Očekivana korisnost u uvjetima poznate vjerojatnosti (rizik)

Ban, Maja

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Maja Ban

Očekivana korisnost u uvjetima poznate vjerojatnosti (rizik)

Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Maja Ban

Očekivana korisnost u uvjetima poznate vjerojatnosti (rizik)

Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2023.

Sadržaj

1 Uvod

U životu često moramo donositi odluke, a da nemamo sve informacije o mogućim posljedicama. Primjerice, koju ćemo srednju školu upisati, hoćemo li ići na fakultet ili ne, trebamo li kupiti auto, putovati svaki dan na posao u drugi grad ili unajmiti stan u tom gradu. U svakom trenutku znamo između čega biramo, ali ne znamo koje će biti posljedice našeg izbora. Sve odluke koje donosimo sa sobom nose rizik i neizvjesnost.
Cilj je ovog rada definirati i objasniti očekivanu korisnost u uvjetima poznate vjerojatnosti. U drugom poglavlju ćemo uvesti osnovne pojmove vezane uz teoriju odlučivanja kao što su *alternativa, stanje svijeta, donositelj odluke* te navesti podjelu modela odlučivanja prema uvjetima u kojima se donose odluke. Na početku trećeg poglavlja ćemo definirati *izgled* i definirati *relaciju preferencije* kojom izražavamo sklonost donositelja odluke u odnosu na dvije alternative te navesti svojstva te relacije. Zatim ćemo definirati *slabu preferenciju* koja na neki način relaksira relaciju preferencije i navesti njene aksiome. Također, uvest ćemo pojmove *sklonost, nesklonost i indiferentnost* u odnosu na rizik, definirati *sigurnosni ekvivalent* i navesti *aksiome teorije očekivane korisnosti* koje još nazivamo i aksiomima racionalnog ponašanja. Uvest ćemo *stabla odlučivanja* koja se uglavnom primjenjuju prilikom donošenja odluka u situacijama rizika te olakšavaju donošenje odluka u slučaju velikog broja polaznih alternativa i/ili stanja svijeta. Iako je intuitivno jasno da kad razmišljamo o izboru između malog broja alternativa, koristimo relaciju preferencije, nekad nije dovoljno znati samo koje su naše preferencije već su potrebne i dublje analize. Za to nam služi *funkcija korisnosti*, odnosno funkcija korisnosti nam daje brojčani opis preferencija među alternativama i sažima sve informacije dobivene relacijom preferencije. Također, navest ćemo primjer koji nam pokazuje kako ljudi kod donošenja odluka ne koriste uvijek očekivanu korisnost- *Allaisov paradoks.* U četvrtom ćemo poglavlju objasniti *Petrogradski paradoks* koji se temelji na jednostavnoj igri bacanja novčića s beskonačnim očekivanim dobitcima, a koji proizlazi iz činjenice da ni jedan racionalan čovjek ne bi bio spreman u igru uložiti veliki konačan iznos iako očekivana vrijednost implicira suprotno te ćemo se upoznati s *marginalnom korisnosti.* Na poslijetku, definirat ćemo *težinsku funkciju i korisnost ovisnu o rangu.*

2 Modeli odlučivanja

Svaki korak koji napravimo u životu svodi se na odluke. Odlučujemo u koliko ćemo se sati ujutro probuditi na osnovu obaveza koje nas čekaju tog dana, odlučujemo što ćemo obući ovisno o prigodi, mjestu na koje idemo ili o vremenskim prilikama, odlučujemo na koji ćemo način stići na ciljanu lokaciju- osobnim automobilom, javnim prijevozom ili na neki drugi način. Uz te svakodnevne odluke, nekad moramo donijeti i neku veću odluku kao što je na primjer koji auto kupiti ili trebamo li kupiti stan ili kuću i u kojem mjestu ili trebamo li uložiti novac u nešto, na primjer u dionice, i koliki iznos bi bio primjeren. Kod donošenja odluke možemo se osloniti na intuiciju i odluku donijeti u tom trenutku ili možemo analizirati moguće posljedice koje će proizaći iz te odluke za što je potrebno vrijeme.
Alternative (akcije, objekti) će predstavljati, kao što je to uobičajeno u literaturi, različite mogućnosti dostupne *donositelju odluke (odlučitelju)* u situaciji kada treba donijeti odluku. Skup alternativa će biti konačan skup.
Stanja svijeta (kriteriji ili atributi) predstavljaju čimbenike koji dodatno utječu na donošenje odluke, odnosno različite kuteve gledanja na dane alternative. Pretpostavimo kako donositelj odluke zna sva moguća stanja svijeta, odnosno da imamo konačno mnogo stanja svijeta i označimo ih $\theta_1, \theta_2 \cdots, \theta_n$ i konačno mnogo alternativa koje ćemo označiti $a_1, a_2, \cdots, a_m$ i donositelj odluke mora odabrati samo jednu alternativu. Tada je definirana *tablica odlučivanja*

		stanja svijeta			
	posljedice	θ_1	θ_2	$\dots$	θ_n
akcije	a_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}
	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\ddots$	$\dots$
	a_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}

Tablica 1: Tablica odlučivanja

gdje x_{ij} predstavlja posljedicu alternative a_i u stanju svijeta θ_j.
Prema uvjetima u kojima se donose odluke, modele odlučivanja dijelimo na:

- *modele odlučivanja u uvjetima sigurnosti (odluke uz sigurnost),*
- *modele odlučivanja u uvjetima rizika (odluke uz slabu nesigurnost ili uz rizik),*

- *modele odlučivanja u uvjetima nesigurnosti (odluke uz jaku nesigurnost ili uz potpuno neznanje).*

Kada govorimo o odlučivanju u *uvjetima sigurnosti* imamo samo jedno stanje svijeta i donositelj odluke donosi odluku tako da maksimizira svoje zadovoljstvo.
U modelu odlučivanja u *uvjetima rizika* donositelj odluke ne zna koje su posljedice njegovih odluka, ali zna koja su stanja svijeta i posljedice u svakom od njih. Također, donositelj odluke zna koja je vjerojatnost da će se dogoditi određeno stanje svijeta. Ovaj model se po svojim zahtjevima nalazi između modela sigurnosti i modela nesigurnosti.
Odlučivanje u *uvjetima nesigurnosti* proizlazi iz činjenice da donositelj odluke ne poznaje u potpunosti dio stvarnosti koji ne može kontrolirati, a može utjecati na ishode odluke. Nesigurnost je objektivno ili subjektivno neznanje donositelja odluke o budućim okolnostima odlučivanja. Poznata su stanja svijeta, ali ne i vjerojatnosti njihovog nastupanja.
Razjasnimo ove modele kroz sljedeći primjer.

Primjer 2.1. *Nakon svjetskog prvenstva u nogometu Joško se isprofilirao među najbolje stopere, od njega se očekuje još mnogo više i mnogi nogometni treneri ga žele u svom timu. No, Joško je mladi igrač, moglo bi se reći i neiskusan pa je velika vjerojatnost da će griješiti u igri što može dovesti do poraza. Mišljenje je trenera da ako odluči dovesti Joška u klub iz kluba s kojim se bori za naslov i on ne griješi previše, klub će osvojiti ligu, ali ako će griješiti, izgubit će sigurnost koja ga krasi i klub neće osvojiti naslov prvaka. Odnosno, on vjeruje da je upravo Joško ključan igrač o kojem će ovisiti tko će pobjediti. Odluči li uprava ne kupiti Joška i prepustiti ga konkurentskom klubu, a Joško puno griješi, griješit će u konkurentskom klubu koji tada neće osvojiti naslov, a ako ne griješi, onda konkurentski klub osvaja naslov. Uprava kluba treba odlučiti treba li kupiti Joška ili ga prepustiti konkurentima.*
U ovako definiranom primjeru imamo dvije moguće alternative: dovesti Joška u klub i prepustiti Joška konkurentskom klubu te dva stanja svijeta koja ovise o Joškovoj koncentraciji na igru, odnosno o njegovim potencijalnim greškama. Pogledajmo pripadnu tablicu odlučivanja, tablicu 2.
Želimo li donijeti odluku, potrebno je vrednovati posljedice pa pretpostavimo da klub zanima financijska strana koju nosi pojedina odluka. Budući da Joškov klub za njega traži $75mil€$ *i naslov prvaka klubu nosi* $76.47mil$ € *pripadna tablica je tablica 3.*

		Stanje svijeta	
	Posljedice	Joško će griješiti	Joško neće griješiti
Akcije	Kupiti Joška	Potrošen novac i naslov nije osvojen	Potrošen novac i naslov je osvojen
	Ne kupiti Joška	Novac nije potrošen i naslov je osvojen	Novac nije potrošen ni naslov osvojen

Tablica 2: Tablica odlučivanja navedenog primjera 2.1.

		Stanje svijeta	
	Posljedice	Joško će griješiti	Joško neće griješiti
Akcije	Kupiti Joška	-75mil €	1.47mil €
	Ne kupiti Joška	76.47mil €	0 €

Tablica 3: Tablica odlučivanja navedenog primjera 2.1

Pogledajmo sada modele odlučivanja na ovom primjeru.
Ako klub zna da će Joško puno griješiti, odustat će od njegovog dovođenja u klub, u suprotnom će ga kupiti. Ovdje se radi o odluci uz sigurnost. Odluku uz rizik će predstavljati poznata vjerojatnost da će Joško griješiti tijekom utakmica, a ako nam ta vjerojatnost nije poznata, govorimo o odlukama uz jaku nesigurnost.

3 Funkcija korisnosti

U analizi odluka donesenih pod rizikom koristi se teorija očekivane korisnosti. Ta je teorija bila opće prihvaćena kao normativni model racionalnog izbora i široko se primjenjivala kao deskriptivni model ekonomskog ponašanja. Logično je pretpostaviti kako bi svi razumni ljudi željeli slijediti aksiome ove teorije, što većinu vremena zapravo i rade.
Važne financijske odluke u našim životima odnose se na velika ulaganja pa maksimizacija očekivane vrijednosti možda nije razumna. Nadalje, većina se naših odluka ne odnosi na financijske ili kvantitativne ishode, već na nekvantitativne ishode, primjerice, zdravstveno stanje. U ovom slučaju, ne možemo definirati očekivanu vrijednost. Potrebna nam je općenitija teorija pa se zato okrećemo teoriji očekivane korisnosti.
Također, u ovome ćemo poglavlju definirati očekivanu vrijednost i objasniti što je to subjektivan način donošenja odluke pri neizvjesnosti.

3.1 Očekivana vrijednost

Objektivna vjerojatnost odnosi se na vjerojatnost dobivenu analizom konkretnih mjera, a ne slutnji ili nagađanja. Mjera je zabilježeno opažanje, čvrsta činjenica ili dio dugo prikupljanih podataka. Procjena vjerojatnosti izračunava se matematičkim jednadžbama koje manipuliraju podacima kako bi se odredila vjerojatnost pojavljivanja neovisnog događaja, tj. događaja na čiji ishod ne utječu prethodni događaji.
Pretpostavimo kako je dana objektivna vjerojatnost P na nekom skupu $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ na način da se svakom ishodu α_j dodjeljuje vjerojatnost $p_j = P(\alpha_j)$. Zapišimo vjerojatnosnu distibuciju nad $\mathbb{R}$ koja poprima konačno mnogo vrijednosti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ u obliku

$$\{p_1 : \alpha_1, p_2 : \alpha_2, \dots, p_n : \alpha_n\}.$$

To znači da se svaki ishod α_j dogodio s vjerojatnošću p_j, gdje je $j \in \mathbb{N}$. Tako definiranu vjerojatnosnu distribuciju nazivamo *izgledom.*
U zapisu možemo ispustiti zareze i zagrade, ako neće doći do zabune i množenja. Tada pišemo:

$$p_1\alpha_1 p_2\alpha_2 \dots p_n\alpha_n.$$

Također, ako imamo samo dva ishoda i dvije vjerojatnosti, možemo izostaviti drugu vjerojatnost iz zapisa pa pišemo $\alpha_{1p}\alpha_2$ umjesto $\{p : \alpha_1, 1-p : \alpha_2\}$.

Vjerojatnosne distibucije ishoda koje poprimaju konačno mnogo vrijednosti nazivamo *izgledima uvjetovanim vjerojatnošću.* Binarnu relaciju na skupu izgleda zovemo relacijom preferencije i označavamo $\succcurlyeq$.

Definicija 3.1. *Kažemo da donositelj odluke preferira (ili jako preferira) alternativu a nad alternativom b, u oznaci $a \succ b$, ako bi, u slučaju da mu ponudimo izbor između alternativa a i b, bio razočaran ako mora uzeti b [3, str. 51].*

Definicija 3.2. *Kažemo da je donositelj odluke indiferentan između između alternativa a i b, u oznaci $a \sim b$, ako je jednako sretan dobije li ili a ili b [3, str. 51].*

Pogledajmo svojstva koja zadovoljava relacija preferencije:

- *tranzitivnost* s obzirom na relaciju preferencije: za bilo koje tri proizvoljne alternative a, b i c vrijedi:

$$a \succ b \text{ i } b \succ c \Longrightarrow a \succ c,$$

- *asimetričnost* s obzirom na relaciju preferencije: ako za neki par alternativa a i b vrijedi $a \succ b$ tada ne može vrijediti $b \succ a$, to jest

$$a \succ b \Longrightarrow b \not\succ a,$$

- *tranzitivnost* s obzirom na indiferentnost: za proizvoljne tri alternative a, bic vrijedi:

$$a \sim b \text{ i } b \sim c \Longrightarrow a \sim c,$$

- *Refleksivnost* s obzirom na indiferentnost: za svaku alternativu a vrijedi:

$$a \sim a,$$

- *simetričnost* s obzirom na indiferentnost: za svake dvije alternative a i b vrijedi:

$$a \sim b \Longrightarrow b \sim a,$$

- *veza između indiferentnosti i preferencije*

* za tri proizvoljne alternative a, b i c vrijedi:

$$a \sim b \text{ i } b \succ c \Longrightarrow a \succ c$$
$$a \succ b \text{ i } b \sim c \Longrightarrow a \succ c,$$

* za svake dvije alternative a i b vrijedi točno jedna od sljedećih tvrdnji:
$$a \succ b \text{ ili } a \sim b \text{ ili } b \succ a.$$

Definicija 3.3. *Kažemo da donositelj odluke slabo preferira alternativu a nad alternativom b, u oznaci $a \succeq b$, ako smatra da je alternativa a dobra barem kao i alternativa b [3, str. 53].*

Za potrebe daljnjeg rada, navedimo još aksiome slabe preferencije.
Neka je dan skup A, tj. skup alternativa koje donositelj odluke promatra.

Aksiom A1 *(Usporedivost)* Svake su dvije alternative usporedive relacijom $\succeq$, odnosno

$$\text{za svake dvije alternative } a, b \in A \text{ vrijedi } a \succeq b \text{ ili } b \succeq a \text{ ili oboje.}$$

Aksiom A2 *(Tranzitivnost)* Relacija $\succeq$ je tranzitivna, odnosno

$$\text{za svake tri alternative } a, b, c \in A \; a \succeq b \text{ i } b \succeq c \Longrightarrow a \succeq c.$$

Aksiom A3 *Konzistentnost slabe preferencije i indiferentnosti*

$$\text{za svake dvije alternative } a, b \in A \text{ vrijedi } a \sim b \Longleftrightarrow a \succeq b \text{ i } b \succeq a.$$

Aksiom A4 *Konzistentnost slabe i jake preferencije:*

$$\text{za svake dvije alternative } a, b \in A \text{ vrijedi } a \succ b \Longleftrightarrow b \not\succeq a.$$

Definicija 3.4. ***(Očekivana vrijednost)*** *Neka je $\{p_1 : \alpha_1, \dots, p_n : \alpha_n\}$ izgled s n stanja svijeta. Tada definiramo očekivanu vrijednost izgleda kao funkciju $EV : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sa:*

$$EV = \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i,$$

gdje je $p_i = P(\alpha_i),\ i = 1, \ldots, n,$ *a* $\mathcal{P}$ *skup ishoda nad particijom elementarnih ishoda* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *[4, str. 25].*

Definirajmo još pojmove nesklonost prema riziku, sklonost prema riziku i neutralnost prema riziku.

Definicija 3.5. *(**Nesklonost prema riziku**) Ako ni jedan izgled ne preferiramo u odnosu na njegovu očekivanu vrijednost, govorimo o nesklonosti prema riziku [5, str. 70].*

Definicija 3.6. *(**Sklonost prema riziku**) Ako svaki izgled preferiramo u odnosu na očekivanu vrijednost, govorimo o sklonosti prema riziku [5, str. 70].*

Definicija 3.7. *(**Neutralnost prema riziku**) Ako smo indiferentni na izgled u odnosu na očekivanu vrijednost, govorimo o neutralnosti prema riziku [5, str. 70].*

Dakle, pod pojmom sklonost prema riziku podrazumijeva se psihološka spremnost pojedinca za prihvaćanje rizika.
Kod svake igre, donositelj odluke se mora odlučiti koji je iznos spreman uložiti za ulazak u igru. Taj iznos zovemo *sigurnosni ekvivalent (engl. certainty equivalent, CE)*. Dakle, sigurnosni ekvivalent izgleda x je konstantan ishod α za koji vrijedi: $\alpha \sim x$. Pišemo:

$$CE(x) = \alpha.$$

Jedan od mogućih načina donošenja odluka u slučaju neizvjesnosti je odabir vjerojatnosti za pojedine događaje i zatim maksimiziranje očekivane vrijednosti s obzirom na odabrane vjerojatnosti. Taj način je subjektivan.
Mogući kriterij za odabir najboljeg izgleda može biti maksimizacija očekivane vrijednosti izgleda na skupu izgleda, odnosno

$$\max_{\alpha \in \mathcal{P}} EV(\alpha).$$

3.2 Aksiomi teorije očekivane korisnosti

Postoje četiri aksioma teorije očekivane korisnosti koji definiraju racionalnog donositelja odluke. Oni nam daju osnovu za predviđanje načina na koji će pojedinci donositi odluke i navedeni su u nastavku.

Aksiom AA1 (*Potpunost*) Za svake dvije alternative $a, b \in A$ vrijedi: $a \succeq b$ ili $b \succeq a$.
Aksiom AA2 (*Tranzitivnost*) Za bilo koje tri alternative a, b i $c \in A$ vrijedi

$$a \succeq b \text{ i } b \succeq c \Longrightarrow a \succeq c.$$

Aksiom AA3 (*Neprekidnost*) Pretpostavimo da vrijedi $a \preceq b \preceq c$. Tada postoji $p \in [0, 1]$ takav da vrijedi

$$\{p \cdot a, (1-p) \cdot c\} \sim b.$$

Aksiom AA4 (*Nezavisnost*) Neka vrijedi $a \preceq b$. Tada za svaki c i $p \in [0, 1]$ vrijedi:

$$\{p \cdot a, (1-p)c\} \preceq \{p \cdot b, (1-p)c\}.$$

3.3 Stabla očekivanja

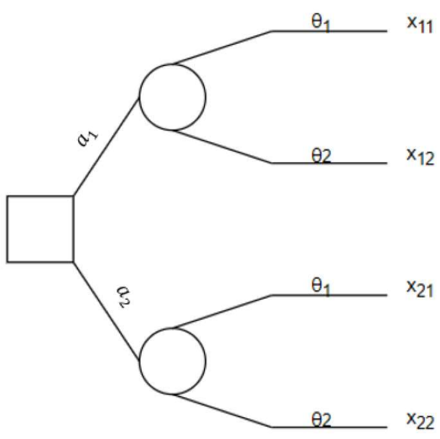
Pitanje koje se nameće je slijedeće: što ako imamo puno različitih stanja svijeta ili alternativa, a trebamo brzo donijeti odluku? U tom će nam slučaju tablica odlučivanja biti vrlo nepregledna za korištenje pa je potrebno alternativno rješenje. Stoga se okrećemo stablima odlučivanja koja se primjenjuju kao grafički model za vizualiziranje procesa donošenja odluke. Njihov je glavni smisao jasan prikaz svih mogućnosti i definiranje problema odlučivanja. Uglavnom se primjenjuje prilikom donošenja odluka u situacijama rizika i to najviše u poslovnom svijetu. Pomoću njega možemo donijeti odluku o kupnji marke automobila ili upisu na fakultet. Pogodno ga je koristiti u slučajevima kada se donošenje odluke sastoji od niza manjih odluka koje su međusobno povezane. Na stablu odlučivanja su prikazane sve mogućnosti koje se mogu dogoditi prilikom donošenja odluke. *Granama* povezujemo *čvorove* koji predstavljaju mjesta na kojima se jedna grana dijeli na više grana. Razlikujemo dvije vrste čvorova:

- *čvor odluke* iz kojeg se dalje nastavljaju granati grane koje zadovoljavaju određenu odluku,
- *krajnji čvor* koji predstavlja završetak određene grane stabla.

Kako bismo kreirali stablo odlučivanja, moramo biti upoznati između kojih mogućnosti biramo, koje one posljedice nose te koje su njihove vjerojatnosti. Dakle, stablo se sastoji od niza međusobno povezanih odluka od kojih svaka ovisi o prethodnoj. Kod donošenja odluka ovim načinom, koristimo se očekivanom vrijednošću, odnosno na kraju svake grane imamo ishode na temelju kojih izračunavamo očekivanu vrijednost pojedinog slučaja. Kod donošenja odluke, biramo onu granu koja vodi prema čvoru s najvećom očekivanom vrijednošću. Dakle, kako bismo mogli koristiti stabla odlučivanja, potrebno je zadovoljiti sljedeće pretpostavke:

1. donositelj odluke mora biti upoznat sa svim mogućim alternativama,
2. moguće je ocijeniti posljedice svake od alternativa,
3. razmatraju se samo alternative koje se mogu ocijeniti,
4. poznate su vjerojatnosti nastupanja nesigurnih događaja.

Pogledajmo sada grafički prikaz stabla odlučivanja na slici 1.



Slika 1: Stablo odlučivanja

Analiza stabla odlučivanja se temelji na *metodi povratne indukcije*, odnosno započinje u krajnjim granama i nastavlja se u smjeru početnog čvora- *čvora odluke.* Na grafičkom prikazu taj je čvor prikazan kvadratićem, odnosno njime je označen događaj za koji moramo donijeti najbolju moguću odluku između više raspoloživih alternativa. Raspoložive alternative su prikazane kao grane (u oznaci, a_1, a_2). Posljedice svake od alternative su prikazane kružićima i nazivaju se *čvorovima okolnosti.* U svakom se čvoru okolnosti izračunava očekivana korisnost koja će biti detaljnije objašnjena u sljedećem poglavlju. *Grane posljedičnih stanja* se dalje granaju u stanja svijeta (u oznaci θ_1, θ_2). Završni čvorovi označeni su $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ i oni predstavljaju krajnju odluku, odnosno posljedicu akcije a_i u stanju svijeta θ_j. U slučaju da se odlučimo za alternativu a_1 i stanje svijeta θ_2, krajnja odluka je x_{12}. Cilj je na ovaj način donijeti odluku koja će maksimizirati očekivanu korisnost.

Primjer 3.1. *Zbog većeg uroda jabuka nego prijašnjih godina, Ivan se našao u nedoumici. Na raspolaganju za prodaju ima 5000 kg jabuka i treba se odlučiti želi li ih prodati odmah, polovicu jabuka skladištiti i polovicu prodati ili sve skladištiti. Ovisno o alternativi za koju se odluči, vrijedi slijedeće:*

- *ako jabuke prodaje odmah, prodaje ih po cijeni od* 0.66 *€\kg,*
- *odluči li se polovicu prodati, cijena je* 0.66 *€\kg, dok za skladišteni dio cijena može biti visoka s vjerojatnošću* 0.2*, srednja s vjerojatnošću* 0.5 *ili niska s vjerojatnošću* 0.3 *i cijena skladištenja iznosi* 0.13 *€\kg,*
- *skladišti li sve jabuke, cijena ponovno može biti visoka, srednja ili niska s istim vjerojatnostima i istom cijenom skladištenja.*

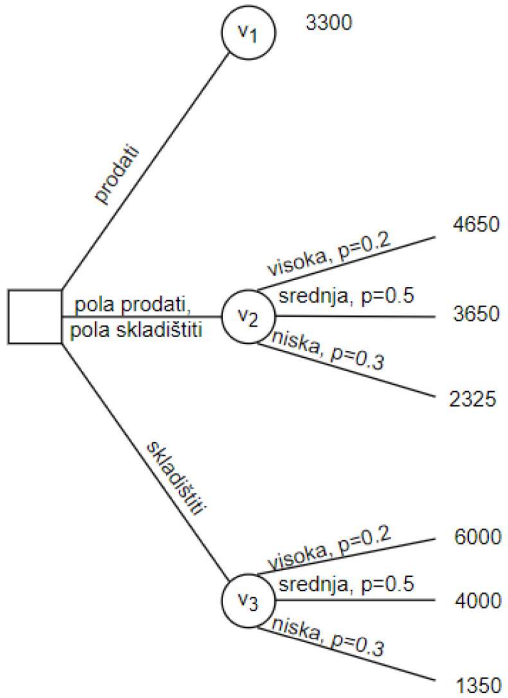
Visoka, srednja i niska cijena redom iznose 1,33 *€\ kg,* 0.93 *€\kg i* 0.4 *€\kg.*
Rješenje:
Pogledajmo pripadno stablo odlučivanja prikazano na slici 2.
Izračunajmo vrijednosti u naznačenim čvorovima:

$$v_1 = 3300,$$

$$v_2 = 1650 + 3325 \cdot 0.2 + 2325 \cdot 0.5 + 1000 \cdot 0.3 = 3777.5,$$

$$v_3 = 6650 \cdot 0.2 + 4650 \cdot 0.5 + 2000 \cdot 0.3 = 4255.$$

Možemo vidjeti kako je najbolja alternativa Ivanu da skladišti sve jabuke jer će tako njegov profit iznositi 4255*€. Najgora alternativa mu je da proda sve jabuke odmah jer tada njegov profit iznosi* 3300*€, dok će ako polovicu proda, a polovicu skladišti zaraditi* 3777.5*€.*



Slika 2: Pripadno stablo odlučivanja

Stabla odlučivanja široko su primjenjiva. Osim u poljoprivredi, možemo ih koristiti u građevini na primjer kod kupnje novih strojeva ili u medicini za odlučivanje o kupnji nekog od mnogobrojnih uređaja i slično.

3.4 Očekivana korisnost

Teorija očekivane korisnosti nam govori na koji bismo način trebali donijeti racionalnu odluku u slučaju kada nismo sigurni u ishode donesene odluke. Trebamo se odlučiti za ishod koji će nam donijeti najveću očekivanu korist (korisnost). Očekivana korisnost je ponderirani prosjek korisnosti svakog mogućeg izgleda pri čemu korisnost izgleda mjeri u kojoj je mjeri pojedini ishod poželjan, odnosno nepoželjan.
Prije donošenja svake odluke, suočavamo se s različitim faktorima koji imaju utjecaj na nju. Označimo te faktore s $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$. Kako bismo mogli doni-

jeti najbolju moguću odluku, moramo biti upoznati s međusobnom ovisnošću tih faktora te načinom na koji oni utječu na konačnu korisnost, odnosno moramo poznavati funkciju $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koju zovemo *funkcijom korisnosti.* Uvedimo definiciju očekivane korisnosti.

Definicija 3.8. ***(Očekivana korisnost)*** *Neka je $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ skup ishoda s pripadnim vjerojatnostima $p_i = p(\alpha_i), i = 1, \dots, n$ za koje vrijedi $p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Ako je dana funkcija korisnosti $u : X \to \mathbb{R}$, onda je pripadna očekivana korisnost definirana s [3, str. 89]:*

$$E[u] = E(u) = \sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i)u(\alpha_i).$$

Očekivana korisnost daje preferencije donositelja odluke. Kao i kod očekivane vrijednosti, najbolji izgled dobivamo maksimizacijom očekivane korisnosti na skupu izgleda:

$$\max_{\alpha \in X} E(u(\alpha)).$$

Pogledajmo sljedeći primjer.

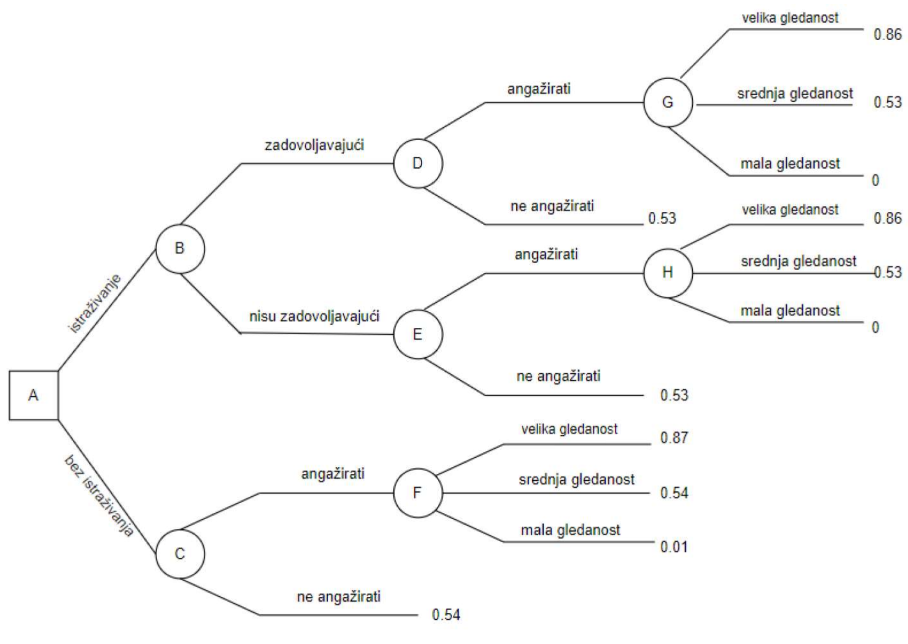
Primjer 3.2. *Casting direktor se našao u nedoumici. Glavnu ulogu u filmu želio bi dodijeliti jednom mladom i vrlo talentiranom glumcu. No taj se glumac u zadnje vrijeme često nalazi u središtu skandala što bi moglo dovesti do negativnog publiciteta i naštetiti gledanosti samog filma. Glumčev menadžer smatra da bi najbolje bilo da se angažira nezavisna agencija koja bi provela istraživanje među ljudima i da na taj način vide koliko ga ljudi i dalje podržava u njegovom radu. Pitanje je hoće li usprkos odabiru glumca gledanost biti velika, srednja ili mala. Ako će gledanost biti mala, a u film je potrebno uložiti jako puno novaca, onda bi možda bilo pametnije izabrati nekog drugog glumca. To je istraživanje, naravno, potrebno i platiti, a agencija će na kraju ispitivanja dati procjenu gledanosti i neće u izvještaj napisati treba li zaposliti glumca ili ne, već samo jesu li rezultati zadovoljavajući ili ne. Pretpostavimo da su zadane početne vrijednosti temeljene na pretpostavkama direktora:*

$$\begin{aligned} P(\textit{velika gledanost}) &= P(VG) = 0.4, \\ P(\textit{srednja gledanost}) &= P(SG) = 0.3, \\ P(\textit{mala gledanost}) &= P(MG) = 0.3. \end{aligned}$$

Također, pretpostavimo da je mišljenje agencije sljedeće:

$$\begin{aligned} P(zadovoljava \,|VG) &= P(Z|VG) = 0.4, \\ P(zadovoljava \,|SG) &= P(Z|SG) = 0.8, \\ P(zadovoljava \,|MG) &= P(Z|MG) = 0.3. \end{aligned} \tag{1}$$

Agencija ima pravo na pogrešku i direktor ima svoj stav o tome kolika ta pogreška može biti.
Rješenje:
Kako bismo mogli nacrtati stablo odlučivanja, primjetimo da direktor prvo treba odlučiti želi li angažirati agenciju koja će provesti istraživanje kako je predložio menadžer glumca ili ne dok je krajnji cilj odlučiti treba li angažirati glumca ili ne. Ako se odluči za agenciju i istraživanje, prvo mora vidjeti kakvi su rezultati - zadovoljavajući ili ne. U suprotnom, ako se ne odluči za agenciju, onda odlučuje angažira li glumca ili ne na temelju zadanih vjerojatnosti i vlastitog mišljenja o gledanosti. Pogledajmo prvo kako izgleda pripadno stablo odlučivanja. Ono je dano na slici 3.



Slika 3: Pripadno stablo odlučivanja

Iskoristimo li (1), dobit ćemo:

$$\begin{aligned} P(ne\ zadovoljava\ |VG) &= P(NZ|VG) = 0.6, \\ P(ne\ zadovoljava\ |SG) &= P(NZ|SG) = 0.2, \\ P(ne\ zadovoljava\ |MG) &= P(NZ|MG) = 0.7. \end{aligned}$$

Kako vrijedi:

$$P(VG), P(SG), P(MG) > 0,$$

$$VG \cap SG, VG \cap MG, SG \cap MG = \emptyset,$$

$$\Omega = VG \cup SG \cup MG$$

imamo potpun sustav događaja [1].
Vrijedi:

$$P(\Omega) = P(VG) + P(SG) + P(MG) = 0.4 + 0.3 + 0.3 = 1.$$

Kako bi direktor donio adekvatnu odluku, mora se kretati stablom od krajnjih čvorova (na slici označeni s G, H, F) i prema čvoru odluke (na slici označen s A).
Prema formuli potpune vjerojatnosti [2] *za potrebe daljnjeg izračuna izračunajmo:*

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(Z|VG)P(VG) + P(Z|SG)P(SG) + P(Z|MG)P(MG) = \\ &= 0.4 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.49. \end{aligned}$$

---

[1] Konačna ili prebrojiva familija događaja $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbf{N}$ čini *potpun sustav događaja* u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako vrijedi:

1) $P(H_i) > 0$, za svaki $i \in I$,

2) $H_i \cap H_j = \emptyset$, za svaki $i \neq j$,

3) $\cup_{i \in I} H_i = \Omega$, pri čemu Ω nazivamo siguran događaj.

[2] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbf{N}$ potpun sustav događaja na njemu. Tada za proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$ vrijedi:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i) P(A|H_i).$$

Prema Bayesovoj formuli [3] *vrijedi:*

$$P(VG|Z) = \frac{P(VG)P(Z|VG)}{P(Z)} = \frac{0.4 \cdot 0.4}{0.49} = 0.33,$$

$$P(SG|Z) = \frac{P(SG)P(Z|SG)}{P(Z)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.49} = 0.49,$$

$$P(MG|Z) = \frac{P(MG)P(Z|MG)}{P(Z)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.49} = 0.18.$$

Sada u čvoru G imamo:

$$G = 0.33 \cdot 0.86 + 0.49 \cdot 0.53 + 0.18 \cdot 0 = 0.5435.$$

Dakle, u čvoru G je očekivana korisnost 0.5435*. Uočimo, koristimo izraz korisnost umjesto dobit jer se pitamo što je korisnije za film, angažirati glumca ili ne.*
U čvoru D vrijedi da ako angažiramo glumca, korisnost će biti 0.5435*, a ako ga ne angažiramo* 0.53*. Kako vrijedi*

$$0.5435 > 0.53,$$

zaključujemo da direktor treba angažirati glumca.
Za izračun korisnosti u čvoru H ponovno ćemo iskoristiti Bayesovu formulu. Vrijedi:

$$\begin{aligned} P(NZ) = {} & P(VG)P(NZ|VG) + P(SG)P(NZ|SG) + P(MG)P(NZ|MG) = \\ & = 0.4 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.51, \end{aligned}$$

$$P(VG|NZ) = \frac{P(VG)P(NZ|VG)}{P(NZ)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.51} = 0.47,$$

$$P(SG|NZ) = \frac{P(SG)P(NZ|SG)}{P(NZ)} = \frac{0.3 \cdot 0.2}{0.51} = 0.12,$$

$$P(MG|NZ) = \frac{P(MG)P(NZ|MG)}{P(NZ)} = \frac{0.3 \cdot 0.7}{0.51} = 0.41.$$

---

[3] Neka je $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbf{N}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da je $P(B) > 0$. Tada za svaki $i \in I$ vrijedi: $P(H_i|B) = \frac{P(H_i)P(B|H_i)}{P(B)}$, gdje je $P(B) = \sum_{i \in I} P(B|H_i)P(H_i)$.

Odnosno, korisnost čvora H *iznosi:*

$$H = 0.47 \cdot 0.86 + 0.12 \cdot 0.53 + 0.41 \cdot 0 = 0.4678.$$

Kako u čvoru E *vrijedi:*

$$0.4678 < 0.53,$$

zaključujemo kako nije potrebno angažirati glumca. Dakle, ako angažiramo agenciju (čvor B*) korisnost će iznositi:*

$$B = 0.49 \cdot 0.5435 + 0.51 \cdot 0.53 = 0.5366.$$

Izračunajmo još korisnost u slučaju da agencija nije angažirana.
U čvoru F *izračunata korisnost iznosi:*

$$\begin{aligned} F &= P(VG) \cdot 0.87 + P(SG) \cdot 0.54 + P(MG) \cdot 0.01 \\ &= 0.4 \cdot 0.87 + 0.3 \cdot 0.54 + 0.3 \cdot 0.01 = 0.513. \end{aligned}$$

Kako vrijedi

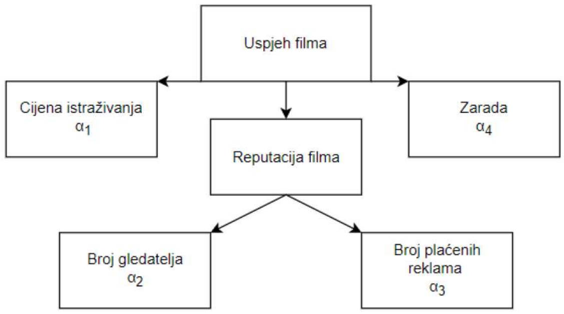
$$0.513 < 0.54,$$

zaključujemo da ako istraživanje nije uključeno, onda direktor neće angažirati glumca.
I na kraju, usporedimo vrijednosti čvorova B *i* C*. Vrijedi:*

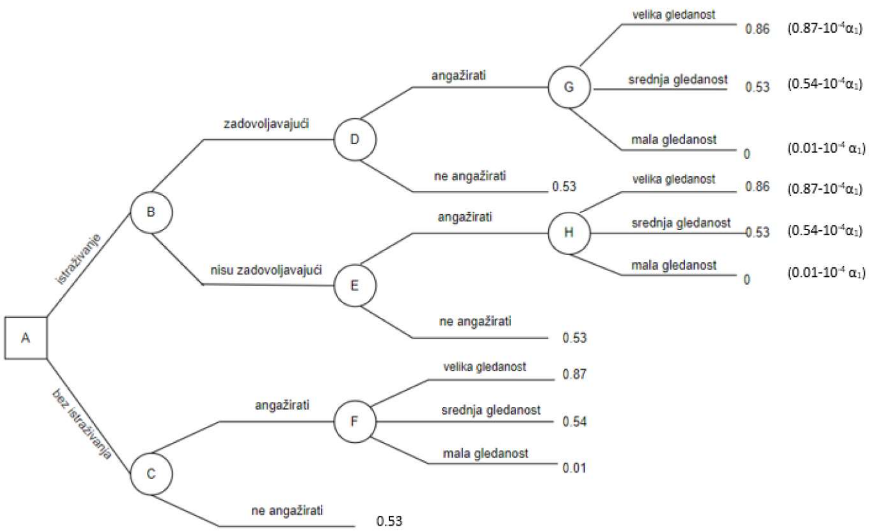
$$0.5366 < 0.54.$$

Dakle, najveća korisnost je u čvoru C*, odnosno ne bi trebalo zaposliti agenciju i provesti istraživanje.*
Sada, konačna odluka donesena na temelju izračunatih vrijednosti u čvorovima glasi: nije potrebno angažirati agenciju da provede istraživanje ni zaposliti glumca.

Na uspjeh filma utjecaj mogu imati razni kriteriji. Neki od njih su prikazani na slici 4 u hijerarhijskom poretku.
Pretpostavimo da su navedeni kriteriji dovoljni za donošenje dobre odluke i da donositelj odluke poznaje njihovu međusobnu ovisnost i utjecaj na korisnost u konačnici. Kako su navedena četiri kriterija, definirana je funkcija korisnosti $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.
Uvedimo sada funkciju korisnosti u prethodni primjer i prikažimo ju na slici 5.



Slika 4: Kriteriji koji utječu na uspješnost filma



Slika 5: Stablo odlučivanja i funkcija korisnosti

Nas zanima kolika je najveća cijena istraživanja α_1 koju je direktoru prihvatljivo izdvojiti pa pretpostavimo da je ona neovisna o preostala tri kriterija $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Kako se istraživanje plaća iz budžeta filma i kako je njegova cijena mala u odnosu na prihode od filma, pretpostavka ima smisla. Zapišimo funkciju korisnosti na sljedeći način:

$$u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = k \cdot \alpha_1 + \omega(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

gdje je k koeficijent koji zadaje donositelj odluke. Kako nas zanima samo cijena istraživanja, oblik $\omega(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ nam nije bitan. Stavimo $k = -10^{-6}$ i neka je u slučaju angažiranja glumca i visoke gledanosti $\omega(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0.87$. Funkcija korisnosti tada glasi:

$$u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = -10^{-6} \cdot \alpha_1 + 0.87$$

što je upravo vrijednost koja je nadodana na stablo odlučivanja na slici 5. Analogno su dobivene i preostale vrijednosti dodane na stablo odlučivanja. Primjetimo, one su dodane samo na dijelove stabla koji prikazuju provođenje istraživanja jer je u suprotnom $\alpha_1 = 0$. Također, pretpostavimo da smo uzeli cijenu istraživanja $\alpha_1 = 10000$€. Uvrstimo li pretpostavljenu cijenu istraživanja, vrijedi:

$$\begin{aligned}
0.87 - 10^{-6} \cdot 10^4 &= 0.86, \\
0.54 - 10^{-6} \cdot 10^4 &= 0.53, \\
0.01 - 10^{-6} \cdot 10^4 &= 0, \\
0.54 - 10^{-6} \cdot 10^4 &= 0.53.
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada očekivanu korisnost u čvorovima.

$$\begin{aligned}
G &= 0.33 \cdot (0.87 - 10^{-6}\alpha_1) + 0.49 \cdot (0.54 - 10^{-6}\alpha_1) + 0.18 \cdot (0.01 - 10^{-6}\alpha_1) \\
&= 0.2876 - 10^{-6}\alpha_1, \\
D &: 0.54 - 10^{-6}\alpha_1 > 0.2876 - 10^{-6}\alpha_1 \text{ pa odlučujemo ne angažirati agenciju,} \\
H &= 0.47 \cdot (0.87 - 10^{-6}\alpha_1) + 0.12 \cdot (0.54 - 10^{-6}\alpha_1) + 0.41 \cdot (0.01 - 10^{-6}\alpha_1) \\
&= 0.4778 - 10^{-6}\alpha_1, \\
E &: 0.4778 - 10^{-6}\alpha_1 < 0.54 - 10^{-6}\alpha_1 \text{ pa opet ne angažiramo agenciju,} \\
B &= 0.49 \cdot (0.54 - 10^{-6}\alpha_1) + 0.51 \cdot (0.54 - 10^{-6}\alpha_1) = 0.54 - 10^{-6}\alpha_1, \\
C &: 0.513 < 0.53 \text{ ne angažiramo agenciju.}
\end{aligned}$$

Za donošenje konačne odluke moramo usporediti vrijednosti u čvoru B i C.

$$0.54 - 10^{-6}\alpha_1 > 0.53 \iff 10^{-6}\alpha_1 < 0.01 \iff \alpha_1 < 10000.$$

Dakle, ako istraživanje košta manje od 10000€, onda ćemo angažirati agenciju.

3.5 Allaisov paradoks

Kao primjer da ljudi kod donošenja odluka ne koriste uvijek očekivanu korisnost, navodimo Allaisov paradoks (poznat i kao Allaisov eksperiment). Maurice Allais je sljedećim primjerom pokazao nedosljednost prilikom promatranja stvarnih izbora ljudi i predviđanja teorije očekivane korisnosti. Proveo je eksperiment u kojem je ljudima dao da biraju između dvije igre i za svaku od te dvije igre ponudio je dvije opcije. Na raspolaganju su bile informacije prikazane na slici 6.

IGRA 1				IGRA 2			
Opcija A		Opcija B		Opcija C		Opcija D	
Profit	Vjerojatnost	Profit	Vjerojatnost	Profit	Vjerojatnost	Profit	Vjerojatnost
1.000.000	100%	1.000.000	89%	0	89%	0	90%
		0	1%	1.000.000	11%	5.000.000	10%
		5.000.000	10%				

Slika 6: Pravila igara

Ako se u prvoj igri odlučimo za opciju A, sigurno ćemo osvojiti 1000000€, a odlučimo li se za opciju B, s vjerojatnoću 89% osvojit ćemo 1000000€, s vjerojatnošću 1% nećemo osvojiti ništa i s vjerojatnošću 10% osvojit ćemo 5000000€. U drugoj igri ni jedna opcija ne nudi siguran dobitak. Opcija C nudi dobitak od 1000000€ s vjerojatnošću 11% ili nećemo osvojiti ništa, dok opcija D nudi dobitak od 5000000€ s vjerojatnošću 10% ili nećemo osvojiti ništa.

Kod prve igre se pokazalo da ljudi više preferiraju opciju A od opcije B, odnosno vrijedi $A \succ B$. Kod druge igre više preferiraju opciju D od opcije C, odnosno $D \succ C$. Pogledajmo što kaže teorija.

$$\begin{aligned}
A \succ B \Leftrightarrow\ & E(A) > E(B) \\
\Leftrightarrow\ & u(1000000) > 0.89 \cdot u(1000000) + 0.01 \cdot u(0) + 0.1 \cdot u(5000000) \\
\Leftrightarrow\ & (1 - 0.89) \cdot u(1000000) > 0.1 \cdot u(5000000) + (0.9 - 0.89) \cdot u(0) \\
\Leftrightarrow\ & 0.11 \cdot u(1000000) + 0.89 \cdot u(0) > 0.1 \cdot u(5000000) + 0.9 \cdot u(0) \\
\Leftrightarrow\ & E(C) > E(D) \\
\Leftrightarrow\ & C \succ D.
\end{aligned}$$

Paradoks je pokazao da je aksiom nezavisnosti teorije očekivane korisnosti prekršen. Preferencije pojedinca se mijenjaju kako se dvije opcije mijenjaju u jednakim omjerima.
Kako nam teorija očekivane korisnosti sugerira ponašanje kojem bi donositelj odluke trebao težiti, rezultat ovog paradoksa ne predstavlja problem. Objašnjenje za ovakav rezultat leži u vrijednosti nagrade koja ovisi o iznosu i vjerojatnosti dobitka. Tako je primjerice nagrada od 1000000 € drugačije percipirana u opciji A gdje je ona siguran dobitak i u opciji C gdje će biti osvojena s vjerojatnošću od 11%.
Novija istraživanja pokazuju kako iskustvo ljude čini racionalnijima, odnosno ako mogu ponovno birati, njihov će izbor težiti opciji koju sugerira teorija očekivane korisnosti. Rezultat Allaisovog eksperimenta možemo pripisati i nerazumijevanju pojma vjerojatnosti zbog čega može doći do pogrešne interpretacije.
Govorimo li o odlučivanju pod rizikom, nevažno je koji slučajni proces generira vjerojatnosti koje se uzimaju u obzir. Objektivne vjerojatnosti mogu se generirati bacanjem simetrične kocke ili pravilnog novčića. U fizici su, na primjer, dobro poznate vjerojatnosti raspada elementarnih čestica. Medicina nam daje određenu vjerojatnost nasljeđivanja neke bolesti.

4 Odluke donesene pod rizikom

Pitanje koje se nameće je na koji način trebamo donositi odluke pod rizikom.

Primjer 4.1. *Zamislimo da igramo sljedeću igru. Bacamo simetričan novčić i ako padne pismo, dobivamo* 10€*, a ako padne glava ne dobivamo ništa. Koliko smo spremni uložiti u ovu igru?*
Imamo dvije mogućnosti:

a) ako nismo skloni riziku, nećemo igrati igru pa nećemo ništa osvojiti,

b) ako smo skloni riziku, odlučit ćemo igrati igru i osvajamo $-x$€ *s vjerojatnošću* $p = 0.5$ *ili* $(10 - x)$€ *s vjerojatnošću* $1 - p = 0.5$.

Da bismo riješili ovaj problem, koristit ćemo očekivanu vrijednost. Očekivani iznos dobiven u ovoj igri je sljedeći:

$$-x \cdot 0.5 + (10 - x) \cdot 0.5.$$

Mi u igri ne želimo biti na gubitku, to jest želimo da vrijedi:

$$-x \cdot 0.5 + (10 - x) \cdot 0.5 \geqslant 0$$

odnosno:

$$x \leq 5.$$

Dakle, trebamo platiti najviše 5€.

Ovo je bio prihvaćen način donošenja odluke sve dok Nicolas Bernoulli nije predložio sljedeću modifikaciju igre, a čiju je analizu proveo Daniell Bernoulli.

Primjer 4.2. ***(Petrogradski paradoks)*** *Kasino nudi igru na sreću u kojoj igrač baca simetričan novčić. Početni ulog iznosi* 2€ *i udvostručuje se svaki put kad padne glava. Padne li pismo, igra završava i igrač osvaja sve što je do tog trenutka zaradio. Koliko smo spremni uložiti u ovakvu igru?*
Kako je vjerojatnost da se u $n-$ *tom bacanju pojavi pismo jednaka* $\frac{1}{2^n}$*, očekivana vrijednost ovako definirane igre iznosi:*

$$EV = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot 2^2 + \cdots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = 1 + 1 + \cdots + 1 = \infty.$$

Dakle, za ulazak u igru morali bismo platiti beskonačan iznos što nismo uvijek spremni pa u tome leži paradoks iako nije izvedena nikakva logički proturječna *izjava. Ovo je primjer u kojem vidimo kako očekivanu vrijednost nije uvijek razumno koristiti, odnosno, nije uvijek dobro gledati samo materijalnu stranu. Iz prethodnog paradoksa je Bernoulli zaključio da teorija očekivane vrijednosti nije korisna. Kako bi se riješio ovaj problem, on uvodi pojam* korisnost novca *te pretpostavku da povećanje korisnosti dobitka svakom sljedećom isplatom (marginalna korisnost) pada. Njegov je prijedlog da umjesto iznosa* 2^n *u izračunu očekivane vrijednosti koristimo funkciju korisnosti definiranu s:*

$$u(x) = \ln(x + c), c \in \mathbb{R}.$$

Dakle, očekivana vrijednost sada iznosi:

$$EV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n + c)}{2^n} < \infty.$$

Ako u igru uključimo bogatstvo igrača, u oznaci ω, očekivana će korist biti razlika korisnosti bogatstva prije i nakon isplate, odnosno:

$$EV = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln(\omega + 2^i + c) - \ln(\omega)}{2^i} < +\infty.$$

Švicarski matematičar Gabriel Cramer se također bavio ovim pitanjem i razriješio je paradoks prije Bernoullija. Ni on nije u obzir uzeo bogatstvo pojedinca, ω. U pismu Bernoulliju je pretpostavio da drugi korijen isto opisuje opadanje marginalne vrijednosti novca.
Naravno, postoje i druge funkcije koje rješavaju ovaj paradoks.
Ako je W iznos novca kojim raspolaže kasino, tada je

$$N = 1 + \lfloor \log_2(W) \rfloor$$

maksimalan broj igrača kojima kasino može isplatiti dobit. Prema Čakloviću [2, str 213] može se pokazati da je u tom slučaju očekivana vrijednost:

$$\begin{aligned} EV &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot \min\{2^i, W\} \\ &= N - 1 + \frac{N}{2^N - 1}. \end{aligned}$$

Primjer 4.3. *Siromašan čovjek pronašao je magični lutrijski listić. Taj listić ima vjerojatnost osvajanja milijun eura jednaku* 50%, *a jednako toliko iznosi* *i vjerojatnost da neće osvojiti ništa. Bogat čovjek mu nudi otkup tog listića za* 499.999€. *Koja je najbolja odluka koju siromašan čovjek može donijeti? Gledamo li ovako definiranu očekivanu vrijednost, siromašan čovjek bi trebao odbiti bogataša. To nam se čini smiješnim i iracionalnim jer je razlika u životnim mogućnostima ako posjedujemo* 0€ *ili* 499999€ *velika (možemo kupiti hranu, osnovne potrebštine i slično), dok je razlika između toga posjedujemo li* 499999€ *ili* 1000000€ *relativno mala (možemo, na primjer, kupiti novi auto). Odnosno, zadržavanjem listića siromah riskira veliki gubitak (*0€ *naspram* 499999€*) u odnosu na relativno mali dobitak (*499999€ *naspram* 1000000€*).*

Ovim primjerom dolazimo do *marginalne korisnosti* koju ćemo detaljnije obraditi u sljedećem poglavlju.

4.1 Marginalna korisnost

U ekonomiji, marginalna korisnost (engl. marginal utility, skraćenica MU) dodatno je zadovoljstvo potrošača koje se dobiva jednom dodatnom jedinicom dobara ili usluga. Koristi se kako bi se odredilo koliko su artikala potrošači spremni kupiti. Korisna je u objašnjavanju načina na koji kupci donose odluke kako bi imali što veću dobit uz ograničeni budžet. Općenito, ljudi su spremni trošiti više dobara sve dok je marginalna korisnost veća od *marginalnog troška*. Na učinkovitom tržištu, cijena je marginalni trošak. Razlikujemo *pozitivnu marginalnu korisnost* koja se javlja ako posjedovanje jednog dobra više donosi dodatnu sreću, zatim *negativnu marginalnu korisnost* koja označava posjedovanje previše dobara pa svako sljedeće dobro zapravo donosi štetu i *nultu marginalnu korisnost* koja predstavlja ono što se događa kada konzumiranje veće količine artikla ne donosi dodatno zadovoljstvo.
Kao što smo već naveli, Bernoulli je smatrao da bi ljudi trebali maksimizirati očekivanu korisnost, a ne očekivanu vrijednost. Također, marginalna korisnost trebala bi biti padajuća funkcija (što više dobara imamo, efekt dodane vrijednosti se smanjuje).

Primjer 4.4. *Vratimo se na prethodni primjer i uvedimo sljedeće pretpostavke:*

$$u(0) = 0,$$
$$u(499999) = 10,$$
$$u(1000000) = 16.$$

Pod ovim pretpostavkama, siromašan čovjek bi trebao prihvatiti ponudu bogataša sve dok vrijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot u(1000000) + \frac{1}{2} \cdot u(0) < u(499999).$$

Kako je, u našem primjeru, $8 < 10$, *ponuda bi trebala biti prihvaćena.*

Definirajmo još i *ukupnu korisnost* (engl. total utility, skraćenica TU). Ukupna korisnost mjeri ukupnu količinu zadovoljstva koju potrošači dobivaju od svih dodatnih jedinica dobara ili usluga. Marginalna korisnost utječe na ukupnu, odnosno pozitivna marginalna korisnost dovodi do povećanja ukupne korisnosti, dok negativna dovodi do smanjenja.
Marginalnu korisnost možemo izračunati tako da podijelimo promjenu ukupne

korisnosti s promjenom broja dodatnih jedinica dobara (engl. quantity, skraćenica Q):

$$MU = \frac{TU}{Q}.$$

Primjer 4.5. *Marginalna korisnost može pomoći poduzećima kod donošenja odluke koji proizvod žele inovirati, nadograditi. Ako neki proizvod već ima veliku marginalnu korisnost, dodatnim poboljšanjem tog proizvoda on postaje još vrijedniji i to otvara mogućnost dizanja cijene proizvođaču. Kako je već izvorna verzija popularna i ima veliku marginalnu korisnost, veća je vjerojatnost da će kupci biti spremni više platiti za novu, bolju verziju što ide u prilog proizvođaču.*

5 Korisnost ovisna o rangu

Primarno se psiholozi 1950-ih godina nisu složili s modeliranjem stava prema riziku kroz korisnost novca. Smatrali su da se korisnost može izraziti ljestvicom koja opisuje osjećaj pojedinca prilikom primitka novca. Upravo je ova intuicija navela Davida Schmeidlera da osmisli svoj model, *korisnost ovisnu o rangu.*

Definicija 5.1. *(**Rang**) Neka je $y = \{p_1 : \alpha_1, p_2 : \alpha_2, \cdots, p_n : \alpha_n\}$ izgled i α neki drugi ishod. Rang opisuje vjerojatnost da y daje ishod koji je bolje rangiran od ishoda α [4, str. 198].*

Dakle, rang poprima vrijednosti iz intervala $[0, 1]$.
Sljedeći primjer sugerira da su u nekim aspektima rangovi možda važniji za donošenje odluka nego vjerojatnost ili događaj dobivanja posebnog ishoda.

Primjer 5.1. *Pretpostavimo da posjedujemo izgled koji nam donosi zaradu ovisnu o numeriranoj karti izvučenoj iz špila od* 100 *karata. Tablica 4 prikazuje zaradu.*

broj na karti	1-20	21-40	41-60	61-80	81-100
zarada (€)	80	60	40	20	0

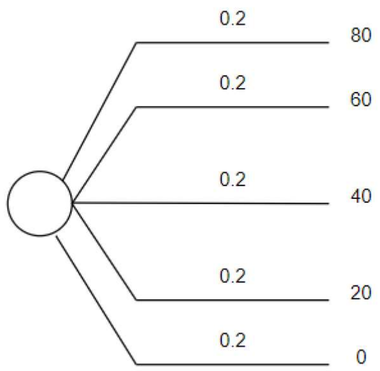
Tablica 4: Zarada ostvarena u igri

Odnosno, imamo sljedeći izgled:

$$\{0.2 : 80, 0.2 : 60, 0.2 : 40, 0.2 : 20, 0.2 : 0\}.$$

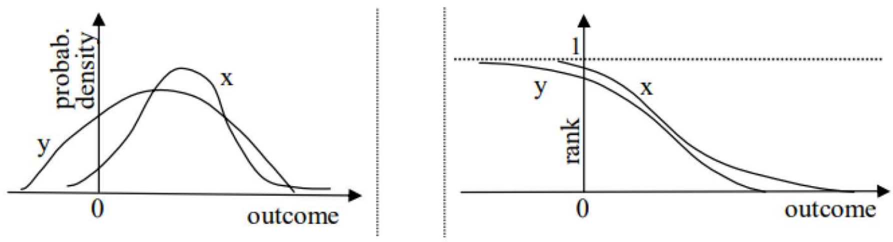
Izgled uvjetovan događajem odgovara izgledu uvjetovanom vjerojatnošću prikazanom na slici 7.
Vidimo da imamo ukupno pet ishoda rangiranih po veličini i svi imaju jednaku vjerojatnost događanja. Vjerojatnost da ishod bude veći od 20 *iznosi* $\frac{3}{5}$ *i naziva se rang. Dobiva se na način da najboljem ishodu dodijelimo rang* 0*, a rang svakog sljedećeg ishoda je jednak zbroju prethodnih vjerojatnosti. Očigledno, rang se ne odnosi na* $\frac{3}{5}$ *zasebno, već ovisi o konkretnom izgledu i vjerojatnosti izvlačenja karte manje od* 61*.*

Radi bolje ilustracije korisnosti ranga, pogledajmo primjer prikazan na slici 8. Naime, zamislimo da imamo dva izgleda, u oznakama x i y te njihove



Slika 7: Vjerojatnosna distribucija

funkcije gustoće. Na slici 8 lijevo vidimo funkciju gustoće izgleda x i y i iz nje nije jasno koji izgled preferiramo dok nam slika desno daje jasnu preferenciju izgleda x. Dakle, slika desno opisuje iste izglede kao i slika lijevo, ali u ovisnosti o rangu, odnosno vjerojatnosti donošenja strogo boljeg ishoda.



Slika 8: Korisnost ranga

Definicija 5.2. ***(Težinska funkcija)*** *Pretpostavimo da imamo fiksni izgled* $\{p_1 : \alpha_1, p_2 : \alpha_2, \ldots, p_n : \alpha_n\}$ *s utvrđenim potpunim rangom ishoda odnosno vrijedi* $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$. *Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da vrijedi:* $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$. *Za svaki indeks* i *definiramo rang od* α_i *kao:*

$$p_{i-1} + \cdots + p_1.$$

Neka je $w : [0,1] \to [0,1]$ *strogo rastuća funkcija za koju vrijedi [5, str 213]:*

$$w(0) = 0 \text{ i } w(1) = 1.$$

Tako definirana funkcija zove se težinska funkcija.

Težina odluke ishoda α_j ovisi o dvjema vjerojatnostima, vjerojatnosti p_j i rangu $r_j = \sum_{i=1}^{j-1} p_i$. *Rangirana vjerojatnost* uređeni je par $p^r = (p, r)$. *Težina odluke* razlika je u težinama dva ranga, ranga r i ranga $r + p$ koji označava sljedeći bolje rangirani ishod, odnosno vrijedi:

$$\pi(p^r) = w(p + r) - w(r).$$

Definicija 5.3. ***(Korisnost ovisna o rangu)*** *Neka je dana neprekidna rastuća funkcija korisnosti $u : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ i vjerojatnosna težinska funkcija $w : [0,1] \to [0,1]$. Neka je $\{p_1 : \alpha_1, p_2 : \alpha_2, \ldots, p_n : \alpha_n\}$ izgled s potpunim rangom $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$. Tada definiramo korisnost ovisnu o rangu (engl. rank - depended utility, skraćenica RDU) kao funkciju $RDU : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi [5, str 215]:*

$$\begin{aligned}
RDU(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \pi_j \cdot u(\alpha_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \pi(p_j^{\sum_{i=1}^{j-1} p_i}) \cdot u(\alpha_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} [w(p_j + \cdots + p_1) - w(p_{j-1} + \ldots p_1)] \cdot u(\alpha_j).
\end{aligned}$$

Zaključujemo kako je korisnost zapravo specijalan slučaj korisnosti ovisne o rangu u kojoj je $w = id$.

Literatura

[1] D. Bernoulli, Exposition of a New Teory on the Measurement of Risk, Econometrica, 22(1), 23–36, 1954.

[2] L. Čaklović, Teorija odlučivanja s naglaskom na metodu potencijala, Naklada Slap, Zagreb, 2014.

[3] D. Jankov Maširević, Teorija odlučivanja, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2022.

[4] D. Kahneman, A. Tversky, Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, The Econometric Society, 47(2), 263-291, 1979.

[5] P. P. Wakker, Prospect Theory for Risk and Ambiguity, Cambridge University Press, New York, 2008.

[6] P. P. Wakker, Separating Marginal Utility and Probabilistic Risk Aversion, Theory and Decision, 36, 1–44, 1994.

Sažetak

Cilj je ovog rada upoznati se s osnovnim pojmovima vezanim za teoriju odlučivanja u uvjetima poznate vjerojatnosti, odnosno u uvjetima rizika. Definirani su osnovni pojmovi teorije odlučivanja te je navedena podjela prema uvjetima donošenja odluka. U nastavku su definirana stabla odlučivanja i funkcija očekivane korisnosti. Također, navedena su dva paradoksa odlučivanja- Allaisov i Petrogradski. Na kraju su definirane težinska funkcija te korisnost ovisna o rangu.

Ključne riječi: modeli odlučivanja, izgled, relacija preferencije, sigurnosni ekvivalent, stabla očekivanja, funkcija korisnosti, Allaisov paradoks, Petrogradski paradoks, marginalna korisnost, korisnost ovisna o rangu.

Expected utility with known probabilities (risk)

Summary

The aim of this thesis is to get acquainted with the basic terms related to decision - making theory in conditions of known probability, that is, in conditions of risk. The basic concepts of decision - making theory are defined and the division according to decision - making conditions is indicated. Decision trees and the expected utility function are defined later on. Also, two decision - making paradoxes are mentioned - the Allais and St. Petersburg paradox. At the end, weight function and rank - dependent utility are defined.

Keywords: decision models, prospect, preference relation, certainty equivalent, decision trees, utility function, Allais paradox, St. Petersburg paradox, marginal utility, rank dependent utility.

Životopis

Rođena sam 9. svibnja 1996. godine u Varaždinu. Nakon završene Osnovne škole Antuna i Ivana Kukuljevića u Varaždinskim Toplicama, upisala sam Prvu gimnaziju Varaždin, opći smjer. Srednju školu završavam 2015. godine i upisujem studij matematike na Odjelu za matematiku, Sveučilište u Rijeci. Diplomski studij Financijske matematike i statistike na Sveučilištu Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku upisala sam 2020. godine. Trenutno živim i radim u Zagrebu. Zaposlena sam u Erste & Steiermärkische Bank kao mlađi analitičar za integrirano upravljanje rizikom.