Modeliranje

Apatić, Darija

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Darija Apatić

Modeliranje

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Darija Apatić

Modeliranje

Diplomski rad
Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2016.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu bavit ćemo se modeliranjem u nastavi matematike. Konkretno, navest ćemo neke primjere i zadatake iz modeliranja namijenjene učenicima osnovnih i srednjih škola. Modeliranje možemo definirati kao otkrivanje i testiranje matematičkih prikaza ili modela stvarnih predmeta ili procesa. Kao takvo, modeliranje je važno jer matematiku učimo ponajprije da bi ju mogli upotrijebiti u svakodnevnom životu, pri učenju drugih školskih predmeta ili u radu.

U prvom poglavlju reći ćemo što je to model i nešto više o samom procesu modeliranja te o poteškoćama s kojima se kao nastavnici možemo susresti kod učenika kada se radi o procesu modeliranja. Također, navest ćemo četiri osnovna pristupa matematičkom modeliranju te dati odgovarajuće primjere.

U idućem poglavlju usredotočit ćemo se na modeliranje u osnovnoj školi te prikazati primjere koji su namijenjeni osnovnoškolskom uzrastu i koji se mogu izvesti u nastavi matematike. Neki od primjera su izvedeni, pa su uz njih navedene reakcije učenika i iskustva nastavnika.

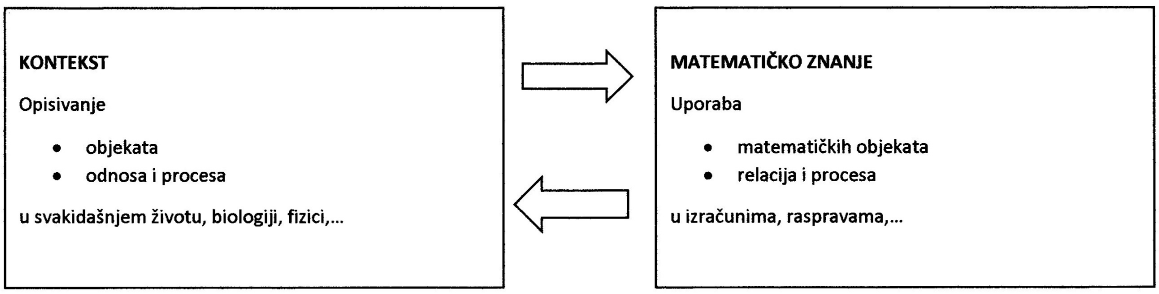
U posljednjem poglavlju ovoga rada, usmjerit ćemo se na modeliranje u srednjoj školi. Analogno, kao i za osnovnu školu, navest ćemo odgovarajuće zadatke iz modeliranja te iskustva s nastave ukoliko su zadatci rađeni s učenicima na nastavi. U ovom poglavlju, usredotočit ćemo se na modeliranje različitim funkcijama kao što su linearna, kvadratna, eksponencijalna, logaritamska te trigonometrijske funkcije.

2 Matematičko modeliranje

U ovom poglavlju reći ćemo što je to model i matematičko modeliranje. Nabrojat ćemo neke probleme koji se mogu javiti u nastavi matematike kada govorimo o procesu modeliranja te ćemo na kraju navesti osnovne pristupe matematičkom modeliranju i pobliže ih pojasniti pomoću primjera.

2.1 Model i modeliranje

Prije nego krenemo govoriti o modeliranju, reći ćemo što je to model. Riječ model ima različito značenje ovisno o kontekstu u kojemu tu riječ promatramo. Kada govorimo o matematičkom modelu onda tu mislimo na nekakav uzorak ili obrazac koji koristimo kako bi riješili matematički problem. Riječ model u matematici obično označava simboličnu ili konkretnu ilustraciju matematičkog pojma.
Matematičko modeliranje je otkrivanje i testiranje matematičkih prikaza ili modela stvarnih predmeta ili procesa. Matematičko modeliranje se može opisati kao proces od realne situacije do matematičkog modela i "natrag". Cilj matematičkog modeliranja jest da se pravi problem, problem u kontekstu, opiše na matematički način (*Slika 1.*).



Slika 1.

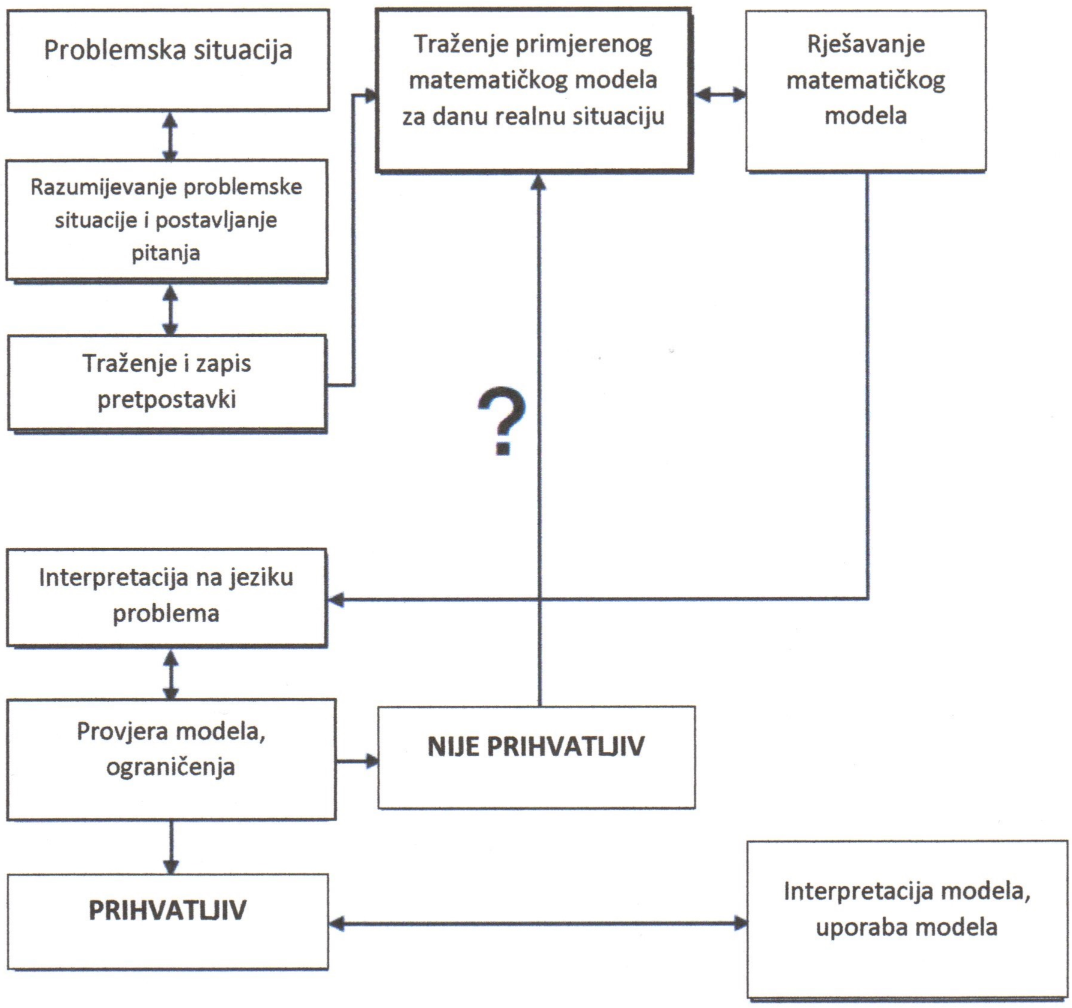
Valja naglasiti kako je modeliranje ciklički proces u kojemu povezujemo promatranu pojavu s matematičkim objektom. Zato matematičko modeliranje i jest zahtjevno jer pretpostavlja poznavanje modeliranih pojava, matematičkih alata, tehnika modeliranja i kritičko mišljenje o korištenju modela.

U nastavku ćemo navesti osnovne korake matematičkog modeliranja. Iako se na nastavi matematike često ne stignu realizirati u potpunosti svi koraci, dobro je imati na umu na što sve obratiti pažnju kada se radi modeliranje.

Koraci matematičkog modeliranja:

1. Razumijevanje i identificiranje problema.
2. Oblikovanje pretpostavki i matematička formulacija:
   (a) Prepoznavanje i klasifikacija varijabli.
   (b) Određivanje odnosa varijabli.
3. Rješavanje problema.

4. Provjeravanje dobivenog modela:
   (a) Odnosi li se model na problem?
   (b) Radi li se o smislenom modelu?
   (c) Testiranje modela na stvarnim podatcima.
5. Uporaba modela.
6. Poboljšanje modela.



Slika 2. Modeliranje kao ciklički proces

2.2 Modeliranje u nastavi

Ciljeva poduke matematike je mnogo. Da je zaista tako lako se možemo uvjeriti ukoliko pitamo nastavnike ili ako pogledamo kurikulum matematike. Pregled nastavnih planova i programa otkriva da se deklarirane namjere učenja matematike mijenjaju tijekom vremena, ali stalno treba imati na umu da matematiku učimo da bi ju mogli upotrijebiti u svakodnevnom životu, pri učenju drugih školskih predmeta, u radu. O važnosti takvog viđenja matematike govori izraz "korisni zadatci". Naziv sugerira da bi u takvim "korisnim zadatcima" učenici upotrebljavali naučene matematičke pojmove i postupke u nematematičkom kontekstu.

Kao što je već rečeno, matematičko modeliranje je zahtjevno rješavanje realnih problemskih situacija. Samim time u nastavi matematike možemo očekivati kognitivne poteškoće učenika. Tako učenici mogu imati problem u primjeni više informacija u isto vrijeme ili imati poteškoće u prepoznavanju implicitno zadanih podataka. Isto tako, učenici mogu imati problema s vizualizacijom problema, dvosmislenim tumačenjem svojih ideja u rješavanju problema ili poteškoće u provjeri i interpretaciji rješenja tj. modela. Kao nastavnici moramo biti svjesni ovih ili nekih drugih problema koji se pojavljuju kod učenika kada govorimo o modeliranju, ali i sami nastojati pomoći da bi učenici lakše napredovali i prevladali prepreke u rješavanju problema.

Osim toga, postoje prepreke u modeliranju koje se odnose na samo izvođenje nastave. Modeliranje zahtijeva dosta vremena pa se teško uklapa u jedan školski sat. Ponekad je nemoguće realizirati planirane nastavne sadržaje, a kamoli izdvojiti vrijeme za modeliranje. Sami su nastavni planovi i programi dosta opterećeni. Isto tako, teško je procijeniti kako će učenici reagirati na postavljene probleme i koliko će im vremena biti potrebno za donošenje ispravnih zaključaka. Također, nastavnik igra veliku ulogu u samom modeliranju. On, osim što mora dati dobre primjere i probleme za modeliranje, iznimno je važno da prilagodi zadatke uzrastu i mogućnostima svakog učenika. S druge strane, od učenika se traži dodatna angažiranost te interes za istraživanje.

2.3 Pristupi matematičkom modeliranju

U ovom potpoglavlju navest ćemo četiri pristupa matematičkom modeliranju i svaki od njih pobliže objasniti te dati odgovarajuće primjere iz nastave matematike.

2.3.1 Empirijski pristup

Empirijski se pristup u nastavi matematike može koristiti kada želimo utvrditi odnos među veličinama s time da su nam dani relevantni empirijski podatci. Kod ovog pristupa često prikazivanjem podataka u koordinatnom sustavu pokušavamo utvrditi funkcijsku ovisnost među danim vrijednostima.

Udaljenost [km]	3	13	23	33
Iznos [€]	1.3	2.3	3.1	4.1

Tablica 1: Ovisnost pređene udaljenosti i cijene

Primjer 1: Tablica 1 prikazuje cijenu karte u jednom smjeru. Cijena je određena udaljenošću koju autobus pređe. Kolika bi bila cijena karte za udaljenost od 20 km?

Ovaj je primjer namijenjen učenicima osnovne škole. U osnovnoj bi školi učenici koji poznaju pojam grafa funkcije problem lako mogli riješiti grafički. U koordinatnom bi sustavu ucrtali poznate točke i na neki ih način međusobno povezali. Iz dobivenog bi grafa funkcije očitali traženu vrijednost.

Idući primjer namijenjen je učenicima koji poznaju pojam funkcije i izgled nekih funkcija te znaju upotrebljavati program *Graph*.

Primjer 2: Zanima nas kako vježbanje poboljšava znanje tablice množenja. Prikupili smo sljedeće podatke:

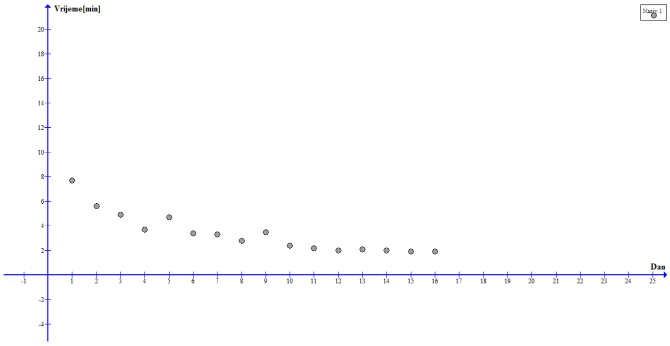
Dan	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
Vrijeme [min]	7.7	5.6	4.9	3.7	4.7	3.4	3.3	2.8	3.5	2.4	2.2	2.0	2.1	2.0	1.9	1.9

1. Grafički prikažimo dane podatake u koordinatnom sustavu.
2. S programom *Graph* pronađimo neke funkcije kojima možemo modelirati dobivene podatke (npr. linearna, kvadratna, eksponencijalna funkcija). Usporedimo dobivene modele.
3. Što na temelju podataka i dobivenih krivulja možemo zaključiti o učinkovitosti vježbe za poboljšanje tablice množenja? Kako bi dodatno potvrdili točnost izabranog modela?

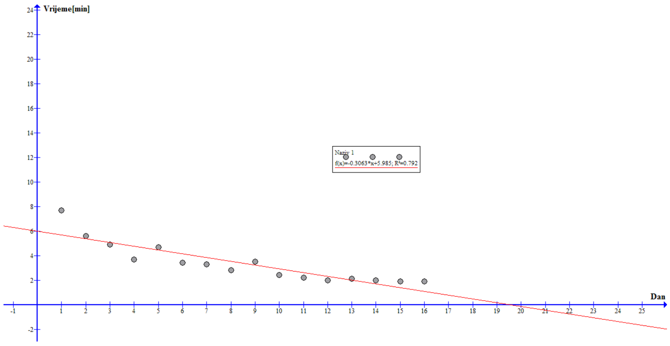
Pomoću programa *Graph* zadani problem riješimo u nekoliko koraka. Ukoliko se učenici nisu susreli s tim programom može se koristiti i neki drugi program. Kao nastavnici možemo učenike voditi kroz zadatak ili im dati napisane korake da sami izvedu traženo.

Koraci:

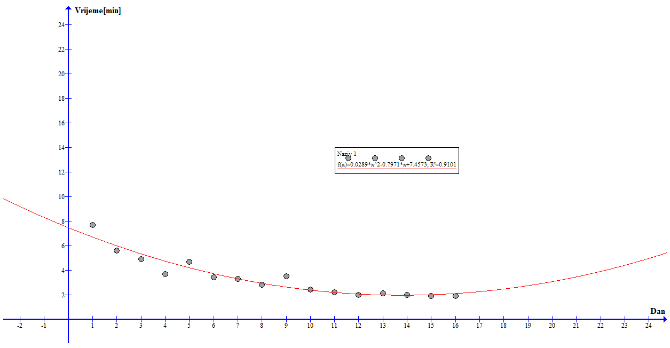
1. Unos zadanih podataka u tablicu: *Funkcije* → *Unos serije točaka* i unesemo dane podatke. Prikaz dobivenog je na *Slici 3*.
2. Testiranje različitih funkcija. Odaberemo *Funkcije* → *Unos linije trenda* i pokušamo s različitim funkcijama prilagodbe. Dolje su prikazani pokušaji s linearnom funkcijom (*Slika 4*), kvadratnom funkcijom (*Slika 5*) i polinomijalnom funkcijom (*Slika 6*).



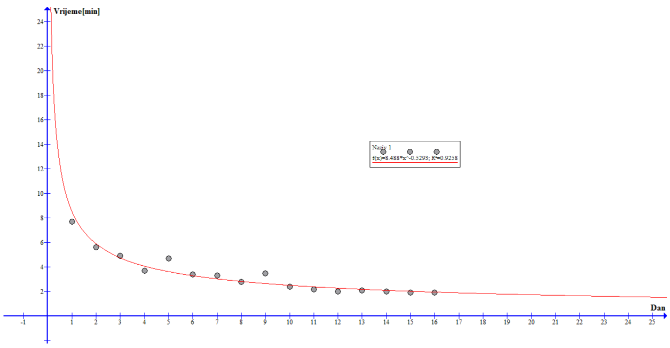
Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.



Slika 6.

Kada usporedimo modele funkcija u odnosu na ucrtane empirijski dobivene točke, možemo reći da se u određenom području svi modeli uklapaju, s nešto više točnosti kod kvadratne i polinomijalne funkcije. Ne uzimajući u obzir kontekst (realnu situaciju) ne možemo izabrati najprikladniju od navedene dvije funkcije. Obzirom na taj kontekst i dobivene podatke, dolazimo do zaključka da se najveće promjene događaju u prvim danima vježbe, a kasnije se smanjuju. To se može utvrditi promatranjem razlike između izmjerenih vremena (značajne razlike na početku, neznatne na kraju) ili promatranjem nagiba funkcije (padajuća funkcija). Možemo zaključiti i da vrijeme potrebno za množenje nikada neće biti jednako 0 minuta pa linearni model otpada. Budući je nemoguće da se dani uvježbavanja tablice množenja produlje, lako zaključujemo da kvadratni model otpada i ostaje nam model polinomijalne funkcije kao najbolji prikaz.

Nadalje, govoreći o empirijskom pristupu navest ćemo još dva zadataka koji su primjereni za učenike srednje škole kada se obrađuju linearna ili eksponencijalna funkcija.

Zadatak 1. (Analitičko uspostavljanje linearne veze među podatcima na temelju prikupljenih informacija)

Pronađimo realnu funkciju L koja modelira podatke:

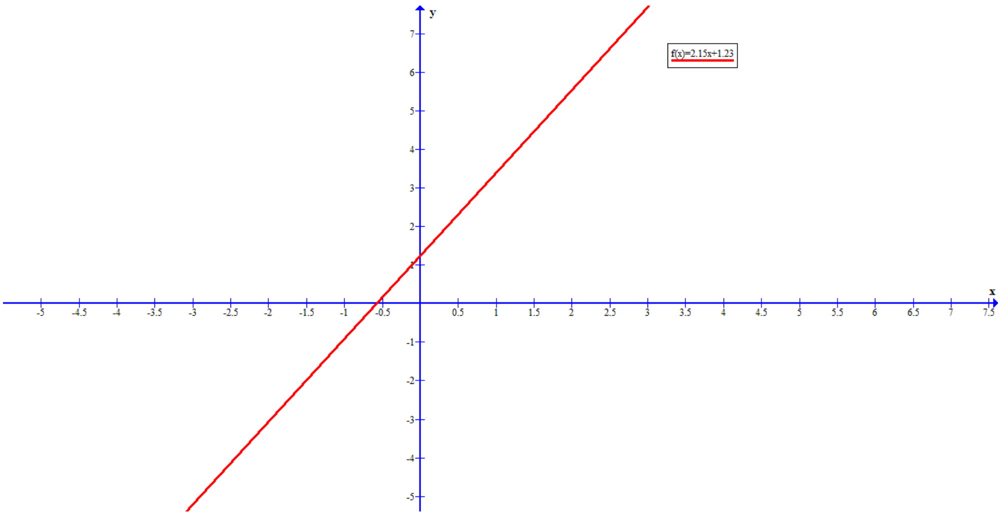
x	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	5.53	7.68	9.83	11.98	14.13	16.28	18.43

Rješenje:

Najprije u tablici dopišemo razliku $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ i na temelju toga raspravimo o prirodi funkcije:

x	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	5.53	7.68	9.83	11.98	14.13	16.28	18.43
$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15	

Lako provjerimo da za svaku linearnu funkciju $L(x) = kx + n$ vrijedi da je $\Delta L(x) = k$. Budući smo dobili da je $\Delta f(x)$ u svakom slučaju različito od nule i uvijek isto (ili približno jednako), onda naše podatke možemo modelirati linearnom funkcijom. U našem je slučaju $\Delta f(x) = 2.15 = k$ i uvrštavanjem jedne od točaka dobijemo $n = 1.23$, što zajedno daje linearnu funkciju oblika $L(x) = 2.15x + 1.23$, čiji prikaz možemo vidjeti na *Slici 7.*



Slika 7.

Zadatak 2. (Analitičko uspostavljanje eksponencijalne veze među prikupljenim podatcima)

1. Pronađimo realnu funkciju E koja najbolje modelira podatke iz tablice:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.90	2.51	3.31	4.37	5.76	7.60	10.03

2. Pomoću dobivene funkcije odredimo $f(3.5)$ i $f(10)$.

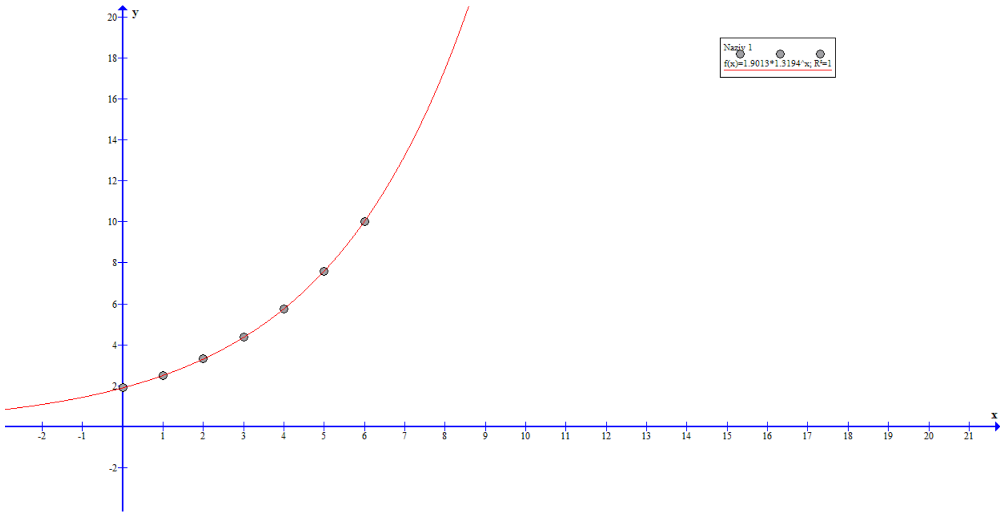
Rješenje:

1. Najprije u tablici dopišemo kvocijent $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ i na temelju toga govorimo o prirodi funkcije:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.90	2.51	3.31	4.37	5.76	7.60	10.03
$\frac{f(x+1)}{f(x)}$	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	

   Lako provjerimo da za svaku ekponencijalnu funkciju $E(x) = y_0 \cdot a^x$ vrijedi da je $\frac{E(x+1)}{E(x)} = a$, za svaki x. Međutim, kvocijenti $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ su uvijek jednaki (ili približno jednaki) i različiti od nule, pa naše podatke modeliramo eksponencijalnom funkcijom. U našem je primjeru $\frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.32 = a$, a $y_0 = 1.90$. Dobivamo eksponencijalnu funkciju $E(x) = 1.90 \cdot (1.32)^x$. Zadatak je riješen i programom *Graph* (*Slika 8*).

2. Sada možemo lako doći do odgovora na drugi dio zadatka, tj. $f(3.5) \doteq E(3.5) \doteq 5.02$, $f(10) \doteq E(10) \doteq 30.51$.



Slika 8.

2.3.2 Teorijski pristup

Teorijski pristup rabimo kada na temelju poznatih pretpostavki opisanu situaciju možemo povezati s matematičkim pojmovima te lako odgovoriti na pitanja koja nas zanimaju u vezi opisane situacije.

Primjer 1: Vertikalno postavljenu bačvu punimo vodom. Nakon jednog sata razina vode doseže $\frac{1}{3}$ bačve. Koliko vremena treba da napunimo $\frac{3}{4}$ bačve?

Prije samog rješavanja učenicima treba dati da razmisle o dvije pretpostavke. Prvo, bačva je unutra glatka i ne može se dogoditi da voda istječe dok ju mi punimo. Drugo, oblika je valjka. Zadane su dvije poznate vrijednosti, vrijeme i količina vode u bačvi, tako da lako možemo odgovoriti na traženo pitanje. Isto tako, možemo se pitati koliko je točan naš model. Ako je izračun dobar, model možemo prihvatiti, inače treba pogledati pretpostavke u modelu, a ponekad i promijeniti pristup.

Sljedeći problem namijenjen je učenicima srednje škole koji znaju riješiti sustav više jednadžbi s više nepoznanica. U ovom se primjeru konkretno radi o 4 jednadžbe s 4 nepoznanice. Također, napomenimo da je zadatak povezan s kemijom tj. određivanjem kemijske jednadžbe.

Primjer 2: Uređivanje kemijske jednadžbe općenito je za učenike izazovan zadatak jer je potrebno znati reaktante i produkte kemijske reakcije kao i paziti na zakonitosti kemijskih reakcija. U nekim slučajevima susrećemo određivanje koeficijenata ispred pojedinačnih spojeva u kemijskoj jednadžbi. Traženi se koeficijenti ponekad mogu odrediti napamet, poznavanjem relevantnih teorija u kemiji ili koristeći neke već izgrađene matematičke modele. Učenicima možemo dati da razmisle kojom bi srednjoškolskom matematičkom metodom mogli urediti sljedeću kemijsku jednadžbu:

$$H_3PO_4 + Mg(OH)_2 \to Mg_3(PO_4)_2 + H_2O.$$

Rješenje: Dobijemo sljedeći sustav linearnih jednadžbi s nekoliko nepoznanica:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 2w \\ x &= 2z \\ 4x + 2y &= 8z + w \\ y &= 3z. \end{aligned}$$

Pametan izbor bi bio staviti $z = 1$. Tada dobijemo traženu kemijsku jednadžbu tj.

$$2H_3PO_4 + 3Mg(OH)_2 \rightarrow Mg_3(PO_4)_2 + 6H_2O.$$

2.3.3 Simulacijski pristup

Simulacijski pristup koristimo kada na temelju danih pretpostavki znamo opisati samo dio pojave, a ne pojavu u cjelosti. Ponekad je na temelju toga moguće spoznati situaciju u cjelosti.

Primjer: Farmer Marko bavi se uzgojem ovaca. Ima ukupno 200 ovaca. Marko povećava stado ovaca svake godine za 20 % i odlučio je da godišnje proda 50 ovaca. Kako će se mijenjati broj Markovih ovaca?

Za rješavanje ovakvoga zadatka u osnovnoj školi možemo si pomoći simulacijom. Izračunamo koliko će Markovo stado biti nakon 1 godine, nakon 2 godine itd., kao što je prikazano u tablici:

Godina	Broj ovaca	Povećanje	Prodano	Stvarni prirast
0	200	40	50	-10
1	190	38	50	-12
2	178	36	50	-14
3	164	33	50	-17
4	146	29	50	-21
5	126	25	50	-25
6	101	20	50	-30
7	71	14	50	-36
8	35	7	50	-43

2.3.4 Dimenzijski pristup

Dimenzijska analiza odnosi se na uspostavljanje odnosa među vrijednostima obzirom na mjerne jedinice.

Primjer: Koja funkcija opisuje brzinu istjecanja neke tekućine kroz malu rupu na stijenci posude, pod pretpostavkom da je brzina $v[m/s]$ ovisna o visini otvora do površine tekućine $h[m]$ i ubrzanju $g[m/s^2]$?

Rješenje: Za rješavanje takvih zadataka uvijek pretpostavimo postojanje niza konstanti:

- uspostavljanje opće veze: $v = k \cdot g^A \cdot h^B$
- usklađenost mjernih jedinica: $\frac{m}{s} = (\frac{m}{s^2})^A \cdot m^B$
- odgovarajući eksponenti nam daju sustav

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A &= 1, \end{aligned}$$

  iz kojega dobivamo $A = B = \frac{1}{2}$

- mogući model: $v = k \cdot \sqrt{g \cdot h}$

Uzmimo da je $k = \sqrt{2}$ i tražena funkcija je $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ (u fizici je poznata pod imenom Torricellijev zakon).

3 Modeliranje u osnovnoj školi

Treba imati na umu da je matematičko znanje učenika osnovne škole dosta skromno te mi kao nastavnici ne možemo očekivati da će oni sami lako doći do nekih matematičkih modela. Zato u vezi s modeliranjem u nastavku naglašavamo neke elemente na kojima se učenici uče što je to model i kako kritički promišljati o odnosu modela i modelirane pojave.
Ti elementi su:

- interpretacija ishoda zadataka
- formiranje ograničenja: postavlja se hipoteza, utemeljuje se izabrana interpretacija
- izbor i izgradnja matematičkog modela (ovaj je aspekt manje naglašen zbog skromnijeg znanja učenika)
- interpretacija izračunatog i provjera valjanosti računa
- rasprava učenika o interpretacijama i odabiru ciljeva
- zapis postupka modeliranja
- predstavljanje modela.

Isto tako kada govorimo o procesu modeliranja na osnovnoškolskoj pa i srednjoškolskoj razini, treba naglasiti važnost pripreme učenika prije samog modeliranja. U pripremnom razdoblju učenike treba osposobiti za

- interpretaciju informacija sadržanih u tekstu
- pravljenje jednostavnih dijagrama
- čitanje podataka iz tablice
- prikupljanje, analizu i prikaz podataka
- izradu izvješća o rješavanju
- sudjelovanje u skupini
- predstavljanje zadatka, postupka rješavanja ili rješenja zadatka.

Modeliranje je u osnovnoj školi često grupna djelatnost pa zahtijeva sposobnost sudjelovanja, samim time i sposobnost suradničkog učenja. Osim toga, kod modeliranja se često pojavljuju podatci koje treba analizirati i na temelju njih izvesti neke zaključke. Na temelju toga zaključujemo da je modeliranje kompleksna djelatnost koja doprinosi razvoju brojnih kompetencija.

3.1 Postupak modeliranja u osnovnoj školi

U ovom potpoglavlju prikazat ćemo jednostavan pristup matematičkom modeliranju u osnovnoj školi. Analizirat ćemo postupak matematičkog modeliranja na sljedećem primjeru.

Primjer: Kružno dvorište želimo popločiti pločama oblika šesterokuta. Koliko ploča takvoga oblika trebamo?
U zadatku želimo analizirati odnos veličine kružnog dvorišta i broja potrebnih ploča.

1. **Interpretacija situacije.**
   Najprije si učenici moraju predočiti situaciju. Učenici trebaju u skupinama rješavati zadatak i među sobom moraju uskladiti razumijevanje sadržaja zadatka. Cilj je postići zajedničko razumijevanje, npr. oko pitanja kako popločiti kružno dvorište pločama oblika šesterokuta, kako slagati te ploče, što je zapravo popločavanje, itd.

2. **Traženje varijabli.**
   U ovom koraku nastojimo navesti sve varijable koje bi nam mogle pomoći da dođemo do modela. Pri popločavanju dvorišta osim veličine dvorišta važna je veličina ploča kojima želimo popločiti to dvorište (u ovom nas slučaju zanima duljina stranice pravilnog šesterokuta), prostor između ploča, debljina ploča, materijal, način rezanja ploča (ukoliko ih je potrebno rezati) i slično.

3. **Odluka o važnosti pojedinih varijabli. Formiranje pretpostavki.**
   Ovo je vjerojatno najvažniji korak u modeliranju. Sada trebamo razmotriti koje od varijabli su nužne za model. Mnoge varijable više ili manje utječu na pojavu, a mi odlučujemo hoćemo li ih uzimati u obzir ili ne. Možda možemo odlučiti da bi neku varijablu bilo dobro uzeti u obzir, ali se može dogoditi da ne znamo kako ju upotrijebiti. U našem slučaju uzet ćemo u obzir veličinu dvorišta (D - promjer) i veličinu ploče (a - duljina stranice pravilnog šesterokuta). Naš se model temelji na pretpostavci da se "površina ploča pretvori u površinu dvorišta".

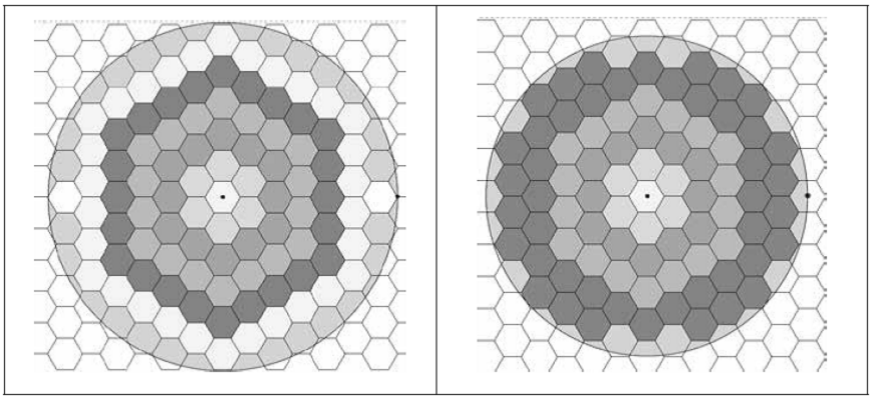
4. **Provedba u matematički objekt. Izračun.**
   Ako smo dobro odabrali varijable i formulirali pretpostavke, neće biti teško to prevesti na matematički jezik i napraviti potrebne izračune. Uz našu pretpostavku iz točke 3. račun je jednostavan. Površinu dvorišta dijelimo s površinom jedne ploče za popločavanje.
   Potreban broj ploča za popločavanje jednak je $\frac{(\frac{D^2 \cdot \pi}{4})}{(6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4})}$.

5. **Interpretacija rješenja.**
   U ovom koraku matematički izračun prevodimo u polazni kontekst. U našem primjeru rezultat predstavlja broj ploča za popločavanje.

6. **Razmatranje adekvatnosti rješenja.**
   Kada stvorimo model pažnju treba usmjeriti na područje valjanosti. Budući da smo u obzir uzeli samo neke varijable i pretpostavke potrebno je ispitati jesmo li dobili adekvatne rezultate. Kada se naš model isproba na primjeru dvorišta promjera 4 m i ploče duljine osnovice 20 cm, dobijemo rezultat 120.92 tj. 121 ploča je potrebna za popločavanje dvorišta. U stvari, kao što vidimo na slici, potrebno nam je $1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 2 = 93$ cijele ploče i 36 manjih dijelova tih ploča. Ukoliko je to

dvorište promjera 3.6 m po našem bi modelu bilo potrebno 98 ploča, odnosno, prema slici, 81 cijela ploča i 30 manjih njezinih dijelova. Možemo primijetiti kako model nije u potpunosti zadovoljavajući. Naš model je dobar kada treba odrediti koliko cijelih ploča treba za popločavanje, ali nije dobar kada treba odrediti broj manjih dijelova da bi se u potpunosti popločilo dvorište. Zato se vraćamo na točku 2. i trebamo zasebno tretirati dvije varijable: broj cijelih ploča i broj komadića potrebnih za popločavanje.

7. **Izvješće.**
   Ostaje još samo izvješće o našemu modelu, na kojim smo ga pretpostavkama utemeljili i koje smo varijable uzeli u obzir.



Slika 9. Popoločavanje kružnog dvorišta pločama oblika šesterokuta

3.2 Matematičko modeliranje u geometriji

Skup zadataka s modeliranjem koji se mogu zadati učenicima povećava se kako se proširuju znanja o geometrijskim sadržajima. U zadatcima modeliranja učenici razvijaju i jačaju geometrijske ideje te razvijaju svoje sposobnosti za istraživanje i rješavanje problema. Pogledajmo sada jedan primjer geometrijskog zadatka iz modeliranja koji je primjeren za učenike osnovnoškolske dobi. Zadatak se može zadati u okviru ponavljanja ili kao motivacija (kugla, valjak). Sličan zadatak učenicima se može zadati za različite objekte iz njihove okoline. Isto tako, većina učenika ima mobilni telefon s opcijom fotografiranja pa to možemo iskoristiti i uključiti učenike u planiranje i provođenje aktivnosti.

Primjer: Za početak, uzmimo fotografiju posude i pretpostavimo da posuda može primiti 1000 l. Zanima nas kolike su mjere posude na slici.

Slika 10. Posuda

Između ostaloga, kod ovakvih zadataka zanimaju nas i sljedeće činjenice:

- Koji su nam podatci potrebni za ovaj model?
- Kako ćemo doći do tih podataka?
- Koje pretpostavke ćemo ovdje koristiti?
- Kako bismo provjerili valjanost modela?

U nastavku ćemo prikazati nekoliko načina na koje su učenici jedne škole modelirali posudu sa slike. U prvom slučaju posuda je modelirana kvadrom, u drugom slučaju opisan je postupak modeliranja navedene posude valjkom, dok su neki učenici posudu modelirali valjkom i polukuglom.

1. Posudu modeliramo kvadrom. Izračun se temelji na procjeni sa slike. Dno posude modeliramo kvadratom duljine stranice $2r$. Uzmimo da je visina posude približno jednaka $4r$. Volumen kvadra je tada $2r \cdot 2r \cdot 4r = 16r^3$. Kad to izjednačimo s 1000 dm^3 dobijemo da je $r \doteq 4$ dm. Tada je visina približno jednaka 16 dm.
   Komentar: Opisani se model razlikuje od stvarnog oblika posude pa rezultat nije precizno dobiven.

2. Posudu modeliramo valjkom. Izračun se temelji na procjeni slike, da je visina posude približno jednaka dvostrukoj vrijednosti promjera $2r$ dna posude. Volumen je tada $r^2\pi \cdot 4r$. Kada to izjednačimo s 1000 dm^3 dobijemo da je $r \doteq 4.3$ dm, a visina približno 17.2 dm.
   Komentar: O tome je li rezultat barem donekle točan može se raspravljati obzirom na veličinu drugih objekata sa slike, npr. veličina pločica.

3. Posudu modeliramo polukuglom i valjkom. Procijenimo da je promjer kugle $2R$ približno jednak $\frac{2}{3}$ visine v, a promjer valjka je $2r$, što je približno jednako $\frac{1}{3}$ visine v.
   Izračunajmo volumen polukugle: $\frac{4\pi R^3}{6} = \frac{2}{81}\pi v^3$.
   Izračunajmo volumen valjka: $\pi r^2 \cdot \frac{2}{3}v = \frac{1}{54}\pi v^3$.
   Suma volumena iznosi $\frac{7}{162}\pi v^3 \doteq 0.0432\pi v^3$.
   Kada ukupan volumen izjednačimo s 1000 dm^3, dobijemo da je visina posude $v = 19.5$ dm. Tada je polumjer valjka jednak $r = 3.25$ dm.

Slika 11. Posudu modeliramo polukuglom i valjkom

3.3 Primjeri matematičkog modeliranja

U ovom potpoglavlju navest ćemo primjere zadataka iz modeliranja za učenike osnovne škole. Navedene aktivnosti provedene su na nastavi matematike u nekim osnovnim školama pa će tako kod svakog zadatka biti opisan sam postupak izvođenja, tj. pitanja i zadatci koji su postavljeni učenicima. S druge strane, navest ćemo vrijeme potrebno za pojedinu aktivnost, ciljeve koje želimo ostvariti, faze procesa učenja te potrebno predznanje učenika.

3.3.1 Tlocrt sobe

Za ovu aktivnost potreban je jedan školski sat. Cilj ove aktivnosti jest da učenici

- istražuju, razumiju i interpretiraju različite životne situacije
- modeliraju životne situacije, oblikuju formulu koja prikazuje danu situaciju
- interpretiraju matematičke modele
- prosuđuju valjanost modela te razmišljaju o modelu na temelju dobivenih rezultata.

Aktivnosti učenika: rješavanje tekstualnog zadatka, generalizacija, traženje modela.
Faze procesa učenja:

1. Uvod - predstavljanje problemske situacije te predlaganje načina kako riješiti problem.
2. Izvedba - rješavanje problema.
3. Odluka - razmišljanje o modelu i njegovim rezultatima.

Uvod
Kako bi učenike potaknuli na razmišljanje i traženje adekvatnih načina rješavanja problema, motivirani su pitanjem: *Kako biste da morate napravili tlocrt učionice?* Pojam tlocrt učenici bi trebali povezati s crtanjem na likovnoj umjetnosti ili tehničkoj kulturi. Kada s učenicima prokomentiramo što je to tlocrt, od njih možemo očekivati da će znati napraviti tlocrt svoje sobe.

Izvedba u razredu
Nakon kratke rasprave, učenicima je dan zadatak da naprave tlocrt svoje sobe. Kod izvođenja ove aktivnosti možemo podijeliti nastavne listiće na kojima će se nalaziti pitanja na koja očekujemo odgovor u vezi tlocrta učenikove sobe. Bitno je s učenicima prokomentirati svaki od zadataka kako bi svi učenici razumjeli što se od njih očekuje. Od učenika možemo tražiti da opišu s kojim su geometrijskim objektima nadomijestili fizičke objekte u svojim sobama te da napišu koje mjerilo su koristili. Učenici su ovaj zadatak trebali riješiti za domaću zadaću, a idući sat su predstavljena rješenja i razgovaralo se o problemima na koje su učenici naišli.

Predstavljanje rješenja
Idući školski sat svatko od učenika izložio je svoj tlocrt (to je bilo izvedivo zbog manjeg broja učenika u razredu).

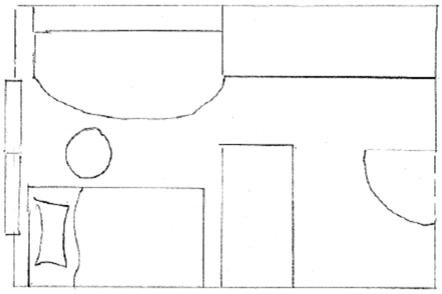
U nastavku ćemo prikazati neka od rješenja.

1. Nacrtan pravokutnik s duljinama stranica $a = 11\ cm$ i $b = 6\ cm$. Na slici je označen prozor širine 1.5 cm i vrata širine 1.1 cm. Nije navedeno mjerilo.

2. Nacrtani pravokutnici i na njima natpisi za ormar, krevet, stol, TV i napisano mjerilo 1 : 10.

3. Nacrtan pravokutnik, kvadrat i krug. Na slici napisano mjerilo 1 : 100, ali zapisano da je 1 m u stvarnosti zapravo 1 cm na papiru.

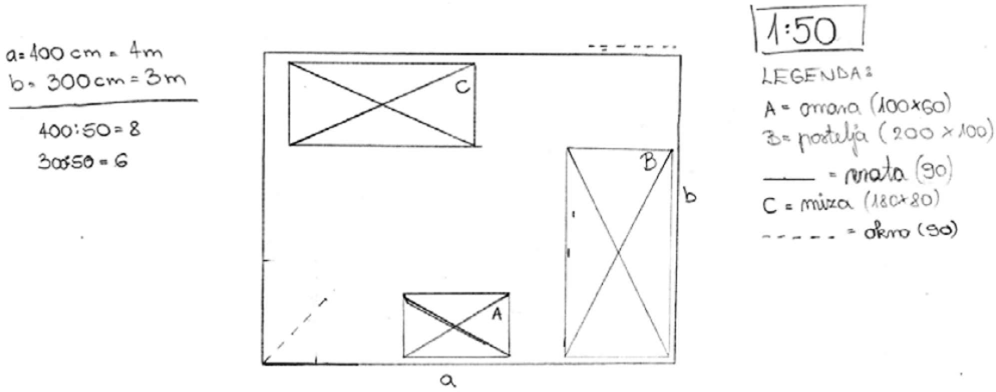
4. Nacrtana slika: (iz [1], str. 311)



Slika 12.

Uz sliku piše sljedeće: 1 cm na slici je zapravo 1 m u mojoj sobi. Dimenzije sobe su 6 $m \times 4$ m. Namještaj i predmeti su u stvarnosti malo manji. Nacrtala sam tako da sam izmjerila predmet i izmjereno pretvorila u centimetre. Fizičke objekte sam zamijenila raznim likovima.

5. Nacrtana slika (iz [1], str. 311) i oko slike zapisano:



Slika 13.

Nakon provedbe ovoga zadatka u jednoj osnovnoj školi ustanovljeno je da su i oni učenici koji inače imaju problema s matematikom pronašli odgovarajući model. Neki su ponudili i malo zahtjevnija razmišljanja, npr. mjerilo 1 : 50. Vidjelo se da su neki učenici napravili samo tlocrt sobe, a neki su crtali i još neke dodatne elemente i više se potrudili. Nakon predstavljanja rješenja svi su se složili da zadatak nije bio težak i da su ga svi uspješno riješili. Neki su imali problem s pretvaranjem mjernih jedinica. Učenica, čije se rješenje nalazi pod brojem 4., objasnila je kako su joj u sobi neki dijelovi namještaja malo manji, ali takve bi ih teško nacrtala pa je onda malo izmijenila podatke.

3.3.2 Površina ljudskog tijela

Za ovaj zadatak iz modeliranja potrebna su dva školska sata. Za ono što će u nastavku biti opisano učenicima je potrebno nešto čime će mjeriti (najbolji izbor je metar) te računalo. Potrebno predznanje koje se od učenika očekuje uključuje poznavanje geometrijskih tijela, odnosno izračunavanje njihovih oplošja i volumena. Zadatak je osmišljen za rad u skupini. U rješavanju problema prisutne su tri faze:

1. Uvod: predstavljanje problemske situacije.
2. Središnji dio:
    (a) rješavanje problema
    (b) predstavljanje rješenja
    (c) utvrđivanje valjanosti modela.
3. Zaključak: razmišljanje o modelu i njegovim rezultatima.

Ovim zadatkom želi se postići da učenici sami istražuju, razumiju i modeliraju životne situacije, interpretiraju matematičke modele, prosuđuju valjanost modela te razmišljaju o modelu na temelju rezultata.

Uvod

Kada se rade geometrijska tijela učenici obično računaju površine nekih imaginarnih likova sastavljenih od kugle, valjka, piramide,... Takvi zadatci učenicima nisu uvijek zanimljivi. Kao nastavnici trebamo se potruditi pronaći zadatke bliske stvarnom životu i na taj ih način približiti učenicima.
Tijelo s kojim se svakodnevno bavimo i koje nam je uvijek na raspolaganju je upravo ljudsko tijelo. Zato je izazov pred učenike staviti problem: *Kako izračunati površinu vlastitog tijela?*

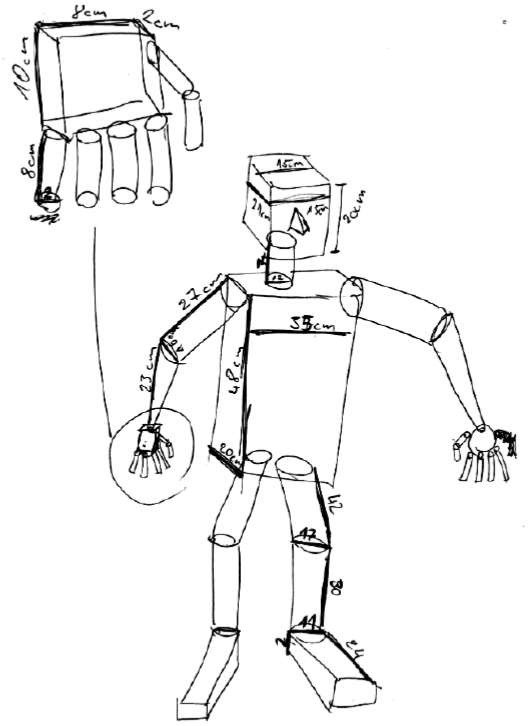
Izvedba u razredu

Uvod - predstavljanje problemske situacije

Učenicima je za početak dobro pojasniti da znanje o površini ljudskoga tijela može biti korisno kako u tekstilnoj industriji tako i u medicini. Isto tako, s učenicima je dobro prokomentirati o čemu sve ovisi površina ljudskog tijela. Pri izvođenju ove aktivnosti, učenici jedne osnovne škole na to pitanje odgovorili su da površina ovisi o visini, o tome koliko je neki čovjek debeo, odnosno mršav, o obliku tijela i o starosti čovjeka. Na pitanje kako uopće odrediti površinu čovjekovog tijela učenici su zaključili da trebamo tijelo podijeliti na dijelove i odrediti geometrijsko tijelo kojemu bi najbolje odgovarao pojedini dio tijela. Izračunali bi te pojedinačne površine i na kraju sve dobivene površine zbrojili.

Središnji dio - rješavanje problema (modeliranje)

Učenici su se podijelili u skupine po 4 učenika. Unutar svake skupine trebalo je naći dobrovoljca čiju će površinu računati. Napravljena je podjela tijela i računate su pojedine površine kao što piše u uvodu. Na slici je skica jedne od skupina.



Slika 14. Učenikova skica ljudskoga tijela (vidi [1, str. 322])

Neke skupine su glavu prikazale u obliku valjka, neki u obliku kocke, a neki kao kuglu. Vrat su prikazali kao valjak, trup kao valjak ili kvadar, a noge u obliku valjka ili stošca. Dlanove i stopala su prikazali u obliku kvadra. Za svaki dio tijela učenici su izmjerili podatke koji su im potrebni za računanje površine. Učenici su površine računali pomoću kalkulatora. Podatke su upisivali u tablice.

Predstavljanje rješenja

Sljedeći sat učenici su predstavili svoj rad koristeći PP prezentaciju. Ispostavilo se da su neke skupine razdijelile tijelo na puno manjih dijelova, dok su neke skupine tijelo podijelile na manje većih dijelova. Zato su i odstupanja bila velika, površina se kretala od 1.2 m^2 do 5 m^2. Istina je da su se i izabrani pojedinci razlikovali, ali to ne bi trebao biti razlog tako velikih odstupanja. Odstupanja su nastala zbog pogrešaka u mjerenju ili krivog računanja.

Korekcija modela

Tijekom ove aktivnosti ispostavilo se da učenici ne znaju kolika je površina ljudskog tijela pa smo tu informaciju pronašli na internetu. Dobivene površine tijela učenici su usporedili s medicinskim izračunima. Na web stranici *http://halls.md/body-surface-area/bsa.htm* postoji kalkulator za medicinski izračun površine tijela, tj. po formuli koja se koristi u medicini.

Kod nekih je skupina bila znatna razlika dobivene površine i površine izračunate tim kalkulatorom. Ispostavilo se da su najgori rezultat dobile one skupine koje su tijelo podijelile na previše manjih dijelova. Neke skupine su zaboravile oduzeti baze tijela kojima su računali površinu pa su zato dobile preveliki rezultat. Imajući u vidu nastale pogreške, učenici su zajednički formirali dolje prikazanu tablicu, tj. formirali su zajednički model kako izračunati površinu tijela. Tablica prikazuje koje dijelove tijela treba uzeti u obzir, kako ih izmjeriti te kako izračunati njihovu i zajedničku površinu.

Dio tijela	**Geometrijsko tijelo**	**Dimenzije**	**Površina**
glava	kugla	$r = ...$	$P_1 = 4\pi r^2$
vrat	valjak bez baza	opseg vrata $= ...$ $v_{vrata} = ...$	$P_2 =$ opseg vrata $\cdot v$
trup	valjak bez baza	opseg trupa $= ...$ $v_{trupa} = ...$	$P_3 =$ opseg trupa $\cdot v$
2 $\times$ ruka(od ramena do dlana)	stožac bez baze	dužina ruke; mjereno od ramena do vrhova prstiju $d_r = ...$ $r_{rame} = ...$	$P_4 = 2\pi r d_r$
2 $\times$ noga	stožac bez baze	$r_{noge} = ...$ dužina noge $d_n = ...$	$P_5 = 2\pi r d_n$
2 $\times$ stopala	kvadar	širina stopala $s= ...$ dužina stopala $d= ...$ visina stopala $v= ...$	$P_6 = 4(sd + sv + dv)$
cijelo tijelo			$P =$

Razmišljanje o modelu i njegovim rezultatima

Učenici su shvatili da je dobiveni model valjan, ali nije uporabiv u medicini. Bilo bi smisleno oblikovati bolji model koji će imati drukčije ulazne podatke, npr. visinu, težinu,... Geometrijsko modeliranje ljudskoga tijela bilo je učenicima zabavno. To je učinilo sat dinamičnijim. Sam zadatak modeliranja nije bio prezahtjevan. Učenici su se dobro snašli, osim sitnih pogrešaka koje su imali, najčešće u računu. Učenici su uspjeli samostalno pronaći modele za pojedine dijelove ljudskoga tijela.

3.3.3 Prikupljanje starog papira

Za ovu aktivnost potreban je jedan školski sat. Aktivnost se odvija u tri faze: predstavljanje problemske situacije, izvedba u razredu tj. rješavanje problema i na kraju zaključak, odnosno razmišljanje o modelu i njegovim rezultatima. Ovdje je potrebno da učenici znaju izvući podatke iz teksta, povezati ih i s njima računati te sustavno zapisati dobivene rezultate. Također je potrebno znanje računanja s realnim brojevima. Od potrebnog materijala tu je neki mjerni uređaj, PP prezentacija te nastavni listić.

Uvod

Na početku aktivnosti učenicima su predstavljeni neki matematički modeli, više ili manje slični onomu što će se u narednom zadatku od njih tražiti. S učenicima se razgovaralo o pretpostavkama modela, načinu rješavanja i mogućim rezultatima. Nakon toga, učenicima je predstavljen zadatak odnosno ono što se od njih traži.

Izvedba u razredu

Sada su učenicima podijeljeni nastavni listići na kojima se nalazi zadatak o kojemu učenici trebaju razmišljati. Potrebno ga je s njima prokomentirati kako bi svi učenici shvatili što trebaju raditi i što se od njih traži.

Zadatak: Učenici u školi prikupljaju stari papir. Za nagradu će dobiti 1000 € od nekog sponzora. Predložite kako raspodijeliti novac.
Tablica prikazuje informacije o količini prikupljenog papira i broju učenika u pojedinom razredu.

Razred	Broj učenika	Količina prikupljenog papira [kg]
6.a	23	56
6.b	25	112
7.a	21	89
7.b	22	95
8.a	26	151
8.b	23	82
5.a	19	78
5.b	21	91

Predstavljanje rješenja s analizom

Učenici su zadatak rješavali individualno. U nastavku ćemo prikazati neka rješenja učenika iz jedne osnovne škole u kojoj je ova aktivnost provedena na gore opisani način.

1. Prvo je izračunata ukupna količina prikupljenog papira, potom iznos kojega bi svaki razred dobio za kilogram skupljenog papira (1000 € $: 754\ kg = 1.326$ €$/kg$) te iznos koji bi dobio svaki učenik.

Razred	Broj učenika	Količina prikupljenog papira [kg]	Iznos po razredu [€]	Iznos za svakoga učenika [€]
6.a	23	56	74.256	3.228
6.b	25	112	148.512	5.94
7.a	21	89	118.014	5.619
7.b	22	95	125.97	5.725
8.a	26	151	200.732	5.725
8.b	23	82	108.732	4.727
5.a	19	78	103.428	5.443
5.b	21	91	120.666	5.746

2. Jedan učenik je predstavio dosta zanimljivo rješenje. Svaki razred koji ima više od 20 učenika bi dobio 100 eura, a jedan razred s manje od 20 učenika bi dobio 90 eura. Svaki učenik u razredu gdje je više od 20 učenika bi dobio 10 eura. Tako bi dobili $100 + (x - 20) \cdot 10$, gdje je x broj učenika u razredu.

Razred	Broj učenika	Količina prikupljenog papira [kg]	Iznos [€]
6.a	23	56	130
6.b	25	112	150
7.a	21	89	110
7.b	22	95	120
8.a	26	151	160
8.b	23	82	130
5.a	19	78	90
5.b	21	91	110

3. Nagrada od 1000 eura je podijeljena tako da je svaki razred dobio jednako, tj. $1000 : 8 = 125$ €.

4. Izračunata je prosječna količina papira po pojedinom učeniku u pojedinom razredu. Također, ukupna dobivena nagrada podijeljena je s prosječnom vrijednosti. Na kraju je prosječna vrijednost pojedinog razreda pomnožena s dobivenom ukupnom prosječnom količinom.

Razred	Broj učenika	Količina prikupljenog papira [kg]	Prosječna količina [kg/uč.]	Iznos za pojedini razred [€]
6.a	23	56	$56 : 23 = 2.4$	$2.4 \cdot 30 = 72$
6.b	25	112	$112 : 25 = 4.5$	$4.5 \cdot 30 = 135$
7.a	21	89	$89 : 21 = 4.3$	$4.3 \cdot 30 = 129$
7.b	22	95	$95 : 22 = 4.3$	$4.3 \cdot 30 = 129$
8.a	26	151	$151 : 26 = 5.8$	$5.8 \cdot 30 = 174$
8.b	23	82	$82 : 23 = 3.6$	$3.6 \cdot 30 = 108$
5.a	19	78	$78 : 19 = 4.1$	$4.1 \cdot 30 = 123$
5.b	21	91	$91 : 21 = 4.3$	$4.3 \cdot 30 = 129$
			$1000 : 3.3 = 30$	

5. Učenik je predstavio rješenje da se uzme zbroj učenika i količine papira. Nagrada je podijeljena zbrojem učenika i prikupljenog papira. Dobiveni kvocijent množi se zbrojem učenika i prikupljenog papira za svaki pojedini razred.

Razred	Broj učenika	Količina prikupljenog papira [kg]	Zbroj učenika i prikupljenog papira	Iznos za svaki razred [€]
6.a	23	56	$56 + 23 = 79$	$1.071 \cdot 79 = 84.609$
6.b	25	112	$112 + 25 = 137$	$1.071 \cdot 137 = 146.727$
7.a	21	89	$89 + 21 = 110$	$1.071 \cdot 110 = 117.810$
7.b	22	95	$95 + 22 = 119$	$1.071 \cdot 119 = 127.449$
8.a	26	151	$151 + 26 = 177$	$1.071 \cdot 177 = 189.567$
8.b	23	82	$82 + 23 = 105$	$1.071 \cdot 105 = 112.455$
5.a	19	78	$78 + 19 = 97$	$1.071 \cdot 97 = 103.887$
5.b	21	91	$91 + 21 = 112$	$1.071 \cdot 112 = 119.552$

Rasprava o valjanosti modela

Nakon predstavljanja modela svi su se pitali koji je model točan. Svaki učenik morao je interpretirati rješenje svog susjeda tj. razmijeniti i usporediti rješenje sa svojim susjedom. Svi su se složili da su svi modeli dobri i teško je reći koji je model bolji. Razgovaralo se i o pitanjima kao što su: *Jesu li svi učenici jednako pridonijeli? Imaju li svi iste mogućnosti?* (Neke obitelji koriste papir za grijanje pa učenici iz tih obitelji ne mogu pridonijeti skupljanju papira.)

3.3.4 Najuspješnija država na olimpijskim igrama

Za izvođenje sljedeće aktivnosti potrebno je tri školska sata, a može se ostvariti kao rad u paru ili individualni rad. Cilj ove aktivnosti jest da učenici istražuju, razumiju i interpretiraju različite životne situacije, povezuju različita područja s matematikom te rješavaju indirektne zadatke s riječima. Želimo postići da učenici modeliraju apstraktne životne situacije i procese, interpretiraju matematičke modele, prosuđuju valjanost modela te razmišljaju o modelu na temelju rezultata. Prisutno je nekoliko faza učenja:

1. Predstavljanje problemske situacije. Individualno razmišljanje ili učenička suradnja.
2. Predstavljanje rješenja.
3. Oblikovanje skupina, dijeljenje zadataka.
4. Priprema kriterija za odabranu temu.
5. Rješavanje zadatka.
6. Predstavljanje rješenja.

Predstavljanje problemske situacije
Pred učenike je postavljen problem tj. pitanje *Koja je država bila najuspješnija na OI u Pekingu?* Ovdje se od učenika tražilo da razmisle te da u bilježnicu zapišu kriterije na temelju kojih bi za neku državu tvrdili da je na OI bila najuspješnija. Nakon toga, učenici su o zapisanim kriterijima međusobno razgovarali. Nakon 10-ak minuta kriteriji su napisani na ploču.

U jednoj osnovnoj školi učenici su imali upravo gore opisani zadatak. U daljnjem tekstu navest ćemo kriterije o kojima su učenici te škole razgovarali i naveli kao ključne kriterije po kojima mogu za neku državu tvrditi da je bila najuspješnija. Isto tako, opisat ćemo i cijelu aktivnost koju su proveli učenici te škole na satu matematike.

Predstavljanje rješenja
Učenici su naveli sljedeće kriterije:

- ukupan broj medalja
- broj medalja obzirom na mjesto (brojimo države s najvećim brojem osvojenih zlatnih medalja, a ne ukupnim brojem medalja)
- sva postignuća natjecatelja neke zemlje (npr. bitno je i 4. mjesto jer je blizu osvajanja medalje)
- broj medalja obzirom na broj stanovnika
- broj medalja obzirom na površinu države
- broj medalja obzirom na broj sudionika (neka zemlja može imati malo sudionika s puno osvojenih nagrada - vrlo uspješna)
- broj medalja obzirom na BDP (bogatije zemlje više ulažu u sport)
- broj medalja obzirom na spol
- broj medalja obzirom jesu li individualna ili grupna natjecanja
- broj fair-play igrača
- napredak države obzirom na broj osvojenih medalja na proteklim OI

Ono što je ovdje bitno jest da su svi učenici utvrdili da na temelju tih kriterija ne možemo uvijek izabrati istu državu kao najuspješniju te da su svi kriteriji dobri i važni.

Oblikovanje skupina i podjela zadataka
Kao što je već spomenuto, za izvođenje aktivnosti potrebna su tri sata. Na početku drugog sata učenici su se samostalno podijelili u skupine po tri ili četiri učenika. Svaka skupina je dobila jedno od pitanja:

1. Koja nogometna reprezentacija ima najbolje šanse za osvajanje prvog mjesta na EP 2012?
2. Koje hrvatsko mjesto je najljepše za život?

3. Koji školski predmet je najpopularniji u školi?

Zadatak je bio da učenici odaberu kriterije na temelju kojih će napraviti usporedbe, da se dogovore o podatcima koje trebaju pronaći te da odluče kako će do tih informacija doći. Isto tako, važno je da se dogovore o podjeli rada i o samoj prezentaciji.

Predstavljanje rješenja

Prva skupina, koja je imala zadatak pretpostaviti koja će zemlja pobijediti na EP 2012, navela je sljedeće kriterije:

- Koja država do sada ima najviše pobjeda?
- Položaj na ljestvici međunarodnog nogometnog saveza.
- Ozljede ključnih igrača (koliko ključnih igrača ne bi igralo).
- Rezultati utakmica u bližoj prošlosti (kvalifikacije - koliko poraza/pobjeda).
- BDP države.
- Mijenjanje trenera (koliko trenera se promijenilo u 4 god).
- Vrijednost igrača obzirom na klubove u kojima igraju.

U svakom pitanju bilo je potrebno uzeti kriterije koji će se lako moći provjeriti.

Primjer sažimanja rezultata

Učenici su informacije pronašli na web stranicama (časopisa, knjiga, klubova). Pripremljene rezultate prikazali su ostalim učenicima koristeći računalo. Tako su učenici zapisali države s najviše dosadašnjih pobjeda na EP, što možemo vidjeti u tablici ispod. Isto tako, zapisali su i rangirali države koje sudjeluju na EP obzirom na njihov BDP. Također, zapisali su broj ozlijeđenih igrača koji neće igrati i broj trenera koji su se promijenili u protekle 4 godine.

Država	Broj pobjeda
Njemačka	3
Španjolska	2
Francuska	2
Nizozemska	1
Danska	1
Italija	1

Opis situacije

Nakon 10 dana, koliko su učenici imali na raspolaganju za pripremu prezentacije, predstavili su svoja rješenja tj. zaključke. Svaka skupina je predstavila svoj zadatak, izabrane kriterije, kako su i iz kojih izvora došli do prikupljenih podataka. Također, izradili su prikaze, grafove, tablice,... Prva skupina je zaključila da je teško odrediti najbolju zemlju jer ima dosta zemalja koje zadovoljavaju iste kriterije. Učenici su iznijeli informacije u opisnom obliku te se sve temeljilo na mišljenjima i nagađanjima o tome koja je zemlja najbolja. Nisu imali neki kvalitativni instrument kojim bi provjerili svoja mišljenja.

Skupina koja je imala zadatak naći najljepše mjesto unutar Hrvatske, odabrala je tri mjesta iz tri različite regije. Odluku su donijeli na temelju broja nezaposlenih, zdravstvenoj skrbi, količini otpada po stanovniku i još nekih kriterija za koje su odlučili da su ključni.

Grupa koja je trebala definirati kriterije za najpopularniji predmet u školi napravila je anketu za učenike. Ispostavilo se da ocjene ne utječu na popularnost predmeta, već najveću ulogu imaju osobnost nastavnika i sadržaj predmeta.

4 Modeliranje u srednjoj školi

Među očekivanim postignućima učenja u Nacionalnom okvirnom kurikulumu za matematiku srednje škole piše da učenik prepoznaje probleme i lako modelira problem elementarnim funkcijama. Znati modelirati znači da će moći provesti cijeli proces matematičkog modeliranja, kao što je prikazano na *Slici 2* ovoga rada. Put do tog odredišta traje sve četiri godine. Na putu do cilja učenici trebaju riješiti razne problemske zadatke, složenije i manje složene. Matematički put rješavanja problema započeo je u osnovnoj školi kada su učenici rješavali jednostavne tekstualne zadatke i druge matematičke probleme. U srednjoj školi trebali bismo nastaviti i nadopuniti postojeće učeničko iskustvo. Međutim, Nacionalni okvirni kurikulum u potpunosti nije zaživio. Nova kurikularna reforma također predviđa upotrebu modeliranja u srednjoj školi. Pravi izazov za nastavnike srednjih škola bit će kako oživjeti i aktivirati postojeće znanje učenika i kako stvoriti okruženje za učenje u kojemu će učenici moći aktivirati već stečeno znanje za potrebe modeliranja.

Realni problemi na kojima se temelji proces matematičkog modeliranja učenici lakše rješavaju ako ih vodimo kroz problem, ako imaju već strukturirane zadatke na koje trebaju odgovoriti ili ako je problem otvorenog tipa. Problemi otvorenog tipa u kojima učenik mora imati iskustva s takvom vrstom problema primjeren je za kreativne učenike. Svaki zatvoren ili strukturiran i vođen problem rješavanja zadatka lako pretvorimo u otvoreni.

Kada govorimo o modeliranju u nastavi, bitno je spomenuti i planiranje. Zašto uopće planiramo? Zato što je pisane ciljeve kojima su dodani aktivnosti za učenike, a time i za učitelja, lakše ostvariti i evaluirati. Cilj je sve ostvariti po planu i naš je rezultat, obzirom na ono što smo htjeli ostvariti, mjerilo samoevaluacije. Učitelj je taj koji planira put za postizanje cilja, dok učenik poboljšava svoju matematičku sposobnost da modelira stvarne probleme kojima razvija ciljeve učenja. Modeliranjem u nastavi želi se postići da učenik sam formulira hipoteze, mijenja ili pojednostavni pretpostavke. Bitno je postići da se svaki učenik može usredotočiti na cilj problema, transformirati problem ili preformulirati pitanje. Svaki učenik trebao bi moći prepoznati i imenovati varijable, parametre i konstante, koristiti razne reprezentacije (grafikone), koristiti ICT tehnologiju te razumjeti važnost koordinatnog sustava. Također, bitno je osposobiti učenike da povežu matematički rezultat sa stvarnim stanjem određenog problema te ocjene tj. vrednuju model.

U nastavku, analogno kao u prethodnom poglavlju, prikazat ćemo neke primjere koji su izvedeni na nastavi matematike u nekim srednjim školama u Sloveniji, a vrlo jednostavno bi se mogli implementirati i u našim školama. Navest ćemo postupak aktivnosti, pitanja na koja su učenici odgovarali kao i iskustva nastavnika koji su zadatke zadali i proveli sa svojim učenicima.

4.1 Modeliranje linearnom funkcijom

4.1.1 Gorenje svijeće

Za ovu aktivnost potreban je jedan školski sat. Prije rješavanja zadatka s učenicima je dobro ponoviti što su do sada naučili o linearnoj funkciji kako bi lakše riješili zadatak i došli do nekih zaključaka.

Ciljevi sata

Učenici će:

- nacrtati graf linearne funkcije koji najbolje opisuje dane podatke
- naći linearnu funkciju računanjem
- naći linearnu funkciju pomoću programa *Graph*
- usporediti dobivene funkcije
- upotrijebiti graf linearne funkcije u praktičnim situacijama.

Potrebno predznanje

Učenici poznaju jednadžbu linearne funkcije te znaju upotrebljavati program *Graph*.

Tijek procesa učenja

1. Predstavljanje problema
2. Rješavanje nastavnog listića
3. Zaključak

Osvrt na sat

U skladu s očekivanjima, učenici su slijedeći upute samostalno i uspješno riješili zadatak. Manjih problema bilo je s uporabom ICT-a. U izvođenju nastave primijećeno je da neki učenici nisu vješti u korištenju računalnih programa pa su trebali puno više vremena za izračunavanje linearne funkcije korištenjem programa *Graph*. Zaključak je da su svi učenici usvojili predviđene ciljeve sata, jer su bili u mogućnosti pronaći linearnu funkciju izračunavanjem i korištenjem ICT.

Opažene prednosti izvedenog sata: Učenici uče o korisnosti matematike u svakodnevnom životu i integriraju sa stečenim znanjem u nastavi informatike.

Gdje možemo očekivati prepreke: U školi, ako u razredu za matematiku nema pristupa računalnoj tehnologiji.

Mišljenja i reakcije učenika: Učenici su bili uzbuđeni i žele više takvih sati matematike jer vide korisnost u svakodnevnom životu.

Problemska situacija

Ana i Niko gledaju gorenje svijeće. Svake dvije minute zapisuju njezinu visinu.

Vrijeme [min]	Visina svijeće [cm]
0	7.5
2	7.2
4	6.6
6	6.1
8	6.0
10	5.6
12	5.0

1. Riješiti bez upotrebe računala:
   (a) Pronađite odgovarajući matematički model za gorenje svijeće. Prezentirati ga grafom i funkcijskim zapisom.
   (b) U kojem trenutku je svijeća visoka 2 cm?
   (c) U kojem bi trenutku svijeća izgorjela?
   (d) U kojem bi trenutku izgorjela svijeća visoka 10 cm?
   (e) Opiši kako si dobio rezultate.
2. Riješi upotrebom računala:
   (a) Podatke prikaži programom *Graph* i pronađi najprikladniju funkciju.
   (b) Kada će po tom modelu svijeća biti visoka 2 cm?
   (c) Kada će svijeća izgorjeti?
   (d) U kojem trenutku bi po tom modelu izgorjela svijeća visine 10 cm?
   (e) Usporedite rezultate obje metode rješavanja.
   (f) Imenuj dobivenu funkciju.
   (g) Razmisli o čemu ovisi gorenje svijeće. Svoje mišljenje i rezultate provjeri kod proizvođača svijeća.

4.1.2 Markove pripreme za maraton

Za izvođenje ovog zadatka potreban je jedan školski sat. Preporuča se izvođenje kao uvod u linearnu funkciju ili za ponavljanje usvojenih činjenica vezanih za linearnu funkciju.

Ciljevi sata
Učenici će:

- tražiti model za danu svakodnevnu situaciju
- prepoznati matematički kontekst u realnoj situaciji
- induktivno zaključivati
- razmišljati o valjanosti modela
- kritički interpretirati rezultate
- prepoznati i primijeniti linearnu funkciju.

Tijek procesa učenja

1. Predstavljanje problema
2. Rješavanje zadaće
3. Dobivanje funkcije programom Graph
4. Traženje potrebnih podataka na grafu funkcije

5. Rasprava

Osvrt na sat

Sat je napravljen na kraju poglavlja linearne funkcije. Iako se u početku može činiti da je ovo previše jednostavan primjer, za sve to je bio potreban cijeli školski sat. Sat je bio dinamičan, svi učenici su bili aktivni tijekom tog sata. Svi učenici bili su u mogućnosti odgovoriti na sva pitanja. Iako je zadatak stvarno jednostavan dobro je dati učenicima osjećaj da znaju i da mogu iskoristiti svoje znanje. Istovremeno, ovo je odlična prilika da učenici na matematici konstruktivno debatiraju i razmjenjuju mišljenja. U raspravi su oduševljeno sudjelovali i učenici koji se inače na satu matematike ne uključuju aktivno u rad.

Problemska situacija

Maratonac Marko želi sudjelovati na maratonu u Zagrebu. Budući da je ovo veliki maraton, na kojemu se mora proći udaljenost od 42 km, on bi trebao biti dobro pripremljen za taj događaj. Stoga, pažljivo smišlja plan. Odlučio je da svaki dan prođe određenu udaljenost. Pripreme će početi 1. kolovoza 2010. i pripreme će biti svaki dan bez obzira na vremenske uvjete. Prvi dan stat će nakon 2 km, a zatim svaki sljedeći dan trčat će 0.5 km više nego prvi dan. Pripreme će biti završene onog dana kada će moći proći svih 42 km. Istražite Markovu pripremu.

Rješavanje bez upotrebe računala

Razmislite o tome koliko kilometara Marko istrči prvog dana, koliko drugi dan, treći dan,... Naći model za opisivanje odnosa između pretrčane udaljenosti i vremena proteklog za pripreme.

1. Ispunite tablicu.

Dan priprema [t]	Pređena udaljenost u kilometrima [s]
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
...	

2. Koliko je kilometara Marko pretrčao 6. dan priprema?

3. Koliko kilometara je Marko pretrčao 50. dan?

4. Podatke iz tablice prikaži u koordinatnom sustavu.

5. Napiši funkciju kojom lako računaš koliku je udaljenost Marko prešao svaki dan svoje pripreme.

6. Izračunaj koliko dana traju Markove pripreme.

7. Hoće li se uspjeli pripremiti za maraton, ako je maraton u nedjelju, 24. listopada 2010., s početkom u 10.30? Odgovor opravdati!

Rješavanje upotrebom računala

1. Otvori program *Graph*.
2. Na alatnoj traci odaberite naredbu *Funkcije* te u izborniku odaberite *Unos serije točaka*. Upišite podatke iz tablice za prvih sedam dana priprema.
3. Pogledajte koja krivulja najbolje opisuje prikazan skup točaka. Opravdajte izbor. Na alatnoj traci odaberite *Funkcije* → *Unos linije trenda.*
4. Kada pronađete odgovarajuću krivulju, napišite jednadžbu svoga grafa koja je prikazana od strane programa.
5. Povećajte da biste vidjeli graf i očitajte iz grafikona:
   - Koliko dugo traju Markove pripreme?
   - Koliko je kilometara Marko prešao 80. dan?
   - Mislite li da je model realan čak i ako Marko nastavi s pripremama nakon isteka maratona? Odgovor opravdati.

Rasprava i kritička procjena dobivenog modela

1. Na temelju svog modela procijeni koliko kilometara Marko prođe 100. dan ako priprema nije prekinuta.
2. Kritički razmisli o granicama danog modela.
3. O određenom problemu razgovarati s profesorima tjelesnog odgoja.
4. U grupi govoriti o pretpostavkama na kojima je stvoren model.

4.1.3 Kosi toranj u Pisi

Cilj ove aktivnosti jest da učenici primjer iz svakodnevnog života modeliraju linearnom funkcijom. Isto tako, važno je da učenici procjene valjanost modela te razviju kritički odnos prema informacijama i podatcima. Kod ove aktivnosti potrebno je da učenici znaju oblik linearne funkcije i njezin graf. Zadatak je moguće napraviti tako da učenici samostalno rješavaju listić i pronađu odgovarajući model. Kada završe, nastavnik uz sudjelovanje učenika može s programom *Graph* naći funkciju kako bi učenici dobiveno usporedili s onim što su oni dobili bez upotrebe tehnologije. Ako ima dovoljno računala u učionici, učenici mogu napraviti sami taj zadnji dio. Što se tiče međupredmetne povezanosti, sat može biti povezan s fizikom. Učenici mogu izračunati pri kojoj nagnutosti bi se toranj mogao srušiti.

Problemska situacija

Romantični zvonik katedrale u Pisi, koji je poznat u svijetu kao Kosi toranj, čudo je arhitekture. Građen je između 1173. i 1370. godine. Već 1178. godine, kada je podignut treći kat, nagnuo se zbog pješčane podloge. Kroz povijest, u više navrata, pokušao se riješiti problem tj. zaustaviti naginjanje, što je više ili manje bilo uspješno. Stručnjaci su zabrinuti da će građevina biti uništena.

Tablica u nastavku prikazuje nagib tornja između 1975. i 1987. godine. Nagnutost označava udaljenost između mjesta na kojem bi toranj trebao biti u uspravnom položaju i mjesta gdje se zapravo nalazi. Nagnutost je dana u centimetrima.

Godina	Nagnutost [cm]
1975	296.42
1976	296.44
1977	296.56
1978	296.67
1979	296.73
1980	296.88
1981	296.96
1982	296.98
1983	297.13
1984	297.17
1985	297.25
1986	297.42
1987	297.57

1. Nacrtaj dijagram ovisnosti nagnutosti tornja i vremena.
2. Nacrtaj graf funkcije koja najbolje opisuje dane podatke.
3. Iz grafa iščitaj i ispiši sljedeće informacije:
    (a) Za koliko će centimetara toranj biti nagnut 1993. godine?
    (b) Kada će po tom modelu biti nagnut 2.9800 m?
    (c) Za približno koliko vremena se nagne za 1 cm?
4. Što mislite o ovom modelu (o njegovoj korisnosti)?
5. Zapiši funkciju koja najbolje odgovara danim podatcima.
6. Stručnjaci su otkrili da će se toranj srušiti ako je nagib veći od 302.5 centimetara. Korištenjem modela (pravila) procjeni u kojoj godini će se to dogoditi.
7. Godine 1918. izmjeren je nagib tornja od 290.71 cm. Provjerite odgovara li izmjerena vrijednost tvojoj izračunatoj vrijednosti po modelu. Zašto?

8. S programom *Graph* prikaži dobivenu funkciju koja modelira podatke.

Zanimljivosti:

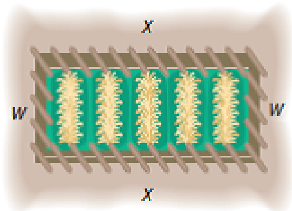
- Stručnjaci su otkrili da će se toranj bez sanacije srušiti oko 2040. godine. Već 1990. godine zabranjen mu je pristup iz sigurnosnih razloga. Između 1990. i 2001. građevina je prvi puta obnovljena. Ispod su iskopali 38 m^3 pijeska i zamijenili ga s armiranim betonom. Nagib je smanjen za 45 cm.
- U 2008. godini toranj je posljednji put obnovljen. Svjetski poznati Kosi toranj po prvi put u svojoj 800-godišnjoj povijesti prestao se naginjati. Stručnjaci predviđaju da se više neće naginjati najmanje 200 godina. Unatoč uspjehu, toranj sada više ne spada među svjetska arhitektonska čuda.

4.2 Modeliranje kvadratnom funkcijom

U ovom potpoglavlju navest ćemo jedan zadatak iz modeliranja kvadratnom funkcijom. Zadatak je namijenjen učenicima srednje škole koji su upoznati s pojmom kvadratne funkcije. Uz zadatak dano je i rješenje.

4.2.1 Postavljanje ograde

Farmer ima 2000 jardi[1] ograde kojom želi ograditi što veće područje pravokutnog oblika. Koje su dimenzije područja koje je farmer ogradio?



Slika 15.

Rješenje: Slika 15. ilustrira situaciju koju imamo u zadatku. Zadanih 2000 jardi predstavlja opseg pravokutnika, tj. pravokutnog dvorišta koje treba ograditi. Ako s x označimo dužinu, a s w širinu, onda imamo

$$2x + 2w = 2000. \tag{1}$$

Površina područja koje računamo izračunava se po formuli

$$P = xw. \tag{2}$$

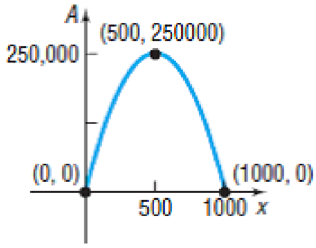
Nadalje, ukoliko iz (1) izrazimo w, dobijemo

$$w = 1000 - x. \tag{3}$$

Ako sada izraz dobiven u (3) uvrsimo u (2) dobivamo kvadratnu funkciju ovisnu o x. Točnije, dobili smo $P(x) = -x^2 + 1000x$.

[1]Jard je osnovna angloamerička mjerna jedinica za duljinu. Jard iznosi 3 stope, a to je 0,9144 metara.

Kada dobijemo kvadratnu funkciju, uvijek je dobro s učenicima prokomentirati oblik kvadratne funkcije i nazive njezinih koeficijenata te doći do zaključaka, kao ovdje, da je $a = -1$, $b = 1000$, a $c = 0$, ukoliko govorimo o kvadratnoj funkciji oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$. Na *Slici 16* prikazan je graf funkcije $P(x) = -x^2 + 1000x$.
Maksimum funkcije dobivamo kao $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{1000}{-2} = 500$. Vrijednost funkcije u točki maksimuma iznosi 250 000, što zapravo za nas znači da će maksimalne dimenzije ograđenog dvorišta biti 500×500 jardi.



Slika 16.

4.3 Modeliranje eksponencijalnom funkcijom

4.3.1 Trening trčanja

Kod ovog zadatka predviđeno je dati učenicima da prvo za zadaću riješe listić Trening 1 i potom s njima zajedno napraviti nešto kompliciraniju verziju zadatka tj. Trening 2. Za izvođenje je potrebno dva sata, jedan za pregled i razgovor o zadaći, a drugi za rješavanje problema Trening 2. Ovim zadatkom cilj je pronaći model za danu situaciju, izvesti linearni i eksponencijalni model te usporediti dobivene rezultate sa stvarnim podatcima. Važno je da su učenici riješili listić Trening 1 koji je priprema za teže zadatke modeliranja.

Izvedba
Ovaj zadatak se može rješavati čim su učenici savladali osnovne pojmove funkcije. U rješavanju domaće zadaće Trening 1 učenici nisu imali problema. Poželjno je pregledati zadaću svim učenicima u razredu, jer ako se netko negdje zabunio ili mu nešto nije bilo jasno, neće moći pratiti u nastavku. Za rješavanje sljedećeg dijela, Trening 2., bio je potreban cijeli sat. Učenici su zadatak rješavali samostalno, a dok su zapeli do rješenja su najčešće dolazili u razgovoru sa susjedima. Prvo su rješavali samo prva četiri pitanja. Za prva tri je bilo za očekivati da će svi znati odgovor, dok je četvrto namijenjeno bržim učenicima. Pregledana su rješenja za prva tri zadatka, pokazalo se da četvrti nije uspio riješiti gotovo nitko. Nakon toga su nastavili rješavati ostale zadatke, opet samostalno. Nakon šestog zadatka, ponovno su zajednički prekontrolirali rješenja. Sedmi i osmi zadatak riješili su zajednički.

U sklopu ovoga zadatka, učenici su predlagali različite načine rješavanja:

- pokušaji (pravimo tablicu sve dok ne dobijemo rješenja)
- grafička rješenja
- rješavanje jednadžbi.

Učenici su Darkove pretrčane kilometre opisali funkcijom $D(x) = 5 \cdot (\frac{6}{5})^x$ ili $D(x) = 5 \cdot (1.2)^x$. Onda su se pitali što će biti s funkcijom ako se broj pređenih kilometara poveća za 10%, 5%, 32%, 1%, 0.23% ... Brzo su shvatili da je decimalni zapis jednostavniji. Vrlo je važno da se u dugoročnim zadatcima (više školskih sati), kao što je prikazano ovdje, više puta provjeri jesu li svi učenici svladali planirane ciljeve, u suprotnom se može dogoditi da to utrošeno vrijeme nema koristi.
Učenici su otkrili da je problem kod izvršavanja zadatka bio u površnom čitanju zadataka. Ispostavilo se da im je teško pisati odgovore u rečenicama, više vole pisati odgovor na matematičkom simboličkom jeziku. Kod izvođenja ove aktivnosti učenici su bili zainteresirani pa je znanje stečeno u modeliranju provjereno.

Trening 1

Ana i Borna se pripremaju za natjecanje u trčanju. Ana je odlučila u prvom tjednu pretrčati 10 kilometara, a onda svaki sljedeći tjedan kilometar više. Borna je odlučio u prvom tjednu pretrčati tek četiri kilometara, a zatim povećavati po dva kilometra tjedno.

1. Podatke o pretrčanim udaljenostima unesite u tablicu:

	1.tjedan	2.tjedan	3.tjedan	4.tjedan	5.tjedan
Anin put					
Bornin put					

2. Gornje podatke prikažite grafički.
3. Ovisnost broja pretrčanih kilometara o tjednima treninga, za Anu, prikazati funkcijom.
   - Imenujte nezavisnu varijablu x i zavisnu varijablu $A(x)$ iz zadatka.
   - Zapišite funkciju $A(x)$.
4. Zapišite funkciju $B(x)$ koja prikazuje Bornin put u ovisnosti o varijabli x.
5. U kojem tjednu treninga će Borna i Ana pretrčati isti broj kilometara?
6. Cvjetka se priprema za natjecanje. Počela je sa 6 km trčanja tjedno, a povećava put za 1.6 kilometara na tjedan. Tablicom prikažite koliko su kilometara prošle Ana, a koliko Cvjetka u svakom tjednu.
7. Zapišite funkciju $C(x)$ koja opisuje Cvjetkino trčanje.
8. U kojem će tjednu Ana i Cvjetka pretrčati jednako kilometara?
9. Kako bi pokazali u kojem će tjednu Cvjetka pretrčati više kilometara od Ane?

Trening 2

Ana i Darko se pripremaju za natjecanje u trčanju. Ana je odlučila u prvom tjednu trčati 10 kilometara, a zatim svaki sljedeći tjedan kilometar više. Darko je odlučio najprije trčati 5 kilometara, a onda povećavati 20% tjedno.

1. Podatke o pretrčanim udaljenostima Ane i Darka prikažite tablicom.

2. Podatke prikažite grafički.

3. Usporedite dobivene grafove. U čemu je razlika?

   Pretpostavimo da je Darko istrčao prvi tjedan a kilometara, a svaki sljedeći tjedan povećao istrčanu udaljenost za 20%. Ispunite tablicu.

	1.tjedan	2.tjedan	3.tjedan	4.tjedan	5.tjedan	...	x-ti tjedan
Darkov put							

   Funkciju koja opisuje Darkovo trčanje označimo s $D(x)$, gdje x predstavlja redni broj tjedna. Koliko su $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$, $D(5)$, $D(x)$?

4. Napišite funkciju $D(x)$ koja opisuje Darkovo trčanje u skladu s početnom pretpostavkom da je Darko prvo istrčao 5 kilometara.

5. U kojem tjednu će Darko imati više pređenih kilometara od Ane?

6. Natjecanje će biti u 12. tjednu. Koliko su kilometara Ana i Darko pretrčali tjedan prije utrke?

7. Što mislite o Darkovim sposobnostima na temelju funkcije koja opisuje Darkovu obuku?

8. Napišite nekoliko pretpostavki koje smo uzeli u obzir pri rješavanju ovog primjera?

4.3.2 Šalica kave

U sklopu eksponencijalne funkcije možemo napraviti sljedeću aktivnost za koju nam je potrebno dva školska sata, jedan za prikupljanje, a drugi za obadu prikupljenih podataka. U okviru ovih sati učenici će modelirati primjer iz svakodnevnog života eksponencijalnom funkcijom, samostalno identificirati varijable i zavisnosti među njima, procijeniti valjanost modela, kritički interpretirati rezultate i razviti kritički stav prema informacijama i podatcima. Za uspješno izvođenje ovih sati potrebno je da učenici poznaju eksponencijalnu funkciju te znaju osnove programa *Graph*, tj. da znaju ucrtati točke, urediti svojstva osi, napraviti graf koji najbolje odgovara slijedu točaka te procijeniti izabranu funkciju.

Tijek procesa

1. Postavljanje problema.

2. Prikupljanje podataka.

3. Rješavanje problema.

4. Razgovor o dobivenom (pretpostavke, procjene i interpretacija modela, upotreba modela, proširenje problema).

Preporučen tijek aktivnosti

Tijekom prvog sata učenici prate promjenu temperature kave iz školskog automata. Mjere svake četiri minute i bilježe podatke. Također, mjere temperaturu okoline. Učenici drugi sat samostalno traže odgovarajući model s odgovarajućim programom u računalnoj učionici.

Postavljanje problema
Učenici razgovaraju o problemu i mjerenjima koje će se provoditi. Učenici imenuju varijable, razmišljaju o oznakama koje će uzeti u obzir i organiziraju evidenciju mjerenja i očekivani graf (najava očekivanog rezultata, padajuća funkcija).

Kontekst situacije
Povezanost s fizikom. Jednadžba hlađenja: $T(t) = T_o + (T_k - T_o)e^{-kt}$, gdje je t - vrijeme, T_o - temperatura okoline, T_k - temperatura kave na početku mjerenja, k - pozitivna konstanta, $T(t)$ - temperatura kave u trenutku t.

Osvrt na sat
Ako nema vremena da se provedu mjerenja, mogu se koristiti već postojeći podatci. Međutim, najbolje je samostalno izmjeriti svoje podatke. Samo na taj način učenici postaju svjesni da su modeli u našem okruženju. Poznavanje programa *Graph* nije potrebno. Dovoljno je da nastavnik prije rada u računalnoj učionici s učenicima pregleda temeljne programske naredbe. Preporuča se da svaki učenik radi na svom računalu. Učenici su bili vrlo uzbuđeni jer se sat razlikovao od drugih sati, posebno zbog mjerenja temperature kave. Čak i za vrijeme mjerenja većina učenika je pretpostavila da se radi o padajućoj eksponencijalnoj funkciji. Učenici na pitanja koja nisu "tipična matematička" i odnose se na drugi predmet nerado odgovaraju (npr. Što se može napraviti kako bi kava iz automata još dugo vremena ostala vruća?). Čini se da bi u matematici trebalo manje računati, a više opravdavati i tumačiti. Kao što je već navedeno, sat može biti povezan s fizikom (jednadžba hlađenja).

Problemska situacija
Mjerili smo temperaturu kave iz školskog automata. Zanima nas za koliko se vremena temperatura kave spusti do sobne temperature? Napraviti tablicu mjerenja i promatrati vrijednosti varijabli.

1. Imenujte varijable.
2. Koje svojstvo funkcije je najprepoznatljivije u mjerenjima?
3. Koja od funkcija bi po tvom mišljenju najbolje opisivala mjerenja?

   Upotrijebi program *Graph*:

4. Koja je funkcija po tvom mišljenju najprikladnija? Objasni.
5. Prepiši funkciju koju ispiše program.
6. Kolika bi po tvom mišljenju bila temperatura kave nakon 5 sati od početka mjerenja?
7. Kolika je temperatura po tvom modelu 5 sati nakon početka mjerenja?
8. Razmislite o mogućim mjernim pogreškama koje bi mogle utjecati na rezultat?
9. S grafa očitaj:
   - Za koliko se kava ohladi na temperaturu od 40 stupnjeva?
   - Kolika je temperatura kave nakon jednog sata?

10. Za koliko se stupnjeva ohladila kava
    - prvih 5 min?
    - između 5-te i 10-te minute?
    - između 40-te i 45-te minute?
11. Što se događa s funkcijom na tim intervalima?
12. Može li kava iz našeg automata prouzročiti opekline?
13. Što biste učinili da kava iz stroja ostane što dulje vruća?
14. Navedite čimbenike koji utječu na brzinu hlađenja kave.

Zanimljivost: 1992. godine, 79-godišnja Stella Liebeck tužila je Mc Donald's za opekline koje su uzrokovane kavom kupljenom u jednom od njihovih restorana. Liebeckova je od prolivene kave, koja je imala između 80^0C i 90^0C, dobila opekline trećeg stupnja. Kava koja ima više od 68^0C može uzrokovati opekline. Ona je dobila naknadu od 2.7 milijuna dolara. Od tada, većina restorana služi kave ohlađene na oko 68^0C, iako kava ima najbolji okus na temperaturi od 80 do 90 stupnjeva.

4.4 Modeliranje logaritamskom funkcijom

U nastavku, kao i do sada, prikazat ćemo neke primjere koje je korisno napraviti s učenicima na nastavi kada se obrađuje, u ovom slučaju, logaritamska funkcija.

4.4.1 Prirodno čišćenje jezera

Za izvođenje ove aktivnosti potrebna su nam dva školska sata. Ciljevi koje na ovim satima želimo postići jest da učenici prepoznaju i razlikuju eksponencijalnu ovisnost od drugih vrsta ovisnosti te znaju upotrijebiti svojstva eksponencijalne funkcije i slijedeći upute dobiti eksponencijalni model.

Potrebno predznanje

- Učenici poznaju definiciju funkcije, znaju svojstva različitih funkcija (ponajprije eksponencijalne i linearne), te znaju prikazati njihove grafove.
- Znaju upotrijebiti vezu eksponencijalne i logaritamske funkcije te pravila za računanje s logaritmima.
- Znaju riješiti eksponencijalnu jednadžbu i sustav jednadžbi.
- Znaju praktično računati na kalkulatoru s logaritmima i potencijama.

Tijek procesa učenja

1. Predstavljanje problema
2. Rješavanje problema: učenici rješavaju nastavne listiće u parovima
3. Pregled rješenja, rasprava

Problemska situacija

Od ispuštanja otrovnih tvari iz postrojenja u jezero ono je postalo vrlo zagađeno. Nakon zatvaranja tvornice jezero je prirodno očišćeno. Jezero je dio lanca jezera spojenih na rijeci. Svaki mjesec određeni postotak vode u jezeru se isuši i zamijeni kombinacijom čiste vode iz gornjih jezera i kiše (pretpostavljamo da kiša nije zagađena). Jezero se tako prirodno očisti. Preliminarna ispitivanja sažeto su prikazana u tablici.

Vrijeme x [mjesec]	Onečišćenost y [ppm]	log y
1	20	
5	13.1	
10	7.5	
15	4.6	
20	2.7	

1. Napravite graf onečišćenosti u ovisnosti o vremenu.
2. Nacrtajte graf funkcije koja se prilagođava danim podacima (ne mora graf nužno proći kroz sve točke) i odgovara opisanom problemu (odabrati graf linearne, eksponencijalne ili logaritamske funkcije).
   Koja (jedna ili više) od navedenih funkcija po vlastitom nahođenju odgovara opisanom problemu? Objasniti.
   Izabrali ste funkciju. Kako ste se odlučili za jednu od funkcija?
3. U tablici popunite zadnji stupac. Zaokružite na jedno decimalno mjesto.
4. Nacrtajte graf logaritamske funkcije.
5. Računski dokažite da iz $y = a \cdot b^x$ slijedi $logy = loga + xlogb$.
6. Pojasnite jednakost iz 5. Kakva je veza između varijabli x i $logy$ (linearna, eksponencijalna, logaritamska)?
7. Je li vaša pretpostavka pod 2. ispravna? Ako nije, popravite ju. Siječe li graf odabrane funkcije os x? A os y?
8. Pretpostavimo da je odgovarajuća funkcija eksponencijalna funkcija $y = a \cdot b^x$. Na temelju prikupljenih podataka u tablici, izračunajte konstante a i b (na dvije decimale) te zapišite dobivenu funkciju.
9. Korištenjem dobivene funkcije izračunati (na jednu decimalu):
   - onečišćenje nakon osam mjeseci
   - onečišćenje nakon 30 mjeseci
   - onečišćenje nakon 5 godina
   - početno onečišćenje (u trenutku t = 0).
   - Kada je onečišćenje manje od 0.5 ppm? To je onečišćenje koje omogućuje kupanje u jezeru!
   - U kojem je trenutku onečišćenje smanjeno za pola?
10. Ova vježba je bila jednostavna ili teška? Zašto? Što je bilo jednostavno, a što zahtjevno? Je li vam vježba bila zanimljiva? Napišite zašto.

4.5 Modeliranje trigonometrijskim funkcijama

4.5.1 Temperatura zraka u Osijeku

Kroz ovaj zadatak učenici će:

- upotrijebiti tehnologiju za učinkovitije rješavanje problema
- upotrijebiti različite izvore (podatci na internetu)
- modelirati podatke funkcijom sinus
- bez uporabe tehnologije iz podataka dobiti jednadžbu funkcije sinus

- u programu *Graph* prikazati dobivenu funkciju
- predvidjeti vrijednost temperature u budućnosti
- razviti kritički odnos prema rezultatima (razvijanje kritičkog mišljenja)
- podizanje svijesti o okolišu i ekologiji - što utječe na temperaturu
- procijeniti svoj rad.

Potrebno predznanje

- znati svojstva funkcije sinus
- znati kako nacrtati graf funkcije sinus
- iz danog grafa odrediti konstante (amplituda, period, pomak funkcije u smjeru osi apscisa i ordinata)
- biti u mogućnosti koristiti Internet kao izvor informacija
- znati kako koristiti program *Graph*

Tijek procesa učenja

1. Uvod - ponavljanje svojstava funkcije sinus.
2. Pretraživanje podataka na web stranici.
3. Rješavanje zadataka bez korištenja ICT-a.
4. Rješavanje zadataka pomoću ICT-a.
5. Rasprava o rješenjima i evaluacija rada.

Osvrt na sat

Učenici su proveli dva sata u računalnoj učionici. Sat prije izvođenja ove aktivnosti napravljen je tako da su programom *Graph* crtali funkciju sinus, projicirali ih na ploču, a učenici su za svaku nacrtanu funkciju u bilježnice pisali odgovarajuće jednadžbe. Učenici s tim nisu imali problema. Potom su za svaku funkciju odredili konstante, njezinu amplitudu, period, pomak.

U računalnoj su učionici učenici radili u paru zbog nedostatka računala. Nakon uputa, samostalno su riješili listić, pri čemu su koristili Internet kako bi dobili informacije i program *G*raph (program se koristi od prve godine pa im nije bio nepoznat). Tu i tamo bila im je potrebna pomoć, ali većinu posla su obavili samostalno.

Učenici su bili vrlo zadovoljni provedenom aktivnošću. Osobito im je bilo drago da sada imaju stečena znanja iz matematike koja se primjenjuju u realnim situacijama. Neki su otkrili da su radili pogreške jer nisu dobro ocijenili konstante krivulje i stoga su se pogoršale prognoze srednje mjesečne temperature u nadolazećim mjesecima.

Problem na koji možemo naići jest buka, ukoliko u razredu ima previše učenika i svi glasno govore, a da to sami ni ne primjećuju.

Problemska situacija

Ljeto! Doba godine kojemu se svi veselimo. Odmor, more, vrućina, prve su asocijacije na ljeto. Nakon nje dolazi jesen, s njom škola i nešto niže temperature. Neki se vesele i zimi. Jedva čekaju skijanje i hladnoća im ne smeta. Proljeće je lijepo, priroda se budi, temperatura zraka polako raste. Znamo da će se ljeto, jesen, zima i proljeće ponoviti, a s njima i razni događaji i temperatura zraka. Istražite kako se mijenja prosječna mjesečna temperatura tijekom godine u Osijeku.

Zadatak 1.

Kako zovemo pojavu da se događaji u određenim razdobljima ponavljaju? U tablici napiši svoju procjenu prosječne temperature zraka u Osijeku za pojedini mjesec.

Redni broj mjeseca	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Prosječna temperatura [^{0}C]												

Zadatak 2.

Na web stranici Državnog hidrometeorološkog zavoda pronađi podatke o prosječnim mjesečnim temperaturama zraka u Osijeku za razdoblje od siječnja 2005. do ožujka 2006. godine.

Zadatak 3.

Usporedite svoje procjene iz zadataka 1. s informacijama koje ste dobili na web stranici. Koliko dobro ste procijeniti prosječnu mjesečnu temperaturu zraka u Osijeku?

Zadatak 4.

1. Podatke grafički prikazati u koordinatnom sustavu. Imenovati koordinatne osi.
2. Razmislite koja krivulja najbolje odgovara podatcima.
3. Nacrtajte krivulju koja najbolje odgovara podacima.
4. Izračunajte jednadžbu krivulje.
5. Iz jednadžbe krivulje izračunajte prosječne mjesečne temperature zraka u Osijeku u svibnju 2006. i prosincu 2007. godine. Rezultate usporedite s podacima koje ste pronašli za ta razdoblja na web stranici. Što ste saznali?

Zadatak 5.

Podatke o prosječnoj mjesečnoj temperaturi zraka u Osijeku prenesite u program Graph i nacrtajte niz točaka. Nađite krivulju koja najbolje odgovara podatcima. Ako nije među ponuđenima, odaberite vlastitu krivulju. Koliko dobro krivulja odgovara podatcima? Napišite jednadžbu dobivene krivulje. Usporedite rezultat s jednadžbom krivulje koju ste izračunali.

Zadatak 6.

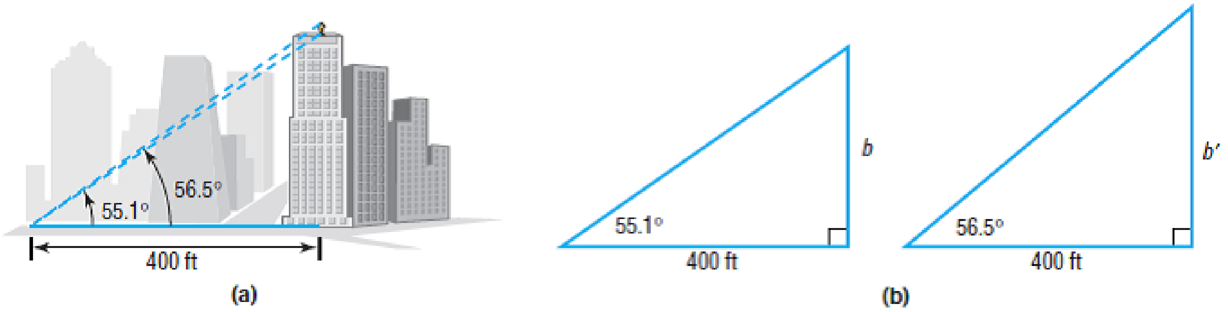
Nađite primjere iz života koje možete modelirati trigonometrijskim funkcijama.

Zadatak 7.- evaluacija

Što sam naučio?
Gdje sam bio najuspješniji?
Nisam uspio ...
Uzrok mog problema je ...
Što trebam poboljšati?
U budućnosti želim raditi individualno s nastavnim listićem jer ...

4.5.2 Visina kipa

Na vrhu Board of Trade Building u Chicagu nalazi se kip božice Ceres, rimske božice pšenice. Od mjesta s kojega promatramo kip do centra zgrade na kojoj se kip nalazi ima 400 stopa[2]. Kut elevacije do baze kipa iznosi 55.1^0, a kut elevacije do vrha kipa iznosi 56.5^0. Skicu možemo vidjeti na *Slici 17. (a)*. Kolika je visina kipa božice Ceres?



Slika 17.

Rješenje: Na *Slici 17.(b)* vidimo dva trokuta izdvojena iz dijela (a). Prema tome, visina kipa božice Ceres će biti $b' - b$, a odredit ćemo je iz sljedećih izraza koje dobijemo iz (b).

$$\begin{aligned} \tan 55.1^0 &= \frac{b}{400} \\ b &= 400 \tan 55.1^0 \approx 573.39. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 56.5^0 &= \frac{b'}{400} \\ b' &= 400 \tan 56.5^0 \approx 604.33. \end{aligned}$$

Visina je približno 30.94, tj. 31 stopa.

Sljedeći zadatak možemo postaviti pred učenike tek kada znaju kako glasi kosinusov poučak te kako ga primijeniti u zadatcima.

4.5.3 Putanja jedrilice

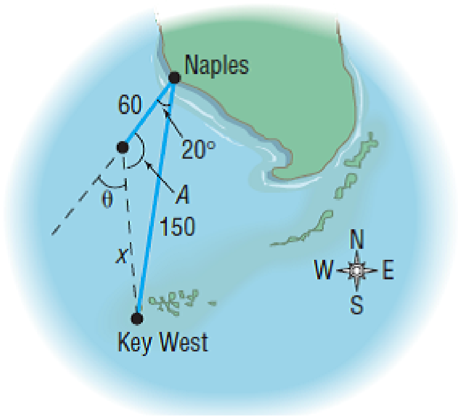
Motorna jedrilica putuje s Naplesa na Floridi i na putu je za Key West koji je 150 milja udaljen od Floride. Jedrilica održava konstantnu brzinu i pređe 15 milja na sat. Međutim, naišla je na vjetar i jake morske struje. Jedna je ekipa jedrilicu krenula tražiti te ju je nakon 4 sata pronašla. Ustanovljeno je da je skrenula s puta za 20^0. Prikaz možemo vidjeti na *Slici 18.*

1. Koliko je jedrilica udaljena od Key Westa u trenutku pronalaska?

2. Za koji se kut jedrilica treba okrenuti da nastavi put prema odredištu?

[2]Stopa je angloamerička mjerna jedinica za duljinu. Jedna stopa jednaka je 0.3048 metra

3. Koliko vremena treba da jedrilica unatoč preprekama dođe do cilja (uz pretpostavku konstantne brzine)?



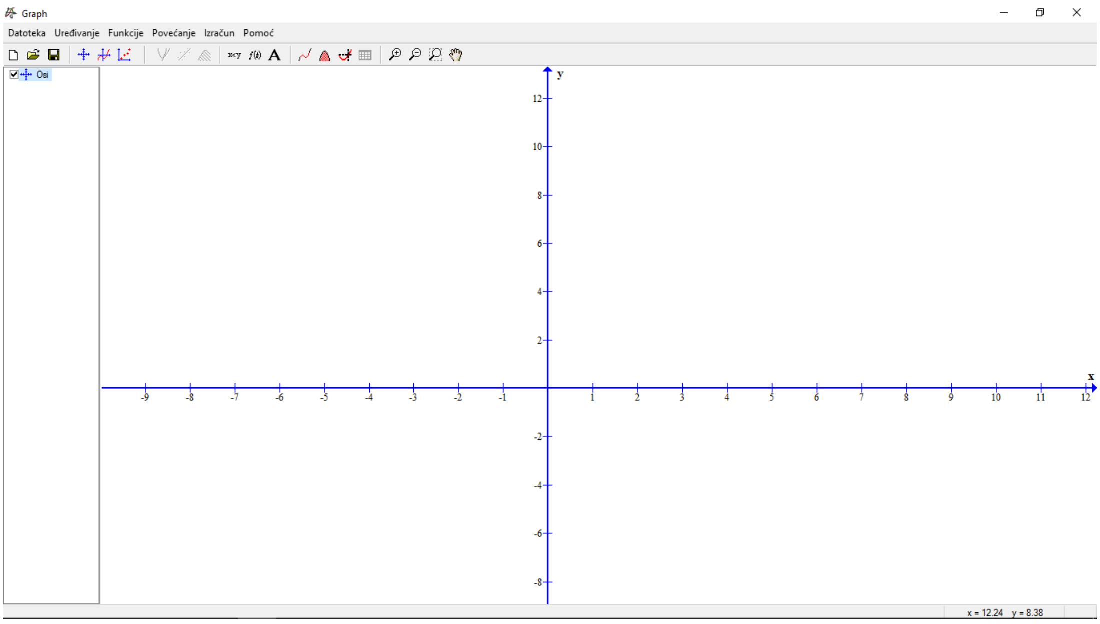
Slika 18.

Rješenje:
Ako učenici dobro pročitaju zadatak lako bi trebali doći do zaključka da za 4 sata jedrilica pređe 60 milja. Kao na slici, sa x možemo označiti udaljenost trenutne pozicije broda (nakon skretanja) do odredišta Key West. Da bi pronašli tu udaljenost x jednostavno iskoristimo kosinusov poučak odakle dobijemo da je x približno 95.8, što je ujedno odgovor na prvo pitanje. U drugom dijelu zadatka učenici također mogu koristiti kosinusov poučak te dobiti traženi kut, na slici označen s Θ. Tu možemo očekivati problem jer možda neće odmah svim učenicima biti jasno koji kut treba izračunati. S druge strane, i dok shvate o kojemu je kutu riječ, mogu nastati problemi s izračunavanjem toga kuta, ukoliko nekom od učenika ne padne na pamet ideja kako taj kut dobiti.

5 Program Graph

U ovom poglavlju predstavit ćemo program Graph koji se spominje u radu i u kojemu su napravljene neke od slika.

Program Graph se koristi za crtanje matematičkih grafova u koordinatnom sustavu. Ovaj je program koristan za svakoga tko želi nacrtati grafove raznih funkcija.

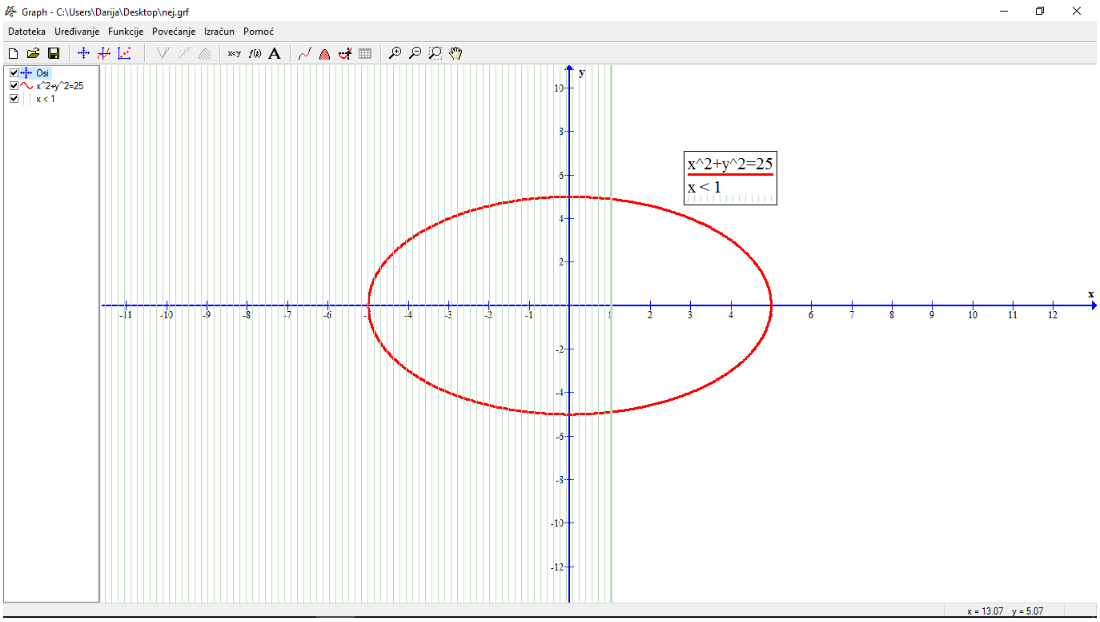


Slika 19. Sučelje programa Graph

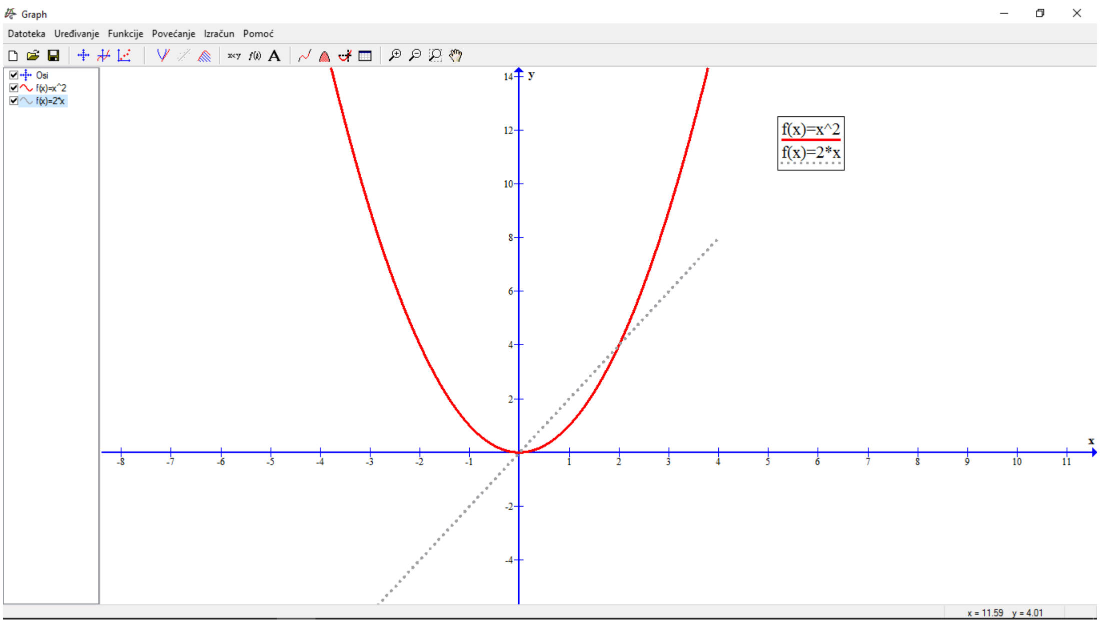
Programom možemo nacrtati brojne funkcije kao što su funkcije sinus i kosinus, logaritamska funkcija, eksponencijalna funkcija i slično. Isto tako, uvijek je moguće promijeniti boju, debljinu i stil linije te odrediti interval na kojemu želimo prikazati naš graf. Također, korisno je znati da je ovim programom moguće stvoriti niz točaka, različitih boja i veličine, a podatci za crtanje točaka mogu se uvesti iz drugih programa kao što je Microsoft Excel.

Programom Graph moguće je prikazati različite jednadžbe i nejednakosti. Na *Slici 20.* prikazana je kružnica $x^2 + y^2 = 25$ i nejednakost $x < 1$. Također, progam može izračunati prvu derivaciju funkcije i prikazati njen graf.

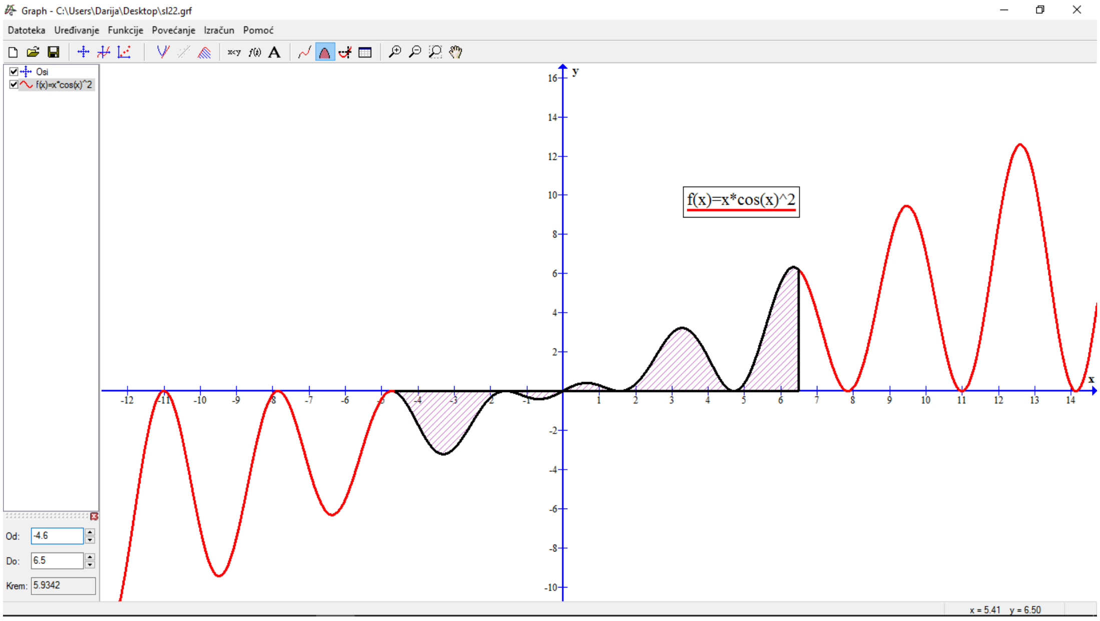
Program može pomoći u izračunavanju površina između grafa funkcije i osi x u određenom intervalu te udaljenosti između dvije točke na krivulji. Na *Slici 22.* prikazan je primjer izračunavanja površine između funkcije $f(x) = xcosx^2$ i osi x na intervalu [-4.6, 6.5]. Također, u programu se mogu napraviti animacije. Primjerice, možemo napraviti funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ i promatrati što se s njom događa kada mijenjamo vrijednosti koeficijenta b.



Slika 20.



Slika 21. Prikaz funkcije $f(x) = x^2$ i njezine derivacije



Slika 22.

U programu Graph relativno je lako raditi i potrebno je minimalno vremena kako bi se svladale osnove. Sve slike napravljene u programu Graph mogli smo napraviti npr. u *GeoGebri*. Program Graph namijenjen je ponajprije za crtanje funkcija dok *GeoGebra* ima još razne mogućnosti kao što je povlačenje okomica, paralela, pravljenje simetrale dužine i slično. Međutim, Graph je zaista jednostavan program te bi se u njemu, prije nego li u *GeoGebri*, mogli snaći učenici osnovne škole, ali i oni učenici koji se do tada nisu susreli s programima dinamičke geometrije.
Svakako, bitno je napomenuti da učenici vole programe dinamičke geometrije jer si tako mogu vizualizirati neke stvari koje im se čine nemogućima. Isto tako, sama upotreba računala nastavu matematike čini zabavnom, dinamičnom i učenicima privlačnom te jednostavnijom za učenje.

6 Zaključak

U ovome smo radu pažnju usmjerili prema modeliranju u osnovnoj i srednjoj školi. Na početku smo rekli što je to modeliranje te smo nabrojali korake matematičkog modeliranja. Osim toga, u prvome smo poglavlju naveli neke probleme s kojima se možemo suočiti kada govorimo o modeliranju u nastavi te smo predstavili četiri osnovna pristupa matematičkom modeliranju. Naveli smo empirijski, teorijski, simulacijski i dimenzijski pristup te svaki pristup opisali i naveli odgovarajuće primjere.

U idućem poglavlju fokusirali smo se na modeliranje u osnovnoj školi. Naveli smo neke elemente na kojima učenici uče što je to modeliranje. U nastavku smo analizirali postupak matematičkog modeliranja na jednom jednostavnom primjeru te ukazali na važnost geometrije kada govorimo o procesu modeliranja. Zatim smo naveli razne primjere modeliranja primjerene za osnovnoškolski uzrast. Ono što treba naglasiti jest da su ti primjeri provedeni u nastavi u nekim osnovnim školama te su u svakoj aktivnosti detaljno razrađeni svi dijelovi sata.

U idućem smo poglavlju naglasak stavili na modeliranje u srednjoj školi. Analogno kao u prethodnom poglavlju, prikazali smo neke primjere koji su izvedeni na nastavi matematike u nekim srednjim školama u Sloveniji, a vrlo jednostavno bi se mogli implementirati i u našim školama. Naveli smo postupak aktivnosti, pitanja na koja su učenici odgovarali kao i iskustva nastavnika koji su zadatke zadali i proveli sa svojim učenicima.

U posljednjem poglavlju rekli smo nekoliko riječi o programu *Graph* koji smo koristili u radu za izradu grafova i koji se u većini opisanih aktivnosti predlaže kao alat za zanimljiviju i dinamičniju nastavu.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je upoznavanje s procesom modeliranja s naglaskom na primjenu matematičkog modeliranja u nastavi. U radu smo se bavili modeliranjem u osnovnoj, a potom u srednjoj školi. Na početku smo naveli i objasnili četiri pristupa matematičkom modeliranju te dali primjere za svaki od pristupa. Potom smo se fokusirali na osnovnoškolsko modeliranje. Najprije smo ukratko opisali sam postupak modeliranja, a potom naveli razne primjere. Budući su navedene aktivnosti provedene na nastavi, detaljno je razrađen svaki dio sata. Dalje smo se bavili modeliranjem u srednjoj školi. Naveli smo razne primjere modeliranja linearnom, kvadratnom, eksponencijalnom, logaritamskom i trigonometrijskim funkcijama. Na kraju smo rekli nešto o programu Graph koji se spominje u radu i kojega smo koristili za izradu grafova.

Summary

The purpose of this diploma thesis is to introduce the process of mathematical modeling, focusing on application of mathematical modeling in the class. At first, we were dealing with mathematical modeling in primary school and in high school after that. In the beginning, we have specified and explained four approaches to mathematical modeling and give examples for each access. Then we focused on modeling for primary school. First, we have described briefly the modeling process, and then, we specified various examples. Since these activities have been implemented in class, each part of school hour is worked out in detail. After that, we were dealing with modeling in high school. We have provided a variety of examples of modeling with linear, quadratic, exponential, logarithmic and trigonometric functions. At the end, we said something about program Graph which is mentioned in diploma thesis and used for charting.

Literatura:

[1] M. Suban, S. Kmetič, A. Žakelj, A. Lipovec, Z. Magajna, M. Sirnik, V. Vršič, P. Legvart, A. Perkovič, D. Čekada, M. Flisar, M. Magdič, K. Kmetec, A. Kodelja, J. Bone, S. Rajh, B. Repovž, J. Senekovič, *Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi MATEMATIKA*, Present d.o.o., Ljubljana, 2013.

[2] M. Sullivan, *Algebra & trigonometry*, Pearson Education, INC., Boston, 2012.

[3] A. Žakelj, S. Pustavrh, S. Repolusk, S. Kmetič, M. Sirnik, R. Bohak Farič, I. Rauter Repija, J. Kos, S. Vreš, H. Kapus, A. Grahor, M. Jerman, D. Hvastja, K. Novak, M. Bon Klanjšček, N. Mihelič Erbežnik, *Posodobitve pouka v gimnazijski praksi Matematika*, 450 izvodov, Ljubljana, 2010.

[4] *Graph - Plotting of mathematical functions*,
URL:`https://www.padowan.dk/features/`

Životopis

Zovem se Darija Apatić. Rođena sam 27. rujna 1992. godine u Osijeku. Završila sam osnovnu školu Josipovac u Josipovcu. Srednjoškolsko obrazovanje nastavila sam u Osijeku. Pohađala sam I. gimnaziju Osijek. 2011. godine upisala sam Nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.