .	31
4.1.2 Implicitna metoda razlika . . . . .	33
4.2 Monte Carlo simulacije . . . . .	36
4.2.1 Broadie - Glasserman metoda . . . . .	36
<b>Dodatak 1 - R kod za Osnovno o američkim opcijama</b>	<b>40</b>
<b>Dodatak 2 - R kod za Numeričke metode za određivanje cijene</b>	<b>45</b>
<b>Literatura</b>	<b>50</b>
<b>Sažetak</b>	<b>51</b>
<b>Životopis</b>	<b>53</b>



# Uvod

Razvojem tehnologije i digitalizacijom, financijska tržišta postala su iznimno kompleksna tržišta na kojima zbog gotovo instantnog prijenosa informacija s jednog kraja svijeta na drugi više nije moguće efikasno trgovati isključivo na osnovu vijesti. Naime, za razliku od ne tako davnih vremena kada se trgovati moglo isključivo "ručno", danas je zahvaljujući automatiziranim procesima moguće izvršiti desetke tisuća transakcija u minuti. Ti automatizirani procesi, osim mogućnosti uspješnijeg predviđanja kretanja cijena, imaju jednu veliku prednost naspram "ručnog" trgovanja - **zakon velikih brojeva**. Riječima Boba Mercera, bivšeg direktora jednog od najuspješnijih hedge fondova ikad, Medalliona (jedan od fondova tvrtke Renaissance Technologies): "*We're right 50.75 percent of the time... but we're 100 percent right 50.75 percent of the time. You can make billions that way.*"<sup>1</sup> Naime, **ukoliko trgovac financijskim instrumentima zaista u prosjeku zaradi na 50.75% transakcija, a dnevno napravi iznimno puno transakcija, očekivani postotak uspješnih transakcija težit će upravo tom prosjeku, što ne mora nužno biti slučaj ukoliko se dnevno izvrši samo 10-ak transakcija**. Razvoj automatiziranih statističkih procesa u financijskim tržištima prozvan je kvantitativna revolucija.

Osim trgovanja klasičnim financijskim instrumentima kao što su dionice, obveznice, dobra i valute, u novije vrijeme počelo se znatno više trgovati i financijskim derivativima. Financijski derivativi su ugovori koji kupcu (eng. *holder*) i prodavaču (eng. *writer*) daju određena prava ili obveze vezane za klasične financijske instrumente. Najčešće se to odnosi na pravo ili obvezu kupnje odnosno prodaje financijskog instrumenta po unaprijed dogovorenoj cijeni u unaprijed dogovorenom vremenskom trenutku. Najčešće trgovani financijski derivativi su forward ili futures ugovori te europske i američke opcije. Jedna od prednosti takvih derivativa, naročito američkih opcija, nad klasičnim financijskim instrumentima je što oni zapravo omogućuju korištenje financijske poluge (eng. *leverage*). Naime, koristeći opcije možemo zaraditi na promjeni u cijeni financijskog instrumenta bez da ikada posjedujemo taj financijski instrument. Obzirom da su opcije ugovori koji vlasniku daju pravo kupnje ili prodaje određenog financijskog instrumenta, kupac to pravo može izvršiti ukoliko ima dovoljno novca za kupnju odnosno ukoliko ima financijski instrument za prodati. No, ukoliko vlasnik nema dovoljno novca za kupiti financijski instrument odnosno nema financijski instrument za prodati, on i dalje može na sekundarnom tržištu (eng. *over-the-counter* ili skraćeno *OTC*) prodati svoj ugovor nekom drugom i na taj način zaraditi na promjeni u cijeni financijskog instrumenta. Jedini trošak kupca opcije je premija na opciju, a ona je uglavnom znatno niža nego sama cijena pripadnog financijskog instrumenta. Druga bitna prednost opcija je to što pružaju mogućnost zaštite od rizika. No, kako se zaštititi od rizika? Kada izvršiti opciju? U nastavku ovog rada pokušat ćemo na zanimljiv način dati odgovore na takve i mnoge slične probleme.

Rad ćemo započeti uvodnom teorijom kroz koju ćemo obraditi pojmove potrebne za razumijevanje rada. Temu američkih opcija otvorit ćemo osnovnim pojmovima i opcijskim strategijama. Zatim ćemo se baviti problemom optimalnog izvršenja opcija. Rad ćemo zaključiti numeričkim metodama koje se najčešće koriste za određivanje cijena američkih opcija. Rad ćemo objediniti primjerima u programskom jeziku R (inačica 4.2.1). Priloženi R kodovi za drugu cjelinu rađeni su samostalno, a kodovi za četvrtu cjelinu uglavnom su preuzeti iz [3] uz poneku preinaku.

---

<sup>1</sup>Citat iz knjige *The Man Who Solved The Market: How Jim Simmons Launched The Quant Revolution* autora Gregory Zuckermana.

# 1. Kratki pregled teorije

Kako bismo dobro razumijeli sadržaj ovog rada, potrebno je definirati osnovne pojmove te iskazati teoreme pomoću kojih ćemo kasnije dokazivati nove tvrdnje. Obzirom da se radi o uvodnim pojmovima i rezultatima, nećemo ih detaljno objašnjavati niti dokazivati.

**Definicija 1.1.** *Long pozicija u financijskom instrumentu je pozicija u kojoj vlasnik kupi financijski instrument. Short pozicija u financijskom instrumentu je pozicija u kojoj vlasnik od burze posudi instrument i proda ga da bi ga kasnije ponovno kupio i vratio burzi. U short poziciji vlasnik pretpostavlja da će u budućnosti moći kupiti instrument po nižoj cijeni i na taj način zaraditi.*

**Definicija 1.2.** *Slučajni proces  $\rho = (\rho_t, t \in \{0, 1, \dots, T\}) = ((\rho_t^0, \rho_t^1, \dots, \rho_t^d))$  s vrijednostima u  $\mathbb{R}^{d+1}$  koji je predvidiv u odnosu na filtraciju  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$  zove se dinamički portfelj ili strategija trgovanja.*

**Definicija 1.3.** *Dinamički portfelj je samofinancirajuć ako je za svaki  $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$*

$$\langle \rho_t, S_t \rangle = \langle \rho_{t+1}, S_t \rangle$$

**Definicija 1.4.** *Dinamički portfelj je dopustiv ako je*

1.  $\rho$  samofinancirajuć
2. vrijednost portfelja u trenutku  $t$  dana s  $V_t(\rho) \geq 0$  za svaki  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$

*Dopustiv dinamički portfelj je arbitraža ako vrijedi*

3.  $V_0(\rho) = 0$
4.  $P(V_T(\rho) > 0) > 0$ .

*Riječima, dopustiv dinamički portfelj je arbitraža ako za kreiranje takvog portfelja ne plaćamo ništa, a on u trenutku  $T$  donosi zaradu.*

**Definicija 1.5.** *Vjerojatnost  $P^*$  na izmjerivom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$  je neutralna na rizik ako je s obzirom na nju proces diskontiranih cijena martingal s obzirom na filtraciju  $\mathbb{F}$ .*

**Napomena 1.1.** *U ostatku rada ćemo o očekivanim cijenama dionica i izvedenica pričati u kontekstu vjerojatnosti neutralne na rizik bez naglašavanja o kojoj se vjerojatnosti radi.*

**Definicija 1.6.** *Slučajni zahtjev s dospijecem u trenutku  $T$  je  $\mathcal{F}_T$ -izmjeriva slučajna varijabla  $C_T$  na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  kojim je modelirano financijsko tržište. Ukoliko je slučajan zahtjev transformacija cijena financijskog instrumenta kažemo da je on izvedenica ili derivativ.*

**Definicija 1.7.** *Slučajan zahtjev je dostižan ako postoji dopustiva strategija trgovanja  $\rho$  takva da je*

$$V_T(\rho) = C_T.$$

**Definicija 1.8.** *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako je na njemu svaki slučajan zahtjev dostižan.*

**Teorem 1.1.** *(Feynman-Kač)*

*Neka je funkcija  $F$  rješenje rubnog problema*



$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - rF = 0 \\ F(T, s) = g(s) \end{cases}$$

te neka je  $E[|\sigma_{S_s} \frac{\partial F}{\partial x}(s, S_s) e^{-rs}|^2] < \infty$ . Neka je dodatno  $\sigma_{S_t} \frac{\partial F}{\partial x} e^{-rt}$  adaptiran na  $\mathcal{F}_t$ . Ako  $S_s$  rješava

$$\begin{cases} dS_s = \mu_{S_s} ds + \sigma_{S_s} dW_s \\ S_s = s \end{cases}$$

onda vrijedi

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} E_{t,x}[(S_T)],$$

pri čemu je  $E_{t,x}[\cdot] = E[\cdot | S_t = x]$ .

**Teorem 1.2.** (Itôva formula)

Neka je  $f(t, x)$  funkcija koja ima neprekidne parcijalne derivacije  $f_t, f_x, f_{xx}$  i neka je  $(W_t, t \geq 0)$  Brownovo gibanje. Tada za svaki  $T \geq 0$  vrijedi

$$f(T, W_T) = f(0, W_0) + \int_0^T f_t(t, W_t) dt + \int_0^T f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W_t) dt.$$

## 1.1 Black-Scholes-Mertonov model financijskog tržišta

Black-Scholes-Mertonov model je model za financijska tržišta u neprekidnom vremenu. Model se zasniva na sljedećim pretpostavkama:

1. kamatna stopa na nerizični financijski instrument (novac) je konstantna (bezrizična)
2. tržište je potpuno i bez arbitraže
3. beskonačna djeljivost financijskog instrumenta (eng. *fractional shares*)
4. kupnja i prodaja financijskog instrumenta se ostvaruje bez naknada i poreza (eng. *frictionless market*)
5. financijski instrument ne isplaćuje dividende
6. na tržištu se trguje u neprekidnom vremenu

Modelom se pretpostavlja vlasništvo jednog nerizičnog financijskog instrumenta (novca) koji se neprekidno ukamaćuje na vremenskom intervalu  $[0, T]$

$$S_0^0 > 0 \quad S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$$

te vlasništvo jednog rizičnog financijskog instrumenta čiju vrijednost modeliramo s geometrijskim Brownovim gibanjem

$$S_t = S_0^0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

**Napomena 1.2.** Standardna devijacija povrata financijskog instrumenta naziva se volatilitet tog instrumenta.

**Propozicija 1.1.** Slučajni proces  $(S_t, t \in [0, T])$  je martingal.

**Napomena 1.3.** Promjene u cijeni dionica modeliramo sljedećom jednađžbom:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

za neke funkcije  $\mu(t, S_t)$  i  $\sigma(t, S_t)$ . Takvu jednađžbu nazivamo stohastička diferencijalna jednađžba. Tu jednađžbu možemo interpretirati na sljedeći način:

Promjena u cijeni dionice može se opisati promjenom u vremenu  
s faktorom očekivanja i promjenom u Brownovom gibanju s faktorom volatilnosti.

Black-Scholes-Mertonov model pretpostavlja konstantno očekivanje i volatilnost, odnosno  $\mu \in \mathbb{R}$  i  $\sigma > 0$ .

**Definicija 1.9.** *Europska call opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da u unaprijed dogovorenom vremenskom trenutku  $T$  kupi financijski instrument po unaprijed dogovorenoj cijeni  $K$ .*

**Definicija 1.10.** *Europska put opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da u unaprijed dogovorenom vremenskom trenutku  $T$  proda financijski instrument po unaprijed dogovorenoj cijeni  $K$ .*

**Napomena 1.4.** *Europske call i put opcije su izvedenice. Vrijeme  $T$  naziva se vrijeme izvršenja ili vrijeme dospijeca opcije, a cijena  $K$  naziva se cijena izvršenja.*

**Teorem 1.3.** *(Black-Scholes-Mertonova formula za europsku call opciju)*

*Neka je dana europska call opcija s dospijecom  $T$  i cijenom izvršenja  $K$  na dionicu s cijenom  $S_t$ . Tada je vrijednost europske call opcije u trenutku  $t$  dana sljedećom formulom*

$$C_t^{call} = S_t \Phi \left( \frac{d_1}{\sqrt{T-t}} \right) - K e^{-r(T-t)} \Phi \left( \frac{d_2}{\sqrt{T-t}} \right),$$

pri čemu je

$$d_1 = \frac{1}{\sigma} \left( \ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma} \left( \ln \left( \frac{S_t}{K} \right) - \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right),$$

a  $\Phi$  funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable.

**Teorem 1.4.** *(Black-Scholes-Mertonova formula za europsku put opciju)*

*Neka je dana europska put opcija s dospijecom  $T$  i cijenom izvršenja  $K$  na dionicu s cijenom  $S_t$ . Uz oznake iz prethodnog teorema, vrijednost europske put opcije u trenutku  $t$  dana je sljedećom formulom*

$$C_t^{put} = K e^{-r(T-t)} \Phi \left( \frac{-d_2}{\sqrt{T-t}} \right) - S_t \Phi \left( \frac{-d_1}{\sqrt{T-t}} \right).$$

**Teorem 1.5.** *(Black-Scholes diferencijalna jednađžba)*

*Neka je  $g(S_T)$  slučajni zahtjev koji ovisi samo o cijeni dionice u dospijecu te neka je  $C(t, S_t)$  slučajan proces koji u kontekstu Black-Scholes-Mertonovog modela modelira takav slučajni zahtjev. Tad vrijedi*

$$\begin{cases} \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial t} + r S_t \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C(t, S_t)}{\partial S_t^2} = r C(t, S_t) \\ C(T, S_T) = g(S_T). \end{cases}$$

*Ako u prethodnom izrazu stohastičku varijablu zamjenimo determinističkom, odnosno postavimo  $S_t = x$ , dobivamo rezultat koji se naziva Black-Scholes diferencijalna jednađžba.*



## 2. Osnovno o američkim opcijama

Američke opcije su financijski instrumenti koji spadaju u kategoriju financijskih derivativa ili izvedenica. Američke opcije vlasniku daju pravo da do unaprijed određenog trenutka kupi ili proda pripadni financijski instrument po unaprijed dogovorenoj cijeni. Dakle, jedino što razlikuje američke i europske opcije je činjenica da američke možemo izvršiti i prije dospijea, što otvara izazovne matematičke i praktične probleme. Kao i kod europskih opcija, postoje američke call i američke put opcije.

**Definicija 2.1.** *Američka call opcija (ACO) je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da u bilo kojem vremenskom trenutku  $t \in [0, T]$  kupi financijski instrument po unaprijed dogovorenoj cijeni  $K$ .*

**Definicija 2.2.** *Američka put opcija (APO) je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da u bilo kojem vremenskom trenutku  $t \in [0, T]$  proda financijski instrument po unaprijed dogovorenoj cijeni  $K$ .*

Ukoliko vlasnik opcije u trenutku  $t$  izvrši opciju,  $t$  nazivamo vrijeme izvršenja (eng. *exercise time*). Trenutak  $T$  naziva se vrijeme dospijea (eng. *maturity*), a cijena  $K$  naziva se cijena izvršenja (eng. *strike price*). Iako se američke opcije mogu trgovati vezane za mnogo različitih financijskih instrumenata, mi ćemo se fokusirati na one najtrgovanije - vezane za dionice. Za opisivanje stanja call i put opcija koristimo sljedeće izraze:

- in-the-money (ITM) ako je  $S_t > K$  za call, odnosno  $S_t < K$  za put opciju
- at-the-money (ATM) ako je  $S_t = K$
- out-of-the-money (OTM) ako je  $S_t < K$  za call, odnosno  $S_t > K$  za put opciju.

Za opisivanje stanja tržišta koriste se riječi bull (hrv. *bik*) i bear (hrv. *medvjed*). Naime, bik napada tako da odbacuje žrtvu prema gore pa se taj izraz koristi kada tržište raste. S druge strane, medvjed svoju žrtvu ruši na pod pa se taj izraz koristi kada tržište pada.

Obzirom da se opcijama često trguje na sekundarnom tržištu (eng. *over-the-counter* ili skraćeno *OTC*), bitno je razlikovati plasiranje opcije (eng. *writing*) i prodavanje opcije (eng. *selling*). Plasiranje opcije znači prvotnu prodaju opcije koju uglavnom, ali ne uvijek, izvršava burza. Prodaja opcije podrazumijeva prodaju već plasirane opcije nekom drugom trgovatelju<sup>2</sup> opcijama.

Važno je biti svjestan da opcija nikada ne može koštati više od same dionice jer bi to stvorilo priliku za arbitražu. Ilustrirajmo to Primjerom 2.1.

---

<sup>2</sup>Iako izraz trgovatelj nije standardan u hrvatskom jeziku, koristit ćemo ga iz nekoliko razloga. Naime, u engleskom jeziku se jasno razlikuju pojmovi investor i trader. Investor, odnosno investitor, podrazumijeva osobu koja ulaže novac na dugoročno jer vidi potencijal tvrtke i svojim ulozima pomaže u razvoju tvrtke u zamjenu za potencijalni profit i dividende na koje ima pravo ukoliko barem godinu dana ne proda dionice. S druge strane, trader je osoba koja svoje dionice drži kratkoročno (nekada ni minutu) i njima trguje kada vjeruje da zna u kojem će se smjeru cijena kretati u kratkom roku. Primjerice, investitor nikada neće kupiti dionice tvrtke za koju ne vjeruje da ima potencijal, dok će trader bez razmišljanja trgovati dionicama tvrtki koje nemaju potencijal ukoliko može precizno predvidjeti u kojem smjeru će se cijena kretati. Zbog toga za tradera ne možemo reći da je investitor, a obzirom da se riječ trgovac veže na zaposlenike trgovine (eng. *salesman* ili *saleswoman*), u ovom radu ćemo trader prevesti kao trgovatelj.

**Primjer 2.1.** Neka je u trenutku  $t_0$  cijena neke dionice  $S_{t_0}$ , a cijena call opcije na tu dionicu s cijenom izvršenja  $K$  i dospijecom  $T$  iznosi  $P$  i pri tome vrijedi  $P > S_{t_0}$ . Promotrimo sljedeću strategiju.

$t = t_0$ :

- trgovatelj plasira call opciju po cijeni  $P$
- trgovatelj kupi pripadnu dionicu po cijeni  $S_{t_0}$ .

Pri dospijecu, vlasnik call opcije može opciju izvršiti ili ne, zavisno o cijeni pripadne dionice.

1° Vlasnik izvršava opciju ( $K < S_T$ )

Ako vlasnik odluči izvršiti opciju trgovatelj mu prodaje dionicu po cijeni  $K$ , a njegova zarada je

$$P - S_T + K > K.$$

2° Vlasnik ne izvršava opciju ( $K > S_T$ )

Ako vlasnik ne izvrši opciju to znači da ju ne može izvršiti jer je  $K > S_T$ . Tada je zarada trgovatelja

$$P - S_{t_0} + S_T > S_T.$$

Dakle, trgovatelja portfelj u trenutku  $t_0$  nije koštao ništa (štoviše čak je i zaradio  $P - S_{t_0}$ ), a ukupna zarada u trenutku dospijeca mu je veća od nule. Slijedi da je trgovatelj napravio arbitražu.

Važno je biti svjestan što sve utječe na cijenu opcije, a to je sljedećih šest varijabli:

1. trenutna cijena dionice  $S_t$
2. cijena izvršenja  $K$
3. vrijeme do dospijeca  $T - t$
4. volatilnost cijene dionice  $\sigma$
5. bezrizična kamatna stopa  $r$
6. očekivane dividende tokom trajanja opcije  $d$ .

Utjecaj rasta svake od varijabli na cijenu opcije prikazan je Tablicom 1.

Varijabla	ACO	APO
Trenutna cijena dionice	↑	↓
Cijena izvršenja	↓	↑
Vrijeme do dospijeca	↑	↑
Volatilnost cijene dionice	↑	↑
Bezrizična kamatna stopa	↑	↓
Očekivane dividende	↓	↑

Tablica 1: Utjecaj rasta svake od varijabli na cijenu američkih opcija



Objasnimo detaljnije navedene utjecaje.

- Obzirom da je vrijednost call opcije (ukoliko ju vlasnik izvrši) jednaka  $S_t - K$ , rast cijene dionice rezultirat će povećanjem vrijednosti call opcije. S druge strane, obzirom da je vrijednost put opcije (ukoliko ju vlasnik izvrši) jednaka  $K - S_t$ , rast cijene dionice rezultirat će padom vrijednosti put opcije.
- Veća cijena izvršenja smanjuje vjerojatnost da call opcija postane (ili ostane) in-the-money pa će call opcija biti jeftinija. S druge strane, veća je vjerojatnost da put opcija postane (ili ostane) in-the-money pa će ona biti skuplja. Naime, ako pretpostavimo da je put opcija prvotno out-of-the-money ili at-the-money onda je  $K \leq S_t$  pa vrijedi da što je cijena izvršenja veća to je manja razlika između trenutne cijene dionice i cijene izvršenja, a to je povoljno za vlasnika put opcije. S druge strane, ako je opcija prvotno in-the-money vrijedi  $K > S_t$  pa što je veća cijena izvršenja, to je veća razlika između cijene izvršenja i trenutne cijene dionice, a to je opet povoljno za vlasnika.
- Dulje vrijeme dospijeca daje vlasniku opcije više vremena da opcija postane in-the-money pa ono povećava cijenu opcije u oba slučaja.
- Veća volatilitnost cijene dionice povećava vjerojatnost velikih promjena u cijeni dionice i to u oba smjera što znači da je veća vjerojatnost "probijanja" cijene izvršenja. Posljedično, veća volatilitnost povećava cijenu opcije u oba slučaja.
- Veća bezrizična kamatna stopa čini oročenu štednju primamljivijom pa će investitori dio novca koji imaju u dionicama prebiti u oročenu štednju. Rezultat smanjivanja potražnje za dionicama rezultira padom cijene dionice pa samim time i padom vrijednosti call opcije. Obrnuto, pad cijene dionice prouzročen rastom kamatne stope povoljno će utjecati na cijenu put opcije.
- Rast očekivanih dividendi znači da će kompanija veći dio zarade odvojiti na isplatu investitorima, odnosno da će joj ostati manje kapitala. Posljedica toga je pad vrijednosti kompanije, odnosno cijene pripadnih dionica. Dakle, to će utjecati negativno na vrijednost call opcije, a pozitivno na vrijednost put opcije.

Sljedećim izrazima dane su funkcije zarade američke call, odnosno put opcije s cijenom izvršenja  $K$  u ovisnosti o trenutku izvršenja  $t$ :

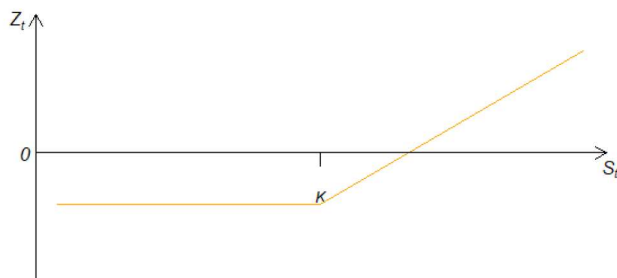
$$C_t^{call} = \max(S_t - K, 0), \quad C_t^{put} = \max(K - S_t, 0).$$

U literaturi se radi jednostavnijeg zapisa često koristi oznaka  $x_+ := \max(x, 0)$  pa prethodne funkcije možemo pisati kao:

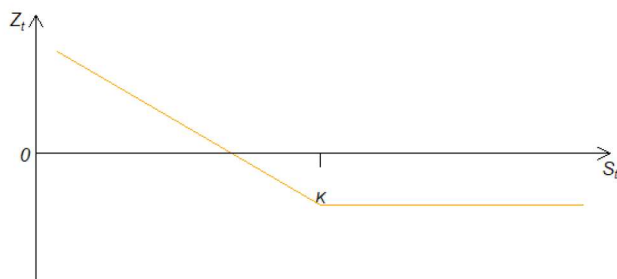
$$C_t^{call} = (S_t - K)_+, \quad C_t^{put} = (K - S_t)_+.$$

**Napomena 2.1.** U ovom dijelu rada ćemo uglavnom vrijednost opcije promatrati kroz njenu funkciju zarade  $C_t$ , ali treba naglasiti da je to vrijednost koju opcija ima za vlasnika u trenutku izvršenja, a ne njena "cijena", odnosno premija. Premija je iznos kojeg kupac opcije inicijalno plaća kako bi si osigurao pravo koje mu opcija jamči. Ako opcija nije in-the-money, vrijednost koju funkcija zarade postiže je 0, ali obzirom da i dalje postoji vjerojatnost da ta opcija do dospijeca postane in-the-money, njena stvarna cijena neće biti 0. Također, osim u obradi opcijskih grka, zanemarivat ćemo da su opcije standardizirani ugovori koji se prodaju na 100 dionica jer se svi rezultati lako dobiju za standardizirane ugovore množenjem sa 100.

Na sljedećim grafovima (Slike 1, 2, 3 i 4) možemo vidjeti kako se kreće zarada pri kupnji, odnosno plasiranju call i put opcije. Da bismo dobili dojam o utjecaju premija na konačnu zaradu, uključit ćemo ih u grafove zarade. Za potrebe grafova, označimo ukupnu zaradu s uračunatim premijama sa  $Z_t$ .

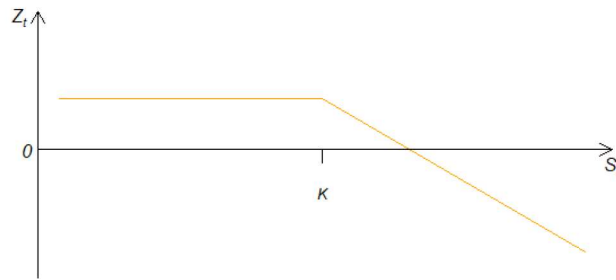


Slika 1: Graf zarade kupljene call opcije s uključenom premijom

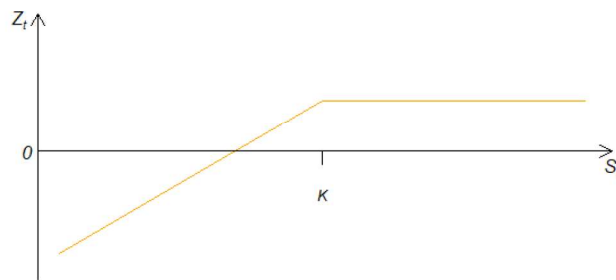


Slika 2: Graf zarade kupljene put opcije s uključenom premijom





Slika 3: Graf zarade plasirane call opcije s uključenom premijom



Slika 4: Graf zarade plasirane put opcije s uključenom premijom

## 2.1 Opcijski "Grci"

Svaki iskusni trgovatelj financijskim instrumentima svjestan je da ne može perfektno predviđati tržište, ali zato može jako dobro procijeniti rizik. Stoga je glavni sastojak dobrog portfelja pravilno upravljanje rizikom. Kada želimo upravljati rizikom u opcijskom portfelju, od velike su nam važnosti opcijski "Grci" (eng. *Greeks*). To su zapravo različite mjere rizika, odnosno osjetljivosti opcije na njene parametre, a označavamo ih grčkim slovima pa ih kraće nazivamo Grci. U ovom radu obradit ćemo sljedeće Grke: delta ( $\delta$ ), gamma ( $\gamma$ ), theta ( $\theta$ ), vega ( $\nu$ ) i rho ( $\rho$ ). Primjetimo da vega nije grčko slovo nego samo naziv za mjeru rizika koji se najvjerojatnije koristi jer je vega vezana za volatilitet dionice.

**Napomena 2.2.** U obradi Grka promatrat ćemo vrijednost opcije u trenutku  $t$  kao premiju na tu opciju u trenutku  $t$ , odnosno promatrat ćemo ju po tržišnim uvjetima. Također, uzimat ćemo u obzir da su u pitanju standardizirani ugovori na 100 dionica.

### 2.1.1 Delta

Delta ( $\delta$ ) predstavlja osjetljivost cijene opcije na promjenu u cijeni pripadne dionice. Drugim riječima, delta nam govori koliko će se cijena opcije promijeniti ukoliko cijena pripadne dionice naraste za 1\$.

**Definicija 2.3.** Neka je  $C = C(t, S_t)$  funkcija zarade američke opcije, a  $S_t = x$  cijena pripadne dionice u trenutku  $t$ . Osjetljivost cijene američke opcije na cijenu pripadne dionice naziva se delta i definira kao

$$\delta = \delta(t, S_t) = \frac{\partial C}{\partial x}.$$

Uočimo da je delta call opcije pozitivan broj, a delta put opcije negativan broj. To naprosto vrijedi jer cijena call opcije raste s rastom cijene pripadne dionice (brojnik i nazivnik su pozitivni), a cijena put opcije raste s padom cijene pripadne dionice (brojnik je pozitivan, a nazivnik negativan). Delta long pozicije u dionici je uvijek 1 jer ako cijena dionice naraste (padne) za 1\$, portfelj s jednom takvom dionicom će također narasti (pasti) za 1\$. Delta short pozicije u dionici je uvijek -1 jer ako cijena dionice naraste (padne) za 1\$, portfelj s jednom takvom dionicom će pasti (narasti) za 1\$.

#### Primjer 2.2. ("Delta hedging")

Pretpostavimo da smo plasirali 30 call opcija (pravo kupnje 3000 dionica) po cijeni od 10\$ koje su vezane za dionicu vrijednu 120\$. Također, neka je  $\delta = 0.4$ . Ukoliko se želimo "ograding" od rizika (eng. hedging), možemo kupiti  $0.4 \cdot 30 \cdot 120 = 1440$  pripadnih dionica. Ukoliko cijena dionice naraste za 1\$, na dionicama ćemo biti u profitu 1440\$. Obzirom da je  $\delta = 0.4$ , cijena opcije će narasti za 0.4\$, što će rezultirati potencijalnim gubitkom od 1440\$ (u slučaju da ju vlasnik izvrši). Dakle, gubitak u plasiranim opcijama smo neutralizirali dobitkom u dionicama. Takvo ograđivanje od rizika naziva se delta hedging.

**Definicija 2.4.** Neka su  $\delta_i$  delte pojedinih pozicija u portfelju, a  $\omega_i$  udjeli pojedinih pozicija u vrijednosti portfelja. Delta portfelja definira se kao

$$\Delta = \sum_i \omega_i \delta_i.$$

Portfelj za koji vrijedi  $\Delta = 0$  naziva se delta neutralan portfelj. Proces rebalansiranja portfelja s ciljem postizanja delta neutralnosti naziva se delta hedging.

Označimo trenutak plasiranja opcija s  $t_0$ , a s  $t_1$  trenutak izvršavanja opcija, odnosno trenutak kada cijena dionice naraste za 1\$. Novčani tok iz Primjera 2.2 možemo prikazati Tablicom 2.

Trenutak	Ukupna zarada
$t_0$	300
$t_1$	0
Ukupno	300

Tablica 2: Novčani tok pri delta hedgingu

Primjerom 2.2 demonstrirali smo delta hedging short pozicije u call opciji. Na analogan način (suprotnom pozicijom u dionicama) se delta hedgingom može ograditi od rizika i long pozicija u call opciji te long i short pozicija u put opciji. Obratno, različitim pozicijama u

opcijama može se ograditi od rizika long i short pozicije u dionici.

Nedostatak delta hedginga proizlazi iz činjenice da je delta funkcija vremena. Naime, kako se delta mijenja kroz vrijeme, tako će investitor morati dodatno rebalansirati poziciju u dionicama, što može biti poprilično skupo.

### 2.1.2 Gamma

Kao što je akceleracija brzina promjene brzine, tako je i gamma zapravo delta delte jer predstavlja osjetljivost delte na promjenu u cijeni pripadne dionice.

**Definicija 2.5.** *Neka je  $C = C(t, S_t)$  funkcija zarade američke opcije, a  $S_t = x$  cijena pripadne dionice u trenutku  $t$ . Osjetljivost delte američke opcije na promjenu u cijeni pripadne dionice naziva se gamma i definira kao*

$$\gamma = \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}.$$

Kupljene opcije, bilo da su call ili put, imaju pozitivnu gammu, dok plasirane opcije imaju negativnu gammu. Uglavnom će u praksi vrijediti da je  $\gamma \in [-1, 1]$ , ali postoje rijetki slučajevi u kojima vrijednosti gamme mogu biti i ekstremnije.

**Definicija 2.6.** *Neka je  $\Pi = \Pi(t, S_t)$  funkcija zarade portfelja  $\Pi$ , a  $S_t = x$  cijena pripadne dionice u trenutku  $t$ . Gamma portfelja definira se kao*

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial^2 x}.$$

*Portfelj za koji vrijedi  $\Gamma = 0$  naziva se gamma neutralan portfelj.*

#### **Primjer 2.3.** (*"Delta-gamma hedging"*)

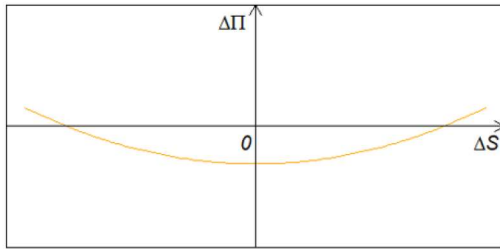
*Nastavno na Primjer 2.2, pretpostavimo da naš portfelj dovodimo u stanje delta neutralnosti nekom ne tako čestom frekvencijom, primjerice jednom mjesečno. Ukoliko smo prije nekoliko dana rebalansirali portfelj do delta neutralnosti, ali je u međuvremenu portfelj značajno otklonuo od nje, to znači da naš portfelj ima veliku (po apsolutnoj vrijednosti) gammu. U tom kontekstu, gamma se može shvatiti kao greška u procjeni delte. Dakle, dovođenjem delta neutralnog portfelja u stanje gamma neutralnosti možemo ispraviti greške u delta hedgingu.*

**Definicija 2.7.** *Portfelj za koji vrijedi da je  $\Delta = 0$  i  $\Gamma = 0$  naziva se delta-gamma neutralan portfelj. Proces rebalansiranja delta neutralnog portfelja s ciljem postizanja gamma neutralnosti naziva se delta-gamma hedging.*

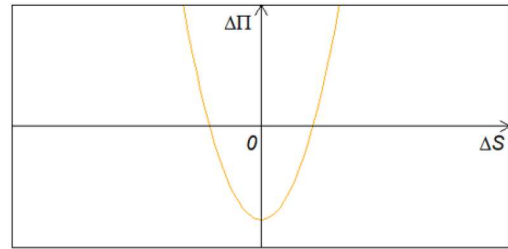
Možemo zaključiti da će portfelj s velikom gammom biti potrebno češće rebalansirati da bi se doveo do stanja delta neutralnosti, nego što će to biti potrebno za portfelj s malom gammom. Pogledajmo na Slici 5 kako se mijenja vrijednost portfelja obzirom na promjene u cijeni pripadne dionice kada su u pitanju različiti gamme.



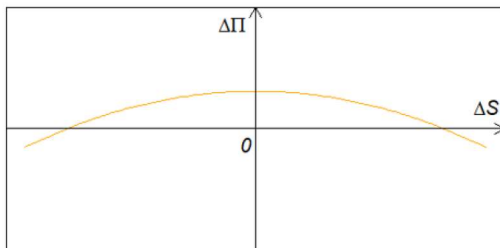
a) mala pozitivna gamma



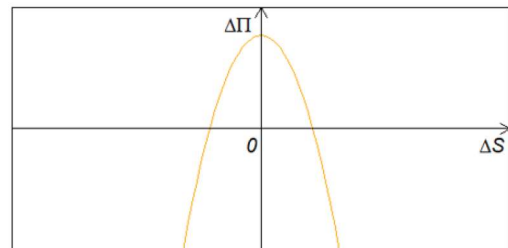
b) velika pozitivna gamma



c) mala negativna gamma



c) velika negativna gamma



Slika 5: Grafovi promjene vrijednosti delta neutralnog portfelja s različitim gammama

### 2.1.3 Theta

Theta je osjetljivost opcije (portfelja) u odnosu na vrijeme do dospijeca. Theta nam govori koliko opcija (portfelj) izgubi na vrijednosti u jednoj vremenskoj jedinici (najčešće danu) uz nepromijenjene ostale parametre.

**Definicija 2.8.** Neka je  $C = C(t, S_t)$  funkcija zarade američke opcije, a  $S_t = x$  cijena pripadne dionice u trenutku  $t$ . Osjetljivost cijene američke opcije na vrijeme naziva se theta i definira kao

$$\theta = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Theta portfelja  $\Pi$  definira se kao

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Theta američke opcije je uglavnom negativna jer uz nepromijenjene ostale parametre vrijednost opcije pada s vremenom. To je zato što opcija ima manje vremena za završiti in-the-money.

### 2.1.4 Veza između delte, gamme i thete u uvjetima Black-Scholes-Mertonovog modela

Prisjetimo se Black-Scholes-Mertonove diferencijalne jednačbe. Neka je  $\Pi$  vrijednost portfelja koji se sastoji od dionice i opcije na tu dionicu,  $S_t$  cijena dionice u portfelju,  $\sigma$  volatilitet cijene dionice,  $r$  bezrizična kamatna stopa i  $t$  vrijeme. Black-Scholes-Mertonov model dan je sljedećom diferencijalnom jednačbom:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS_t \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = r\Pi.$$

Uočimo da su izrazi pod parcijalnim derivacijama redom  $\Theta$ ,  $\Delta$  i  $\Gamma$  pa možemo pisati

$$\Theta + rS_t\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\Gamma = r\Pi.$$

Slijedi da za delta neutralan portfelj vrijedi

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\Gamma = r\Pi,$$

dok za delta-gamma neutralan portfelj vrijedi

$$\Theta = r\Pi.$$

### 2.1.5 Vega i Rho

Volatilnost  $\sigma$  i kamatna stopa  $r$  su u stvarnosti funkcije vremena pa će se i cijena opcija mijenjati ovisno o promjeni u volatilnosti odnosno kamatnoj stopi. Zato ćemo pretpostavljati da je  $C = C(t, S_t, \sigma_t, r_t)$

**Definicija 2.9.** *Neka je  $C = C(t, S_t, \sigma_t, r_t)$  funkcija zarade američke opcije,  $S_t$  cijena pripadne dionice u trenutku  $t$ ,  $\sigma_t$  volatilnost cijene dionice u trenutku  $t$  i  $r_t$  kamatna stopa u trenutku  $t$ . Osjetljivost cijene američke opcije na promjene u volatilnosti naziva se vega i definira kao*

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma_t}.$$

Vega portfelja  $\Pi$  definira se kao

$$V = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_t}.$$

Osjetljivost cijene američke opcije na promjene u kamatnoj stopi naziva se rho i definira kao

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r_t}.$$

Rho portfelja  $\Pi$  definira se kao

$$R = \frac{\partial \Pi}{\partial r_t}.$$

U praksi se rijetko radi vega hedging jer je teško izvediv pa se na taj dio nećemo fokusirati u ovom radu. Također, obzirom da se rho hedging obično prakticira drugim financijskim instrumentima, nećemo se fokusirati niti na taj dio.

## 2.2 Opcijske strategije

U ovom poglavlju obradit ćemo razne opcijske strategije koje mogu dati predvidive rezultate ograničavajući gubitak, ali često i posljedično ograničavajući profit. Zaradu strategije prikazivat ćemo tablicama koje će predstavljati pripadnu po dijelovima zadanu funkciju zarade. Radi jednostavnosti, u izračun nećemo uzeti u obzir premije, ali ćemo se osvrnuti na nju i uključiti je u grafove zarada.

### 2.2.1 Osnovne strategije

Najosnovnije opcijske strategije su one koje podrazumijevaju trgovanje jednom opcijom na zadani instrument i samim instrumentom. Pod najosnovnije strategije spadaju pokriveni (eng. *covered*) call i put te zaštitni (eng. *protective*) call i put.

**Pokriveni call** je strategija u kojoj trgovatelj opcijama plasira call opciju kada već ima otvorenu long poziciju u pripadnoj dionici. Tom se strategijom trgovatelj štiti od situacije u kojoj se vlasnik call opcije odluči izvršiti opciju kod trgovatelja jer će trgovatelj imati dionicu za prodati kako bi ispunio uvjete koje je dao vlasniku call opcije.

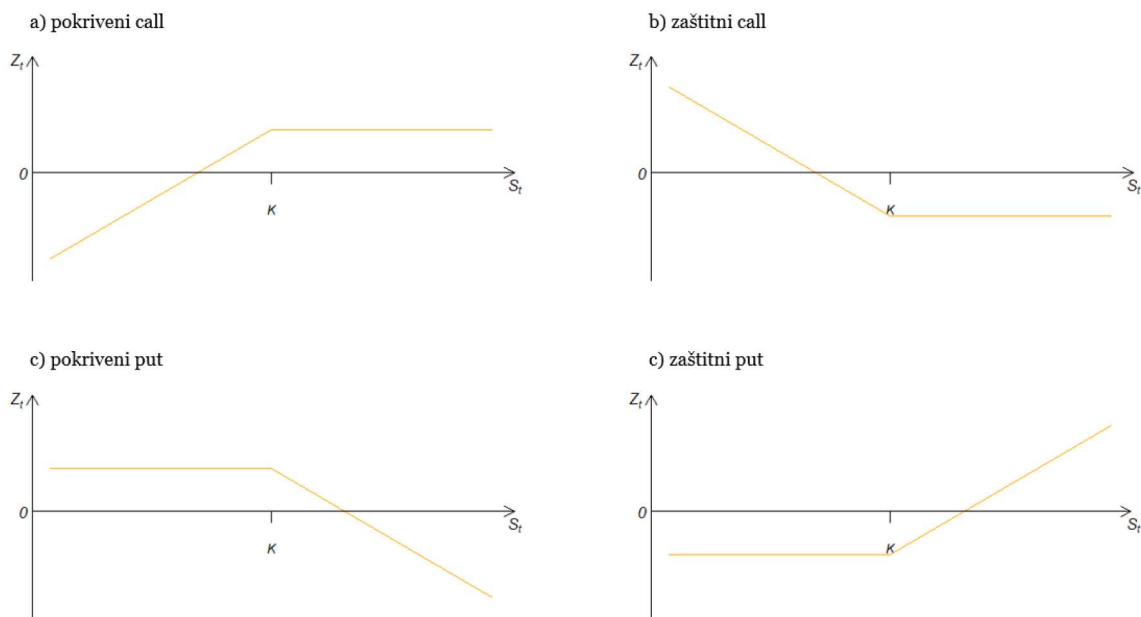
Suprotno od pokrivenog calla je **zaštitni call**, a radi se o strategiji koja podrazumijeva kupnju call opcije kada trgovatelj već ima otvorenu short poziciju u pripadnoj dionici. Tom se strategijom trgovatelj štiti u slučaju rasta cijene dionice na kojoj ima otvorenu short poziciju jer mu put opcija daje pravo da proda tu dionicu po većoj cijeni od trenutne.

**Pokriveni put** je strategija u kojoj trgovatelj plasira put opciju kada već ima otvorenu short poziciju u pripadnoj dionici. Koristeći pokriveni put, ukoliko se vlasnik put opcije odluči ju izvršiti, trgovatelj može otkupljenu dionicu vratiti burzi kako bi zatvorio svoju short poziciju.

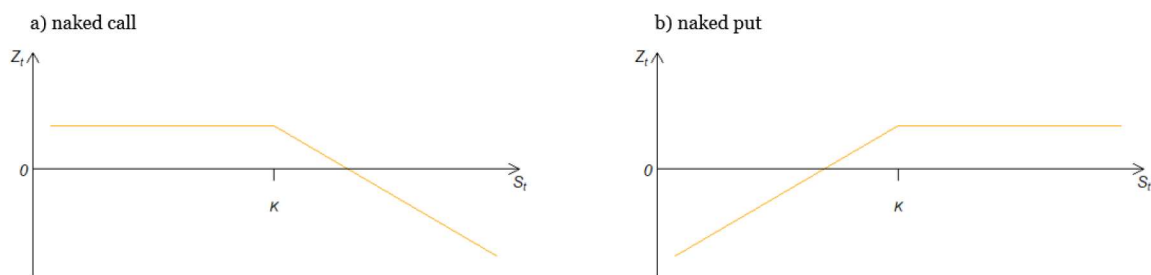
Suprotno od pokrivenog puta je **zaštitni put**, a to je strategija u kojoj trgovatelj već ima long poziciju u dionici i kupi put opciju. Takva strategija trgovatelja štiti od pada cijene pripadne dionice jer mu put opcija garantira da ju proda po cijeni većoj od trenutne.

Strategije u kojima trgovatelj plasira call, odnosno put opciju bez da istovremeno ima long, odnosno short poziciju u pripadnoj dionici nazivaju se **nepokriveni** (eng. *naked* ili *uncovered*) call, odnosno put. Nepokrivenne strategije su vrlo rizične jer imaju ograničen potencijalni profit, a neograničen potencijalni gubitak u slučaju nepokrivenog calla i velik potencijalni gubitak u slučaju nepokrivenog puta. Maksimalni dobitak je upravo premija za plasiranje i postiže se u slučaju da vlasnik opcije istu ne izvrši. Maksimalni gubitak kod nepokrivenog calla je teorijski neograničen jer cijena dionice teoretski može neograničeno rasti (do  $+\infty$ ), a obzirom da trgovatelj ne posjeduje pripadnu dionicu, morat će ju kupiti po neograničeno visokoj cijeni i prodati vlasniku opcije po puno manjoj cijeni. S druge strane, maksimalni gubitak kod nepokrivenog puta nije neograničen jer cijena dionice može pasti najviše na nulu, odnosno 100% od trenutne cijene pa će u slučaju da vlasnik opcije odluči izvršiti opciju trgovatelj morati od njega kupiti bezvrijednu dionicu po ranije dogovorenoj cijeni izvršenja, a ništa od tog troška se neće moći pokriti prodajom te dionice jer joj je vrijednost nula. Na Slici 6 prikazani su grafovi zarade za sve spomenute opcijske strategije. Uočimo da graf zarade zaštitnog call-a pod b) odgovara grafu zarade kupljene put opcije. S druge strane, graf zarade zaštitnog puta pod d) odgovara grafu zarade kupljene call opcije. Naravno, kada kažemo da neki graf odgovara drugom grafu, ne mislimo da bi se pod istim parametrima ti grafovi nužno preklapili, već bi se mogli dobiti jedan iz drugog vertikalnom translacijom. Pogledajmo sada na Slici 7 grafove naked strategija. Uočimo da graf zarade nepokrivenog put-a odgovara grafu pokrivenog call-a, dok graf naked call-a odgovara grafu pokrivenog put-a.





Slika 6: Grafovi zarade osnovnih strategija



Slika 7: Grafovi zarade nepokrivenih strategija

### 2.2.2 Strategije razmaka

Strategije razmaka (eng. *spread*) koriste se u svrhu ograničavanja potencijalnog dobitka i gubitka fiksnom vrijednošću. Takve strategije podrazumijevaju trgovanje više istih opcija vezanih na istu dionicu. **Bull spread** je strategija u kojoj trgovatelj istovremeno kupi i plasira call opcije s istim dospeljećem, ali tako da je cijena izvršenja plasirane opcije  $K_p$  veća od cijene izvršenja kupljene opcije  $K_k$ . Tablica 3 opisuje isplatu ovisno o cijeni u trenutku izvršenja  $t$ .

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom ACO	Zarada plasiranom ACO	Ukupna zarada
$S_t \leq K_k$	0	0	0
$K_k < S_t < K_p$	$S_t - K_k$	0	$S_t - K_k$
$S_t \geq K_p$	$S_t - K_k$	$-(S_t - K_p)$	$K_p - K_k$

Tablica 3: Zarada bull spread strategije koristeći američku call opciju

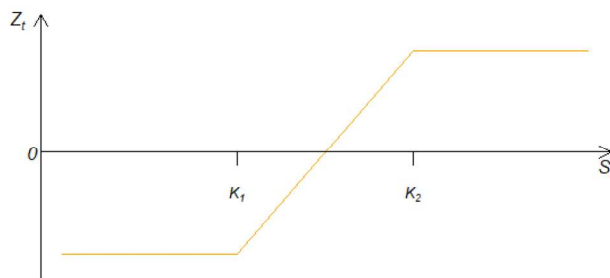
Bull spread se također može dobiti i put opcijama pri čemu opet mora vrijediti  $K_k \leq K_p$ . U

tom slučaju, zarada je prikazana Tablicom 4.

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom APO	Zarada plasiranom APO	Ukupna zarada
$S_t \leq K_k$	$K_k - S_t$	$-(K_p - S_t)$	$-(K_p - K_k)$
$K_k < S_t < K_p$	0	$-(K_p - S_t)$	$-(K_p - S_t)$
$S_t \geq K_p$	0	0	0

Tablica 4: Zarada bull spread strategije koristeći američku put opciju

Na prvu ruku izgleda kao da je trgovatelj u najboljem slučaju na nuli, a u najgorem slučaju u gubitku, ali zarada se krije u premijama na opcije. Naime, obzirom da put opcija s većom cijenom izvršenja više košta nego ona s manjom cijenom izvršenja, trgovatelj će s razlikom u premijama zaraditi u slučaju  $S_t \geq K_p$ , a u ostalim slučajevima će umanjiti gubitak. Uglavnom se bull put spread strategija koristi kada se očekuje samo blagi rast tržišta. Na Slici 8 prikazan je graf zarade bull spread strategije.



Slika 8: Graf zarade bull spread strategije s uključenom premijom

Za razliku od bull spread strategija kojima trgovatelji pretpostavljaju rast tržišta, **bear spread** strategije pretpostavljaju pad tržišta. Bear spread također se može kreirati put opcijama i call opcijama. Bear put spread je strategija u kojoj trgovatelj istovremeno kupi i plasira put opciju, pri čemu je cijena izvršenja plasirane put opcije manja nego cijena izvršenja kupljene put opcije. Tablica 5 prikazuje zaradu korištenjem bear put strategije.

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom APO	Zarada plasiranom APO	Ukupna zarada
$S_t \leq K_p$	$K_k - S_t$	$-(K_p - S_t)$	$K_k - K_p$
$K_p < S_t < K_k$	$K_k - S_t$	0	$K_k - S_t$
$S_t \geq K_k$	0	0	0

Tablica 5: Zarada bear spread strategije koristeći američku put opciju

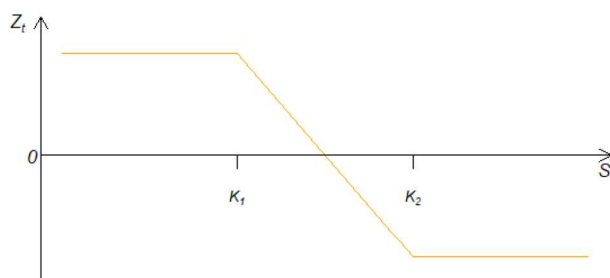
Bear spread strategija može se dobiti i call opcijama, a slično kao kod bull put spread strategije, bear call spread strategija se uglavnom koristi kada se očekuje blagi pad tržišta, a



zarada također leži u premiji. Ona se postiže istovremenom kupnjom i plasiranjem call opcija, pri čemu kupljena call opcija ima veću cijenu izvršenja. Tablicom 6 prikazana je zarada korištenjem bear call spread strategije. Na Slici 9 prikazan je graf zarade bear spread strategija.

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom ACO	Zarada plasiranom ACO	Ukupna zarada
$S_t \leq K_p$	0	0	0
$K_p < S_t < K_k$	0	$-(S_t - K_p)$	$-(S_t - K_p)$
$S_t \geq K_k$	$S_t - K_k$	$S_t - K_p$	$-(K_k - K_p)$

Tablica 6: Zarada bear spread strategije koristeći američku call opciju



Slika 9: Graf zarade bear spread strategije s uključenom premijom

Strategija **leptir razmaka** (eng. *butterfly spread*) podrazumijeva trgovanje opcijama s 3 različite cijene izvršenja. Najčešće se koriste cijene koje zadovoljavaju sljedeću jednadžbu:

$$K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3),$$

pri čemu je:

- $K_1$  - cijena koja je niža od trenutne cijene dionice,
- $K_2$  - trenutna cijena dionice,
- $K_3$  - cijena koja je viša od trenutne cijene dionice.

Iako odabir cijena može biti drugačiji, mi ćemo pretpostaviti da će trgovatelj koristiti upravo taj odabir cijena. Ova strategija je najprofitabilnija ukoliko se cijena dionice ne pomakne puno od  $K_2$ . Veći skokovi ili padovi u cijeni dionice mogu rezultirati gubitkom koji je fiksni kao što je i profit. Butterfly spread strategija se kao i ostale strategije može kreirati na više načina.

**Long call butterfly spread** je strategija u kojoj trgovatelj opcijama plasira dvije call opcije s cijenom  $K_2$  i istovremeno kupi po jednu call opciju s cijenama  $K_1$  i  $K_3$ . Tablicom 7 prikazana je zarada long call butterfly spread strategije.

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom ACO ( $K_1$ )	Zarada kupljenom ACO ( $K_3$ )	Zarada plasiranim ACO ( $K_2$ )	Ukupna zarada
$S_t \leq K_1$	0	0	0	0
$K_1 < S_t \leq K_2$	$S_t - K_1$	0	0	$S_t - K_1$
$K_2 < S_t < K_3$	$S_t - K_1$	0	$-2(S_t - K_2)$	$K_3 - S_t$
$S_t \geq K_3$	$S_t - K_1$	$S_t - K_3$	$-2(S_t - K_2)$	0

Tablica 7: Zarada long call butterfly spread strategije

Izračun za zadnji redak je sljedeći:

$$S_t - K_1 + S_t - K_3 - 2(S_t - K_2) = 2S_t - (K_1 + K_3) - 2(S_t - K_2) \stackrel{K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3)}{=} 0.$$

**Long put butterfly spread** je strategija u kojoj trgovatelj opcijama plasira dvije put opcije s cijenom izvršenja  $K_2$  i istovremeno kupi po jednu put opciju s cijenama izvršenja  $K_1$  i  $K_3$ . Tablicom 8 prikazana je zarada long put butterfly spread strategije.

Pokažimo da je ukupna zarada u prvom retku zaista 0.

$$K_1 - S_t + K_3 - S_t - 2(K_2 - S_t) \stackrel{K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3)}{=} 2K_2 - 2S_t - 2K_2 + 2S_t = 0.$$

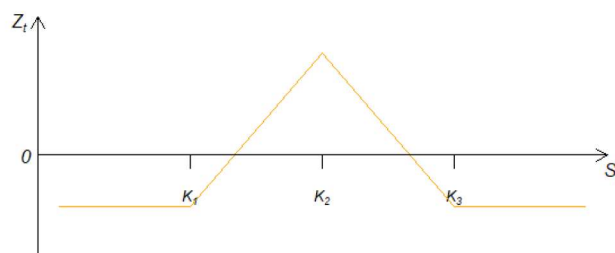
Za drugi redak pokažimo da je zaista u pitanju zarada, a ne gubitak.

$$K_3 - S_t - 2(K_2 - S_t) = K_3 - 2K_2 + S_t \stackrel{S_t > K_1}{>} K_3 + K_1 - 2K_2 \stackrel{K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3)}{=} 2K_2 - 2K_2 = 0.$$

$$\Rightarrow K_3 - 2K_2 + S_t > 0.$$

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom APO ( $K_1$ )	Zarada kupljenom APO ( $K_3$ )	Zarada plasiranim APO ( $K_2$ )	Ukupna zarada
$S_t \leq K_1$	$K_1 - S_t$	$K_3 - S_t$	$-2(K_2 - S_t)$	0
$K_1 < S_t \leq K_2$	0	$K_3 - S_t$	$-2(K_2 - S_t)$	$K_3 - 2K_2 + S_t$
$K_2 < S_t < K_3$	0	$K_3 - S_t$	0	$K_3 - S_t$
$S_t \geq K_3$	0	0	0	0

Tablica 8: Zarada long put butterfly spread strategije



Slika 10: Graf zarade long butterfly strategije s uključenom premijom

Slikom 10 prikazan je graf zarade long butterfly strategija.

**Short call butterfly spread** je strategija u kojoj trgovatelj opcijama kupi dvije call opcije s cijenom  $K_2$  i istovremeno plasira po jednu call opciju s cijenama  $K_1$  i  $K_3$ . Tablicom 9 prikazana je zarada short call butterfly spread strategije.

**Short put butterfly spread** je strategija u kojoj trgovatelj opcijama kupi dvije put opcije s cijenom izvršenja  $K_2$  i istovremeno plasira po jednu put opciju s cijenama izvršenja  $K_1$  i  $K_3$ . Tablicom 10 prikazana je zarada short put butterfly spread strategije.

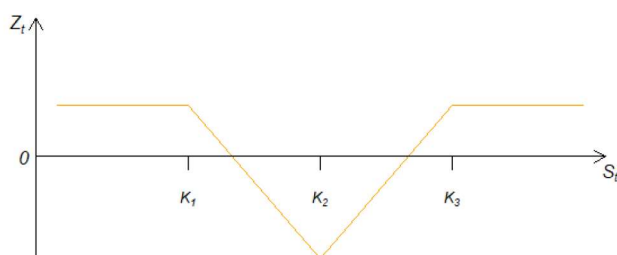
Trenutna cijena dionice	Zarada plasiranom ACO ( $K_1$ )	Zarada plasiranom ACO ( $K_3$ )	Zarada kupljenim ACO ( $K_2$ )	Ukupna zarada
$S_t \leq K_1$	0	0	0	0
$K_1 < S_t \leq K_2$	$-(S_t - K_1)$	0	0	$-(S_t - K_1)$
$K_2 < S_t < K_3$	$-(S_t - K_1)$	0	$2(S_t - K_2)$	$S_t + K_1 - 2K_2$
$S_t \geq K_3$	$-(S_t - K_1)$	$-(S_t - K_3)$	$2(S_t - K_2)$	0

Tablica 9: Zarada short call butterfly spread strategije

Trenutna cijena dionice	Zarada plasiranom APO ( $K_1$ )	Zarada plasiranom APO ( $K_3$ )	Zarada kupljenim APO ( $K_2$ )	Ukupna zarada
$S_t \leq K_1$	$-(K_1 - S_t)$	$-(K_3 - S_t)$	$2(K_2 - S_t)$	0
$K_1 < S_t \leq K_2$	0	$-(K_3 - S_t)$	$2(K_2 - S_t)$	$-(K_3 - 2K_2 + S_t)$
$K_2 < S_t < K_3$	0	$-(K_3 - S_t)$	0	$-(K_3 - S_t)$
$S_t \geq K_3$	0	0	0	0

Tablica 10: Zarada short put butterfly spread strategije

Obzirom da su izračuni analogni kao i za long put butterfly spread, ali s obrnutim predznakom, nećemo ih provoditi. Slikom 11 dan je graf zarade short butterfly strategija.



Slika 11: Graf zarade short butterfly strategije s uključenom premijom

**Iron butterfly spread** (hrv. *željezni leptir*) je strategija u kojoj trgovatelj opcijama istovremeno kupi put opciju s cijenom izvršenja  $K_1$ , plasira po jednu call i jednu put opciju s cijenom izvršenja  $K_2$  te kupi call opciju s cijenom izvršenja  $K_3$ . Tablicom 11 prikazana je zarada iron butterfly spread strategijom.

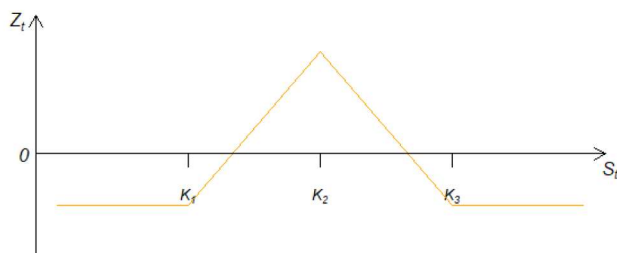
Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom APO ( $K_1$ )	Zarada plasiranom APO ( $K_2$ )	Zarada plasiranom ACO ( $K_2$ )	Zarada kupljenom ACO ( $K_3$ )	Ukupna zarada
$S_t \leq K_1$	$K_1 - S_t$	$-(K_2 - S_t)$	0	0	$-(K_2 - K_1)$
$K_1 < S_t \leq K_2$	0	$-(K_2 - S_t)$	0	0	$-(K_2 - S_t)$
$K_2 < S_t < K_3$	0	0	$-(S_t - K_2)$	0	$-(S_t - K_2)$
$S_t \geq K_3$	0	0	$-(S_t - K_2)$	$S_t - K_3$	$-(K_3 - K_2)$

Tablica 11: Zarada iron butterfly spread strategije

Obzirom da je ukupna zarada u svim slučajevima negativna, postavlja se pitanje zašto bi netko uopće koristio ovu strategiju. Odgovor leži u dvije stvari, premijama i činjenici da se butterfly spread strategije koriste kada se očekuje da cijena pripadne dionice neće puno



odstupati od trenutne cijene. Naime, kao što smo već spomenuli, premije na call opcije rastu s manjom cijenom izvršenja, dok premije na put opcije rastu s većom cijenom izvršenja. Obzirom da je cijena izvršenja kupljene call opcije veća od cijene izvršenja plasirane call opcije, premija koju trgovatelj dobije za plasiranu call opciju je veća od premije koju plaća za kupljenu pa je zaradio na razmaku između call opcija. Također, obzirom da je cijena izvršenja kupljene put opcije manja od cijene izvršenja plasirane put opcije, razlika u premiji opet ide u korist trgovatelju. S druge strane, ukoliko se ostvari očekivanje da će biti  $S_t \approx K_2$ , to znači da će ukupna zarada u drugom i trećem retku biti  $\approx 0$ , dok će trgovatelj zadržati razliku u premijama. Slikom 12 prikazana je zarada iron butterfly strategijom. Uočimo da se izgled grafa podudara s onim long butterfly strategije.



Slika 12: Graf zarade iron butterfly strategije s uključenom premijom

### 2.2.3 Kombinirane strategije

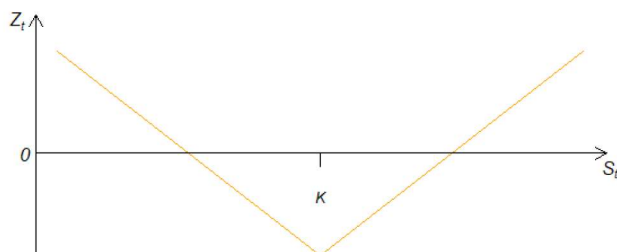
Kombinirane strategije su strategije koje se mogu dobiti kombinacijom nekih od strategija koje smo do sada obradili. Postoji zaista mnogo kombiniranih strategija, koje se opet mogu dobiti na različite načine slično kao butterfly spread strategije. To su primjerice strangle strategije, straddle strategije, strip i strap strategije itd. Zato ćemo obraditi samo one inačice koje se najčešće koriste, a to su long straddle, long strip, long strap i long strangle.

**Long straddle** je strategija kojom se može profitirati u periodima visoke volatilnosti, odnosno kada trgovatelj očekuje velike promjene u cijeni dionice, ali nije siguran u kojem smjeru. Takvu strategiju dobivamo kupnjom call i put opcije s istom cijenom izvršenja i dospjećem. Tablicom 12 prikazana je zarada long straddle strategijom.

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom ACO	Zarada kupljenom APO	Ukupna zarada
$S_t \leq K$	0	$K - S_t$	$K - S_t$
$S_t > K$	$S_t - K$	0	$S_t - K$

Tablica 12: Zarada long straddle strategije

Ova tablica nalaže da ovakva strategija uvijek doprinosi profitom, no ne smijemo zaboraviti na premije. Naime, ukoliko se cijena dionice ne pomakne dovoljno značajno, zarada neće biti dovoljna da pokrije plaćene premije pa će trgovatelj biti u gubitku. Slikom 13 dan je graf zarade long straddle strategije.



Slika 13: Graf zarade long straddle strategije s uključenom premijom

**Long strip** i **long strap** strategije su slične long straddle strategiji. Naime, one se također koriste u periodima velike volatilnosti, ali onda kada trgovatelj vjeruje da je vjerojatnost rasta cijene ipak veća od vjerojatnosti pada cijene ili obrnuto. Kada trgovatelj vjeruje da je veća vjerojatnost naglog pada cijene koristit će strip strategiju koju kreira tako da kupi jednu call i dvije put opcije s jednakom cijenom izvršenja i istim dospijećem. S druge strane, kada trgovatelj vjeruje da je veća vjerojatnost da cijena naglo naraste koristit će strap strategiju koju kreira kupnjom dvije call opcije i jedne put opcije s jednakom cijenom izvršenja i istim dospijećem. Tablicom 13 prikazana je zarada long strip, a Tablicom 14 long strap strategije.

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom ACO	Zarada kupljenim APO	Ukupna zarada
$S_t \leq K$	0	$2(K - S_t)$	$2(K - S_t)$
$S_t > K$	$S_t - K$	0	$S_t - K$

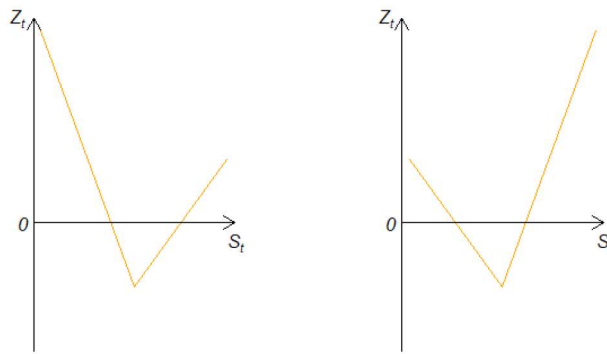
Tablica 13: Zarada long strip strategije

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenim ACO	Zarada kupljenom APO	Ukupna zarada
$S_t \leq K$	0	$K - S_t$	$K - S_t$
$S_t > K$	$2(S_t - K)$	0	$2(S_t - K)$

Tablica 14: Zarada long strap strategije

Slikom 14 prikazani su grafovi zarada strip i strap strategija.

**Long strangle** je također strategija slična long straddle strategiji i koristi se u periodima



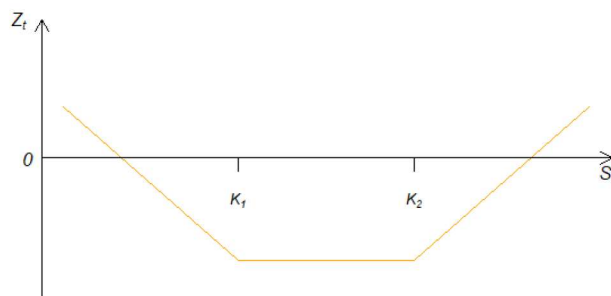
Slika 14: Grafovi zarade strip (lijevo) i strap (desno) strategije s uključenom premijom

visoke volatilnosti. Kreira se kupnjom put opcije s cijenom izvršenja  $K_1$  i call opcije s cijenom izvršenja  $K_2$ , pri čemu je  $K_1 < K_2$ , a dospijeća su jednaka. Long strangle strategija će za isti profit kao long straddle zahtijevati veće pomake u cijeni, ali će rezultirati manjim gubitkom ukoliko se cijena ne pomakne dovoljno. Tablicom 15 dana je zarada long strangle strategijom.

Trenutna cijena dionice	Zarada kupljenom APO ( $K_1$ )	Zarada kupljenom ACO ( $K_2$ )	Ukupna zarada
$S_t \leq K_1$	$K_1 - S_t$	0	$K_1 - S_t$
$K_1 < S_t < K_2$	0	0	0
$S_t \geq K_2$	0	$S_t - K_2$	$S_t - K_2$

Tablica 15: Zarada long strangle strategije

Slikom 15 dan je graf zarade long strangle strategije.



Slika 15: Graf zarade long strangle strategije s uključenom premijom



### 3. Optimalno vrijeme izvršenja

Obzirom da se američke opcije mogu izvršiti u bilo kojem trenutku do dospijea, postavlja se pitanje kada je idealno izvršiti opciju. Taj problem se svodi na problem optimalnog vremena zaustavljanja. Da bismo se mogli baviti problemom optimalnog vremena zaustavljanja u kontekstu američkih opcija, pretpostavit ćemo da se nalazimo u uvjetima Black-Scholes-Mertonovog modela tržišta bez arbitraže. Definirajmo prvo vrijeme zaustavljanja.

**Definicija 3.1.** *Neka je dan filtrirani vjerojatnosni prostor  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  i na njemu slučajna varijabla  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ . Kažemo da je  $\tau$  Markovljevo vrijeme ako za svaki  $t \geq 0$  vrijedi*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

*Markovljevo vrijeme  $\tau$  naziva se vrijeme zaustavljanja ako je  $\tau < \infty$ .*

Uočimo da uvjet  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  zapravo podrazumijeva da događaj  $\{\tau \leq t\}$  ovisi samo o informacijama dostupnim do trenutka  $t$ . Promjenu cijene dionica promatrat ćemo kroz stohastičku diferencijalnu jednadžbu za geometrijsko Brownovo gibanje

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad t \geq 0.$$

Dakle, pretpostavljamo da promjenu u cijeni dionice uzrokuje vrijeme i promjene u pripadnom Brownovom gibanju. Faktor promjene kroz vrijeme je bezrizična kamatna stopa  $r$ , dok je faktor promjene u Brownovom gibanju volatilitet cijene dionice  $\sigma$ . U kontekstu američkih opcija, optimalno vrijeme zaustavljanja zvat ćemo optimalno vrijeme izvršenja.

Neka je dana američka opcija s funkcijom zarade  $C = C(t, S_t)$  na dionicu s cijenom  $S_t$ . Ono što nas zapravo zanima je optimalna zarada od izvršenja opcije, koju ćemo označiti  $V(t, x)$ . Uz oznake koje smo koristili do sada, optimalnu zaradu od izvršenja možemo definirati kao supremum sadašnje vrijednosti očekivane zarade od izvršenja:

$$V(t, x) = \sup_{t \leq \tau \leq T} E_{t,x} [e^{-r(\tau-t)} C(\tau, S_\tau)].$$

Sadašnja vrijednost očekivane zarade od izvršenja zapravo predstavlja cijenu (premiju) takve opcije u trenutku  $t$ .

**Definicija 3.2.** *Neka je dana američka opcija s funkcijom zarade  $C(t, S_t)$  na dionicu s cijenom  $S_t$ . Optimalno vrijeme izvršenja dane opcije promatrane u trenutku  $t$  definira se kao*

$$\tau_t^* = \inf\{s : s \in [t, T], C(s, S_s) = V(s, S_s)\}.$$

**Napomena 3.1.** *Uočimo da optimalno vrijeme izvršenja ovisi o trenutku promatranja  $t$ . To zapravo proizlazi iz činjenice da svako predviđanje cijene ovisi o do tog trenutka dostupnim informacijama. Primjerice, danas možemo očekivati da će u idućih tjedan dana cijena dionice narasti za određeni postotak, ali ako se sutra dogodi neki veći negativni makroekonomski šok, predviđat ćemo znatno nižu cijenu nego ranije.*

Po definiciji  $\tau_t^*$  vrijedi da je  $C(s, S_s) < V(s, S_s)$  za svaki  $s < \tau_t^*$  (zarada opcije je manja od optimalne zarade u svakom trenutku prije optimalnog vremena izvršenja) pa slijedi da za svaki  $\tau \in [t, T]$  vrijedi da je  $C(\tau, S_\tau) \leq V(\tau, S_\tau)$  (maksimalna zarada opcije je upravo optimalna zarada).

Definirajmo proces  $Y = e^{-rt}V(t, S_t)$ . Itôva formula za  $Y$  daje

$$dY = e^{-rt}(-r + \lambda_t)V(t, S_t)dt + e^{-rt}\sigma \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t = -re^{-rt}V(t, S_t)dt + e^{-rt}\lambda_t V(t, S_t)dt + e^{-rt}\sigma \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t,$$

pri čemu za operator  $\lambda_t$  s kojim djelujemo na  $V$  vrijedi

$$\lambda_t = \frac{\partial}{\partial t} + rS_t \frac{\partial}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2}.$$

Rješenje ove stohastičke diferencijalne jednačbe je

$$e^{-r(t+h)}V(t+h, S_{t+h}) = e^{-rt}V(t, x) + \int_t^{t+h} e^{-rs}(-r + \lambda_s)V(s, S_s)ds + \int_t^{t+h} e^{-rs}\sigma \frac{\partial V}{\partial x} dW_s.$$

Pomnožimo sada cijelu jednačbu s  $e^{rt}$  te uzmimo očekivanje da dobijemo

$$e^{-rh}E_{t,x}[V(t+h, S_{t+h})] = V(t, x) + E_{t,x} \left[ \int_t^{t+h} e^{-r(s-t)}(-r + \lambda_s)V(s, S_s)ds \right].$$

Sada problem dijelimo na dva slučaja, prvi da je vrijeme optimalnog izvršavanja u budućnosti  $[V(t, S_t) > C(t, S_t)]$  i drugi da je to sada  $[V(t, S_t) = C(t, S_t)]$ .

Ako pretpostavimo da svoja očekivanja u odnosu na dostupne informacije prilagođavamo gotovo trenutno, možemo pustiti da  $h$  teži u nulu pa dobivamo

$$V(t, x) = e^{-rh}E_{t,x}[V(t+h, S_{t+h})].$$

Drugim riječima, optimalna zarada od izvršenja u sadašnjem trenutku jednaka je diskontiranoj očekivanoj optimalnoj zaradi u budućem trenutku. Uvrstimo li taj izraz u gornju jednačbu dobivamo

$$E_{t,x} \left[ \int_t^{t+h} e^{-r(s-t)}(r - \lambda_s)V(s, S_s)ds \right] = 0.$$

Dijeljenjem s  $h$  slijedi da je

$$\lambda_t V(t, S_t) = rV(t, S_t).$$

To riješava slučaj kada je optimalni trenutak izvršenja u budućnosti, odnosno kada vrijedi  $V(t, S_t) > C(t, S_t)$ .

Za slučaj  $V(t, S_t) = C(t, S_t)$ , kada je optimalni trenutak izvršenja sada, na analogan način dobivamo da vrijedi

$$\lambda_t V(t, S_t) < rV(t, S_t).$$

Objedinimo ove rezultate u propoziciju.

**Propozicija 3.1.** *Neka je  $V(t, x)$  dva puta diferencijabilna funkcija i neka vrijedi  $V(t, S_t) = \sup_{t \leq \tau \leq T} E_{t,x}[e^{-r(\tau-t)}C(\tau, S_\tau)]$ . Tada za skup  $M = \{(t, x) : C(t, x) < V(t, x)\}$  vrijedi:*

1.  $V(T, x) = C(T, x)$
2.  $\lambda_t V(t, x) = rV(t, x)$  za svaki  $(t, x) \in M$
3.  $\lambda_t V(t, x) < rV(t, x)$  za svaki  $(t, x) \notin M$

pri čemu je  $\lambda_t = \frac{\partial}{\partial t} + rx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

### 3.1 Optimalno vrijeme izvršenja američke call opcije

Optimalna zarada call opcije dana je s

$$V^{call}(t, x) = \sup_{t \leq \tau \leq T} E_{t,x}[e^{-r(\tau-t)}(S_\tau - K)_+],$$

no postavlja se pitanje kako doći do optimalnog vremena izvršenja. Pokazat ćemo da ovaj problem ima vrlo jednostavno rješenje.

**Propozicija 3.2.** *Optimalno vrijeme izvršenja američke call opcije je njen trenutak dospijea, odnosno vrijedi*

$$\tau_t^* = T.$$

**Dokaz:**

Ideja ovog dokaza je pokazati da je proces koji opisuje optimalnu zaradu call opcije submartingal. Naime, ako je proces koji opisuje optimalnu zaradu submartingal, to znači da očekivana optimalna zarada raste s vremenom, odnosno da je call opciju najisplativije izvršiti što je kasnije moguće, a to je u trenutku dospijea. Pretpostavimo radi jednostavnosti dokaza da je trenutak kupnje  $t = 0$ . To možemo napraviti bez smanjenja općenitosti jer je  $e^{rt}$  rastuća funkcija vremena pa množenjem nećemo promijeniti znak nejednakosti kojom ćemo pokazati da je proces submartingal. Neka je  $\tau$  vrijeme zaustavljanja, a  $T$  dospijea. Funkcija zarade call opcije s izvršenjem u trenutku  $\tau$  je dana s  $(S_\tau - K)_+$  pa je optimalna zarada opcije dana s

$$E_{t,x}[e^{-r\tau}(S_\tau - K)_+],$$

a obzirom da je  $\tau \leq T$ , vrijedi

$$E_{t,x}[e^{-r\tau}(S_\tau - K)_+] \leq E_{t,x}[e^{-r\tau}S_\tau - e^{-rT}K]_+.$$

Može se pokazati<sup>3</sup> da je proces  $(S_t e^{-rt})_{t \geq 0}$  martingal. Funkcija  $g(x) = (x - K)_+$  je konveksna pa je po Jensenovoj nejednakosti za uvjetno očekivanje

$$E_{t,x}[(e^{-r\tau}S_\tau - e^{-rT}K)_+] \leq E_{t,x}[(e^{-rT}S_T - e^{-rT}K)_+].$$

Dakle, maksimalna očekivana zarada se postiže u dospijea pa je dospijea optimalno vrijeme izvršenja.

□

**Napomena 3.2.** *Obzirom da je optimalno vrijeme izvršenja američke call opcije trenutak dospijea, njena očekivana zarada podudara se s onom europske call opcije.*

---

<sup>3</sup>Dokaz se može pronaći u [1]



## 3.2 Optimalno vrijeme izvršenja američke put opcije

Optimalna zarada put opcije dana je s

$$V^{APO}(t, x) = \sup_{t \leq \tau \leq T} E_{t,x}[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau)_+].$$

Pokažimo da, za razliku od call opcije, optimalno izvršenje put opcije, pod uvjetima pozitivne kamatne stope  $r$ , nije u trenutku dospijea.

**Propozicija 3.3.** *Neka je  $V^{EPO}(t, x)$  optimalna zarada europske put opcije,  $V^{APO}(t, x)$  optimalna zarada američke put opcije te neka je kamatna stopa  $r > 0$ . Tad za svaki  $t < T$  vrijedi*

$$V^{EPO}(t, x) < V^{APO}(t, x).$$

**Dokaz:**

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je  $t = 0$ . Neka je

- $\tau = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq K - Ke^{-r(T-t)}\}$
- $\tau' = \min(\tau, T)$ .

Promotrimo dva slučaja:

1.  $\tau < T$

Trgovatelj će izvršiti put opciju (ukoliko je profitabilna) u trenutku  $\tau$ , a obzirom da je  $S_\tau \leq K(1 - e^{-r(T-\tau)})$ , vrijedi da je njegova zarada najmanje  $Ke^{-r(T-\tau)}$ . Ako se ta zarada oroči uz pozitivnu kamatnu stopu  $r$ , do dospijea će iznositi  $K$ , a  $K$  je maksimalna zarada europske put opcije jer najbolje što vlasnik put opcije može proći je da cijena dionice padne na 0, što mu donosi zaradu od  $K - S_t = K$ .

2.  $\tau \geq T$

Trgovatelj će izvršiti put opciju (ukoliko je profitabilna) pri dospijeu pa će zarada biti jednaka zaradi europske put opcije.

Dakle, u oba slučaja će zarada biti najmanje jednaka zaradi europske put opcije, a obzirom da događaj  $\tau < T$  ima pozitivnu vjerojatnost, slijedi da je sadašnja vrijednost očekivane zarade američke put opcije veća od one europske put opcije.

□

Sad kada smo pokazali da je put opciju optimalno izvršiti prije dospijea, postavlja se pitanje kada ju izvršiti. Eksplicitan odgovor na taj problem postoji u slučaju kada nema dospijea, odnosno kada je  $T = \infty$ . Međutim, obzirom da niti jedna burza ne izdaje takve opcije, takvim opcijama se iznimno rijetko trguje i to na over-the-counter tržištima. Takve opcije se također stavljaju u klasu egzotičnih opcija, iako su u teoriji poseban slučaj američke opcije. Ozirom da je fokus ovog rada na američkim opcijama, i to na primjenu u stvarnom svijetu, u ovom radu nećemo obraditi opcije bez dospijea.

Za put opciju s konačnim dospijecom, nažalost, ne postoji eksplicitna formula optimalne zarade. Međutim, postoje rezultati koji nam mogu pomoći u potrazi. Pretpostavimo da se optimalna zarada put opcije postiže kada cijena pripadne dionice padne ispod  $b(t) < K$ . Dakle,  $b(t)$  je također funkcija vremena jer kako se mijenja cijena dionice, tako se mijenjaju

i naša očekivanja. Tu funkciju ćemo zvati okidač funkcija jer definira vrijednost koja će poslužiti kao okidač za izvršavanje opcije. Uočimo da nam zahtjev kojim je dana okidač funkcija garantira da će optimalna zarada biti postignuta kada je opcija in-the-money.

**Propozicija 3.4.** *Neka je dana američka put opcija s optimalnom zaradom  $V(t, x)$ . Pretpostavimo da postoje funkcije  $b(t)$  i  $f(t, x)$  za koje vrijede sljedeća svojstva:*

1. Za svaki  $x$  vrijedi:

$$f(T, x) = (K - S_T)_+$$

2. Za  $x > b(t)$  vrijedi:

$$(a) f(t, x) > (K - x)_+$$

$$(b) \lambda_t f(t, x) = r f(t, x)$$

3. Za  $x \leq b(t)$  vrijedi:

$$(a) f(t, x) = (K - x)_+$$

$$(b) \lambda_t f(t, x) < r f(t, x)$$

4. Za  $x = b(t)$  vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) = -1.$$

Tad je funkcija  $f(t, x)$  optimalna zarada put opcije  $V(t, x)$ .

**Dokaz:**

Neka je  $\tau \in [t, T]$  vrijeme zaustavljanja. Iskoristimo Itôvu formulu za  $e^{-rt} f(t, S_t)$ .

$$e^{-r\tau} f(\tau, S_\tau) = e^{-rt} f(t, x) + \int_t^\tau e^{-rs} (-r + \lambda_s) f(s, S_s) ds + \int_t^\tau e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, S_s) dW_s.$$

Zbog 2.(a) i 3.(a) vrijedi

$$e^{-r\tau} f(\tau, S_\tau) \geq e^{-r\tau} (K - S_\tau)_+$$

pa slijedi

$$e^{-r\tau} (K - S_\tau)_+ \leq e^{-rt} f(t, x) + \int_t^\tau e^{-rs} (-r + \lambda_s) f(s, S_s) ds + \int_t^\tau e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, S_s) dW_s$$

Zbog 2.(b) i 3.(b) vrijedi

$$e^{-r\tau} (K - S_\tau)_+ \leq e^{-rt} f(t, x) + \int_t^\tau e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, S_s) dW_s.$$

Zbog svojstva monotonosti očekivanja vrijedi

$$E_{t,x} [e^{-r\tau} (K - S_\tau)_+] \leq e^{-rt} f(t, x)$$

i to ako i samo ako je

$$E_{t,x} [e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau)_+] \leq f(t, x)$$

pa slijedi

$$\sup_{t \leq \tau \leq T} E_{t,x} [e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau)_+] \leq f(t, x).$$

Da bismo pokazali drugu stranu nejednakosti, definiramo  $\tau^* = T \wedge \tau_b$ , pri čemu je  $\tau_b$  definiran s  $\tau_b = \inf\{t \leq s \leq T : S_s \leq b\}$ . Vrijedi

$$e^{-r\tau^*} f(\tau^*, S_{\tau^*}) = e^{-rt} f(t, x) + \int_t^{\tau^*} e^{-rs} (-r + \lambda_s) f(s, S_s) ds + \int_t^{\tau^*} e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, S_s) dW_s.$$

Za  $s \in [t, \tau^*]$  vrijedi  $S_s > b$  pa po 2.(b) slijedi

$$(-r + \lambda_s) f(s, S_s) = 0$$

pa je

$$e^{-r\tau^*} f(\tau^*, S_{\tau^*}) = e^{-rt} f(t, x) + \int_t^{\tau^*} e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, S_s) dW_s.$$

Zbog 1 i 3.(a) vrijedi

$$f(\tau^*, S_{\tau^*}) = (K - S_{\tau^*})_+$$

pa je

$$e^{-r\tau^*} (K - S_{\tau^*})_+ = e^{-rt} f(t, x) + \int_t^{\tau^*} e^{-rs} \frac{\partial f}{\partial x}(s, S_s) dW_s.$$

Množenjem s  $e^{rt}$  i uzimanjem očekivanja dobivamo

$$f(t, x) = E_{t,x} [e^{-r(\tau^*-t)}(K - S_{\tau^*})_+] \leq \sup_{t \leq \tau \leq T} E_{t,x} [e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau)_+].$$

Pokazali smo i drugu stranu nejednakosti pa vrijedi

$$f(t, x) = V(t, x)$$

□

Sljedećom tvrdnjom zaključit ćemo ovo poglavlje, a navest ćemo ju bez dokaza. Dokaz se može pronaći u [6].

**Teorem 3.1.** *Neka je dana okidač funkcija  $b : [0, T] \rightarrow \langle 0, K \rangle$ . Tada vrijedi:*

1. *Funkcija  $b$  je rastuća neprekidna funkcija i vrijedi  $b(T) = K$ .*
2. *Okidač funkciju američke put opcije možemo karakterizirati kao jedinstveno rješenje sljedeće jednadžbe u klasi rastućih funkcija  $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  koje za svaki  $t \in \langle 0, T \rangle$  zadovoljava  $c(t) \in \langle 0, K \rangle$ :*

$$K - c(t) = e^{r(T-t)} E_{t,x} [(K - X_T)_+] + rK \int_0^{T-t} e^{-ru} P_{t,x} (X_{t+u} \leq c(t+u)) du.$$

## 4. Numeričke metode za određivanje cijene

Postoji mnoštvo numeričkih metoda za određivanje cijena opcija. U ovom radu obradit ćemo neke od najčešće korištenih.

### 4.1 Metode razlika

Metode razlika nam daju informaciju o cijeni i okidač funkciji put opcije.

#### 4.1.1 Eksplicitna metoda razlika

Neka je dana američka put opcija s dospijećem  $T < \infty$ . Konstruirajmo ekvidistantnu subdiviziju segmenta  $[0, T]$  na  $N + 1$  točaka:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

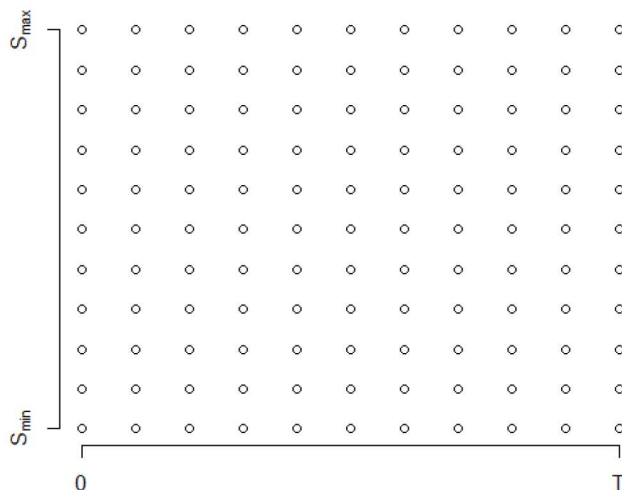
pri čemu je  $t_i = i\frac{T}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Pretpostavimo da je na tom intervalu cijena dionice ograničena segmentom  $[S_{min}, S_{max}]$  te da vrijedi  $K \in [S_{min}, S_{max}]$ . Konstruirajmo ekvidistantnu subdiviziju tog segmenta na  $M + 1$  točaka:

$$x_j = S_{min} + j\frac{S_{max} - S_{min}}{M},$$

pri čemu je  $j = 0, 1, \dots, M$ .

Tim subdivizijama konstruiramo  $(N + 1) \times (M + 1)$  mrežu u kojoj ćemo tražiti cijenu opcije, a istovremeno i skicirati okidač funkciju. Primjer takve mreže dan je Slikom 16.



Slika 16: Mreža za eksplicitnu metodu razlika

Uvedimo sada sljedeću oznaku:



$$C_{i,j} = C(t_i, x_j), \quad \text{za} \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Označimo  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ,  $\Delta S = \frac{S_{max} - S_{min}}{M}$  i aproksimirajmo sljedeće parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} C(t, x) &\approx \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta S} \\ \frac{\partial}{\partial x} C(t, x) &\approx \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{\Delta S} \\ \frac{\partial}{\partial x} C(t, x) &\approx \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta S}. \end{aligned} \quad (1)$$

Koristeći procjene unaprijed i unazad dobivamo procjenu druge derivacije

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} C(t, x) \approx \frac{\frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta S} - \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{\Delta S}}{\Delta S} = \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 2C_{i,j}}{\Delta S^2}. \quad (2)$$

Na sličan način aproksimiramo unaprijed derivaciju po vremenu:

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t, x) \approx \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Uvrstimo li sada u Black-Scholes jednadžbu iz Teroema 1.5 izraze (1), (2) i (3), nakon sređivanja dobivamo sljedeći izraz:

$$C_{i,j} = a_j^* C_{i+1,j-1} + b_j^* C_{i+1,j} + c_j^* C_{i+1,j+1},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} a_j^* &= \frac{1}{1 + r\Delta t} \left( -\frac{1}{2} r j \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right) \\ b_j^* &= \frac{1}{1 + r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t) \\ c_j^* &= \frac{1}{1 + r\Delta t} \left( \frac{1}{2} r j \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right). \end{aligned}$$

Obzirom da su nam poznate vrijednosti pri dospijeću, algoritam ćemo provoditi s desna na lijevo. Također, obzirom da je  $K \in [S_{min}, S_{max}]$ , znamo da je  $C_{i,M} = 0$  te da je  $C_{i,0} = K - S_{min}$  maksimalna moguća zarada. Dakle, imamo sustav  $M - 1$  jednadžbi s  $M - 1$  nepoznanica:

$$C_{N-1,j} = a_j^* C_{N,j-1} + b_j^* C_{N,j} + c_j^* C_{N,j+1} \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, M - 1,$$

pri čemu je poznato

$$C_{N-1,0} = K - S_{min}, \quad C_{N-1,M} = 0.$$

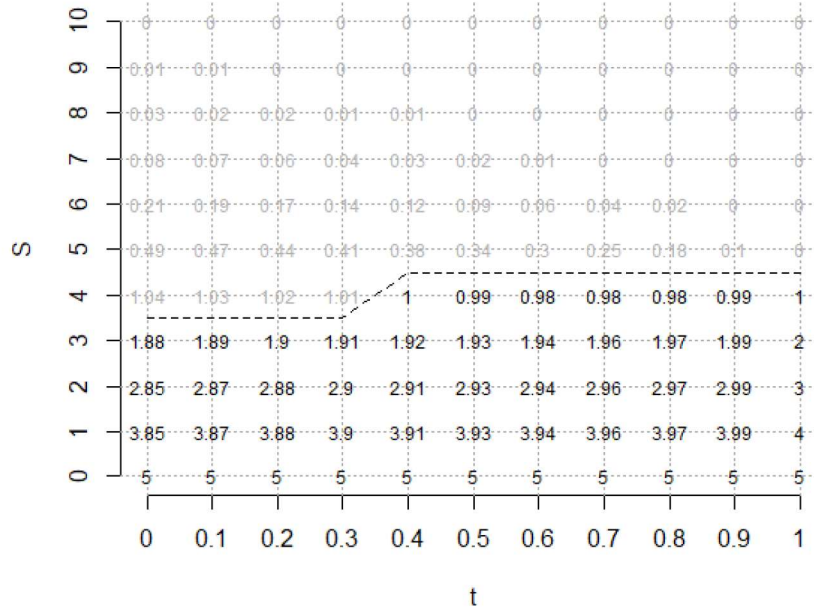
Kada riješimo jednadžbe, dobivene vrijednosti za  $C_{N-1,j}$  potrebno je usporediti s  $C_{N,j}$  koja predstavlja vrijednost europske put opcije. Ako je vrijednost manja od vrijednosti europske put opcije, onda je optimalno izvršiti opciju pa je optimalno vrijeme izvršenja  $N - 1$ . Dakle, ako je za  $t = (N - 1)\Delta t$

$$\begin{aligned} S_{t=j} &= S_{min} + j\Delta S, \\ C_{N-1,j} &< C_{N,j}, \end{aligned}$$

opciju je optimalno izvršiti. Postupak ponavljamo po  $j$  da dobijemo sve vrijednosti za  $t = N - 1$ . Zatim postupak nastavljamo u lijevo po  $t$ . U zadnjem koraku dobit ćemo vrijednosti za  $t = 0$  koje su nam od interesa.



**Primjer 4.1.** *Pretpostavimo da imamo američku put opciju za koju vrijedi da joj je cijena izvršenja 5\$, vrijeme izvršenja 1, volatilitet pripadne dionice 0.3. Neka je trenutna cijena dionice jednaka cijeni izvršenja, a dana kamatna stopa neka je 3%. Pretpostavimo da očekujemo da će cijena narasti najviše do  $S_{max} = 10\$$ . Obzirom da cijena dionice može biti najmanje 0, uzet ćemo da je  $S_{min} = 0\$$ . Za dimenziju mreže ćemo uzeti  $N = 10$  i  $M = 10$ . Iterativni postupak provodimo u R-u, a kod korišten za provedbu nalazi se u Dodatku 2. Dobivamo mrežu prikazanu na Slici 17.*



Slika 17: Mreža dobivena metodom razlika za Primjer 4.1

Dakle, obzirom da je trenutna cijena dionice 5\$, cijena opcije je 0.49\$. Graf prikazuje okidač funkciju, odnosno daje nam u svakom trenutku vrijednost ispod koje cijena pripadne dionice mora pasti da bi bilo optimalno izvršiti opciju.

**Napomena 4.1.** *Eksplisitna metoda razlika može zbog ograničenja na koeficijente  $a_j^*$ ,  $b_{*j}$  i  $c_j^*$  postati numerički nestabilna i dovesti do negativnih cijena opcija. Zbog toga je nastala potreba preinake ove metode u metodu koja se naziva implicitna metoda razlika.*

#### 4.1.2 Implicitna metoda razlika

Implicitna metoda razlika dobiva se predefiniranjem koeficijenata koje smo koristili za eksplisitu metodu i to na sljedeći način:

$$C_{i+1,j} = a_j C_{i,j-1} + b_j C_{i,j} + c_j C_{i,j+1}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t \\ b_j &= 1 + \sigma^2j^2\Delta t + r\Delta t \\ c_j &= -\frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t, \end{aligned}$$

pod istim uvjetima na rubovima mreže kao i kod eksplicitne metode.

Za razliku od eksplicitne metode, implicitna metoda nema eksplicitno rješenje. Sustav jednadžbi za  $i = N - 1$  dan je na sljedeći način:

$$\begin{aligned} C_{N,1} &= a_1C_{N-1,0} + b_1C_{N-1,1} + c_1C_{N-1,2} \\ C_{N,2} &= a_2C_{N-1,1} + b_2C_{N-1,2} + c_2C_{N-1,3} \\ &\vdots \\ C_{N,M-1} &= a_{M-1}C_{N-1,M-2} + b_{M-1}C_{N-1,M-1} + c_{M-1}C_{N-1,M}, \end{aligned}$$

a poznati su nam samo koeficijenti  $a_j$ ,  $b_j$  i  $c_j$  te vrijednosti  $C_{N,j}$ . Sustav rješavamo uz pomoć sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix}$$

kojom pretvaramo naš sustav u oblik

$$Ax = b,$$

pri čemu je

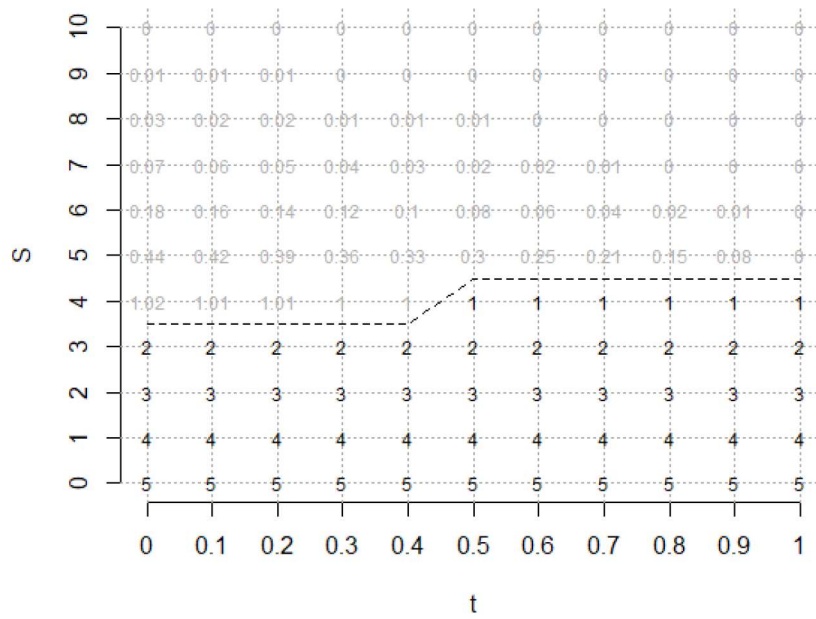
$$\begin{aligned} b &= (C_{N,1} - a_1C_{N-1,0}, \dots, C_{N,M-1} - c_{M-1}C_{N-1,M}) \\ x &= (C_{N-1,1}, \dots, C_{N-1,M-1}). \end{aligned}$$

Dobivene vrijednosti  $C_{N-1,j}$  uspoređujemo s vrijednostima  $K - j\Delta S$ . Ako su prvo spomenute vrijednosti manje, tada je  $N - 1$  vrijeme optimalnog izvršenja, a cijenu opcije u tom trenutku postavljamo na  $K - j\Delta S$ . Kada smo gotovi, postupak ponavljamo s desna na lijevo.

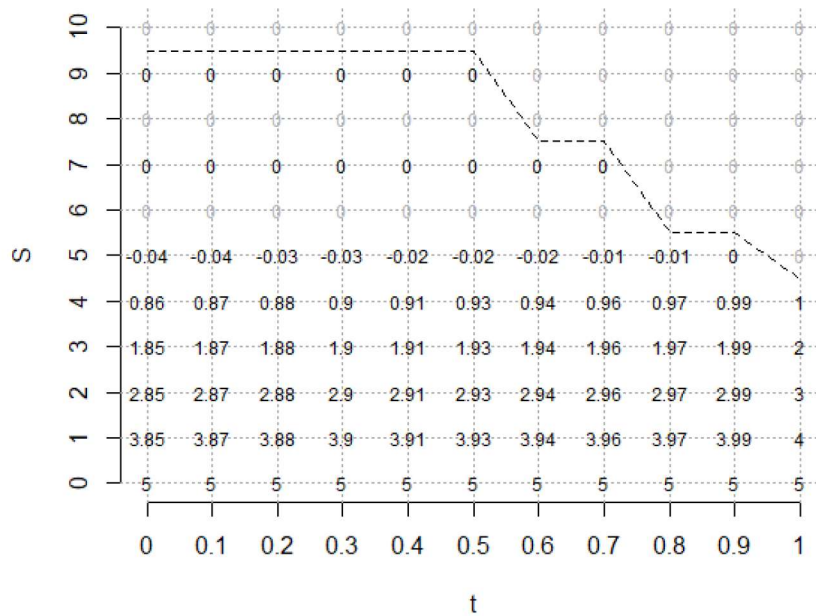
Riješimo primjer 4.1 implicitnom metodom. Za izvršavanje koristimo kod iz Dodatka 2. Rezultat je prikazan na Slici 18.

U ovom primjeru se mreža nije puno promijenila, ali pogledajmo sljedeći primjer u kojem nam implicitna metoda može biti od koristi.

**Primjer 4.2.** *Neka su svi uvjeti isti kao u prethodnom primjeru, ali volatilnost postavimo na 0.05. Slikama 19 i 20 dani su rezultati dobiveni eksplicitnom, odnosno implicitnom metodom.*



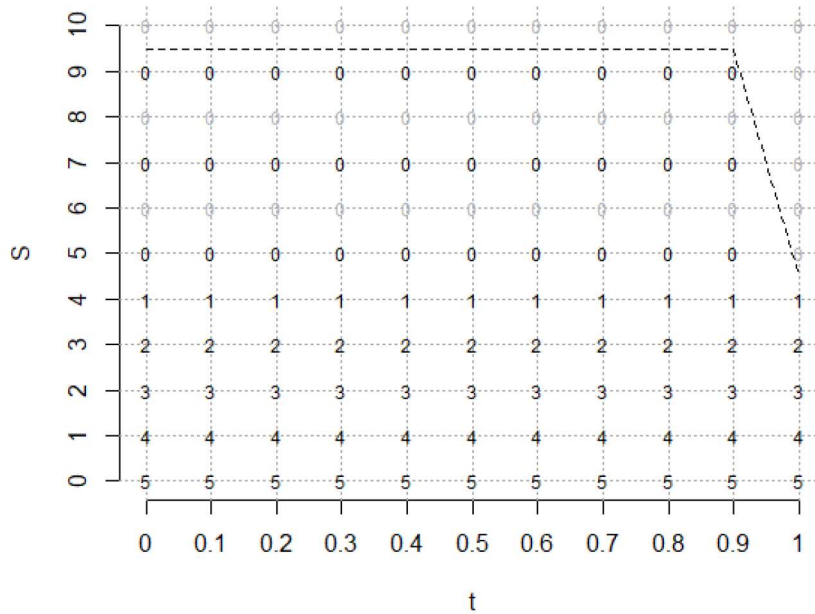
Slika 18: Mreža dobivena implicitnom metodom razlika za Primjer 4.1



Slika 19: Mreža dobivena eksplicitnom metodom razlika za Primjer 4.2

**Napomena 4.2.** *Implicitna metoda ima veću vremensku složenost nego eksplicitna. Također, kao što vidimo na Slici 20, ona ispravlja samo negativne vrijednosti koje se dobiju za cijene, dok procjena okidač funkcije i dalje nije dobra jer, kao što smo naveli u Teoremu 3.1, ona mora biti rastuća funkcija.*





Slika 20: Mreža dobivena implicitnom metodom razlika za Primjer 4.2

## 4.2 Monte Carlo simulacije

Neka je  $X$  slučajna varijabla,  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ,  $c, d \leq 0$ , poznata funkcija takva da je  $g(X)$  integrabilna slučajna varijabla te  $x_1, \dots, x_n$  niz realizacija iz distribucije od  $X$ . Sada zakon velikih brojeva garantira da za procjenu  $E[X]$  možemo uzeti prosjek  $\bar{g}_n$ , a centralni granični teorem garantira da vrijedi

$$\bar{g}_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(E[g(X)], \frac{1}{n} \text{Var}(g(X))\right).$$

Dakle, možemo konstruirati 95%-tni pouzdani interval za procjenu od  $\bar{g}_n$  kao

$$\left[ E[g(X)] - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, E[g(X)] + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Nepistrani procjenitelj varijance je  $\hat{\sigma}^2$  pa realizaciju gornjeg pouzdanog intervala za dani niz realizacija  $x_1, \dots, x_n$  možemo pisati kao

$$\left[ \bar{g}_n - 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{g}_n + 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right].$$

Dakle, to je zapravo 95%-tni pouzdani interval standardne normalne distribucije, a na njemu se zasnivaju Monte Carlo simulacije pa se u tom kontekstu taj interval naziva Monte Carlo pouzdani interval.

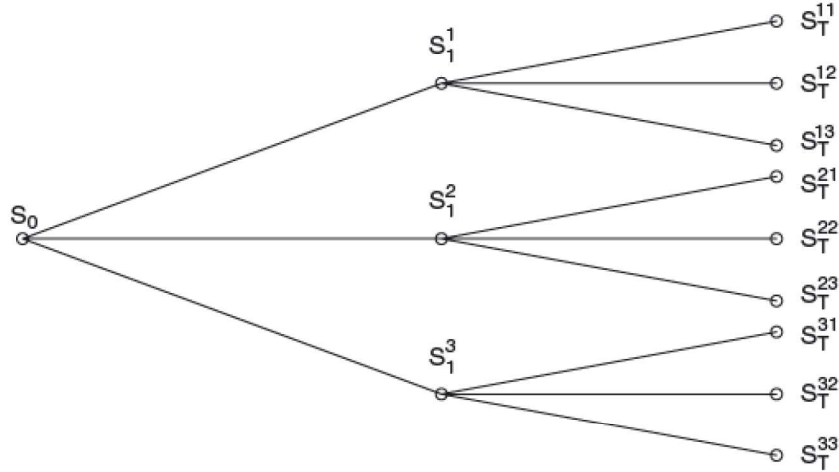
### 4.2.1 Broadie - Glasserman metoda

Broadie - Glasserman simulacije također započinju subdivizijom vremenskog intervala  $[0, T]$ . Međutim, umjesto mreže, kreiramo stablo kojom su čvorovi moguće realizacije cijene pripadne dionice u svakom trenutku. Dakle, zapravo pretpostavljamo da se u svakom trenutku

cijena dionice može realizirati s  $b$  vrijednosti koje ovise o cijeni trenutak prije i to svaka s jednakom vjerojatnosti. To znači da ćemo u stupcu koji predstavlja trenutak  $t = 0$  imati jedan čvor, u stupcu za  $t = 1$  ćemo imati  $b$  čvorova, u stupcu za  $t = 2$  će biti  $b^2$  čvorova, itd. Dobiveno stablo možemo zapisati kao

$$\{S_t^{i_1 i_2 \dots i_t} : t = 0, 1, \dots, T, i_j = 1, 2, \dots, b, j = 1, \dots, t\}.$$

Slikom 21 dan je jednostavan primjer s  $T = 2$  i  $b = 3$ , a graf je preuzet iz [3], kao i grafovi za primjer kojim ćemo se poslužiti za razradu metode. Na grafovima su vrijednosti u čvorovima dane običnim zagradama, procjene za granice u uglatim zagradama, a cijene pripadne dionice bez zagrada. Preko pretpostavljenih cijena dionica izračunamo vrijednost funkcije zarade u



Slika 21: Stablo dobiveno Broadie - Glasserman metodom za  $T = 2$  i  $b = 3$

svakom trenutku  $i$  to radimo po stupcima s desna na lijevo. Zatim, u svakom stupcu, osim u zadnjem (dospijeću), računamo očekivanu zaradu. Kao gornju procjenu za cijenu opcije u određenom trenutku  $t$  postavljamo

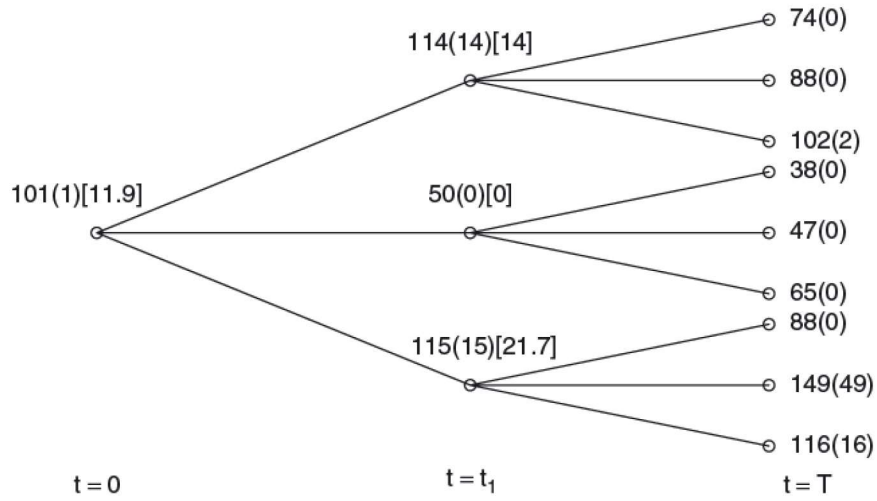
$$\max(C(t, S_t), E[C(t, S_t)]),$$

pri čemu, obzirom na jednake vjerojatnosti svake realizacije, vrijedi

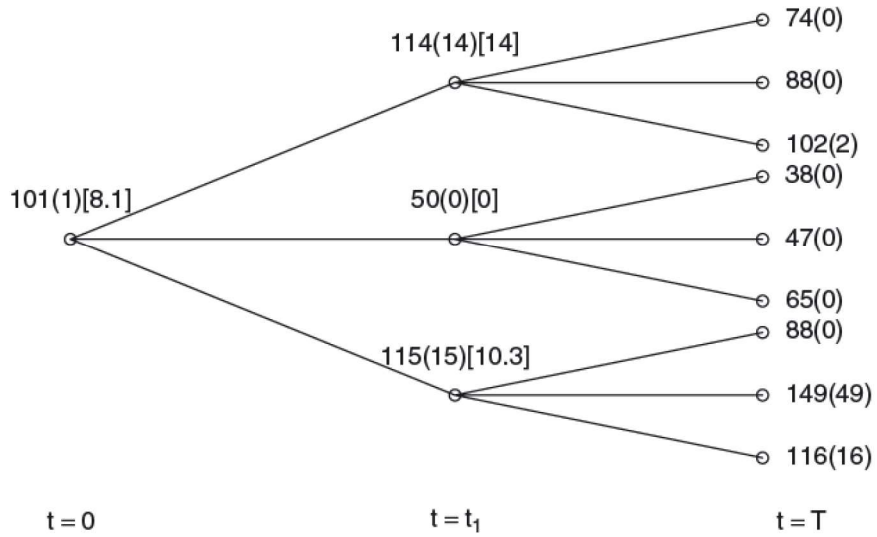
$$E[C(t, S_t)] = \frac{\sum_{t=1}^b C(t, S_t)}{b}.$$

Za donju procjenu radimo nešto drugačije. Radimo usporedbu vrijednosti funkcije zarade u trenutku  $t = 1$  s prosjekom svakog para mogućih zarada u trenutku  $t = 2$ . Pri svakoj usporedbi uzmemo maksimum. Zatim, kao vrijednost čvora u trenutku  $t = 1$  postavljamo prosjek spomenutih maksimuma. Ponovimo postupak za svaki čvor sve do  $t = 0$ , a konačna vrijednost je donja procjena zarade.

Donju i gornju procjenu postavimo kao lijevu i desnu granicu intervala i dobivamo interval prve Monte Carlo simulacije. U ovom primjeru, dobiveni interval je [8.1, 11.9].



Slika 22: Skica postupka metode za gornju granicu intervala



Slika 23: Skica postupka metode za donju granicu intervala

Općenito, procjenitelj gornje granice definira se rekursivno kao:

$$\Theta_T^{i_1 \dots i_T} = f_T(S_T^{i_1 i_2 \dots i_T}),$$

$$\Theta_T^{i_1 \dots i_t} = \max \left\{ h_t(S_t^{i_1 i_2 \dots i_t}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-R_{t+1}^{i_1 \dots i_t j}} \Theta_{t+1}^{i_1 \dots i_t j} \right\}, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

pri čemu je:

- $h_t(x) \max\{f_t(x), g_t(x)\}$  - vrijednost opcije u trenutku  $t$  za  $S_t = x$
- $g_t(x) = E_{t,x} [e^{-R_{t+1}} h_{t+1}(S_{t+1})]$  - očekivana zarada u trenutku  $t$  za  $S_t = x$
- $f_t(x)$  - funkcija zarade u trenutku  $t$
- $e^{-R_t}$  - faktor za diskontiranje s  $t$  na  $t-1$  (radi jednostavnosti postavljen na 0)



i vrijedi:  $h_T(x) = f_T(x)$ .

Procjenitelj donje granice također definiramo rekurzivno. Neka je pri dospijeću dano:

$$\theta_T^{i_1 \dots i_T} = f_T(S_t^{i_1 i_2 \dots i_T}).$$

Za  $j = 1, \dots, b$  definiramo

$$\eta_t^{i_1 \dots i_t j} = \begin{cases} f_t(S_t^{i_1 \dots i_t}) & f_t(S_t^{i_1 \dots i_t}) \geq \frac{1}{b} \sum_{i=1, i \neq j} e^{-R_{t+1}^i \dots i_t i} \theta \\ e^{-R_{t+1}^j} \theta_{t+1}^{i_1 \dots i_t j} & \text{inače.} \end{cases}$$

Preko tih vrijednosti definiramo donju procjenu za  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  na sljedeći način

$$\theta_t^{i_1 \dots i_t} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \eta_t^{i_1 \dots i_t j}.$$

Interval za procjenu cijene opcije za prvu replikaciju dan je s  $[\theta_0, \Theta_0]$ , a nakon  $n$  simulacija dobivamo interval bit će  $[\bar{\theta}_{0,n}, \bar{\Theta}_{0,n}]$ . Može se pokazati da će nakon dovoljno Monte Carlo simulacija vrijediti da vrijedi

$$E[\bar{\theta}_{0,n}(b)] \rightarrow f_0(S_0), \quad b \rightarrow \infty$$

$$E[\bar{\Theta}_{0,n}(b)] \rightarrow f_0(S_0), \quad b \rightarrow \infty.$$

Konačna procjena 95%-tnog Monte Carlo intervala za cijenu opcije dana je s

$$\left[ \max \left\{ (S_0 - K), \bar{\theta}_{0,n} - z_{\frac{0.05}{2}} \frac{\sigma(\bar{\theta}_{0,n})}{n} \right\}, \bar{\Theta}_{0,n} + z_{\frac{0.05}{2}} \frac{\sigma(\bar{\Theta}_{0,n})}{n} \right].$$

## Dodatak 1 - R kod za Osnovno o američkim opcijama

```
1 #Opcijski Grci
2 # graf promjene u vrijednosti portfelja obzirom na razlicite gamme
3 x = -10:10
4 curve(0.3*x^2-5, type="l", lwd=1, col="orange", xaxt="n", yaxt="n", xlim=c(-5,5),
      ylab="", xlab="", ylim=c(-15, 15), line=1)
5 abline(h=0, v=0)
6 text(-0.2, -2, label=expression("0"))
7 text(5, -2, label = expression(paste(Delta,"S")))
8 text(-0.5, 14, label = expression(paste(Delta,Pi)))
9 arrows(x0 = 0, x1 = 5.4, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
10 arrows(x0 = 0, x1 = 0, y0 = 0, y1 = 16.2, length = 0.1)
11
12 curve(20*x^2-25, type="l", lwd=1, col="orange", xaxt="n", yaxt="n", xlim=c(-5,5),
      ylim=c(-30,30), ylab="", xlab="", line=1)
13 abline(h=0, v=0)
14 text(-0.2, -4, label=expression("0"))
15 text(5, -4, label = expression(paste(Delta,"S")))
16 text(-0.5, 28, label = expression(paste(Delta,Pi)))
17 arrows(x0 = 0, x1 = 5.4, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
18 arrows(x0 = 0, x1 = 0, y0 = 0, y1 = 32.4, length = 0.1)
19
20 curve(-0.3*x^2+5, type="l", lwd=1, col="orange", xaxt="n", yaxt="n", xlim=c(-5,5),
      ylab="", xlab="", ylim=c(-15, 15), line=1)
21 abline(h=0, v=0)
22 text(-0.2, -2, label=expression("0"))
23 text(5, 3, label = expression(paste(Delta,"S")))
24 text(-0.5, 14, label = expression(paste(Delta,Pi)))
25 arrows(x0 = 0, x1 = 5.4, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
26 arrows(x0 = 0, x1 = 0, y0 = 0, y1 = 16.2, length = 0.1)
27
28 curve(-20*x^2+25, type="l", lwd=1, col="orange", xaxt="n", yaxt="n", xlim=c(-5,5),
      , ylim=c(-30,30), ylab="", xlab="", line=1)
29 abline(h=0, v=0)
30 text(-0.2, -4, label=expression("0"))
31 text(5, -4, label = expression(paste(Delta,"S")))
32 text(-0.5, 28, label = expression(paste(Delta,Pi)))
33 arrows(x0 = 0, x1 = 5.4, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
34 arrows(x0 = 0, x1 = 0, y0 = 0, y1 = 32.4, length = 0.1)
35
36
37 #Opcijske strategije
38 par(xpd=TRUE)
39 #long call i protective put
40 plot(c(0,1,2),c(-1,-1,2), type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="", xaxt="
      n",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
41 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis=0.65,
      cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
42 lines(c(0,1,2),c(-1,-1,2),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
```

```

43 lines(c(-0.08,-0.08),c(-2.5,2.7))
44 lines(c(-0.08,2.09),c(0,0))
45 arrows(x0 = 0, x1 = 2.09, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
46 arrows(x0 = -0.08, x1 = -0.08, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
47 text(-0.12, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
48 text(2.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
49 text(-0.15, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
50
51 #long put i protective call
52 plot(c(0,1,2),c(2,-1,-1),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="", xaxt="n"
      ",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
53 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis=0.65,
      cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
54 lines(c(0,1,2),c(2,-1,-1),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
55 lines(c(-0.08,-0.08),c(-2.5,2.7))
56 lines(c(-0.08,2.1),c(0,0))
57 arrows(x0 = 0, x1 = 2.1, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
58 arrows(x0 = -0.08, x1 = -0.08, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
59 text(-0.12, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
60 text(2.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
61 text(-0.15, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
62
63 #covered call i naked put
64 plot(c(0,1,2),c(-2,1,1),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="", xaxt="n"
      ",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
65 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis=0.65,
      cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
66 lines(c(0,1,2),c(-2,1,1),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
67 lines(c(-0.08,-0.08),c(-2.5,2.7))
68 lines(c(-0.08,2.1),c(0,0))
69 arrows(x0 = 0, x1 = 2.1, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
70 arrows(x0 = -0.08, x1 = -0.08, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
71 text(-0.12, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
72 text(2.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
73 text(-0.15, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
74
75 #covered put i naked call
76 plot(c(0,1,2),c(1,1,-2),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="", xaxt="n"
      ",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
77 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis=0.65,
      cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
78 lines(c(0,1,2),c(1,1,-2),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
79 lines(c(-0.08,-0.08),c(-2.5,2.7))
80 lines(c(-0.08,2.1),c(0,0))
81 arrows(x0 = 0, x1 = 2.1, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
82 arrows(x0 = -0.08, x1 = -0.08, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
83 text(-0.12, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
84 text(2.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)

```



```

85 text(-0.15, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
86
87 #bull spread
88 plot(c(0,1,2,3),c(-2,-2,2,2),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="",
      xaxt="n",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
89 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"[1]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
90 axis(1,at=2,pos=c(0,0),labels=expression("K"[2]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
91 lines(c(0,1,2,3),c(-2,-2,2,2),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",
      ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
92 lines(c(-0.12,-0.12),c(-2.5,2.7))
93 lines(c(-0.12,3.13),c(0,0))
94 arrows(x0 = 0, x1 = 3.13, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
95 arrows(x0 = -0.12, x1 = -0.12, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
96 text(-0.17, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
97 text(3.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
98 text(-0.25, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
99
100 #bear spread
101 plot(c(0,1,2,3),c(2,2,-2,-2),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="",
      xaxt="n",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
102 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"[1]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
103 axis(1,at=2,pos=c(0,0),labels=expression("K"[2]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
104 lines(c(0,1,2,3),c(2,2,-2,-2),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",
      ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
105 lines(c(-0.12,-0.12),c(-2.5,2.7))
106 lines(c(-0.12,3.13),c(0,0))
107 arrows(x0 = 0, x1 = 3.13, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
108 arrows(x0 = -0.12, x1 = -0.12, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
109 text(-0.17, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
110 text(3.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
111 text(-0.25, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
112
113 #long butterfly spread i iron butterfly
114 plot(c(0,1,2,3,4),c(-1,-1,2,-1,-1),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab=""
      , xaxt="n",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
115 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"[1]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
116 axis(1,at=2,pos=c(0,0),labels=expression("K"[2]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
117 axis(1,at=3,pos=c(0,0),labels=expression("K"[3]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
118 lines(c(0,1,2,3,4),c(-1,-1,2,-1,-1),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt
      ="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
119 lines(c(-0.155,-0.155),c(-2,2.7))
120 lines(c(-0.155,4.17),c(0,0))
121 arrows(x0 = 0, x1 = 4.17, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
122 arrows(x0 = -0.155, x1 = -0.155, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)

```

```

123 text(-0.25, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
124 text(4.2, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
125 text(-0.3, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
126
127 #short butterfly spread
128 plot(c(0,1,2,3,4),c(1,1,-2,1,1),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="",
      xaxt="n",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
129 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"[1]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
130 axis(1,at=2,pos=c(0,0),labels=expression("K"[2]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
131 axis(1,at=3,pos=c(0,0),labels=expression("K"[3]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
132 lines(c(0,1,2,3,4),c(1,1,-2,1,1),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",
      ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
133 lines(c(-0.155,-0.155),c(-2,2.7))
134 lines(c(-0.155,4.17),c(0,0))
135 arrows(x0 = 0, x1 = 4.17, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
136 arrows(x0 = -0.155, x1 = -0.155, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
137 text(-0.25, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
138 text(4.2, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
139 text(-0.3, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
140
141 #long straddle
142 plot(c(0,1,2),c(2,-2,2),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="", xaxt="n",
      yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
143 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis=0.65,
      cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
144 lines(c(0,1,2),c(2,-2,2),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
145 lines(c(-0.08,-0.08),c(-2,2.7))
146 lines(c(-0.08,2.09),c(0,0))
147 arrows(x0 = 0, x1 = 2.09, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
148 arrows(x0 = -0.08, x1 = -0.08, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
149 text(-0.12, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
150 text(2.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
151 text(-0.15, 2.6, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
152
153 #strip and strap
154 par(mfrow=c(1,2))
155
156 plot(c(0,1,2),c(3,-1,1),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.655,bty="n",line=1)
157 lines(c(0,1,2),c(3,-1,1),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
158 lines(c(-0.08,-0.08),c(-2,3.2))
159 lines(c(-0.08,2.09),c(0,0))
160 arrows(x0 = 0, x1 = 2.09, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
161 arrows(x0 = -0.08, x1 = -0.08, y0 = 0, y1 = 3.2, length = 0.1)
162 text(-0.2, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
163 text(2.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)

```



```

164 text(-0.25, 3.2, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
165
166 plot(c(0,1,2),c(1,-1,3),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
167 lines(c(-0.08,-0.08),c(-2,3.2))
168 lines(c(-0.08,2.09),c(0,0))
169 lines(c(0,1,2),c(1,-1,3),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",ljoin
      =1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
170 arrows(x0 = 0, x1 = 2.09, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
171 arrows(x0 = -0.08, x1 = -0.08, y0 = 0, y1 = 3.2, length = 0.1)
172 text(-0.2, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
173 text(2.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
174 text(-0.25, 3.2, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
175
176 par(mfrow=c(1,1))
177
178 #long strangle
179 plot(c(0,1,2,3),c(1,-2,-2,1),type="l",lwd=1,ylim=c(-2.5,2.5),ylab="",xlab="",
      xaxt="n",yaxt="n",ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
180 lines(c(-0.12,-0.12),c(-2.7,2.7))
181 lines(c(-0.12,3.13),c(0,0))
182 axis(1,at=1,pos=c(0,0),labels=expression("K"[1]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
183 axis(1,at=2,pos=c(0,0),labels=expression("K"[2]),lwd=1,cex.lab=0.65, cex.axis
      =0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
184 lines(c(0,1,2,3),c(1,-2,-2,1),type="l",lwd=1,ylab="",xlab="", xaxt="n",yaxt="n",
      ljoin=1, col="orange",cex.lab=0.65,bty="n",line=1)
185 arrows(x0 = 0, x1 = 3.13, y0 = 0, y1 = 0, length = 0.1)
186 arrows(x0 = -0.12, x1 = -0.12, y0 = 0, y1 = 2.7, length = 0.1)
187 text(-0.2, 0, label=expression("0"), cex=0.8)
188 text(3.1, -0.3, label = expression("S"[t]), cex=0.8)
189 text(-0.25, 2.7, label = expression("Z"[t]), cex=0.8)
190
191 par(xpd=FALSE)

```



## Dodatak 2 - R kod za Numeričke metode za određivanje cijene

```
1 #Eksplisitna metoda razlika
2
3 #skica mreze
4 plot(1, type="n", xlab="", ylab="", xlim=c(0, 10), ylim=c(0, 10), bty="n", xaxt="n",
      yaxt="n", cex.lab=0.65, cex.axis=0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
5 for (x in 0:10) {for (y in 0:10) { lines(x,y,type="o", cex=0.65)}}
6 axis(1, at = c(0, 10), labels = c("0", "T"), cex.lab=0.65, cex.axis=0.65, cex.main
      =0.65, cex.sub=0.65)
7 axis(2, at = c(0, 10), labels = c(expression("S"[min]), expression("S"[max])), cex
      .lab=0.65, cex.axis=0.65, cex.main=0.65, cex.sub=0.65)
8
9
10 #definiranje funkcija
11 AmericanPutExp <- function(Smin = 0, Smax, T = 1, N = 10, M = 10, K, r = 0.03,
      sigma = 0.01)
12 {
13   Dt = T/N
14   DS = (Smax - Smin)/M
15   t <- seq(0, T, by = Dt)
16   S <- seq(Smin, Smax, by = DS)
17   A <- function(j) (-0.5 * r * j * Dt + 0.5 * sigma^2 * j^2 * Dt)/(1 + r * Dt)
18   B <- function(j) (1 - sigma^2 * j^2 * Dt)/(1 + r * Dt)
19   C <- function(j) (0.5 * r * j * Dt + 0.5 * sigma^2 * j^2 * Dt)/(1 + r * Dt)
20   P <- matrix(, M + 1, N + 1)
21   colnames(P) <- round(t, 2)
22   rownames(P) <- round(rev(S), 2)
23   P[M + 1, ] <- K
24   P[1, ] <- 0
25   P[, N + 1] <- sapply(rev(S), function(x) max(K - x, 0))
26   optTime <- matrix(FALSE, M + 1, N + 1)
27   optTime[M + 1, ] <- TRUE
28   optTime[which(P[, N + 1] > 0), N + 1] <- TRUE
29   for (i in (N - 1):0) {
30     for (j in 1:(M - 1)) {
31       J <- M + 1 - j
32       I <- i + 1
33       P[J, I] <- A(j) * P[J + 1, I + 1] + B(j) * P[J, I + 1] + C(j) * P[J - 1, I +
          1]
34       if (P[J, I] < P[J, N + 1])
35         optTime[J, I] <- TRUE
36     }
37   }
38   colnames(optTime) <- colnames(P)
39   rownames(optTime) <- rownames(P)
40   ans <- list(P = P, t = t, S = S, optTime = optTime, N = N, M = M)
41   class(ans) <- "AmericanPut"
42   return(invisible(ans))
}
```

```

43 }
44
45
46 #crtanje mreze
47 plot.AmericanPut <- function(obj)
48 {
49   plot(range(obj$t), range(obj$S), type = "n", axes = F, xlab = "t", ylab = "S",
50         xaxt="n")
51   axis(1, obj$t, obj$t)
52   axis(2, obj$S, obj$S)
53   abline(v = obj$t, h = obj$S, col = "darkgray", lty = "dotted")
54   for (i in 0:obj$N) {
55     for (j in 0:obj$M) {
56       J <- obj$M + 1 - j
57       I <- i + 1
58       cl <- "grey70"
59       if (obj$optTime[J, I])
60         cl <- "black"
61       text(obj$t[i + 1], obj$S[j + 1], round(obj$P[J, I],
62                                             2), cex = 0.75, col = cl)
63     }
64   }
65   DS <- mean(obj$S[1:2])
66   y <- as.numeric(apply(obj$optTime, 2, function(x) which(x)[1]))
67   lines(obj$t, obj$S[obj$M + 2 - y] + DS, lty = 2)
68 }
69
70 #primjer
71 put <- AmericanPutExp(Smax = 10, sigma = 0.3, K = 5)
72 round(put$P, 2)
73 plot(put)
74
75
76
77
78
79 #Implicitna metoda razlika
80 AmericanPutImp <- function(Smin = 0, Smax, T = 1, N = 10,
81                             M = 10,
82                             K, r = 0.05, sigma = 0.01) {
83   Dt = T/N
84   DS = (Smax - Smin)/M
85   t <- seq(0, T, by = Dt)
86   S <- seq(Smin, Smax, by = DS)
87   A <- function(j) 0.5 * r * j * Dt - 0.5 * sigma^2 * j^2 *Dt
88   B <- function(j) 1 + sigma^2 * j^2 * Dt + r * Dt
89   C <- function(j) -0.5 * r * j * Dt - 0.5 * sigma^2 * j^2 *Dt
90   a <- sapply(0:M, A)
91   b <- sapply(0:M, B)
92   c <- sapply(0:M, C)

```

```

93 P <- matrix(, M + 1, N + 1)
94 colnames(P) <- round(t, 2)
95 rownames(P) <- round(rev(S), 2)
96 P[M + 1, ] <- K
97 P[1, ] <- 0
98 P[, N + 1] <- sapply(rev(S), function(x) max(K - x, 0))
99 AA <- matrix(0, M - 1, M - 1)
100 for (j in 1:(M - 1)) {
101   if (j > 1)
102     AA[j, j - 1] <- A(j)
103   if (j < M)
104     AA[j, j] <- B(j)
105   if (j < M - 1)
106     AA[j, j + 1] <- C(j)
107 }
108 optTime <- matrix(FALSE, M + 1, N + 1)
109 for (i in (N - 1):0) {
110   I <- i + 1
111   bb <- P[M:2, I + 1]
112   bb[1] <- bb[1] - A(1) * P[M + 1 - 0, I + 1]
113   bb[M - 1] <- bb[M - 1] - C(M - 1) * P[M + 1 - M, I + 1]
114   P[M:2, I] <- solve(AA, bb)
115   idx <- which(P[, I] < P[, N + 1])
116   P[idx, I] <- P[idx, N + 1]
117   optTime[idx, I] <- TRUE
118 }
119 optTime[M + 1, ] <- TRUE
120 optTime[which(P[, N + 1] > 0), N + 1] <- TRUE
121 colnames(optTime) <- colnames(P)
122 rownames(optTime) <- rownames(P)
123 ans <- list(P = P, t = t, S = S, optTime = optTime, N = N, M = M)
124 class(ans) <- "AmericanPut"
125 return(invisible(ans))
126 }
127
128
129 #crtanje mreze
130 put <- AmericanPutImp(Smax = 10, sigma = 0.3, K = 5)
131 round(put$P, 2)
132 plot(put)
133
134
135 #pr2
136 put2 <- AmericanPutExp(Smax = 10, sigma = 0.05, K = 5)
137 put3 <- AmericanPutImp(Smax = 10, sigma = 0.05, K = 5)
138
139 round(put2$P, 2)
140 plot(put2)
141
142 round(put3$P, 2)
143 plot(put3)

```



```

144
145
146
147
148
149 #Monte Carlo
150 #Broadie - Glasserman
151
152 simTree <- function(b, d, S0, sigma, T, r) {
153   tot <- sum(b^(1:(d - 1)))
154   S <- numeric(tot + 1)
155   S[1] <- S0
156   dt <- T/d
157   for (i in 0:(tot - b^(d - 1))) {
158     for (j in 1:b) {
159       S[i * b + j + 1] <- S[i + 1] * exp((r - 0.5 * sigma^2) * dt + sigma * sqrt(
160         dt) * rnorm(1))
161     }
162   }
163 }
164
165
166 upperBG <- function(S, b, d, f) {
167   tot <- sum(b^(1:(d - 1)))
168   start <- tot - b^(d - 1) + 1
169   end <- tot + 1
170   P<-S
171   P[start:end] <- f(S[start:end])
172   tot1 <- sum(b^(1:(d - 2)))
173   for (i in tot1:0) {
174     m <- mean(P[i * b + 1:b + 1])
175     v <- f(S[i + 1])
176     P[i + 1] <- max(v, m)
177   }
178   P
179 }
180
181
182 lowerBG <- function(S, b, d, f){
183   tot <- sum(b^(1:(d - 1)))
184   start <- tot - b^(d - 1) + 1
185   end <- tot + 1
186   p<-S
187   p[start:end] <- f(S[start:end])
188   tot1 <- sum(b^(1:(d - 2)))
189   m <- numeric(b)
190   for (i in tot1:0) {
191     v <- f(S[i + 1])
192     for (j in 1:b) {
193       m[j] <- mean(p[i * b + (1:b)[-j] + 1])

```

```

194     m[j] <- ifelse(v > m[j], v, p[i * b + (1:b)[j] + 1])
195   }
196   p[i + 1] <- mean(m)
197 }
198 p
199 }
200
201
202 #primjer
203 b <- 3
204 d <- 3
205 S0 <- 101
206 S <- c(101, 114, 50, 115, 74, 88, 102, 38, 47, 65, 88, 149, 116)
207 K <- 100
208 f <- function(x) sapply(x, function(x) max(x - K, 0))
209
210 lowerBG(S,b,d,f)[1]
211 upperBG(S,b,d,f)[1]

```

## Literatura

- [1] J. BERGSTRÖM, *Pricing the American Option Using Itô's Formula and Optimal Stopping Theory*, Department of Mathematics, Uppsala University, U.U.D.N. Project Report 2014:3, 2014.
- [2] J.C. HULL, *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson Prentice Hall, Hoboken, New Jersey, 7th Edition, 2009.
- [3] S.M. IACUS, *Option Pricing and Estimation of Financial Models with R*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, West Sussex, 1st Edition, 2011.
- [4] S. LALLEY, *Predavanje na temu American options*, DEPARTMENT OF STATISTICS, UNIVERSITY OF CHICAGO (SKRIPTA)
- [5] R MYNENI, *The Pricing of The American option*, THE ANNALS OF APPLIED PROBABILITY, VOL. 2, NO. 1, 1-23, 1992.
- [6] G. PESHKIR, A. SHIRYAEV, *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems* (Lectures in Mathematics, ETH Zürich), BIRKHÄUSER, ZÜRICH , 2006.



**Sažetak:**

Tema ovog diplomskog rada je primjena američkih opcija u strategijama trgovanja. Američke opcije su ugovori koji vlasniku daju pravo da do unaprijed dogovorenog vremenskog trenutka kupi ili proda neki financijski instrument, primjerice dionicu, po unaprijed dogovorenoj cijeni. U radu smo obradili osnove američkih opcija i opcijske "Grke" koji su od velike važnosti za ispravno upravljanje rizikom. Zatim smo se upoznali s često korištenim strategijama za trgovanje opcijama. Pomoću teorije optimalnog vremena zaustavljanja došli smo do rezultata koji nam mogu biti od velike koristi pri odlučivanju kada izvršiti opciju. Rad smo zaključili upoznavanjem s nekim od numeričkih metoda za određivanje cijene američke opcije.

**Ključne riječi:** američka call opcija, američka put opcija, opcijski "Grci", delta hedging, delta-gamma hedging, osnovne opcijske strategije, strategije razmaka, kombinirane strategije, optimalno vrijeme izvršenja opcije, numeričke metode za određivanje cijene američke opcije, metode razlika, Monte-Carlo simulacije

# American options application in trading strategies

## **Abstract:**

Subject of this paper is the application of American options in trading strategies. American options are contracts that guarantee a right that the owner may buy or sell a financial instrument, for example a stock, up until a predefined time for a predefined price. This paper covered the basics of American options and option "Greeks" which are of significant importance in adequate risk management. Then, we got acquainted with popular option trading strategies. Through the use of the optimal stopping time theory, we derived results that can be of great help when deciding when to exercise an option. We concluded this paper by familiarizing with some of the numerical methods for American option pricing.

**Key words:** American call option, American put option, option "Greeks", delta hedging, delta-gamma hedging, basic option strategies, spread strategies, combined strategies, optimal exercise time of an option, numerical methods for American option pricing, finite difference methods, Monte-Carlo simulations

## Životopis

Rođen sam 11. rujna 1996. godine u Našicama gdje sam pohađao Osnovnu školu kralja Tomislava te prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Isidora Kršnjavoga. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja upisujem Sveučilišni preddiplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Studij sam zaključio završnim radom na temu Kamatni račun i primjene pod mentorstvom doc. dr. sc. Mirele Jukić Bokun. Zatim upisujem Sveučilišni diplomski studij Financijske matematike i statistike, također na Odjelu za matematiku u Osijeku. Na drugoj godini diplomskog studija radim dva mjeseca kao zamjena na mjestu profesora matematike i informatike u Srednjoj školi Josipa Kozarca u Đurđenovcu. Posljednjih godinu dana zaposlen sam u PricewaterhouseCoopers Savjetovanju d.o.o. u Zagrebu kao kvantitativni analitičar u području upravljanja financijskim rizicima.