Lokalna teorija krivulja u trodimenzionalnom Minkowskijem prostoru

Đuzel, Monika

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike; smjer: Financijska matematika i statistika

Monika Đuzel

Lokalna teorija krivulja u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike; smjer: Financijska matematika i statistika

Monika Đuzel

Lokalna teorija krivulja u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru

Diplomski rad

Mentor: doc.dr.sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2023.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Osnovni koncepti trodimenzionalnog Minkowskijevog prostora **2**

2 Krivulje u Minkowskijevom prostoru **7**
2.1 Zakrivljenost i torzija krivulje 11
2.1.1 Vremenske krivulje 11
2.1.2 Prostorne krivulje 12
2.1.3 Svjetlosne krivulje 13

3 Specijalne klase krivulja u $\mathbf{E}_1^3$ **20**
3.1 Ravninske krivulje 20
3.2 Opće cilindrične zavojnice 24

Literatura **26**

Uvod

U ovom radu govorit ćemo o lokalnoj teoriji krivulja u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru. Minkowskijev prostor nazvan je po Hermannu Minkowskom (1864.-1909.), njemačkom matematičaru i fizičaru, koji ga je predložio kao matematički okvir za opisivanje posebne teorije relativnosti Alberta Einsteina. Minkowski je predložio novu geometriju koja se promatra u četiri dimenzije (tri prostorne dimenzije i jedna vremenska dimenzija), koja je bila suprotna uobičajenoj geometriji u tri dimenzije, koju su ljudi bili naviknuti koristiti. Ova nova geometrija bila je ključna za razumijevanje Einsteineve teorije relativnosti, koja je predstavljena tri godine prije Minkowskijevog rada. Einstein je dokazao da je vrijeme relativno i da se ne može razlikovati od prostora, što znači da prostor i vrijeme treba tretirati kao jednu četverodimenzionalnu cjelinu, a ne kao odvojene pojave. Minkowski je dao matematičku pozadinu koja je potvrdila ovu ideju i omogućila daljnji razvoj posebne teorije relativnosti i kasnije opće teorije relativnosti.

Danas se Minkowskijev prostor široko koristi u fizici, posebno u teoriji relativnosti, jer omogućava modeliranje kretanja tijela koja se kreću brzinama koje su značajno manje od brzine svjetlosti, a također ima primjene u matematici, posebno u geometriji i teoriji brojeva.

Minkowski je svoju ideju prvi put predstavio u predavanju koje je održao 1908. godine pod nazivom "Geometrie der Zahlen" ("Geometrija brojeva"), a potom je detaljnije razradio u svojem radu "Raum und Zeit" ("Prostor i vrijeme") objavljenom 1909. godine.

U ovom radu ćemo predstaviti važne dijelove lokalne teorije krivulja u Minkowskijevom prostoru. Takva teorija nije u potpunosti analogna lokalnoj teoriji krivulja u euklidskom prostoru, što je i prirodno za očekivati budući da se Minkowskijeva metrika razlikuje od euklidske.

Za razliku od euklidskog prostora, u kome je udaljenost između dviju točaka uvijek pozitivna, u Minkowskijevom prostoru može se dogoditi da udaljenost bude negativna, odnosno jednaka nuli iako se radi o dvije različite točke. Dakle, ova metrika ne zadovoljava svojstvo pozitivne definitnosti te se stoga naziva i pseudo-metrikom. Nadalje, s obzirom na svojstva koja izlaze primjenom pseudo-metrike, u Minkowskijevom prostoru razlikujemo tri vrste krivulja i specijalna svojstva pojedinih krivulja će biti prikazana u nastavku.

Rad je organiziran kako slijedi. U prvom poglavlju definiran je Minkowskijev prostor i navedene su važne definicije i teoremi ključni za daljnje razumijevanje rada. U drugom poglavlju razvijamo lokalnu teoriju krivulja u Minkowskijevom prostoru. Navedene su tri klase krivulja, te je za svaku klasu definiran Frenetov trobrid, te njihova zakrivljenost i torzija koje određuju krivulju na jedinstven način. U posljednjem poglavlju proučavane su specijalne krivulje Minkowskijevog prostora, ravninske krivulje i opće cilindrične spirale.

1 Osnovni koncepti trodimenzionalnog Minkowskijevog prostora

U ovom poglavlju ćemo navesti osnovne definicije i teoreme potrebne za razumijevanje analize krivulja u Minkowskijevom prostoru. Sve definicije preuzete su iz [5].
Neka $\mathbb{R}^3$ označava realan vektorski prostor s njegovom uobičajenom vektorskom strukturom. S $B_U = \{e_1, e_2, e_3\}$ označimo kanonsku bazu $\mathbb{R}^3$, gdje je $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$, te s (x, y, z) označavamo koordinate vektora u odnosu na B_u.

Definicija 1.1. *Minkowskijev prostor je metrički prostor* $\mathbf{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ *s pseudo-metrikom induciranom pseudo-skalarnim produktom*

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Napominjemo da gore definirano preslikavanje ne zadovoljava svojstvo pozitivne definitnosti te iz tog razloga nije skalarni produkt nego se naziva pseudo-skalarnim produktom. Budući da ćemo kroz rad isticati razlike između euklidskog prostora i metrike s Minkowskijevim prostorom i pripadnom metrikom, za euklidski prostor, odnosno metriku ćemo koristiti oznaku $\mathbf{E}^3$, odnosno $\langle , \rangle_e$. Prva razlika između vektora u $\mathbf{E}^3$ i $\mathbf{E}_1^3$ jest klasifikacija vektora u $\mathbf{E}_1^3$ prema pseudo-skalarnom produktu vektora sa samim sobom, kako je navedeno u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.2. *U Minkowskijevom prostoru vektor* $v \in \mathbf{E}_1^3$ *nazivamo:*

1) *prostorni vektor ako je* $\langle v, v \rangle > 0$ *ili* $v = 0$,

2) *vremenski vektor ako je* $\langle v, v \rangle < 0$,

3) *svjetlosni vektor ako je* $\langle v, v \rangle = 0$ *i* $v \neq 0$.

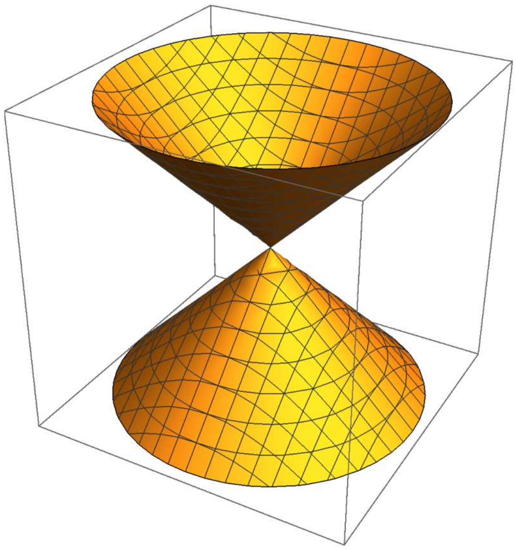
Svojstvo biti prostorni, vremenski ili svjetlosni se naziva kauzalni karakter vektora.
Sve svjetlosne, odnosno vremenske vektore možemo promatrati kao članove odgovarajućeg skupa.
Svjetlosni stožac je skup svih svjetlosnih vektora iz $\mathbf{E}_1^3$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

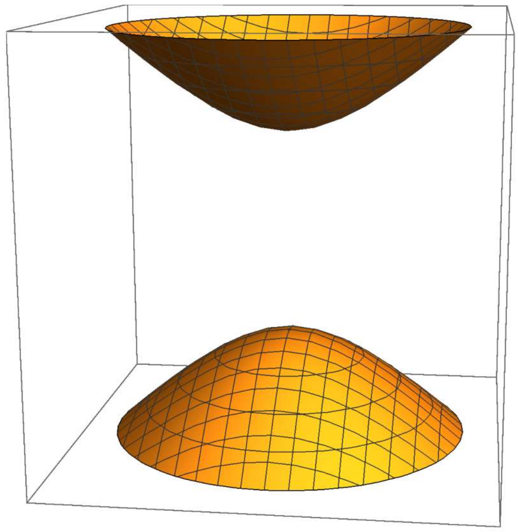
Skup vremenskih vektora je

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}.$$

Geometrijski, svjetlosni stožac je dvostruki stožac s vrhom u ishodištu, dok je skup svih vremenskih vektora dvoplošni hiperboloid, Slike 1 i 2.



Slika 1: Svjetlosni stožac



Slika 2: Dvoplošni hiperboloid

Za dani vektorski potprostor $U \subset \mathbb{R}^3$, razmatramo inducirani metriku $\langle , \rangle_U$:

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle, \; u, v \in U.$$

Metrika na U dijeli se na jedan od sljedeća tri tipa:

1) Metrika je pozitivno definitna i potprostor U je prostorni.

2) Metrika je indefinitna i potprostor U je vremenski.

3) Metrika je degenerirana i potprostor U je svjetlosni.

Uspoređujući s euklidskim prostorom $\mathbf{E}^3$, postojanje vremenskih i svjetlosnih vektora daje neka iznenađujuća svojstva koja navodimo u nastavku.

Propozicija 1.1. *(Vidjeti [5, Propozicija 1.2])*

1) Dva svjetlosna vektora $u, v \in \mathbf{E}^3_1$ su linearno zavisna ako i samo ako $\langle u, v \rangle = 0$.

2) Ako su u i v dva vremenska vektora, onda je $\langle u, v \rangle \neq 0$.

3) Ako je U svjetlosni potprostor, onda je $\dim(U \cap U^\perp) = 1$.

Propozicija 1.2. *(Vidjeti [5, Propozicija 1.3])*

Neka je $P \subset \mathbf{E}^3_1$ ravnina. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1) P je vremenski potprostor.

2) P sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora.

3) P sadrži vremenski vektor.

Definicija 1.3. *Za dani vektor $u \in \mathbf{E}_1^3$, njegova norma je $\|u\| = \sqrt{|\langle u,u\rangle|}$. Kažemo da je vektor u jedinični ako je njegova norma jednaka 1.*

Istaknimo da se vektor u $\mathbf{E}_1^3$ naziva jediničnim ako je njegov skalarni kvadrat 1 ili -1. Očito je da nema jediničnih svjetlosnih vektora.
Proučimo sada malo detaljnije vremenske vektore. Ako je u vremenski vektor, onda je vremenski stožac obzirom na u zadan s:

$$C(u) = \{v \in T : \langle u, v\rangle < 0\}.$$

Taj skup je neprazan jer je $u \in C(u)$. Za neki drugi vremenski vektor $v \neq u$, zbog $\langle u, v\rangle \neq 0$ (Prop. 1.1), slijedi $\langle u, v\rangle < 0$ ili $\langle u, v\rangle > 0$. Stoga skup svih vremenskih vektora T možemo prikazati kao disjunktnu unija $T \doteq C(u) \cup C(-u)$.
Za vremenski stožac vrijedi sljedeće:

Propozicija 1.3. *(Vidjeti [5, Propozicija 1.7])*

1) Dva vremenska vektora u i v leže na istom vremenskom stošcu ako i samo ako $\langle u, v\rangle > 0$.

2) $u \in C(v)$ ako i samo ako je $C(u) = C(v)$.

3) Vremenski stošci su konveksni skupovi.

Sljedeći teorem predstavlja važnu razliku između prostora $\mathbf{E}^3$ i $\mathbf{E}_1^3$ budući da se radi o "suprotnoj" Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakosti.

Teorem 1. *(Vidjeti [5, Teorem 1.1]) Neka su $u, v \in \mathbf{E}_1^3$ vremenski vektori. Tada je*

$$|\langle u, v\rangle| \geq |u||v| \tag{1.1}$$

i jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori u i v kolinearni. U tom slučaju oba vektora leže u istom vremenskom stošcu i postoji jedinstveni broj $\alpha \geq 0$ tako da

$$\langle u, v\rangle = -\|u\|\|v\| \cosh \alpha. \tag{1.2}$$

Broj α naziva se hiperbolički kut između vektora u i v.

Dokaz. Razmotrimo dva linearno nezavisna vremenska vektora u i v. Neka je $U = span\{u, v\}$ vremenska ravnina. Prema Propoziciji (1.2), u vektorskoj ravnini imamo dva svjetlosna vektora. Stoga iz jednakosti

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle = 0$$

dobivamo jednadžbu s barem dva rješenja za λ. Dakle, diskriminanta kvadratne jednadžbe mora biti pozitivna, tj.

$$\langle u, v\rangle^2 > \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle,$$

čime smo dokazali nejednakost u slučaju da su u i v linearno nezavisni. U slučaju kada su vektori kolinearni, izravno dobivamo jednakost.
Za drugi dio teorema pišemo:

$$\frac{\langle u, v\rangle^2}{(|u||v|)^2} \geq 1. \tag{1.3}$$

Ako u i v leže na istom vremenskom stošcu onda je $\langle u, v\rangle < 0$ i izraz (1.3) implicira

$$\frac{-\langle u, v\rangle}{|u||v|} \geq 1.$$

Za funkciju $\cosh : [0, \infty\rangle \to [1, \infty\rangle$ postoji jedinstven broj $\alpha \in [0, \infty\rangle$ tako da

$$\cosh \alpha = \frac{-\langle u, v\rangle}{|u||v|}$$

i takav α nazivamo hiperboličkim kutom između vektora u i v. □

Nakon definicije o kutu između dva vektora koji leže na istom vremenskom stošcu, pitamo se kako definirati kut između bilo koja dva vektora $u, v \in \mathbf{E}_1^3$. Pretpostavimo da su u i v linearno nezavisni koji nisu svjetlosni vektori. Definicija kuta izmeđi u i v ovisi o kauzalnom karakteru ravnine P određenoj s u i v, budući da inducirana metrika na P može biti prostorna, vremenska ili degenerirana.

1) Ako je ravnina prostorna, onda je definicija kuta između dva prostorna vektora ista kao definicija za kut između dva vektora u euklidskom prostoru.

2) Ako je ravnina vremenska, onda je izometrična s Minkowskijevom ravninom $\mathbf{E}_1^2$ pri čemu izometrija ne mijenja definiciju kuta. Definirajmo kut za dva vremenska vektora na istom vremenskom stošcu. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su u i v jedinični. Skup $\mathbb{U}_1^2$ jediničnih vektora iz $\mathbf{E}_1^2$ možemo podijeliti na 4 disjunktna podskupa:

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_+^1 &= \{(x, y) \in \mathbf{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y > 0\},\\
\mathbb{H}_-^1 &= \{(x, y) \in \mathbf{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y < 0\},\\
\mathbb{S}_1^{1+} &= \{(x, y) \in \mathbf{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\},\\
\mathbb{S}_1^{1-} &= \{(x, y) \in \mathbf{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x < 0\},
\end{aligned}$$

Uočimo da su vektori u $\mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-$ vremenski, a vektori u $\mathbb{S}_1^{1+} \cup \mathbb{S}_1^{1-}$ prostorni.

Promotrimo dva jedinična prostorna vektora u, $v \in \mathbb{U}_1^2$ koja leže u istoj komponenti od $\mathbb{U}_1^2$, odnosno $u, v \in \mathbb{S}_1^{1+}$ ili $u, v \in \mathbb{S}_1^{1-}$.

Definicija 1.4. *Neka su $u, v \in \mathbf{E}_1^2$ dva nenul prostorna vektora pri čemu $u/\|u\|$ i $v/\|v\|$ leže u istoj komponenti od $\mathbb{U}_1^2$. Tada kut $\angle(u, v)$ definiramo kao jedinstven broj $\alpha \in [0, \infty\rangle$ za koji vrijedi*

$$\cosh \alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}. \tag{1.4}$$

Istaknimo da kut između dva vektora koja ne pripadaju istoj komponenti od $\mathbb{U}_1^2$, kao niti kut između prostornog i vremenskog vektora nije definiran.

3) U slučaju kad je ravnina koja sadrži vektore u i v svjetlosna, vektori su nužno prostorni, ali kut između njih nije definiran.

Definicija 1.5. *Za vektore $u, v \in \mathbf{E}_1^3$, vektorski produkt od u i v je jedinstven vektor označen kao $u \times v$ i zadan kao*

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i(u_2v_3 - u_3v_2) + j(u_3v_1 - u_1v_3) + k(u_2v_1 - u_1v_2). \tag{1.5}$$

Dakle, ako je $u \times_e v$ euklidski vektorski produkt, tada je $u \times v$ slika vektora $u \times_e v$ pri simetriji s obzirom na ravninu $z = 0$. Možemo uočiti da ako su u i v dva nesvjetlosna vektora, tada je $B = \{u, v, u \times v\}$ baza od $\mathbf{E}_1^3$. Međutim, za razliku od euklidskog prostora, kauzalni karakter vektora u i v određuje je li baza pozitivno orijentirana. Točnije, ako su u i v prostorni vektori, tada je $u \times v$ vremenski i B je negativno orijentirana jer je $\det(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle < 0$. Ako u i v imaju različiti kauzalni karakter, tada je B pozitivno orijentirana.

2 Krivulje u Minkowskijevom prostoru

Krivulje u Minkowskijevom prostoru definiramo kao u euklidskom prostoru. Sve definicije preuzete su iz [2], odnosno [5].

Definicija 2.1. *Krivulja (parametrizirana krivulja) c u $\mathbb{R}^n$ je glatko preslikavanje, $c : I \to \mathbb{R}^n$, gdje je $I = \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$.*

Ovisno o kauzalnom karakteru njezinog tangencijalnog vektora, razlikujemo kauzalni karakter krivulje.

Definicija 2.2. *Krivulja $c \in \mathbf{E}^3_1$ se naziva prostornom (odnosno vremenskom, svjetlosnom) na I ako je $\dot{c}(t)$ prostorni vektor (odnosno vremenski, svjetlosni), za svaki $t \in I$.*

Regularne krivulje definiramo kao u euklidskom prostoru.

Definicija 2.3. *Krivulju $c : I \to \mathbb{R}^n$ nazivamo regularnom ako vrijedi $\dot{c}(t) \neq 0$, za svaki $t \in I$. Ukoliko za točku $t \in I$ vrijedi $\dot{c}(t) = 0$, onda kažemo da je krivulja singularna u točki $c(t)$.*

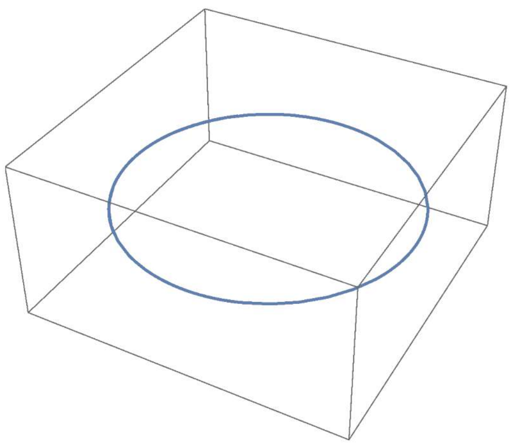
Istaknimo da krivulja iz $\mathbf{E}^3_1$ ne mora biti u cijelosti istog kauzalnog karaktera. Na primjer, promotrimo krivulju zadanu s

$$c : \mathbb{R} \to \mathbf{E}^3_1, \quad c(t) = (\cosh t, \frac{t^2}{2}, \sinh t).$$

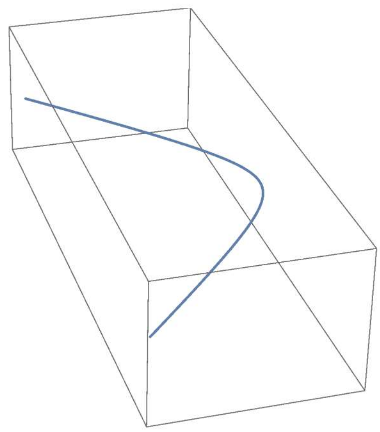
Budući da je $\dot{c}(t) = (\sinh t, t, \cosh t)$, c je regularna krivulja. Kako je $\langle \dot{c}, \dot{c}\rangle = t^2 - 1$, zaključujemo da je krivulja prostorna na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$, vremenska na $\langle -1, 1\rangle$ i svjetlosna na $\{-1, 1\}$. Uočimo kako je $\|\dot{c}(\pm 1)\| = 0$, ali c je regularna za $t = \pm 1$.

Primjer 1. *Promotrimo ravninske krivulje u $\mathbb{E}^3_1$:*

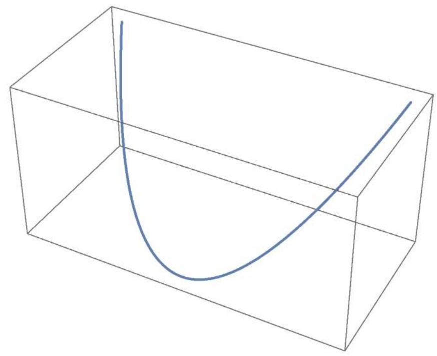
1) *Kružnica $c(t) = r(\cos(t), \sin(t), 0)$ je prostorna krivulja uključena u prostornu ravninu jednadžbe $z = 0$, Slika 3.*



Slika 3: Kružnica



Slika 4: Hiperbola s parametrizacijom $c(t) = (0, \sinh(t), \cosh(t))$



Slika 5: Parabola s parametrizacijom $c(t) = (t, t^2, t^2)$

2) Hiperbola $c(t) = r(0, \sinh(t), \cosh(t))$ je prostorna krivulja u vremenskoj ravnini s jednadžbom $x = 0$, Slika 4.

3) Parabola $c(t) = (t, t^2, t^2)$ je prostorna krivulja u svjetlosnoj ravnini s jednadžbom $y - z = 0$, Slika 5.

Primjer 2. *Promotrimo krivulje u prostoru $\mathbb{E}_1^3$ (krivulje koje ne pripadaju nekoj ravnini):*

1) Zavojnica $c(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ht)$, $h \neq 0$, leži na cilindru jednadžbe $x^2 + y^2 = r^2$. Ako je $r^2 > h^2$ (odnosno $r^2 - h^2 < 0$, $r^2 = h^2$), c je prostorna (vremenska, svjetlosna) zavojnica, Slika 6.

2) Neka je $c(t) = (ht, r\sinh(t), r\cosh(t))$, $h \neq 0, r > 0$. Ta krivulja je prostorna i uključena u hiperbolički cilindar jednadžbe $y^2 - z^2 = -r^2$, Slika 7.

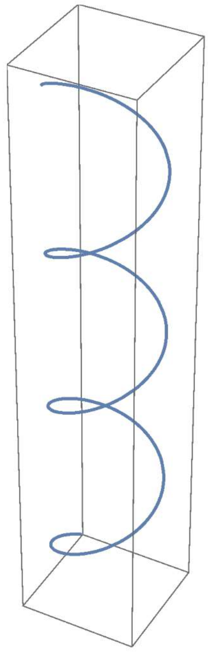
Dobro je poznato da je regularna krivulja u euklidskom prostoru $\mathbf{E}^3$ lokalni graf (na koordinantnoj osi od $\mathbb{R}^3$) dviju diferencijabilnih funkcija definiranih na koordinantnoj osi od $\mathbb{R}^3$. To je posljedica regularnosti krivulje i teorema o inverznoj funkciji koja ne ovisi o metrici. Za krivulju u $\mathbf{E}_1^3$, vrijedi analogna tvrdnja pri čemu kauzalni karakter krivulje ovisi o tome na kojim su osima funkcije definirane.

Propozicija 2.1. *(Vidjeti [5, Propozicija 2.1]) Neka je $c : I \to \mathbf{E}_1^3$ vremenska (svjetlosna) krivulja i neka je $t_0 \in I$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ i glatke funkcije $f, g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da $t = \phi(s)$ i $\tilde{c}(s) = c(\phi(s)) = (f(s), g(s), s)$.*

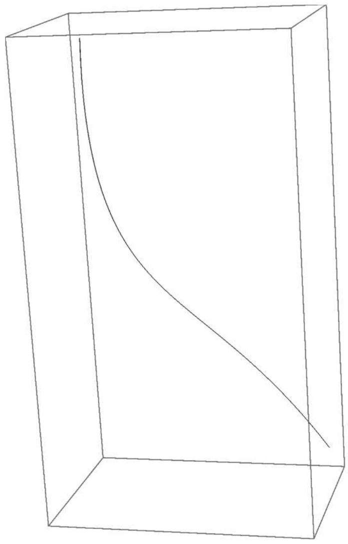
Dokaz. Pišemo $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ i znamo da $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 - \dot{z}(t)^2 \leq 0$. Tada je $\dot{z}(t_0) \neq 0$. Prema teoremu o inverznoj funkciji, postoje $\delta, \varepsilon > 0$ tako da je $z : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to (z(t_0) - \varepsilon, z(t_0) + \varepsilon)$ difeomorfizam. Označimo $J = (z(t_0) - \varepsilon, z(t_0) + \varepsilon)$ i $\phi = z^{-1}$. Tada krivulja $\tilde{c} = c \circ \phi$ zadovoljava

$$c(\phi(s)) = \tilde{c}(s) = ((x \circ \phi)(s), y \circ \phi)(s), s).$$

Uz $f = x \circ \phi$ i $g = y \circ \phi$, tvrdnja je dokazana. □



Slika 6: Zavojnica s parametrizacijom $c(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$



Slika 7: Zavojnica s parametrizacijom $c(t) = (t, \sinh(t), \cosh(t))$

Zatvorena krivulja $c : \mathbb{R} \to \mathbf{E}_1^3$ je parametrizirana periodična krivulja. Ako je krivulja regularna, postoji minimalna vrijednost $T > 0$ tako da $c(t+T) = c(t)$.

Teorem 2. *(Vidjeti [5, Teorem 2.1]) Neka je c zatvorena regularna krivulja u $\mathbf{E}_1^3$ uključena u ravninu P. Ako je c prostorna krivulja, tada je P prostorna ravnina.*

Dokaz. Slučajeve razlikujemo prema kauzalnom karakteru od P.

1) Pretpostavimo da je ravnina P vremenska i bez smanjenja općenitosti, neka je P ravnina jednadžbe $x = 0$. Tada je $c(t) = (0, y(t), z(t))$. Budući da je funkcija $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična, ona postiže maksimum u nekoj točki t_0. Stoga je $y'(t_0) = 0$, pa je $\dot{c}(t_0) = (0, 0, z'(t_0))$. Kako je c regularna krivulja, $z'(t_0) \neq 0$ i to implicira da je c vremenska krivulja za $t = t_0$, što je kontradikcija s prostornim karakterom krivulje c.

2) Pretpostavimo da je ravnina P je svjetlosna i jednadžbe $y - z = 0$. Tada je $c(t) = (x(t), y(t), y(t))$. Neka je t_0 maksimum funkcije $x(t)$. Slijedi $x'(t_0) = 0$ i stoga je $\dot{c}(t_0) = (0, y'(t_0), y'(t_0))$. Opet dobivamo kako je po regularnosti $y'(t_0) \neq 0$ što implicira da je $c'(t_0)$ svjetlosna krivulja pa dolazimo do kontradikcije.

Iz gore navedenog zaključujemo kako je P nužno prostorna ravnina. □

Teorem 3. *(Vidjeti [5, Teorem 2.2]) U $\mathbf{E}_1^3$ nema zatvorenih krivulja koje su vremenske ili svjetlosne.*

Dokaz. Pokazat ćemo da su jedine zatvorene krivulje prostornog karaktera. Neka je c zatvorena krivulja i neka je $z = z(t)$ periodična funkcija. Tada postoji $t = t_0$ tako da je $z'(t_0) = 0$. Nadalje,

$$\langle \dot{c}(t_0), \dot{c}(t_0)\rangle = x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 \geq 0.$$

Stoga slijedi da je c prostorna krivulja. Ukoliko bi c bila svjetlosna, tada bismo imal $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, iz čega slijedi $\dot{c}(t_0) = 0$, što je kontradikcija s regularnošću od c. □

U euklidskom prostoru, regularna krivulja c može biti parametrizirana parametrom duljine luka, odnosno tako da vrijedi $\|\dot{c}(s)\| = 1$, za svaku vrijednost parametra s. Isti rezultat vrijedi za sve prostorne i vremenske krivulje iz $\mathbf{E}_1^3$.

Propozicija 2.2. *(Vidjeti [5, Propozicija 2.2]) Neka je $c : I \to \mathbf{E}_1^3$ prostorna ili vremenska krivulja. Za dani $t_0 \in I$, postoji $\delta, \varepsilon > 0$ i difeomorfizam $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tako da krivulja $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{E}_1^3$ zadana s $\tilde{c} = c \circ \phi$ zadovoljava $\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = 1$, za svaki $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Dokaz. Provodimo dokaz za vremenske krivulje. Definiramo funkciju

$$S : I \to \mathbb{R},\ S(t) = \textstyle\int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(u)\| du.$$

Kako je $S'(t_0) > 0$, funkcija S je (lokalno) difeomorfizam na nekoj okolini točke t_0. Kako je $S(t_0) = 0$, postoje $\delta, \varepsilon > 0$ tako da je $S : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ difeomorfizam. Tada je $\phi = S^{-1}$. □

Svjetlosnu krivulju ne možemo reparametrizirati duljinom luka jer $\|\dot{c}(t)\| = 0$, stoga njih reparametriziramo na sljedeći način. Derivacija od $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle = 0$ daje $\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle = 0$, pri čemu razlikujemo sljedeće slučajeve:

1) Ako je $\ddot{c}(t)$ svjetlosni vektor, tada je $\ddot{c}(t)$ kolineran s $\dot{c}(t)$ prema Propoziciji (1.1). Kako to vrijedi za svaki t, tada se integriranjem lako dobiva

$$c(t) = e^t a + b,\ a, b \in \mathbb{R}^3,\ \langle a, a\rangle = 0.$$

Dakle, c je parametrizacija svjetlosnog pravca.

2) Ako je $\ddot{c}(t)$ prostorna, tada možemo reparametrizirati c da dobijemo $\|\ddot{c}(t)\| = 1$.

Lema 1. *(Vidjeti [5, Lema 2.1]) Neka je $c : I \to \mathbf{E}_1^3$ svjetlosna krivulja koja nije pravac. Tada postoji reparametrizacija krivulje c dana s $\tilde{c}(s) = c(\phi(s))$ tako da vrijedi $\|\ddot{\tilde{c}}(s)\| = 1$. Kažemo da je c parametrizirana pseudo-duljinom luka.*

Dokaz. Pišemo $\tilde{c}(s) = c(\phi(s))$. Tada

$$\ddot{\tilde{c}}(s) = \phi''(s)\dot{c}(t) + \phi'(s)^2\ddot{c}(t) \Rightarrow \langle \ddot{\tilde{c}}(s), \ddot{\tilde{c}}(s)\rangle = \phi'(s)^4 |\ddot{c}(t)|^2.$$

Definiranjem funkcije ϕ kao rješenje diferencijabilne jednadžbe

$$\phi'(s) = \frac{1}{\sqrt{|\ddot{c}(\phi(s))|}},$$

dobivamo traženu reparametrizaciju. □

Istaknimo da se pri reparametrizaciji krivulje, njezin kauzalni karakter ne mijenja. Nadalje ćemo derivaciju krivulje c parametrizirane duljinom luka, odnosno duljinom pseudo-luka označavati s c'. Oznaku $\dot{c}$ koristit ćemo ukoliko je krivulja parametrizirana općim parametrom.

2.1 Zakrivljenost i torzija krivulje

Kako se u Minkowskijevom prostoru vektori razlikuju i po svom kauzalnom karakteru, prirodno je za očekivati da će se takva razlika odraziti i razliku između baza koje vektori određuju. Svjetlosna baza prostora svih vektora u nekoj točki je vrsta baze koja se znatno razlikuje od takve baze u euklidskom prostoru. Sve definicije u ovom poglavlju preuzete su iz [5].

Definicija 2.4. *Baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ iz $\mathbf{E}_1^3$ se naziva svjetlosna baza ili svjetlosni trobrid ako su vektori e_2 i e_3 nekolinearni svjetlosni vektori (tj. $\langle e_2, e_3\rangle = -1$) ortogonalni na prostorni vektor e_1.*

Za svaku točku krivulje $c(s)$ možemo odrediti tri vektora u toj točki, koja čine bazu od prostora svih vektora u toj točki krivulje. Takva baza se naziva Freneteovim trobridom (ili okvirom) a čine je $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$, gdje se $\mathbf{T}(s)$ naziva tangencijalno polje, $\mathbf{N}(s)$ polje vektora glavnih normala, a $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$ nazivamo polje binormala. Jasno je da fiksiranjem parametra s, dobivamo tri vektora u točki $c(s)$. U euklidskom prostoru, Freneteov trobrid je pozitivno orijentirana ortonormirana baza. Promotrimo situaciju u Minkowskijevom prostoru.
Razmotrimo regularnu krivulju $c : I \to \mathbf{E}_1^3$ parametriziranu duljinom luka, odnosno pseudo-duljinom luka. Tangencijano vektorsko polje $\mathbf{T}$ zadano je kao $\mathbf{T}(s) = c'(s)$. Budući da je $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s)\rangle$ konstanta, -1, 1 ili 0, derivirajući po s slijedi $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s)\rangle = 0$ i $\mathbf{T}'(s)$ je ortogonalan na $\mathbf{T}(s)$. Ograničit ćemo se na promatranje krivulja za koje je $\mathbf{T}'(s) \neq 0$, $\forall s$ i $\mathbf{T}'(s)$ nije kolinearan s $\mathbf{T}(s)$ za svaki s, tj. da krivulja nije pravac. Razlikujemo tri slučaja ovisno o kauzalnom karakteru vektora $\mathbf{T}(s)$.

2.1.1 Vremenske krivulje

U slučaju kad je $\mathbf{T}(s)$ vremenski vektor, budući da su $\mathbf{T}(s)$ i $\mathbf{T}'(s)$ okomiti, slijedi da je $\mathbf{T}'(s)$ prostorni vektor jer su jedino prostorni vektori okomiti na vremenske. Kako je $\mathbf{T}'(s) \neq 0$ prostorni vektor linearno nezavisan s $\mathbf{T}(s)$, definiramo zakrivljenost krivulje c u točki $c(s)$ kao

$$\kappa(s) = ||\mathbf{T}'(s)||.$$

Za vektorsko polje N vrijedi

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s).$$

Štoviše, $\kappa(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s)\rangle$. Vektorsko polje binormale $\mathbf{B}$ definiramo kao

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s).$$

Vektor $\mathbf{B}(s)$ je jedinični vektor prostornog kauzalnog karaktera. Za svaki s, $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ je ortonormirana baza od $\mathbf{E}_1^3$ koja se naziva Freneteov trobrid krivulje c u točki $c(s)$. Baza $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ je pozitivno orijentirana jer je

$$\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = \langle \mathbf{T} \times \mathbf{N}, \mathbf{B}\rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B}\rangle = 1 > 0.$$

Definicija 2.5. *Funkciju $\tau : I \to \mathbb{R}$ definiranu s $\tau(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s)\rangle$ nazivamo torzijom krivulje c u točki $c(s)$.*

Deriviranjem svake od vektorskih funkcija Freneteovog trobrida, dobivamo Freneteove formule, tj. prikaz derivacija vektorskih polja pomoću Freneteovog trobrida.

Teorem 4. *(Vidjeti [2]) Neka je c vremenska krivulja parametrizirana duljinom luka s kojoj zakrivljenost nije nula. Tada vrijedi*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

2.1.2 Prostorne krivulje

Budući da je $\mathbf{T}'(s)$ ortogonalan na prostorni vektor $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{T}'(s)$ može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni. Definirat ćemo Freneteov trobrid za svaki od mogućih slučajeva zasebno:

1) $\mathbf{T}'(s)$ je prostorni vektor. Zakrivljenost računamo kao $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$, vektor normale kao $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)/\kappa(s)$ i binormalni vektor kao $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$. Ovdje je $\mathbf{B}(s)$ vremenski vektor, a Freneteove jednadžbe su oblika

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Torzija krivulje c je $\tau = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle$. Baza $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ je negativno orijentirana jer je

$$\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = \langle \mathbf{T} \times \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = -1 < 0.$$

2) $\mathbf{T}'(s)$ je vremenski vektor. Zakrivljenost računamo kao

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \sqrt{-\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}'(s) \rangle},$$

a vektor normale kao $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)/\kappa(s)$. Vektor binormale je zadan kao $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$. Freneteove jednadžbe jednake su

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Torzija krivulje c jednaka je $\tau = \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle$. Freneteova baza je pozitivno orijentirana.

3) $\mathbf{T}'(s)$ je svjetlosni vektor. Ovaj slučaj nema analogon u euklidskom prostoru. Definiramo vektor normale $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)$ ($\mathbf{T}'(s)$ i $\mathbf{T}(s)$ su linearno nezavisni. Vektor $\mathbf{B}(s)$ je zadan kao svjetlosni vektor za koji vrijedi $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle = -1$ i ortogonalan na $\mathbf{T}$. Freneteove jednadžbe su oblika

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 1 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Funkcija τ se naziva pseudo-torzija od c i dobiva se pomoću $\tau = -\langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle$, dok zakrivljenost krivulje nije definirana. Štoviše, $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ nije ortonormirana baza od $\mathbf{E}_1^3$ zato što su $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$ svjetlosni vektori. Skup $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ je primjer svjetlosnog trobrida krivulje.

Definicija 2.6. *Trobrid* $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ *koji se sastoji od dva svjetlosna i jednog prostornog vektora za koji vrijedi:*

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 0,\ \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1,\ \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = 1,\ \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = 0,\ \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 0$$

nazivamo svjetlosna baza ili svjetlosni (nul) trobrid.

Kauzalni karakter vektor $T'(s)$ ne mora biti istovrstan na cijelom intervalu na kojem je krivulja definirana, što je vidljivo iz sljedećeg primjera.

Primjer 3. *Za* $s \in \langle 1, \infty \rangle$, *neka je*

$$c(s) = \big(\cos(s) + \sin(s), \sin(s) - s\cos(s), \tfrac{1}{2}(s\sqrt{s^2-1} - \ln(s + \sqrt{s^2-1}))\big).$$

Tada

$$\mathbf{T}(s) = (s\cos(s), s\sin(s), \sqrt{s^2-1})$$
$$\mathbf{T}'(s) = \left(\cos(s) - s\sin(s), \sin(s) + s\cos(s), \frac{s}{\sqrt{s^2-1}}\right).$$

Kauzalni karakter od $\mathbf{T}'(s)$ *dan je predznakom izraza* $s^4 - s^2 - 1$ *jer je*

$$\langle c''(s), c''(s) \rangle = \frac{s^4 - s^2 - 1}{s^2 - 1}.$$

Tako je $\mathbf{T}'(s)$ *prostorni ako je* $s > \sqrt{1+\sqrt{5}}/\sqrt{2}$, *odnosno vremenski ako je* $1 < s < \sqrt{1+\sqrt{5}}/\sqrt{2}$. *U oba slučaja, zakrivljenost i torzija su*

$$\kappa(s) = \sqrt{\frac{|s^4 - s^2 - 1|}{s^2 - 1}},\ \tau(s) = \frac{s^6 - 2s^4 - 2s^2 + 2}{(s^4 - s^2 - 1)\sqrt{s^2-1}}.$$

2.1.3 Svjetlosne krivulje

Neka je c svjetlosna krivulja parametrizirana pseudo-duljinom luka. Za tangencijalni vektor $\mathbf{T}(s)$ definiramo vektor normale kao $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)$ koji je prostorni vektor. Vektor binormale je jedinstven svjetlosni vektor koji je ortogonalan na $\mathbf{N}(s)$ tako da je $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle = -1$. Stoga je $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ svjetlosna baza od $\mathbf{E}_1^3$. Freneteove jednadžbe su oblika

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Pseudo-torzija od c je zadana kao $\tau = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle$.

Primjer 4. *1) Neka je* $c(s) = r(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}, 0)$. *Tada je*

$$\mathbf{T}(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}, 0\right),\ \mathbf{T}'(s) = \frac{1}{r}\left(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}, 0\right).$$

Tada je $\kappa = \frac{1}{r}$ *i* $\mathbf{N}(s) = \Big(-\cos\dfrac{s}{r}, -\sin\dfrac{s}{r}, 0\Big)$, $\mathbf{B}(s) = (0,0,-1)$, *te* $\mathbf{B}' = 0, \tau = 0$. *Ova baza nije pozitivno orijentirana.*

2) Neka je

$$c(s) = \frac{1}{r^2}(\cos(rs), \sin(rs), rs).$$

Tada je

$$\mathbf{T}(s) = \tfrac{1}{r}(-\sin(rs), \cos(rs), 1),\ \mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s) = (-\cos(rs), -\sin(rs), 0).$$

Krivulja je svjetlosna i parametrizirana pseudo-duljinom luka.

$$\mathbf{B}(s) = \tfrac{r}{2}(\sin(rs), -\cos(rs), 1).$$

Tada zaključujemo da je $\tau = -\dfrac{r^2}{2}$.

Vremenske i prostorne krivulje s prostornim ili vremenskim vektorom normale se nazivaju Freneteove krivulje. U tom slučaju, Freneteove jednadžbe se mogu jedinstveno zapisati kao

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\delta\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \epsilon\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

uz $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \varepsilon$ i $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \delta$.

Za prostorne krivulje sa svjetlosnim vektorom normale, odnosno za svjetlosne krivulje, Freneteove jednadžbe zapisujemo na sljedeći način. Neka su $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \varepsilon$ i $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \delta$, gdje su $\varepsilon, \delta \in \{0,1\}$. Tada je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \delta\tau & \epsilon\tau & \delta \\ \varepsilon & \delta\tau & -\varepsilon\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Torzija je oblika $\tau(s) = -\varepsilon\delta\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}'(s) \rangle$. Važna klasa krivulja koje možemo izučavati su ravninske krivulje, tj. krivulje koje u cijelosti pripadaju nekoj ravnini. Karakterizacija takvih krivulja u slučaju Freneteovih krivulja se podudara s karakterizacijom ravninskih krivulja u euklidskom prostoru.

Teorem 5. *(Vidjeti [5, Teorem 2.3]) Neka je* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *krivulja koja nije pravac. Tada je* c *ravninska krivulja ako i samo ako je* $\tau = 0$.

U slučaju krivulja koje nisu Freneteove, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 6. *(Vidjeti [5, Teorem 2.4]) Neka je* c *prostorna krivulja sa svjetlosnom normalom ili svjetlosna krivulja.*

1) Ako je pseudo-torzija jednaka nula, tada je krivulja ravninska.

2) Ako je svjetlosna krivulja ravninska, onda je ona pravac. Postoje prostorne ravninske krivulje sa svjetlosnom normalom s pseudotorzijom različitom od nule.

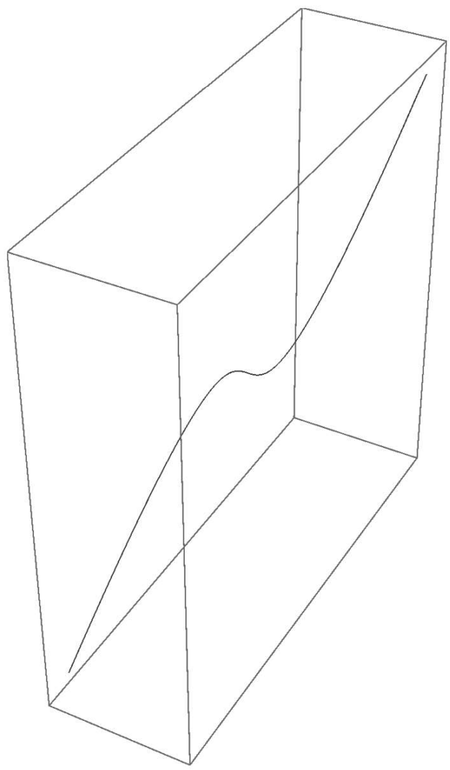
Dokaz. U prvom dijelu pretpostavljamo da je c prostorna krivulja sa svjetlosnom normalom (analogno slijedi ako je c svjetlosna krivulja). Ako je $\tau = 0$, onda je $\mathbf{N}' = 0$ pa je $\mathbf{N}(s) = v \in \mathbf{E}_1^3$ za svaki s. Neka je $s_0 \in I$ i definiramo funkciju $f(s) = \langle c(s) - c(s_0), v \rangle$. To implicira da je $f(s)$ konstantno što dokazuje da je krivulja ravninska.
Pretpostavimo da je c svjetlosna krivulja koja leži u ravnini. Tada ravnina mora biti vremenska ili svjetlosna. U prvom slučaju postoje samo dva linearno nezavisna svjetlosna smjera dok u drugom samo jedan. Stoga je $\mathbf{T}(s)$ kolinearan s fiksnim vektorom iz čega slijedi da je krivulja pravac. □

Obrat gornjeg teorema ne vrijedi za prostorne krivulje sa svjetlosnim normalama.

Primjer 5. *Neka je* $c(s) = (s, \frac{s^3}{3}, \frac{s^3}{3})$, $s > 0$, *krivulja uključena u ravninu* $y - z = 0$. *Računanjem za polja Freneteovog trobrida dobivamo*

$$\mathbf{T}(s) = (1, s^2, s^2),\ \mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s) = (0, 2s, 2s).$$

Kako je $\mathbf{N}'(s) = (0, 2, 2)$ *i* $\mathbf{B}(s) = (\frac{s}{2}, -\frac{1}{4s}, \frac{1}{4s})$, *pseudo-torzija je* $\tau(s) = -\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle = \frac{1}{s}$.



Slika 8: Prostorna ravninska krivulja s pseudo-torzijom različitom od 0

U ostatku poglavlja više ćemo se posvetiti dokazivanju invarijantnosti κ i τ pri izometriji prostora i teorema o egzistenciji i jedinstvenosti krivulje zadane s κ i τ.

Teorem 7. *(Vidjeti [5, Teorem 2.5]) Za Freneteovu krivulju, zakrivljenost se ne mijenja pri izometriji prostora dok je torzija nepromjenjiva do na predznak, ovisno o tome je li izometrija u pozitivnom ili negativnom smjeru. U slučaju da je krivulja prostorna sa svjetlosnim vektorom normale ili da je svjetlosna, tada je pseudo-torzija nepromjenjiva pri izometriji prostora.*

Dokaz. Dokaz je analogan onom u euklidskom slučaju. Neka je $Mx = Ax+b$ izometrija prostora, gdje je A ortogonalna matrica 3.reda, $b \in \mathbf{E}_1^3$ i $\beta = M \circ c$. Pretpostavimo da je c Freneteova krivulja, a odnos između Freneteovih baza krivulje c i krivulje dobivene preslikavanjem β dan s

$$\mathbf{T}_\beta = A\mathbf{T}_c,\ \mathbf{N}_\beta = A\mathbf{N}_c,\ \mathbf{B}_\beta = \pm A\mathbf{B}_c$$

ovisi o predznaku $\det(A)$. Zbog toga slijedi $\kappa_\beta = \kappa_c$ i $\tau_\beta = \pm\tau_c$.
Pretpostavimo sada da je c prostorna krivulja sa svjetlosnom normalom. Tada je $\mathbf{T}_\beta = A\mathbf{T}_c$ i $\mathbf{T}'_\beta = A\mathbf{T}'_c$ je svjetlosna, pa je i $\mathbf{N}_\beta = \mathbf{T}'_\beta = A\mathbf{T}'_c = A\mathbf{N}_c$. Vektor $A\mathbf{B}_c$ je svjetlosni vektor ortogonalan na $\mathbf{T}_\beta$ i $\langle A\mathbf{B}_c, \mathbf{N}_\beta\rangle = \langle A\mathbf{B}_c, A\mathbf{N}_c\rangle = -1$. Dakle, $\mathbf{B}_\beta = A\mathbf{B}_c$, što implicira

$$\tau_\beta = -\langle \mathbf{N}'_\beta, \mathbf{B}_\beta\rangle = -\langle A\mathbf{N}'_c, A\mathbf{B}_c\rangle = \tau_c.$$

Kako je c svjetlosna krivulja, to je $\beta = M\circ c$ svjetlosna krivulja parametrizirana pseudo-duljinom luka. Slijedi $\mathbf{T}_\beta = A\mathbf{T}_c$, $\mathbf{N}_\beta = A\mathbf{N}_c$ i $\mathbf{B}_\beta = A\mathbf{B}_c$ što dokazuje da je $\tau_\beta = \tau_c$. $\square$

U euklidskom prostoru, teorem o postojanju i jedinstvenosti potvrđuje jednakost važnosti funkcija $\kappa > 0$ i τ i postojanje jedinstvene krivulje sa zakrivljenošću κ i torzijom τ, do na položaj u prostoru. U Minkowskijevom prostoru jedinstvenost ne vrijedi zbog kauzalnog karaktera krivulje. Primjerice, krivulje $c(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$ i $\beta(s) = (0, \cosh(s), \sinh(s))$ imaju $\kappa = 1$ i $\tau = 0$. Međutim, ne postoji izometrija prostora koja će krivulju c preslikati na krivulju β, jer je c prostorna krivulja, dok je β vremenska. Čak i ako su obje krivulje kauzalno jednake, moramo obratiti pozornost na kauzalni karakter ostalih vektora Frenetovog trobrida. Primjerice, krivulja $\gamma(s) = (0, \sinh(s), \cosh(s))$ ima $\kappa = 1$, $\tau = 0$, ali između c i γ nema izometrije prostora. Uočimo kako su za krivulju c, vektori $\mathbf{T}$ i $\mathbf{N}$ prostorni, ali γ je prostorna krivulja sa vremenskom normalom.
U Minkowskijevom prostoru uvijek postoji krivulja sa zadanom zakrivljenošću i torzijom, ali početni uvjet nameće kauzalni karakter krivulje c. Analiziramo različite slučajeve. Za početak promatramo Freneteove krivulje.

Teorem 8. *(Vidjeti [5, Teorem 2.6]) Neka su $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\kappa(s) > 0$ i $\tau : I \to \mathbb{R}$, diferencijabilne funkcije. Tada postoje tri različite regularne parametrizirane krivulje $c : I \to \mathbf{E}_1^3$, $c = c(s)$ sa zakrivljenošću κ i torzijom τ. Pod različitim se smatra da ne postoji izometrija prostora koja prenosi jednu krivulju u drugu.*

Dokaz. Neka je $s_0 \in I$ i neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormirana baza koja će biti početni uvjet ODJ sustava. Ovisno o kauzalnom karakteru vektora e_i dobit ćemo različite slučajeve. Prvo pretpostavimo da je e_1 vremenski i pozitivno orijentiran. U tom slučaju rješavamo sljedeći ODJ sustav od 9 jednadžbi.

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{N}(s)\\ \mathbf{N}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)\\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{N}(s)\end{aligned}$$

s početnim uvjetima

$$\mathbf{T}(s_0) = e_1$$
$$\mathbf{N}(s_0) = e_2$$
$$\mathbf{B}(s_0) = e_3.$$

Neka je $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ jedinstveno rješenje i definiramo

$$c(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{T}(u)du. \tag{2.6}$$

Dokazujemo da je krivulja vremenska sa zakrivljenošću κ i torzijom τ. Prvo ćemo pokazati da je $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ortonormirana baza s istim kauzalnim svojstvima kao polazna baza $\{e_1, e_2, e_3\}$. Razmotrimo ODJ sustav:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}\rangle' &= 2\kappa\langle \mathbf{T}, \mathbf{N}\rangle \\
\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle' &= 2\kappa\langle \mathbf{T}, \mathbf{N}\rangle + 2\tau\langle \mathbf{B}, \mathbf{N}\rangle \\
\langle \mathbf{B}, \mathbf{B}\rangle' &= -2\tau\langle \mathbf{B}, \mathbf{N}\rangle \\
\langle \mathbf{T}, \mathbf{N}\rangle' &= \kappa\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle + \kappa\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}\rangle + \tau\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\rangle \\
\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\rangle' &= \kappa\langle \mathbf{N}, \mathbf{B}\rangle - \tau\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}\rangle \\
\langle \mathbf{N}, \mathbf{B}\rangle' &= \kappa\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\rangle + \tau\langle \mathbf{B}, \mathbf{B}\rangle - \tau\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle
\end{aligned}$$

s početnim uvjetima $s = s_0$ danima s $(-1, 1, 1, 0, 0, 0)$. S druge strane, funkcije

$$f_1 = -1, f_2 = 1, f_3 = 1, f_4 = 0, f_5 = 0, f_6 = 0$$

zadovoljavaju isti ODJ sustav i iste početne uvjete. Zbog jedinstvenosti rješenja vrijedi

$$-\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B}\rangle = 1,\ \langle \mathbf{T}, \mathbf{N}\rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{B}\rangle = 0.$$

To implicira da je $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ortonormirana baza od $\mathbf{E}_1^3$, gdje je $\mathbf{T}$ vremenski. Iz (2.6), $c'(s) = \mathbf{T}(s)$, pa je c vremenska krivulja parametrizirana duljinom luka. Sada smo u mogućnosti dokazati da su zakrivljenost i torzija krivulje c jednake κ i τ.
Ako želimo dobiti prostornu krivulju s prostornom normalom, zakrivljenošću κ i torzijom τ, razmatramo početne uvjete

$$\mathbf{T}(s_0) = e_1,\ \mathbf{N}(s_0) = e_2,\ \mathbf{B}(s_0) = e_3,$$

gdje je $\{e_1, e_2, e_3\}$ negativno orijentirana ortonormirana baza i e_3 je vremenski. ODJ sustav koji rješavamo je (2.2). Konačno, ako tražimo prostornu krivulju s vremenskom normalom, početni uvjet je pozitivno orjentirana ortonormirana baza $\{e_1, e_2, e_3\}$, gdje je e_2 vremenski, a ODJ sustav je (2.3). □

Analizirajmo sada slučaj kad krivulja nije Freneteova, tj. dokazujemo postojanje prostorne krivulje sa svjetlosnom normalom ili svjetlosne krivulje. Neka je $\tau : I \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Tražimo krivulje navedenog kauzalnog karaktera s pseudo-torzijom τ. Situacija je slična kao kod Freneteovih krivulja i rješenje ovisi o početnom uvjetu.

Teorem 9. *(Vidjeti [5, Teorem 2.7]) Neka je $\tau : I \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Tada postoji prostorna krivulja sa svjetlosnom normalom i svjetlosna krivulja s pseudo-torzijom τ.*

Dokaz. Neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza od $\mathbf{E}_1^3$ tako da je e_1 prostorni. Postavimo ODJ sustav (2.4) s početnim uvjetima

$$\mathbf{T}(s_0) = e_1,\ \mathbf{N}(s_0) = e_2,\ \mathbf{B}(s_0) = e_3.$$

Neka je $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ jedinstveno rješenje i definiramo

$$c(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{T}(u)du. \tag{2.7}$$

Dokazujemo da je c prostorna krivulja sa svjetlosnom normalom. Prvo razmatramo sljedeći ODJ sustav od 6 jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle' &= 2\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle \\
\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle' &= 2\tau \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \\
\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle' &= 2\langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle - 2\tau \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle \\
\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle' &= \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle + \tau \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle \\
\langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle' &= \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle - \tau \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle \\
\langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle' &= \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle
\end{aligned}$$

s početnim uvjetima $(1, 0, 0, 0, 0, -1)$. Budući da su funkcije $(1, 0, 0, 0, 0, -1)$ također skup rješenja, jedinstvenošću dobivamo pravo rješenje. Tako je $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ baza od $\mathbf{E}_1^3$ koja zadovoljava ista svojstva kao i $\{e_1, e_2, e_3\}$.
Iz (2.7) $c'(s) = \mathbf{T}(s)$ i slijedi da je c prostorna krivulja.
Ukoliko želimo dobiti svjetlosnu krivulju s pseudo-torzijom τ tada rješavamo ODJ (2.5) i mijenjamo početni uvjet za

$$\mathbf{T}(s_0) = e_1,\ \mathbf{N}(s_0) = e_2,\ \mathbf{B}(s_0) = e_3,$$

gdje je $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza, a e_2 prostorni vektor. □

Jednom kada utvrdimo postojanje, jedinstvenost vrijedi samo uz uvjet podudaranja kauzalnog karaktera vektorskih polja Freneteovog trobrida za obje krivulje. Kako bi skratili dokaz uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.7. *Neka su $c, \beta : I \to \mathbf{E}_1^3$ dvije krivulje parametrizirane duljinom luka, odnosno pseudo-duljinom luka. Kažemo da c i β imaju isti kauzalni karakter Freneteovog trobrida ako $\mathbf{T}_c$, $\mathbf{N}_c$ i $\mathbf{B}_c$ imaju isti kauzalni karakter kao $\mathbf{T}_\beta$, $\mathbf{N}_\beta$ i $\mathbf{B}_\beta$.*

Teorem 10. *(Vidjeti [5, Teorem 2.8]) Neka su $c, \beta : I \to \mathbf{E}_1^3$ dvije regularne krivulje koje imaju isti kauzalni karakter Freneteovog trobrida. Ukoliko imaju istu zakrivljenost i torziju, odnosno istu pseudo-torziju u svakoj točki, tada postoji izometrija prostora M od $\mathbf{E}_1^3$ tako da je $\beta = M \circ c$.*

Dokaz. Neka je $s_0 \in I$ i promotrimo izometriju $A \in O_1(3)$ tako da je $A\mathbf{T}_c(s_0) = \mathbf{T}_\beta(s_0)$, $A\mathbf{N}_c(s_0) = \mathbf{N}_\beta(s_0)$ i $A\mathbf{B}_c(s_0) = \mathbf{B}_\beta(s_0)$. Ako je $b = \beta(s_0) - Ac(s_0)$, definiramo izometriju prostora $Mx = Ax + b$. Po Teoremu 7 znamo da krivulja $\gamma = M \circ c$ zadovoljava isti ODJ sustav Freneteovih jednadžbi kao β. Kako se početni uvjeti poklapaju, zbog jedinstvenosti rješenja ODJ sustava slijedi $\beta = \gamma$ što dokazuje tvdrnju teorema. □

Slično kao u euklidskom prostoru, vrijede formule za zakrivljenost i torziju u slučaju kada krivulja nije parametrizirana duljinom luka. Navest ćemo takve formule samo za Freneteove krivulje. Neka je $c : I \to \mathbf{E}_1^3$ regularna krivulja i $\beta = c \circ \phi$ bilo koja parametrizacija duljinom luka. Definiramo

$$\kappa_c(t) = \kappa_\beta \circ \phi^{-1},\ \tau_c = \tau_\beta \circ \phi^{-1}.$$

Pretpostavimo da je β Freneteova krivulja. Definicija ne ovisi o reparametrizaciji, osim eventualno predznaka torzije. Analogno kao u euklidskom prostoru vrijede formule

$$\kappa_c(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|}{\|\dot{c}(t)|^3}, \quad \tau_c(t) = -\epsilon\delta \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|^2},$$

pri čemu je $\langle \mathbf{T}_c, \mathbf{T}_c \rangle = \varepsilon$ i $\langle \mathbf{N}_c, \mathbf{N}_c \rangle = \delta$.

3 Specijalne klase krivulja u $\mathbf{E}_1^3$

U ovom poglavlju ćemo analizirati dvije specijalne klase krivulja u Minkowskijevom prostoru. Jedna klasa su ravninske krivulje, tj. krivulje koje u cijelosti pripadaju nekoj ravnini, a druga klasa su opće cilindrične zavojnice, tj. krivulje čiji tangencijalni vektor zatvara konstantan kut s fiksnim vektorom. Sve definicije u ovom poglavlju preuzete su iz [5].

3.1 Ravninske krivulje

Proučavamo ravninske krivulje u Minkowskijevom prostoru $\mathbf{E}_1^3$. Za ravninske krivulje možemo umjesto zakrivljenosti kakvu smo ranije definirali, promatrati zakrivljenost s predznakom koja se definira kao $\kappa_s = \det(c', c'')$. Pri tome vrijedi $\kappa = |\kappa_s|$.
S obzirom na različit kauzalni karakter krivulja u Minkowskijevom prostoru, javljaju se razlike s obzirom na euklidski slučaj. Pri analizi ravninskih krivulja imamo dvije mogućnosti. Najprije razmatramo dvodimenzionalni slučaj Minkowskijevog prostora, odnosno Minkowskijevu ravninu $\mathbf{E}_1^2$. Druga mogućnost je promatranje ravninske krivulje u $\mathbf{E}_1^3$. U drugom slučaju postoje tri mogućnosti ovisno o tome je li ravnina prostorna, vremenska ili svjetlosna. Ukoliko je ravnina prostorna, krivulju možemo promatrati kao krivulju na plohi s prostornom metrikom. U ovom slučaju, ravnina je izometrična Euklidskoj ravnini $\mathbf{E}^2$ i teorija se podudara s poznatom teorijom za euklidski slučaj. Ako je ravnina vremenska, onda je izometrična s $\mathbf{E}_1^2$ i izvedena teorija se podudara s teorijom krivulja u Minkowskijevoj ravnini. Slučaj krivulje u svjetlosnoj ravnini znatno se razlikuje od prethodna dva.
Promotrimo najprije slučaj krivulja u Minkowskijevoj ravnini. Označimo $\mathbf{E}_1^2 = (\mathbb{R}^2, (dx)^2 - (dy)^2)$ Minkowskijevu ravninu s pripadnom pseudo-metrikom. Neka je $c : I \to \mathbf{E}_1^2$ krivulja parametrizirana duljinom luka s tangencijalnim vektorom $\mathbf{T}(s) = c'(s)$.
Svjetlosne krivulje isključujemo iz razmatranja jer u $\mathbf{E}_1^2$ postoje dva linearno nezavisna smjera svjetlosnih vektora, te bi tada $\mathbf{T}(s)$ bio kolinearan zadanom smjeru iz čega slijedi da je krivulja pravac. Nadalje ćemo pretpostavljati da je c prostorna ili vremenska krivulja.
Istaknimo da kako je vektor $\mathbf{T}'(s)$ je ortogonalan na $\mathbf{T}(s)$, vektori $\mathbf{T}(s)$ i $\mathbf{N}(s)$ imaju različiti kauzalni karakter. Prirodno, u Minkowskijevoj ravnini odgovarajuća ortonormirana baza ima dva vektora i nazivat ćemo ju Freneteov okvir krivulje c u točki $c(s)$.
Sada se pojavljuje nova razlika u odnosu na euklidski slučaj. U $\mathbf{E}^2$ jedinični vektor normale $\mathbf{N}_e(s)$ je odabran tako da je $\{\mathbf{T}_e(s), \mathbf{N}_e(s)\}$ pozitivno orijentirana baza. U $\mathbf{E}_1^2$ želimo ponovno odabrati Freneteov okvir kao pozitivno orijentiranu bazu, ali redoslijed vektora $\mathbf{T}$ i $\mathbf{N}$ treba biti odabran tako da je prvi vektor prostorni, a drugi vremenski. Drugim riječima, slučajevi su:

1) Krivulja je prostorna. Tada definiramo vektor normale $\mathbf{N}(s)$ tako da je $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ pozitivno orijentirana.

2) Krivulja je vremenska. Tada definiramo vektor normale $\mathbf{N}(s)$ tako da je $\{\mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s)\}$ pozitivno orijentirana.

Neka je $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \varepsilon \in \{1, -1\}$. Tada je $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -\varepsilon$. Definiramo zakrivljenost krivulje c kao funkciju $\kappa(s)$ tako da je

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}.$$

Tako je

$$\kappa(s) = -\varepsilon\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s)\rangle.$$

Freneteove jednadžbe su oblika

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{T}(s). \end{aligned}$$

Kao što smo i očekivali, uočavamo da se obje jednadžbe podudaraju s prve dvije jednadžbe u (2.1) i (2.2), zanemarujući koordinate u odnosu na vektor binormale.

Primjer 6. *Skup* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = -r^2\}$ *ima dvije komponente*

$$A^+ = \{(x, y) \in A : y > 0\},\ A^- = \{(x, y) \in A : y < 0\}.$$

koje se mogu zadati kao prostorne krivulje. Za A^+*, neka je* $c(s) = (r\sinh(s/r), r\cosh(s/r))$*. Tada*

$$\mathbf{T}(s) = (\cosh(\tfrac{s}{r}), \sinh(\tfrac{s}{r})),\ \mathbf{N}(s) = (\sinh(\tfrac{s}{r}), \cosh(\tfrac{s}{r})).$$

Kako je $\mathbf{T}'(s) = (1/r)(\sinh(s/r), \cosh(s/r))$*, tada je* $\kappa = \dfrac{1}{r}$*.*
Za A^-*, neka je* $\beta(s) = (r\sinh(s/r), -\cosh(s/r))$*. Tada je*

$$\mathbf{T}(s) = (\cosh(s/r), -\sinh(s/r)),\ \mathbf{N}(s) = (-\sinh(s/r), \cosh(s/r)).$$

Stoga zaključujemo kako je $\kappa = -\dfrac{1}{r}$*.*

Analogno kao u trodimenzionalnom slučaju, u Minkowskijevoj ravnini možemo dobiti parametrizaciju krivulje preko zadane zakrivljenosti. Neka je dana diferencijabilna funkcija κ i neka je

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt. \tag{3.1}$$

Tada možemo definirati dvije krivulje c i β sa zakrivljenošću κ, gdje je c prostorna, a β vremenska krivulja:

$$\begin{aligned} c(s) &= (\textstyle\int_{s_0}^{s} \cosh\theta(t)dt, \int_{s_0}^{s} \sinh\theta(t)dt) \\ \beta(s) &= (\textstyle\int_{s_0}^{s} \sinh\theta(t)dt, \int_{s_0}^{s} \cosh\theta(t)dt). \end{aligned}$$

Analogno kao u euklidskom slučaju, vrijedi da je zakrivljenost ravninske krivulje derivacija kuta između vektora tangente s fiksnim smjerom.

Teorem 11. *(Vidjeti [5, Teorem 2.9]) Neka je* $c : I \to \mathbf{E}_1^2$ *vremenska krivulja parametrizirana duljinom luka i* $v \in \mathbf{E}_1^2$ *jedinični vektor tako da* $\mathbf{T}(s)$ *i* v *leže u istom vremenskom stošcu za svaki* s*. Ako je* θ *kut između vektora tangente od* c *i* v*, tada vrijedi*

$$\kappa(s) = \pm\theta'(s).$$

Dokaz. Znamo da je $-\cosh(\theta(s)) = \langle \mathbf{T}(s), v\rangle$. Derivacijom dobivamo

$$-\theta'(s)\sinh\theta(s) = \kappa(s)\langle \mathbf{N}(s), v\rangle.$$

Kako je $v = -\langle v, \mathbf{T}(s)\rangle \mathbf{T}(s) + \langle v, \mathbf{N}(s)\rangle \mathbf{N}(s)$, tada je

$$-1 = -\langle v, \mathbf{T}(s)\rangle^2 + \langle v, \mathbf{N}(s)\rangle^2 = -\cosh(\phi(s))^2 + \langle v, \mathbf{N}(s)\rangle^2.$$

Tada je $\langle v, \mathbf{N}(s)\rangle = \pm\sinh(\theta(s))$. Tako dobivamo $\theta'(s) = \pm\kappa(s)$. $\square$

Isti rezultat vrijedi za prostornu krivulju c, gdje $\mathbf{T}(s)$ čini konstantan kut s jediničnim prostornim vektorom u istoj komponenti od $\mathbb{U}_1^2$, odnosno obje pripadaju $\mathbb{S}_1^{1+}$ ili $\mathbb{S}_1^{1-}$. Analogno kao u trodimenzionalnom slučaju, zakrivljenost je sačuvana pri izometriji ravnine. Preciznije, ako je $c : I \to \mathbf{E}_1^2$ prostorna ili vremenska krivulja i $Mx = Ax + b$ je izometrija ravnine E_1^2, tada je relacija između Frenetovog okvira c i $\beta = M \circ c$ oblika $\mathbf{T}_\beta = A\mathbf{T}_c$ i $\mathbf{N}_\beta = A\mathbf{N}_c$. Tako dolazimo do

$$\mathbf{T}_\beta'(s) = A\mathbf{T}_c'(s) = A(\kappa_c(s)\mathbf{N}_c(s)) = \kappa_c(s)A\mathbf{N}_c(s) = \kappa_c(s)\mathbf{N}_\beta(s),$$

iz čega slijedi $\kappa_\beta = \kappa_c$.

Neka su $c, \beta : I \to \mathbf{E}_1^2$ dvije prostorne krivulje parametrizirane duljinom luka $s \in I$ i istom zakrivljenošću κ. Fiksiramo $s_0 \in I$. Freneteovi okviri $\{\mathbf{T}_c(s_0), \mathbf{N}_c(s_0)\}$ i $\{\mathbf{T}_\beta(s_0), \mathbf{N}_\beta(s_0)\}$ su dvije pozitivno orijentirane baze. Tada postoji izometrija zadana ortogonalnom matricom A tako da

$$A(\mathbf{T}_c(s_0)) = \mathbf{T}_\beta(s_0)$$
$$A(\mathbf{N}_c(s_0)) = \mathbf{N}_\beta(s_0).$$

Neka je $b = \beta(s_0) - Ac(s_0)$ i definiramo izometriju ravnine $Mx = Ax + b$. Tada krivulja $\gamma = M \circ c$ zadovoljava $\kappa_\gamma = \kappa$ zato što je $\det(A) = 1$. Označimo s $\{\mathbf{T}_\gamma, \mathbf{N}_\gamma\}$ Freneteov okvir od γ. Uočimo da se Freneteovi oviri od γ i β podudaraju za $s = s_0$. Definiramo

$$f : I \to \mathbb{R},\ f(s) = \|\mathbf{T}_\gamma(s) - \mathbf{T}_\beta(s)\|^2 - \|\mathbf{N}_\gamma(s) - \mathbf{N}_\beta(s)\|^2.$$

Derivacija funkcije f, zajedno s Freneteovim jednadžbama daje $f'(s) = 0$ za svaki s, odnosno, f je konstantna funkcija. Kako je $f(s_0)$, tada je $f(s) = 0$ za svaki s. Za razliku od euklidskog slučaja, sada ne možemo tvrditi da je $\|\mathbf{T}_\gamma - \mathbf{T}_\beta\| = \|\mathbf{N}_\gamma - \mathbf{N}_\beta\| = 0$ jer metrika nije pozitivno definirana. Međutim, proširujući jednadžbu $f(s) = 0$, dobivamo

$$\langle \mathbf{N}_\beta, \mathbf{N}_\gamma\rangle + 1 = \langle \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\gamma\rangle - 1.$$

Uočimo kako $\mathbf{T}_\beta(s)$ i $\mathbf{T}_\gamma(s)$ leže u istoj komponenti jediničnog prostornog vektora, odnosno oba leže u $\mathbb{S}_1^{1+}$ ili oba leže u $\mathbb{S}_1^{1-}$ jer vrijedi $\langle \mathbf{T}_\beta(s), \mathbf{T}_\gamma(s)\rangle \geq 1$ ili $\langle \mathbf{T}_\beta(s), \mathbf{T}_\gamma(s)\rangle \leq -1$. Kako je za $s = s_0$, $\mathbf{T}_\beta(s_0) = \mathbf{T}_\gamma(s_0)$, tada je $\langle \mathbf{T}_\beta(s), \mathbf{T}_\gamma(s)\rangle \geq 1$. Za vektore $\mathbf{N}_\beta(s)$ i $\mathbf{N}_\gamma(s)$ se događa isto. Obzirom da $\mathbf{N}_\beta$ i $\mathbf{N}_\gamma$ leže u istom vremenskom stošcu,

$$0 \geq \langle \mathbf{N}_\beta, \mathbf{N}_\gamma\rangle + 1 = \langle \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\gamma\rangle - 1 \geq 0.$$

Ovime smo dokazali da vrijedi $\langle \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\gamma\rangle = 1$, stoga je i $\mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_\gamma$. Tada je $Ac'(s) = \beta'(s)$ za svaki s. Ukoliko integriramo, postoji $c \in \mathbf{E}_1^2$ tako da je $\beta(s) = Ac'(s) + konst$. Zamijenimo li $s = s_0$, dobivamo $konst = b$ i zaključujemo da je $\beta = \gamma = M \circ c$.

Napomena 1. *Dokaz se ne može proširiti na trodimenzionalni slučaj.*

Pretpostavimo da je zakrivljenost κ konstantna za $a \neq 0$. Tada je

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} a dt = as + b, \; b \in \mathbb{R}.$$

Prema (3.1) sljedeće krivulje imaju konstantnu zakrivljenost a:

1) Prostorna krivulja

$$c(s) = \tfrac{1}{a}(\sinh(as+b), \cosh(as+b)).$$

2) Vremenska krivulja

$$\beta(s) = \tfrac{1}{a}(\cosh(as+b), \sinh(as+b)).$$

Promatrajući s euklidskog gledišta, obje krivulje su euklidske hiperbole.
U euklidskom prostoru nedegenerirana ravninska krivulja s konstantnom zakrivljenošću naziva se kružnica. Uzmemo li u obzir takvu karakterizaciju i u Minkowskijevoj ravnini vidimo da se kružnicama nazivaju i gore navedene krivulje.

Teorem 12. *(Vidjeti [5, Teorem 2.10]) Neka je $c : I \to \mathbf{E}_1^3$ Freneteova krivulja uključena u ravninu $\mathbf{E}_1^3$. Krivulja c je kružnica ako i samo ako je konstantne zakrivljenosti različite od 0.*

Dokaz. Ako je c Freneteova krivulja, c ne može ležati u svjetlosnoj ravnini budući da je $\mathbf{T}$ ili $\mathbf{N}$ vremenski vektor. Dakle, ako je c kružnica, nakon izometrije prostora c je euklidska kružnica u ravnini $z = 0$ ili hiperbola u ravnini $x = 0$. Prema Primjeru 6. ove krivulje imaju konstantnu zakrivljenost.
Obratno tvrdnja je očita. Nakon izometrije prostora, dobivamo da je ravninska Freneteova krivulja uključena u ravninu $z = 0$ ili u ravninu $x = 0$, a znamo da je takva krivulja s konstantnom zakrivljenošću kružnica, odnosno hiperbola. □

Inače, u prostornoj ili vremenskoj ravnini, kružnica je skup točaka koje su jednako udaljene od fiksne točke p_0. Ako je ravnina prostorna, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to xy-ravnina. Tada je skup ekvidistantnih točaka od p_0 euklidska kružnica, što je kružnica u Minkowskijevom prostoru. Ako je ravnina vremenska, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to yz-ravnina. Tada ekvidistantne točke od p_0 zadovoljavaju jednadžbu $(y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = r^2$ ili $(y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = -r^2$, što su kružnice u $\mathbf{E}_1^3$.
Na kraju promotrimo prostorne krivulje uključene u svjetlosnu ravninu, posebno slučaj kada je vektor normale svjetlosni. Proučavamo vrstu krivulja sa pseudo-torzijom različitom od nule. Nakon izometrije prostora, pretpostavljamo da je svjetlosna ravnina zapravo ravnina jednadžbe $y - z = 0$.

Teorem 13. *(Vidjeti [5, Teorem 2.11]) Neka je P svjetlosna ravnina jednadžbe $y - z = 0$. Jedina prostorna krivulja u P s konstantnom pseudotorzijom $\lambda \neq 0$, do na reparametrizaciju, je zadana s*

$$c(s) = (s + d, \frac{a}{\lambda^2}e^{\lambda s} + bs + t, \frac{a}{\lambda^2}e^{\lambda s} + bs + t), \; a, b, d, t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Neka je $c(s) = (x(s), y(s), y(s))$. Kako je krivulja c parametrizirana duljinom luka, tada je $x'(s) = \pm 1$. Bez smanjenja općenitosti neka je $x(s) = s$. Sada je

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s) = (0, y'', y'') \ \ , \mathbf{B}(s) = (\frac{y'}{y''}, \frac{-1+y'^2}{2y''}, \frac{1+y'^2}{2y''}).$$

Primijetimo da je $y'' \neq 0$. U protivnom bi bilo $y(s) = as+b$, $a, b \in \mathbb{R}$, što pokazuje da je krivulja pravac. Izračun torzije nam daje $\tau = -\langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle = \frac{y'''}{y''}$, $y'' \neq 0$. Rješavanjem diferencijalne jednadžbe $\frac{y'''}{y''} = \lambda$ dobivamo eksplicitnu parametrizaciju krivulje navedenu u iskazu teorema. □

3.2 Opće cilindrične zavojnice

U euklidskom prostoru opća cilindrična zavojnica je krivulja čije su tangente pravci koji tvore konstantan kut s fiksnim smjerom. Taj pravac se naziva os zavojnice. U euklidskom prostoru je poznato da je krivulja opća cilindrična zavojnica ako i samo ako je τ/κ konstantna funkcija. Prema tome, ravninske krivulje su primjer općih cilindričnih spirala. Opća cilindrična zavojnica s konstantnom zakrivljenosti i konstantnom torzijom naziva se obična cilindrična zavojnica.
Proširit ćemo pojam opće cilindrične spirale i na Minkowskijev prostor. Problem se pojavljuje kada govorimo o kutu između dva vektora jer kut nije definiran za svaki par vektora iz $\mathbf{E}_1^3$. Na primjer, to je slučaj ukoliko je krivulja svjetlosna. U drugim slučajevima, mogu se pojaviti problemi kada je os vremenska (ili prostorna), a krivulja je prostorna (ili vremenska). Čak i u slučaju da su pravac i krivulja vremenski, smjerovi osi i tangente vektora ne moraju biti u istom vremenskom stošcu. Iz tog razloga proširujemo pojam opće cilindrične zavojnice u $\mathbf{E}_1^3$ kako slijedi.

Definicija 3.1. *Opća cilindrična zavojnica $c : I \to \mathbf{E}_1^3$ je regularna krivulja parametrizirana duljinom luka (ili pseudo-duljinom luka ako je krivulja c svjetlosna) ako postoji vektor $v \in \mathbf{E}_1^3$ takav da je funkcija $\langle \mathbf{T}(s), v \rangle$ konstantna. Bilo koji pravac paralelan sa smjerom vektora v naziva se os zavojnice.*

Prema prethodnoj definiciji su i pravac i bilo koja ravninska krivulja također opće cilindrične zavojnice. U nastavku ćemo iz razmatranja isključiti obje situacije.
Za Frenetove krivulje vrijedi karakterizacija zavojnice sa konstantnim τ/κ i dokaz je analogan dokazu u euklidskom slučaju.

Teorem 14. *(Vidjeti [5, Teorem 2.12]) Neka je $c : I \to \mathbf{E}_1^3$ Freneteova krivulja. Kažemo da je c opća cilindrična zavojnica ako i samo ako je τ/κ konstantan.*

Za prostorne krivulje sa svjetlosnom normalom, odnosno svjetlosne krivulje vrijedi sljedeća karakterizacija općih cilindričnih spirala.

Teorem 15. *(Vidjeti [5, Teorem 2.13]) Prostorna krivulja sa svjetlosnim vektorom normale je opća cilindrična zavojnica. Svjetlosna krivulja je opća cilindrična zavojnica ako i samo ako joj je torzija konstantna.*

Dokaz. Neka je c prostorna krivulja sa svjetlosnim vektorom normale. Pretpostavimo da je $\langle \mathbf{T}(s), v \rangle = a$, $a \in \mathbb{R}$. Deriviranjem $\langle \mathbf{T}(s), v \rangle$ imamo $\langle \mathbf{N}(s), v \rangle = 0$. Budući da je $\mathbf{N}(s)$ svjetlosni, postoji funkcija $b = b(s)$ tako da je $v = a\mathbf{T}(s) + b(s)\mathbf{N}(s)$. Ponovimo deriviranje i

koristeći Freneteove jednadžbe imamo $(b' + b\tau + a)\mathbf{N}(s) = 0$. Dakle, $b' + b\tau + a = 0$. To nam govori da je svaka prostorna krivulja sa svjetlosnim vektorom normale opća cilindrična zavojnica jer je vektor v bilo koji vektor tipa $v = a\mathbf{T}(s) + b(s)\mathbf{N}(s)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ i b zadovoljava gornji sustav ODJ. Treba napomenuti da Freneteove jednadžbe impliciraju da v ovisi o s, što znači da je v fiksni vektor.
Pretpostavimo sada da je c svjetlosna krivulja takva da je funkcija $\langle \mathbf{T}(s), v\rangle$ konstantna, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ za neki vektor $v \in \mathbf{E}_1^3$. Tada je $\langle \mathbf{N}(s), v\rangle = 0$. Kako je $\mathbf{T}(s)$ svjetlosni, postoji funkcija $b = b(s)$ tako da je $v = b(s)\mathbf{T}(s) - a\mathbf{B}(s)$. Deriviranjem i korištenjem Freneteovih jednadžbi imamo

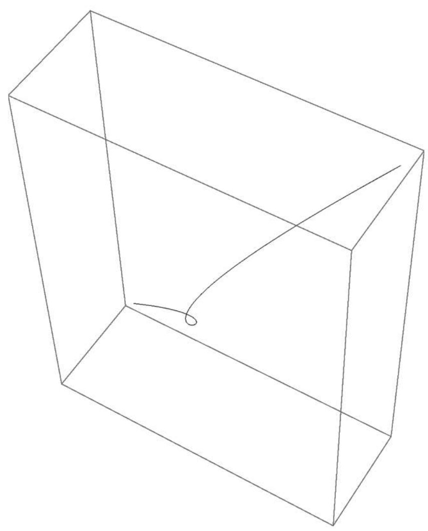
$$0 = b'\mathbf{T} + (b - a\tau)\mathbf{N}.$$

Tada je b konstantna funkcija i τ je konstanta. Vrijedi i obrat, tj. svaka svjetlosna krivulja s konstantnom torzijom je opća cilindrična zavojnica. Prema tome, uzimamo bilo koji $a \neq 0$ i promatramo $b = a\tau$. Tada je vektor $v = b\mathbf{T} - a\mathbf{B}$ koji ne ovisi o s i to je os opće cilindrične zavojnice. $\square$

Primjer 7. *U Minkowskijevom prostoru razlikujemo 3 vrste svjetlosnih općih cilindričnih zavojnica, ovisno o kauzalnom karakteru njezine osi, [11]:*

1. $c_1(s) = (\frac{1}{r^2}\cos(rs), \frac{1}{r^2}\sin(rs), -\frac{s}{r})$ *(prostorna os),*
2. $c_2(s) = (-\frac{s}{r}, \frac{1}{r^2}\cosh(rs), \frac{1}{r^2}\sinh(rs))$ *(vremenska os),*
3. $c_3(s) = (\frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} - \frac{s}{3})$ *(svjetlosna os).*

Na Slici 9 možemo vidjeti svjetlosnu opću cilindričnu zavojnicu sa svjetlosnom osi. Svjetlosna zavojnica s prostornom osi, odnosno s vremenskom osi, odgovara krivulji prikazanoj na Slici 6, odnosno Slici 7.



Slika 9: Svjetlosna zavojnica sa svjetlosnom osi

Literatura

[1] M. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Saddle River, 1976.

[2] Lj. Primorac Gajčić, Predavanja iz kolegija Uvod u diferencijalnu geometriju, ak. god. 2019-2020, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.

[3] H. W. Guggenheimer, Differential Geometry, New York, McGraw-Hill, 1963.

[4] B. Hunt i W. Kühnel, Differential Geometry, Curves - Surfaces - Manifolds, 3. izdanje, AMS Student mathematical library 77, American Mathematical Society, 2015.

[5] R. Lopez, Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, 2014.

[6] F. Martinović, Vremenske i svjetlosne plohe u Lorentz-Minkowskijevom prostoru, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Diplomski rad, Zagreb 2021.

[7] G. L. Naber, The Geometry of Minkowski Spacetime, An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity, 2010.

[8] B. O'Neill, S. Riemannian geometry with application to general relativity, Academic Press, New York, 1983.

[9] W. Pauli, Theory of Relativity, Dover Publications, Inc, New York, 1981.

[10] V. Pašić, Euklidska geometrija krivih i površi u 3 dimenzije, skripta, Univerzitet u Tuzli 2016.

[11] I. Protrka, Plohe konstantne srednje zakrivljenosti i njima pridružene fokalne krivulje i plohe u Minkowskijevom prostoru, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Doktorski rad, Zagreb 2019.

Sažetak

Tema ovog rada su krivulje u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru, odnosno njihova lokalna teorija. Navedena je definicija Minkowskijevog prostora i motivacija za njegovo definiranje, te su kroz rad isticane bitne razlike između euklidskog i Minkowskijevog prostora. U radu su analizirane tri klase krivulja koje razlikujemo i za svaku klasu krivulja je definiran Frenetov trobrid, te zakrivljenost i torzija krivulje koje krivulje određuju na jedinstven način. Specijalna pažnja je posvećena ravninskim krivuljama, odnosno općim cilindričnim spiralama i njihovoj karakterizaciji. Navedeni su i brojni primjeri krivulja, čiji su grafički prikazi izrađeni pomoću programa Mathematica.

Ključne riječi

Minkowskijev prostor, prostorna krivulja, vremenska krivulja, svjetlosna krivulja, Freneteov trobrid, zakrivljenost, torzija, ravninska krivulja, opća cilindrična spirala

Title: Local theory of curves in three-dimensional Minkowski space

Summary

The topic of this work are curves in the three-dimensional Minkowski space, that is, their local theory. The definition of Minkowski space and the motivation for its definition are given. Throughout the work the main differences between the Euclidean and Minkowski space were emphasized. We analyzed curves from three different classes and for each of them we derived its Frenet frame, the curvature and torsion which determine a curve in a unique way. Special attention is paid to planar curves, as well as generalized helices and their characterization. There are also numerous examples of curves, whose graphic representations were made by the Mathematica software.

Keywords

Minkowski space, spacelike curve, timelike curve, Frenet frame, curvature, torsion, plane curve, generalized helix